

Krivolinijski integral

2008/2009

Krivolinijski integral

Krivolinijski integral

Neka je dato vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} = (P, Q, R)$$

Krivolinijski integral

Neka je dato vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} = (P, Q, R)$$

gde su P , Q i R neprekidne funkcije na domenu D , koje predstavljaju silu koja dejstvuje u tački (x, y, z) .

Krivolinijski integral

Neka je dato vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} = (P, Q, R)$$

gde su P , Q i R neprekidne funkcije na domenu D , koje predstavljaju silu koja dejstvuje u tački (x, y, z) . Krivolinijski integral (druge vrste) po krivoj C , $C \subset D$,

$$W = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

Krivolinijski integral

Neka je dato vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} = (P, Q, R)$$

gde su P , Q i R neprekidne funkcije na domenu D , koje predstavljaju silu koja dejstvuje u tački (x, y, z) . Krivolinijski integral (druge vrste) po krivoj C , $C \subset D$,

$$W = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

je **rad** koji čini sila \vec{F} po krivoj C .

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Zadatak 1. $2x + y = 4$, I oktant.

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Zadatak 1. $2x + y = 4$, I oktant.

Zadatak 2. Deo prave od $A(2, 3)$ do $B(-1, 4)$.

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Zadatak 1. $2x + y = 4$, I oktant.

Zadatak 2. Deo prave od $A(2, 3)$ do $B(-1, 4)$.

Zadatak 3. Deo prave od $A(3, 2, 1)$ do $B(4, 0, 1)$.

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Zadatak 1. $2x + y = 4$, I oktant.

Zadatak 2. Deo prave od $A(2, 3)$ do $B(-1, 4)$.

Zadatak 3. Deo prave od $A(3, 2, 1)$ do $B(4, 0, 1)$.

Zadatak 4. Deo prave od $A(3, 2, 4)$ do $B(3, 5, 4)$.

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Zadatak 1. $2x + y = 4$, I oktant.

Zadatak 2. Deo prave od $A(2, 3)$ do $B(-1, 4)$.

Zadatak 3. Deo prave od $A(3, 2, 1)$ do $B(4, 0, 1)$.

Zadatak 4. Deo prave od $A(3, 2, 4)$ do $B(3, 5, 4)$.

Zadatak 5. $y = ax^2 + bx + c$, $-1 \leq x \leq 1$.

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Zadatak 1. $2x + y = 4$, I oktant.

Zadatak 2. Deo prave od $A(2, 3)$ do $B(-1, 4)$.

Zadatak 3. Deo prave od $A(3, 2, 1)$ do $B(4, 0, 1)$.

Zadatak 4. Deo prave od $A(3, 2, 4)$ do $B(3, 5, 4)$.

Zadatak 5. $y = ax^2 + bx + c$, $-1 \leq x \leq 1$.

Zadatak 6. $x^2 + y^2 = r^2$.

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Zadatak 1. $2x + y = 4$, I oktant.

Zadatak 2. Deo prave od $A(2, 3)$ do $B(-1, 4)$.

Zadatak 3. Deo prave od $A(3, 2, 1)$ do $B(4, 0, 1)$.

Zadatak 4. Deo prave od $A(3, 2, 4)$ do $B(3, 5, 4)$.

Zadatak 5. $y = ax^2 + bx + c$, $-1 \leq x \leq 1$.

Zadatak 6. $x^2 + y^2 = r^2$.

Zadatak 7. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Krivolinijski integral - parametrizacija krivih

Parametrizovati date prave i krive:

Zadatak 1. $2x + y = 4$, I oktant.

Zadatak 2. Deo prave od $A(2, 3)$ do $B(-1, 4)$.

Zadatak 3. Deo prave od $A(3, 2, 1)$ do $B(4, 0, 1)$.

Zadatak 4. Deo prave od $A(3, 2, 4)$ do $B(3, 5, 4)$.

Zadatak 5. $y = ax^2 + bx + c$, $-1 \leq x \leq 1$.

