

# Obične diferencijalne jednačine

2008/2009

# ODJ višeg reda (četvrti dvočas)

## ODJ višeg reda (četvrti dvočas)

Jednačine kod kojih se ne pojavljuje  $x$

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

## ODJ višeg reda (četvrti dvočas)

Jednačine kod kojih se ne pojavljuje  $x$

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Smena:

$$y'(x) = p \text{ ili } y' = p \text{ gde je } p = p(y)$$

## ODJ višeg reda (četvrti dvočas)

Jednačine kod kojih se ne pojavljuje  $x$

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Smena:

$$y'(x) = p \text{ ili } y' = p \text{ gde je } p = p(y)$$

$$y''(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

# Jednačine kod kojih se ne pojavljuje $x$ - zadaci

# Jednačine kod kojih se ne pojavljuje $x$ - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

# Jednačine kod kojih se ne pojavljuje $x$ - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y(y')^3 = 0$



# Jednačine kod kojih se ne pojavljuje $x$ - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y(y')^3 = 0$

Zadatak 2.  $y'' \sin y = 2(y')^2 \cos y$

# Jednačine kod kojih se ne pojavljuje $x$ - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y(y')^3 = 0$

Zadatak 2.  $y'' \sin y = 2(y')^2 \cos y$

Zadatak 3.  $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

# Jednačine kod kojih se ne pojavljuje $x$ - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y(y')^3 = 0$

Zadatak 2.  $y'' \sin y = 2(y')^2 \cos y$

Zadatak 3.  $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

Zadatak 4.  $yy'' = (y')^2$

# Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y y'' + (y')^2 = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y y'' + (y')^2 = 0$

Zadatak 2.  $2 y y'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y y'' + (y')^2 = 0$

Zadatak 2.  $2 y y'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$

Zadatak 3.  $y y'' = y^2 y' + (y')^2$





Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - nema  $y$

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - nema  $y$

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Smena: ako je  $y^{(k)}$  najmanji izvod koji se pojavljuje u jednačini

$$y^{(k)}(x) = p(x) \text{ ili } y^{(k)} = p$$

Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - nema  $y$

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Smena: ako je  $y^{(k)}$  najmanji izvod koji se pojavljuje u jednačini

$$y^{(k)}(x) = p(x) \text{ ili } y^{(k)} = p$$

$$y^{(k+1)}(x) = p'(x), y^{(k+2)}(x) = p''(x), y^{(k+3)}(x) = p'''(x), \dots$$

# Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - zadaci

# Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

# Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' = \frac{1}{x} + 5$

# Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' = \frac{1}{x} + 5$

Zadatak 2.  $y''' = \sin(2x + 1) + x^2$



# Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' = \frac{1}{x} + 5$

Zadatak 2.  $y''' = \sin(2x + 1) + x^2$

Zadatak 3.  $2xy'y'' = (y')^2 - 1$

# Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' = \frac{1}{x} + 5$

Zadatak 2.  $y''' = \sin(2x + 1) + x^2$

Zadatak 3.  $2xy'y'' = (y')^2 - 1$

Zadatak 4.  $xy'' + y' + x = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0$

# Jednačine kod kojih je moguće sniziti red - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' = \frac{1}{x} + 5$

Zadatak 2.  $y''' = \sin(2x + 1) + x^2$

Zadatak 3.  $2xy'y'' = (y')^2 - 1$

Zadatak 4.  $xy'' + y' + x = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0$

Zadatak 5.  $y^{(n)} = e^{2x}$

# Zadaci za vežbu

# Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

# Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $x y'' + y' = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $x y'' + y' = 0$

Zadatak 2.  $x^2 y'' + x y' = 1$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $x y'' + y' = 0$

Zadatak 2.  $x^2 y'' + x y' = 1$

Zadatak 3.  $y'' - y'(1 + y') = 0$



Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $x y'' + y' = 0$

Zadatak 2.  $x^2 y'' + x y' = 1$

Zadatak 3.  $y'' - y'(1 + y') = 0$

Zadatak 4.  $y'' + y' + x = 0$

Linearne DJ višeg reda sa konstantim koefic. (peti dvočas)

