

Obične diferencijalne jednačine

2008/2009

ODJ n -tog reda (prvi dvočas)

Implicitni oblik ODJ n -tog reda je

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ODJ n -tog reda (prvi dvočas)

Implicitni oblik ODJ n -tog reda je

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Eksplicitni oblik ODJ n -tog reda je

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ODJ n -tog reda (prvi dvočas)

Implicitni oblik ODJ n -tog reda je

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Eksplicitni oblik ODJ n -tog reda je

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

x nezavisna promenljiva, $y, y', \dots, y^{(n)}$ zavise od x

Implicitni oblik ODJ prvog reda je

$$F(x, y, y') = 0$$

Implicitni oblik ODJ prvog reda je

$$F(x, y, y') = 0$$

EksPLICITNI oblik ODJ prvog reda je

$$y' = f(x, y)$$

Implicitni oblik ODJ prvog reda je

$$F(x, y, y') = 0$$

EksPLICITNI oblik ODJ prvog reda je

$$y' = f(x, y)$$

Početni problem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Jednačine u kojima se promenljive mogu razdvojiti

Jednačine u kojima se promenljive mogu razdvojiti

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Jednačine u kojima se promenljive mogu razdvojiti

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

Jednačine u kojima se promenljive mogu razdvojiti

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Jednačine u kojima se promenljive mogu razdvojiti - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = 2x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = 2x$

Zadatak 2. $y' = 2x, y(0) = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = 2x$

Zadatak 2. $y' = 2x, y(0) = 0$

Zadatak 3. $y' = 2x, y(1) = -3$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = 2x$

Zadatak 2. $y' = 2x, y(0) = 0$

Zadatak 3. $y' = 2x, y(1) = -3$

Zadatak 4. $xy + 5x = yy'$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = 2x$

Zadatak 2. $y' = 2x, y(0) = 0$

Zadatak 3. $y' = 2x, y(1) = -3$

Zadatak 4. $xy + 5x = yy'$

Zadatak 5. $e^{t-s^2} - \frac{s}{t}s' = 0, s(0) = 0$

Homogene ODJ prvog reda

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Smena:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \text{ odnosno } u = \frac{y}{x}$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Smena:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \text{ odnosno } u = \frac{y}{x}$$

$$y = u \cdot x \Rightarrow y' = u'x + ux'$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Smena:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \text{ odnosno } u = \frac{y}{x}$$

$$y = u \cdot x \Rightarrow y' = u'x + ux'$$

$$y = u'x + u$$

Homogene ODJ prvog reda - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = y'$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = y'$

Zadatak 2. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = y'$

Zadatak 2. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

Zadatak 3. $x' = \frac{\ln \frac{x}{y} + 1}{\frac{y}{x}}, x(1) = e$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = y'$

Zadatak 2. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

Zadatak 3. $x' = \frac{\ln \frac{x}{y} + 1}{\frac{y}{x}}, x(1) = e$

Zadatak 4. $(3y^2 + 3xy + x^2) dx = (x^2 + 2xy) dy$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = y'$

Zadatak 2. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

Zadatak 3. $x' = \frac{\ln \frac{x}{y} + 1}{\frac{y}{x}}$, $x(1) = e$

Zadatak 4. $(3y^2 + 3xy + x^2) dx = (x^2 + 2xy) dy$

Zadatak 5. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

Zadatak 2. $y^2 + x^2y' = xyy'$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

Zadatak 2. $y^2 + x^2y' = xyy'$

Zadatak 3. $xy' + y = y^2$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

Zadatak 2. $y^2 + x^2y' = xyy'$

Zadatak 3. $xy' + y = y^2$

Zadatak 4. $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

Zadatak 2. $y^2 + x^2y' = xyy'$

Zadatak 3. $xy' + y = y^2$

Zadatak 4. $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Zadatak 5. Naći krivu koja prolazi kroz tačku $(2, 3)$ i čija svaka tačka polovi odsečak odgovarajuće tangente koji leži između koordinatnih osa.