Zadatak 6. $x^2 + y^2 = r^2$.

Zadatak 7. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zadatak 8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Krivolinijski integral - zadaci

Zadatak 1.

Odrediti rad sile $\vec{A} = x\vec{i} + xy\vec{j}$ po krivoj C od tačke $A(1, 0)$ do tačke $B(0, 1)$ ako je C :

- deo prave,

Zadatak 1.

Odrediti rad sile $\vec{A} = x\vec{i} + xy\vec{j}$ po krivoj C od tačke $A(1, 0)$ do tačke $B(0, 1)$ ako je C :

- deo prave,
- deo parabole $y = -x^2 + 1$,

Zadatak 1.

Odrediti rad sile $\vec{A} = x\vec{i} + xy\vec{j}$ po krivoj C od tačke $A(1,0)$ do tačke $B(0,1)$ ako je C :

- deo prave,
- deo parabole $y = -x^2 + 1$,
- deo kružnice $x^2 + y^2 = 1$,

Zadatak 1.

Odrediti rad sile $\vec{A} = x\vec{i} + xy\vec{j}$ po krivoj C od tačke $A(1, 0)$ do tačke $B(0, 1)$ ako je C :

- deo prave,
- deo parabole $y = -x^2 + 1$,
- deo kružnice $x^2 + y^2 = 1$,
- izlomljena linija AOB .

Krivolinijski integral - zadaci

Zadatak 2.

Date su površi [1] : $4x^2 + 36y^2 + 9z^2 = 36$ i [2] : $x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 9$ i tačke $A(3, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ i $C(0, 0, 1)$. Odrediti rad sile $\vec{A} = x \vec{i} + y^2 \vec{j} + z \vec{k}$ po krivoj $ABCA$, ako se putanja AB nalazi u preseku površi [1] i xy -ravni, BC u preseku površi [2] i yz -ravni i CA je deo prave.

Krivolinijski integral - zadaci

Zadatak 3.

Data je površ $x^2 + y^2 = z - 4$ i tačke $A(0, 0, 4)$, $B(0, 1, 5)$ i $C(1, 0, 5)$.
Naći rad sile $\vec{F} = x^2 \vec{i} + (y + z) \vec{j} - z \vec{k}$ po putanji $ABCOA$, ako se putanja AB nalazi na površi i yz -ravni, BC na površi i ravni koja je paralelna xy -ravni, a CO i OA su delovi pravih.

Krivolinijski integral - zadaci za vežbu

Zadatak 1.

Odrediti rad sile $\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j}$ po krivoj C ako je C :

- deo prave od tačke $O(0,0)$ do $A(1,2)$,

Zadatak 1.

Odrediti rad sile $\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j}$ po krivoj C ako je C :

- deo prave od tačke $O(0,0)$ do $A(1,2)$,
- deo parabole $y = 2x^2 + 1$ od O do A ,

Zadatak 1.

Odrediti rad sile $\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j}$ po krivoj C ako je C :

- deo prave od tačke $O(0,0)$ do $A(1,2)$,
- deo parabole $y = 2x^2 + 1$ od O do A ,
- izlomljena linija OBA , $B(1,0)$,

Zadatak 1.

Odrediti rad sile $\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j}$ po krivoj C ako je C :

- deo prave od tačke $O(0,0)$ do $A(1,2)$,
- deo parabole $y = 2x^2 + 1$ od O do A ,
- izlomljena linija OBA , $B(1,0)$,
- izlomljena linija OCA , $C(0,2)$.

Krivolinijski integral - zadaci za vežbu

Zadatak 2.

Data je površ [1] : $x^2 + y^2 = 3z$ i tačke $O(0, 0, 0)$, $A(0, 3, 3)$, $B(3, 0, 3)$ i $C(2, 0, \frac{3}{4})$. Naći rad sile $\vec{A} = xy \vec{i} + z \vec{j} + (x + y + z) \vec{k}$ po putanji $OABCO$ gde se OA nalazi na površi [1] i yz -ravni, AB se nalazi na [1] i ravni paralelnoj sa xy -ravni, BC je deo prave i CO se nalazi na površi [1] i xz -ravni.