# Linearne DJ višeg reda sa konstantnim koefic. (peti dvočas)

## Opšti oblik

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

# Linearne DJ višeg reda sa konstantnim koefic. (peti dvočas)

Opšti oblik

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

Jednačina (??) je homogena ako je

$$f(x) = 0.$$

# Linearne DJ višeg reda sa konstantnim koefic. (peti dvočas)

Opšti oblik

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

Jednačina (??) je homogena ako je

$$f(x) = 0.$$

Jednačina (??) je nehomogena ako je

$$f(x) \neq 0.$$

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

## Formiranje karakteristične jednačine

# Homogene DJ višeg reda sa konstantnim koeficijentima

## Formiranje karakteristične jednačine

Homogena DJ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$



# Homogene DJ višeg reda sa konstantnim koeficijentima

## Formiranje karakteristične jednačine

### Homogena DJ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$y \rightarrow 1, y' \rightarrow r, y'' \rightarrow r^2, \dots, y^{(n)} \rightarrow r^n$$

# Homogene DJ višeg reda sa konstantnim koeficijentima

## Formiranje karakteristične jednačine

Homogena DJ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$y \rightarrow 1, y' \rightarrow r, y'' \rightarrow r^2, \dots, y^{(n)} \rightarrow r^n$$

Karakteristična jednačina

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

# Homogene DJ višeg reda sa konstantnim koeficijentima

## Formiranje karakteristične jednačine

### Homogena DJ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$y \rightarrow 1, y' \rightarrow r, y'' \rightarrow r^2, \dots, y^{(n)} \rightarrow r^n$$

Karakteristična jednačina

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

čija su rešenja  $r_1, r_2, \dots, r_n$

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

# Homogene DJ višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Posmatramo homogenu jednačinu drugog reda

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

Posmatramo homogenu jednačinu drugog reda

Neka su  $r_1$  i  $r_2$  rešenja karakteristične jednačine.

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

Posmatramo homogenu jednačinu drugog reda

Neka su  $r_1$  i  $r_2$  rešenja karakteristične jednačine.

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$$

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

Posmatramo homogenu jednačinu drugog reda

Neka su  $r_1$  i  $r_2$  rešenja karakteristične jednačine.

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$



# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

Posmatramo homogenu jednačinu drugog reda

Neka su  $r_1$  i  $r_2$  rešenja karakteristične jednačine.

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 = r_2$$

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

Posmatramo homogenu jednačinu drugog reda

Neka su  $r_1$  i  $r_2$  rešenja karakteristične jednačine.

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 = r_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$$

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

Posmatramo homogenu jednačinu drugog reda

Neka su  $r_1$  i  $r_2$  rešenja karakteristične jednačine.

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 = r_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{C}, \quad \begin{array}{l} r_1 = a + bi \\ r_2 = a - bi \end{array}$$

# Homogene DJ višeg reda sa konstantim koeficijentima

Posmatramo homogenu jednačinu drugog reda

Neka su  $r_1$  i  $r_2$  rešenja karakteristične jednačine.

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 = r_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{C}, \begin{matrix} r_1 = a + bi \\ r_2 = a - bi \end{matrix} \Rightarrow y_h = e^{ax} (C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx))$$

# Homogene sa konstantim koeficijentima - zadaci

# Homogene sa konstantim koeficijentima - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - y' - 6y = 0$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y(0) = 3$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - y' - 6y = 0$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y(0) = 3$

Zadatak 2.  $y'' + 2y' + y = 0$



Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - y' - 6y = 0$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y(0) = 3$

Zadatak 2.  $y'' + 2y' + y = 0$

Zadatak 3.  $y'' + 2y' + 5y = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - y' - 6y = 0$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y(0) = 3$

