Parcijalne diferencijalne jednačine

2008/2009

PDJ

PDJ

PDJ je jednačina oblika

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n^m}\right) = 0 \tag{1}$$

gde F data funkcija od n nezavisno promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n > 1)$, zatim od nepoznate funkcije $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i konačnog broja parcijalnih izvoda funcije u.

PDJ

PDJ je jednačina oblika

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n^m}\right) = 0 \qquad (1)$$

gde F data funkcija od n nezavisno promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 1)$, zatim od nepoznate funkcije $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i konačnog broja parcijalnih izvoda funcije u.

Red PDJ (1) je red najvišeg parcijalnog izvoda koji se u njoj pojavljuje.

PDJ

PDJ

Funkcija $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je **rešenje** PDJ (1) na oblasti $Q \subset \mathbb{R}^n$ ako funkcija u, zajedno sa svojim parcijalnim izvodima, zadovoljava tu jednačinu.

PDJ

Funkcija $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **rešenje** PDJ (1) na oblasti $Q \subset \mathbb{R}^n$ ako funkcija u, zajedno sa svojim parcijalnim izvodima, zadovoljava tu jednačinu.

Opšte rešenje PDJ (1) je skup svih rešenja te jednačine.

PDJ

Homogena linearna PDJ sa jednom nepoznatom funkcijom

Oblik:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0\,.$$

PDJ

Homogena linearna PDJ sa jednom nepoznatom funkcijom

Oblik:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0\,.$$

Formira se sistem ODJ:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

Homogena linearna PDJ sa jednom nepoznatom funkcijom

Oblik:

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0\,.$$

Formira se sistem ODJ:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

Rešenje sistema se zapisuje u obliku:

$$\begin{aligned}
&c_1=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\
&c_2=f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\
&\vdots\\
&c_{n-1}=f_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,.
\end{aligned}$$

PDJ

PDJ

Rešenje homogene PDJ je funkcija:

$$z = F(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}),$$

gde je F prozivoljna funkcija.

Homogene linearne PDJ - zadaci

Homogene linearne PDJ - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

2. $\dfrac{p}{q} = \dfrac{y^2 + 2y + 6}{x^3 - x}$

Homogene linearne PDJ - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$
2. $\dfrac{p}{q} = \dfrac{y^2 + 2y + 6}{x^3 - x}$
3. $yp + (x^3y^2 + e^{\frac{x^4}{2}})q = 0$

Homogene linearne PDJ - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

2. $\dfrac{p}{q} = \dfrac{y^2 + 2y + 6}{x^3 - x}$

3. $yp + (x^3y^2 + e^{\frac{x^4}{2}})q = 0$

4. $\dfrac{3x^2 - y^2}{y^4}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{2x}{y^3}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

PDJ

Nehomogena linearna PDJ sa jednom nepoznatom funkcijom

Oblik:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = R\,.$$

Nehomogena linearna PDJ sa jednom nepoznatom funkcijom

Oblik:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = R\,.$$

Formira se sistem ODJ:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{R}$$

gde je $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

PDJ

PDJ

Rešenje sistema se zapisuje u obliku:

$$\begin{aligned}
c_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \\
c_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \\
&\vdots \\
c_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\,.
\end{aligned}$$

PDJ

Rešenje sistema se zapisuje u obliku:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \\
c_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \\
&\vdots \\
c_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\,.
\end{aligned}
$$

Rešenje nehomogene PDJ je funkcija:

$$F(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0\,,$$

gde je F prozivoljna funkcija.

Nehomogene linearne PDJ - zadaci

Nehomogene linearne PDJ - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$

2. $(x+y)p + (x-y)q = 3(x+y)(z^2+2z-3)$

Nehomogene linearne PDJ - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$
2. $(x+y)p + (x-y)q = 3(x+y)(z^2+2z-3)$
3. $(2x-y)p + (x-2y)q = \dfrac{x-2y}{z\ln z}$

Nehomogene linearne PDJ - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$
2. $(x+y)p + (x-y)q = 3(x+y)(z^2+2z-3)$
3. $(2x-y)p + (x-2y)q = \dfrac{x-2y}{z\ln z}$
4. $xp + (x+y)q = zx^3(\dfrac{z}{x} + \dfrac{z\ln x}{x^3})$

Nehomogene linearne PDJ - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$
2. $(x+y)p + (x-y)q = 3(x+y)(z^2+2z-3)$
3. $(2x-y)p + (x-2y)q = \dfrac{x-2y}{z\ln z}$
4. $xp + (x+y)q = zx^3(\dfrac{z}{x} + \dfrac{z\ln x}{x^3})$
5. $e^x p + y^2 q = ye^x$

Linearne PDJ - zadaci za vežbu

Rešiti sledeće jednačine:

1. $(x+y)p + (x-y)q = 3(x+y)(zx + \sqrt{x}e^{\frac{3x^2}{2}})$

Linearne PDJ - zadaci za vežbu

Rešiti sledeće jednačine:

1. $(x+y)p+(x-y)q=3(x+y)(zx+\sqrt{x}e^{\frac{3x^2}{2}})$
2. $\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$

Rešiti sledeće jednačine:

1. $(x+y)p+(x-y)q=3(x+y)(zx+\sqrt{x}e^{\frac{3x^2}{2}})$
2. $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$
3. $xp+yq=0$

Linearne PDJ - zadaci za vežbu

Rešiti sledeće jednačine:

1. $(x+y)p+(x-y)q=3(x+y)(zx+\sqrt{x}e^{\frac{3x^2}{2}})$
2. $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$
3. $xp+yq=0$
4. $\dfrac{dx}{xy^2}=\dfrac{dy}{x^2y}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$

Rešiti sledeće jednačine:

1. $(x+y)p + (x-y)q = 3(x+y)(zx + \sqrt{x}e^{\frac{3x^2}{2}})$
2. $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$
3. $xp + yq = 0$
4. $\dfrac{dx}{xy^2} = \dfrac{dy}{x^2y} = \dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$
5. $x\ln xp + (y + (x\ln x)^2)q = \dfrac{1}{5}(z^2 + 3z - 4)$

PDJ

Nelinearne PDJ - I tip

Oblik nelinearne PDJ:

$$f(z,p,q)=0,$$

gde je $z=z(x,y)$, $p=z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$ i $q=z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Nelinearne PDJ - I tip

Oblik nelinearne PDJ:

$$f(z, p, q) = 0,$$

gde je $z = z(x, y)$, $p = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Tražimo funkciju z tako da bude oblika

$$z = z(x + ay) \text{ ili za } \quad u = x + 2y\ ,\ z = z(u)\,.$$

Nelinearne PDJ - I tip

Oblik nelinearne PDJ:

$$f(z,p,q)=0,$$

gde je $z=z(x,y)$, $p=z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$ i $q=z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Tražimo funkciju z tako da bude oblika

$$z=z(x+ay) \text{ ili za } \quad u=x+2y\,,\; z=z(u)\,.$$

Sada je

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot 1=\frac{dz}{du}\,,$$

Nelinearne PDJ - I tip

Oblik nelinearne PDJ:

$$f(z, p, q) = 0,$$

gde je $z = z(x, y)$, $p = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Tražimo funkciju z tako da bude oblika

$$z = z(x + ay) \text{ ili za } \quad u = x + 2y\ ,\ z = z(u)\,.$$

Sada je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot 1 = \frac{dz}{du}\,,$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot a = a\frac{dz}{du}\,.$$

Nelinearne PDJ - I tip - zadaci

Nelinearne PDJ - I tip - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $p^2(1 + qz) = q^2(1 - z^2)$

Nelinearne PDJ - I tip - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $p^2(1 + qz) = q^2(1 - z^2)$
2. $4(1 + z^3) = 9z^4pq$

Nelinearne PDJ - I tip - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $p^2(1 + qz) = q^2(1 - z^2)$
2. $4(1 + z^3) = 9z^4pq$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{q^5(z+2)}}{z+1} = p^2$

PDJ

Nelinearne PDJ - II tip

Ako se data nelinearne PDJ se može napisati u obliku

$$f_1(x, p) = f_2(y, q),$$

tada iz $f_1(x, p) = f_2(y, q) = a$ sledi

Nelinearne PDJ - II tip

Ako se data nelinearne PDJ se može napisati u obliku

$$f_1(x,p) = f_2(y,q),$$

tada iz $f_1(x,p) = f_2(y,q) = a$ sledi

$$p = F_1(x,a) \quad \text{i} \quad q = F_2(y,a)\,.$$

Nelinearne PDJ - II tip

Ako se data nelinearne PDJ se može napisati u obliku

$$f_1(x, p) = f_2(y, q),$$

tada iz $f_1(x, p) = f_2(y, q) = a$ sledi

$$p = F_1(x, a) \quad \text{i} \quad q = F_2(y, a)\,.$$

Kako je $dz = pdx + qdy = F_1(x, a)dx + F_2(y, a)dy$, tada je

$$z = \int F_1(x, a)dx + \int F_2(y, a)dy + b\,.$$

Rešiti sledeće jednačine:

1. $\sqrt{p} - \frac{1}{x} - \frac{q^2}{(y^3 - y \sin y)^2} = 0$

Nelinearne PDJ - II tip - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $\sqrt{p} - \frac{1}{x} - \frac{q^2}{(y^3 - y\sin y)^2} = 0$
2. $pq(4 + y^2)(1 - x^2) = (y + 3)(x + 5)$

Nelinearne PDJ - II tip - zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

1. $\sqrt{p} - \frac{1}{x} - \frac{q^2}{(y^3 - y\sin y)^2} = 0$
2. $pq(4 + y^2)(1 - x^2) = (y + 3)(x + 5)$
3. $yp - (xq)^2 = x^2 y$