Krivolinijski integral - zadaci za vežbu

Zadatak 3.

Date su površi [1] : $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, [2] : $y = x$, [3] : $y = \sqrt{3}x$ i tačke $A(\sqrt{6}, \sqrt{6}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 3, 0)$ i $C(0, 0, 2\sqrt{3})$. Luk AB je u preseku [1] i xy -ravni, luk BC je u preseku [1] i [3] i luk CA je u preseku [1] i [2].

Upotrebljavajući krivolinijski integral naći rad sile $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ po zatvorenoj putanji $ABCA$.

Krivolinijski integral - nezavisnost od putanje integracije

Krivolinijski integral (druge vrste)

$$\int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

Krivolinijski integral (druge vrste)

$$\int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

ne zavisi od putanje integracije nad oblasti D ako važi

Krivolinijski integral (druge vrste)

$$\int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

ne zavisi od putanje integracije nad oblasti D ako važi

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

Krivolinijski integral (druge vrste)

$$\int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

ne zavisi od putanje integracije nad oblasti D ako važi

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

gde su $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$ neprekidne funkcije nad jednostruko povezanom oblašću $D \subset \mathbb{R}^3$.

Krivolinijski integral - zadaci

Zadatak 1.

Data je sila $\vec{F} = x^2yz \vec{i} + \frac{1}{3}x^3z \vec{j} + \frac{1}{3}x^3y \vec{k}$ i tačke $A(3, 1, 2)$ i $B(4, -2, -5)$.

a) Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.

Zadatak 1.

Data je sila $\vec{F} = x^2yz \vec{i} + \frac{1}{3}x^3z \vec{j} + \frac{1}{3}x^3y \vec{k}$ i tačke $A(3, 1, 2)$ i $B(4, -2, -5)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} po putanji C , gde je C deo prave koji spaja tačke A i B .

Zadatak 1.

Data je sila $\vec{F} = x^2yz \vec{i} + \frac{1}{3}x^3z \vec{j} + \frac{1}{3}x^3y \vec{k}$ i tačke $A(3, 1, 2)$ i $B(4, -2, -5)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} po putanji C , gde je C deo prave koji spaja tačke A i B .
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala određene funkcije U .

Zadatak 1.

Data je sila $\vec{F} = x^2yz \vec{i} + \frac{1}{3}x^3z \vec{j} + \frac{1}{3}x^3y \vec{k}$ i tačke $A(3, 1, 2)$ i $B(4, -2, -5)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} po putanji C , gde je C deo prave koji spaja tačke A i B .
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala određene funkcije U .
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko izlomljene linije.

Krivolinijski integral - zadaci

Zadatak 2.

Data je sila

$$\vec{F} = (x \ln x + 2xy + 2xz) \vec{i} + (x^2 + 2yz) \vec{j} + (x^2 + y^2 + e^z \sin z) \vec{k}$$

i tačke $A(1, 0, 0)$ i $B(e, 2, 1)$.

a) Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.

Zadatak 2.

Data je sila

$$\vec{F} = (x \ln x + 2xy + 2xz) \vec{i} + (x^2 + 2yz) \vec{j} + (x^2 + y^2 + e^z \sin z) \vec{k}$$

i tačke $A(1, 0, 0)$ i $B(e, 2, 1)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala određene funkcije U .

Zadatak 2.

Data je sila

$$\vec{F} = (x \ln x + 2xy + 2xz) \vec{i} + (x^2 + 2yz) \vec{j} + (x^2 + y^2 + e^z \sin z) \vec{k}$$

i tačke $A(1, 0, 0)$ i $B(e, 2, 1)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala određene funkcije U .
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko izlomljene linije.

Krivolinijski integral - zadaci

Zadatak 3.