Zadatak 2.  $y'' + 2y' + y = 0$

Zadatak 3.  $y'' + 2y' + 5y = 0$

Zadatak 4.  $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y''' = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - y' - 6y = 0$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y(0) = 3$

Zadatak 2.  $y'' + 2y' + y = 0$

Zadatak 3.  $y'' + 2y' + 5y = 0$

Zadatak 4.  $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y''' = 0$

Zadatak 5.  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - y' - 6y = 0$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y(0) = 3$

Zadatak 2.  $y'' + 2y' + y = 0$

Zadatak 3.  $y'' + 2y' + 5y = 0$

Zadatak 4.  $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y''' = 0$

Zadatak 5.  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Zadatak 6.  $y^{(4)} + y = 0$

# Zadaci za vežbu

# Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' - 6y = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' - 6y = 0$

Zadatak 2.  $y'' - 2y' + y = 0$



Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' - 6y = 0$

Zadatak 2.  $y'' - 2y' + y = 0$

Zadatak 3.  $y'' + 6y' + 13y = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' - 6y = 0$

Zadatak 2.  $y'' - 2y' + y = 0$

Zadatak 3.  $y'' + 6y' + 13y = 0$

Zadatak 4.  $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' - 6y = 0$

Zadatak 2.  $y'' - 2y' + y = 0$

Zadatak 3.  $y'' + 6y' + 13y = 0$

Zadatak 4.  $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$

Zadatak 5.  $y'' + 3y' = 0$

Nehomogene linearne DJ višeg reda sa konstantim koefic.  
(šesti dvočas)

# Nehomogene linearne DJ višeg reda sa konstantnim koefic. (šesti dvočas)

## Opšti oblik

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

# Nehomogene linearne DJ višeg reda sa konstantnim koefic. (šesti dvočas)

## Opšti oblik

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

## Metode rešavanja su:

- metod neodređenih koeficijenata i
- metod varijacije konsanti .

# Metod neodređenih koeficijenata

# Metod neodređenih koeficijenata

Funkcija  $f(x)$  je oblika:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$



# Metod neodređenih koeficijenata

Funkcija  $f(x)$  je oblika:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

Ako su  $r_1, r_2, \dots, r_n$  rešenja karakteristične jednačine, tada partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = e^{\alpha x} Q_n(x) x^s$$

gde je

- $Q_n$  opšti polinom  $n$ -tog stepena i
- $s$  broj tačnih jednakosti  $\alpha = r_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

# Nehomogene sa konstantim koeficijentima - zadaci

# Nehomogene sa konstantim koeficijentima - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 - 2x - 3$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 - 2x - 3$

Zadatak 2.  $y^{(4)} - 2y''' - 8y'' = -4x^2 - 6x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 - 2x - 3$

Zadatak 2.  $y^{(4)} - 2y''' - 8y'' = -4x^2 - 6x$

Zadatak 3.  $y'' + 9y = (-13x^2 + 5x + 15)e^{2x}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 - 2x - 3$

Zadatak 2.  $y^{(4)} - 2y''' - 8y'' = -4x^2 - 6x$

Zadatak 3.  $y'' + 9y = (-13x^2 + 5x + 15)e^{2x}$

Zadatak 4.  $y'' + 4y' + 3y = (2x + 5)e^{-3x} + x$

# Zadaci za vežbu



# Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' + 6y = x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' + 6y = x$

Zadatak 2.  $y'' - y = x^2 + 1$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' + 6y = x$

Zadatak 2.  $y'' - y = x^2 + 1$

Zadatak 3.  $y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' - 5y' + 6y = x$

Zadatak 2.  $y'' - y = x^2 + 1$

Zadatak 3.  $y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}$

Zadatak 4.  $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3e^x$

# Metod neodređenih koeficijenata

Funkcija  $f(x)$  je oblika:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

# Metod neodređenih koeficijenata

Funkcija  $f(x)$  je oblika:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

Ako su  $r_1, r_2, \dots, r_n$  rešenja karakteristične jednačine, tada partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = e^{\alpha x} (R_k(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x) x^s$$

gde su

- $R_k$  i  $S_k$  opšti polinomi  $k$ -tog stepena,  $k = \max\{n, m\}$  i
- $s$  broj tačnih jednakosti  $\alpha + \beta i = r_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .



# Nehomogene sa konstantim koeficijentima - zadaci

# Nehomogene sa konstantim koeficijentima - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y' + 5y = 4 \cos 2x + \sin 2x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y' + 5y = 4 \cos 2x + \sin 2x$

Zadatak 2.  $y''' - 4y'' + 4y' = 2 \sin(-x)$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y' + 5y = 4 \cos 2x + \sin 2x$

Zadatak 2.  $y''' - 4y'' + 4y' = 2 \sin(-x)$

Zadatak 3.  $y'' + y = x e^x \cos x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 2y' + 5y = 4 \cos 2x + \sin 2x$

Zadatak 2.  $y''' - 4y'' + 4y' = 2 \sin(-x)$

Zadatak 3.  $y'' + y = x e^x \cos x$

Zadatak 4.  $y''' - 4y'' + 4y' = x^2 - 2x + 1 + 3e^x + 2 \sin(-x)$

# Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:



Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + y = \sin 2x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + y = \sin 2x$

Zadatak 2.  $y'' + y = \sin x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + y = \sin 2x$

Zadatak 2.  $y'' + y = \sin x$

Zadatak 3.  $y'' + 2y' + y = x \sin x + 3x^2 \cos 2x$

# Metod varijacije konstanti (šesti dvočas)

## Metod varijacije konstanti (šesti dvočas)

Neka je data DJ trećeg reda

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

## Metod varijacije konstanti (šesti dvočas)

Neka je data DJ trećeg reda

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Neka je  $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$  rešenje homogene DJ.  
Rešenje nehomogene DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x)$$

## Metod varijacije konstanti (šesti dvočas)

Neka je data DJ trećeg reda

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), f(x) \neq 0$$

Neka je  $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$  rešenje homogene DJ.  
Rešenje nehomogene DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x)$$

$C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  i  $C_3(x)$  se dobijaju rešavanjem sistema

## Metod varijacije konstanti (šesti dvočas)

Neka je data DJ trećeg reda

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Neka je  $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$  rešenje homogene DJ.  
Rešenje nehomogene DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x)$$

$C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  i  $C_3(x)$  se dobijaju rešavanjem sistema

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0$$



## Metod varijacije konstanti (šesti dvočas)

Neka je data DJ trećeg reda

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Neka je  $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$  rešenje homogene DJ.  
Rešenje nehomogene DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x)$$

$C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  i  $C_3(x)$  se dobijaju rešavanjem sistema

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0$$

$$C_1'(x)(y_1(x))' + C_2'(x)(y_2(x))' + C_3'(x)(y_3(x))' = 0$$

## Metod varijacije konstanti (šesti dvočas)

Neka je data DJ trećeg reda

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Neka je  $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$  rešenje homogene DJ.  
Rešenje nehomogene DJ zapisujemo u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x)$$

$C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  i  $C_3(x)$  se dobijaju rešavanjem sistema

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0$$

$$C_1'(x)(y_1(x))' + C_2'(x)(y_2(x))' + C_3'(x)(y_3(x))' = 0$$

$$C_1'(x)(y_1(x))'' + C_2'(x)(y_2(x))'' + C_3'(x)(y_3(x))'' = f(x)/a_3$$

# Metod varijacije konstanti - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

Zadatak 2.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x^3}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

Zadatak 2.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x^3}$

Zadatak 3.  $y'' + y = \frac{x}{\sin x}$

# Zadaci za vežbu



Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin x}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

$$\text{Zadatak 1. } y'' + 4y = \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{Zadatak 2. } y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$