

Površinski integrali

2008/2009

Površinski integral prve vrste

Definicija

Neka je

$$S = \{(x, y, z) | z = h(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$$

po delovima glatka površ i neka je nad S definisana ograničena realna funkcija $f(x, y, z)$. **Površinski integral funkcije f nad površi S ili površinski integral prve vrste** obeležavamo sa

$$\int \int_S f(x, y, z) dS.$$

Površinski integral prve vrste

Površinski integral prve vrste

Ako je f neprekidna nad S , a $p = \partial h / \partial x$ i $q = \partial h / \partial y$ neprekidne funkcije nad D , tada važi relacija

$$\int \int_S f(x, y, z) dS = \int \int_D f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy .$$

Površinski integral prve vrste

Ako je f neprekidna nad S , a $p = \partial h / \partial x$ i $q = \partial h / \partial y$ neprekidne funkcije nad D , tada važi relacija

$$\int \int_S f(x, y, z) dS = \int \int_D f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy .$$

Površina površi S se računa po formuli

$$\int \int_S dS .$$

Površinski integral prve vrste - zadaci

Zadatak 1. Naći površinu gornjeg dela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Površinski integral prve vrste - zadaci

Zadatak 1. Naći površinu gornjeg dela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Zadatak 2. Naći $\int \int_S \left(2x + \frac{4}{3}y + z \right) dS$ gde je S deo ravni

$x/2 + y/3 + z/4 = 1$ koji leži u prvom oktantu.

Površinski integral druge vrste

Površinski integral druge vrste

Definicija

Neka je dato vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

na površi S , gde je S glatka dvostrana površ

$$S = \{(x, y, z) | z = h(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Neka je S^+ strana površi S koja je određena jediničnom normalom \vec{n}_0 .

Površinski integral druge vrste

Definicija

Neka je dato vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

na površi S , gde je S glatka dvostrana površ

$$S = \{(x, y, z) | z = h(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Neka je S^+ strana površi S koja je određena jediničnom normalom \vec{n}_0 .

Površinski integral druge vrste vektorskog polja \vec{F} nad stranom S^+ definisan je relacijom

$$\int \int_{S^+} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_0 \cdot dS.$$

Površinski integral druge vrste

Površinski integral druge vrste

Površinski integral

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_0 \cdot dS$$

se naziva **protok (fluks)** vektorskog polja \vec{F} kroz orijentisanu površ S .

Površinski integral druge vrste - zadaci

Zadatak 1.

Ravni $x = 0$, $x = 3$ i $z = 0$ odsecaju od cilindra $z = 4 - y^2$ jednu pločicu. Naći fluks sile $\vec{A} = (z^2 - x)\vec{i} - xy\vec{j} + 3z\vec{k}$ kroz nju.

Površinski integral druge vrste - zadaci

Zadatak 2.

Data je površ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ i sila $\vec{A} = z\vec{i} - 2xz\vec{j} + 2xy\vec{k}$. Naći fluks sile \vec{A} kroz pločicu date površi. Pločica je određena svojom projekcijom

$$D : \{(\rho, \alpha) : 1 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

Površinski integral druge vrste - zadaci

Zadatak 3.

Data je površ [1] : $x^2 + y^2 = z$. Površni $z = 2$ i $z = 3$ odsecaju od površi [1] jednu pločicu. Naći fluks sile $\vec{F} = zx \vec{i} + z^3 \vec{j} - y \vec{k}$ kroz tu pločicu.

Površinski integral druge vrste - zadaci

Zadatak 4.

Naći fluks sile $\vec{A} = x \vec{i} - x \vec{j} + 2xy \vec{k}$ kroz pločicu koju od površi $z = x^2 - y^2$ odsecaju površi $x^2 + y^2 = 9$ i $x = \sqrt{3}y$ u I oktantu.

Površinski integral druge vrste - zadaci

Zadatak 5.

Naći fluks sile $\vec{F} = zy \vec{i} + z \vec{j} + z^2 \vec{k}$ kroz pločicu $ABCD$ na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Pločica je zadata tačkama $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 1, \sqrt{3})$ i $D(1, 0, \sqrt{3})$ i lukovima koji su dobijeni na sledeći način : luk AB je presek sfere i xy - ravni, luk BC presek sfere i yz - ravni, luk CD je presek sfere i ravni $z = \sqrt{3}$ i DA je presek sfere i xz - ravni.

Površinski integral druge vrste - zadaci

Zadatak 6.

Izračunati

$$\int \int_S x y z \, dx \, dy,$$

gde je S spoljna strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, koja se nalazi u prvom i petom oktantu.

Površinski integral druge vrste - zadaci za vežbu

Zadatak 1. Naći fluks sile $\vec{F} = xy \vec{i} + y^2 \vec{j} + z \vec{k}$ kroz pločicu koju od površi $z = x^2 - y^2$ odsecaju ravni $z = 0$ i $x = 1$.

Zadatak 2. Data je površ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 1, \sqrt{3})$ i $D(1, 0, \sqrt{3})$ na toj površi. Luk AB je presek te površi sa xy -ravni, luk BC je presek te površi sa yz -ravni, luk CD je presek površi i ravni $z = \sqrt{3}$ i luk DA presek te površi i xz -ravni. Naći fluks sile $\vec{F} = zy \vec{i} + z \vec{j} + z^2 \vec{k}$ kroz pločicu koju zatvorena kriva $ABCD$ određuje na toj površi.

Zadatak 3. Na površi $z = x^2 - y^2$ nalazi se jedna pločica. Ta pločica je određena sa površima $y = x^2$, $z = 0$ i nalazi se u prvom oktantu. Naći fluks sile $\vec{F} = x \vec{i} + y \vec{j} + \vec{k}$ kroz tu pločicu.