Data je sila

$$\vec{F} = \left(x^2 \sin y + \frac{xy^2z}{2} \right) \vec{i} + \left(\frac{x^3 \cos y}{3} + \frac{x^2yz}{2} \right) \vec{j} + \frac{x^2y^2}{4} \vec{k}$$

i tačke $A(1, \frac{\pi}{2}, 3)$ i $B(2, 0, 2)$.

a) Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.

Zadatak 3.

Data je sila

$$\vec{F} = \left(x^2 \sin y + \frac{xy^2z}{2} \right) \vec{i} + \left(\frac{x^3 \cos y}{3} + \frac{x^2yz}{2} \right) \vec{j} + \frac{x^2y^2}{4} \vec{k}$$

i tačke $A(1, \frac{\pi}{2}, 3)$ i $B(2, 0, 2)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala.

Zadatak 3.

Data je sila

$$\vec{F} = \left(x^2 \sin y + \frac{xy^2z}{2} \right) \vec{i} + \left(\frac{x^3 \cos y}{3} + \frac{x^2yz}{2} \right) \vec{j} + \frac{x^2y^2}{4} \vec{k}$$

i tačke $A(1, \frac{\pi}{2}, 3)$ i $B(2, 0, 2)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko izlomljene linije.

Krivolinijski integral - zadaci za vežbu

Zadatak 1.

Izračunati preko diferencijala funkcije U i preko izlomljene linije integral

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz .$$

Krivolinijski integral - zadaci za vežbu

Zadatak 2.

Data je sila

$$\vec{F} = (yz \sin x + xy^2 + xe^z) \vec{i} + (x^2y - z \cos x) \vec{j} + \left(\frac{x^2}{2} e^z - y \cos x\right) \vec{k}$$

i tačke $A(0, 2, 1)$ i $B(\frac{\pi}{3}, 3, 0)$.

a) Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.

Zadatak 2.

Data je sila

$$\vec{F} = (yz \sin x + xy^2 + xe^z) \vec{i} + (x^2y - z \cos x) \vec{j} + \left(\frac{x^2}{2} e^z - y \cos x\right) \vec{k}$$

i tačke $A(0, 2, 1)$ i $B(\frac{\pi}{3}, 3, 0)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala.

Zadatak 2.

Data je sila

$$\vec{F} = (yz \sin x + xy^2 + xe^z) \vec{i} + (x^2y - z \cos x) \vec{j} + \left(\frac{x^2}{2} e^z - y \cos x\right) \vec{k}$$

i tačke $A(0, 2, 1)$ i $B(\frac{\pi}{3}, 3, 0)$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko izlomljene linije.

Krivolinijski integral - zadaci za vežbu

Zadatak 3.

Data je sila

$$\vec{F} = (e^{x+y^2} \sin z + 2xye^z) \vec{i} + (2ye^{x+y^2} \sin z + x^2 e^z) \vec{j} + (e^{x+y^2} \cos z + x^2 ye^z) \vec{k}$$

i tačke $A(2, -1, 0)$ i $B(1, 2, \frac{\pi}{2})$.

a) Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.

Zadatak 3.

Data je sila

$$\vec{F} = (e^{x+y^2} \sin z + 2xye^z) \vec{i} + (2ye^{x+y^2} \sin z + x^2 e^z) \vec{j} + (e^{x+y^2} \cos z + x^2 ye^z) \vec{k}$$

i tačke $A(2, -1, 0)$ i $B(1, 2, \frac{\pi}{2})$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala.

Zadatak 3.

Data je sila

$$\vec{F} = (e^{x+y^2} \sin z + 2xye^z) \vec{i} + (2ye^{x+y^2} \sin z + x^2 e^z) \vec{j} + (e^{x+y^2} \cos z + x^2 ye^z) \vec{k}$$

i tačke $A(2, -1, 0)$ i $B(1, 2, \frac{\pi}{2})$.

- Pokazati da je sila \vec{F} konzervativna.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko diferencijala.
- Izračunati rad sile \vec{F} od tačke A do tačke B preko izlomljene linije.