Jednačine koje se svode na homogene (drugi dvočas)

Jednačine koje se svode na homogene (drugi dvočas)

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Jednačine koje se svode na homogene (drugi dvočas)

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Prvi slučaj

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Jednačine koje se svode na homogene (drugi dvočas)

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Prvi slučaj

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Navedenom smenom dobijamo ODJ koja razdvaja promenljive

$$u = a_1 x + b_1 y, \neq 0.$$

Jednačine koje se svode na homogene (prvi slučaj) - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = \frac{x + y}{x + y - 6}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = \frac{x + y}{x + y - 6}$

Zadatak 2. $y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y - 4}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = \frac{x + y}{x + y - 6}$

Zadatak 2. $y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y - 4}$

Zadatak 3. $y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y + 8}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = \frac{x + y}{x + y - 6}$

Zadatak 2. $y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y - 4}$

Zadatak 3. $y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y + 8}$

Zadatak 4. $(x + y + 1)dx = (2x + 2y - 1)dy$

Jednačine koje se svode na homogene

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Jednačine koje se svode na homogene

$$y' = f \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right)$$

Drugi slučaj

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Jednačine koje se svode na homogene

$$y' = f \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right)$$

Drugi slučaj

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Smena:

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0$$

Jednačine koje se svode na homogene

Smena:

(x_0, y_0) je rešenje sistema

Smena:

(x_0, y_0) je rešenje sistema

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$$

Smena:

(x_0, y_0) je rešenje sistema

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$$

Nakon smene dobija se homogena ODJ oblika

$$Y' = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$$

Jednačine koje se svode na homogene (drugi slučaj) - zadaci

Jednačine koje se svode na homogene (drugi slučaj) - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Jednačine koje se svode na homogene (drugi slučaj) - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = \frac{x - y}{x + 2y - 6}$

Jednačine koje se svode na homogene (drugi slučaj) - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = \frac{x - y}{x + 2y - 6}$

Zadatak 2. $y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y - 4}, y(4) = 1$

Jednačine koje se svode na homogene (drugi slučaj) - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = \frac{x - y}{x + 2y - 6}$

Zadatak 2. $y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y - 4}, y(4) = 1$

Zadatak 3. $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$

Jednačine koje se svode na homogene (drugi slučaj) - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' = \frac{x - y}{x + 2y - 6}$

Zadatak 2. $y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y - 4}, y(4) = 1$

Zadatak 3. $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$

Zadatak 4. $(2x - y + 1)dx = (x - 2y + 1)dy$

Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$

Zadatak 2. $(x + y)dy - (x - y)dx = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$

Zadatak 2. $(x + y)dy - (x - y)dx = 0$

Zadatak 3. $y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$

Zadatak 2. $(x + y)dy - (x - y)dx = 0$

Zadatak 3. $y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}$

Zadatak 4. $y' = -\frac{x + y - 2}{x - y + 4}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$

Zadatak 2. $(x + y)dy - (x - y)dx = 0$

Zadatak 3. $y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}$

Zadatak 4. $y' = -\frac{x + y - 2}{x - y + 4}$

Zadatak 5. Naći sve krive kod kojih se odsečak tangente od tačke dodira do apcisne ose polovi tačkom preseka sa ordinatnom osom.

Linearna DJ prvog reda (treći dio)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Linearna DJ prvog reda (treći dvočas)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Smena

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Linearna DJ prvog reda (treći dvočas)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Smena

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Linearna DJ prvog reda (treći dvočas)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Smena

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Jednačina glasi

$$u' v + u v' + u v f(x) = g(x)$$

Linearna DJ prvog reda (treći dvočas)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Smena

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Jednačina glasi

$$u' v + u v' + u v f(x) = g(x)$$

$$u' v + u (\quad) = g(x)$$

Linearna DJ prvog reda (treći dvočas)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Smena

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Jednačina glasi

$$u' v + u v' + u v f(x) = g(x)$$

$$u' v + u \underbrace{(v' + v f(x))}_0 = g(x)$$

Linearna DJ prvog reda - zadaci

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$

Zadatak 2. $y dx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$

Zadatak 2. $y dx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0$

Zadatak 3. $4x + 2x'y = \cos y$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$

Zadatak 2. $y dx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0$

Zadatak 3. $4x + 2x'y = \cos y$

Zadatak 4. $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$

Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + 2y = 4x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + 2y = 4x$

Zadatak 2. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + 2y = 4x$

Zadatak 2. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

Zadatak 3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + 2y = 4x$

Zadatak 2. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

Zadatak 3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$

Zadatak 4. $ydx = (y^3 - x)dy$

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$\alpha \neq 0$ (za $\alpha = 0$ linearna DJ)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$\alpha \neq 0$ (za $\alpha = 0$ linearna DJ)

$\alpha \neq 1$ (za $\alpha = 1$ razdvaja promenljive)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$\alpha \neq 0$ (za $\alpha = 0$ linearna DJ)
 $\alpha \neq 1$ (za $\alpha = 1$ razdvaja promenljive)

Smenom

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \text{ ili jednostavnije } z = y^{1-\alpha}$$

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$\alpha \neq 0$ (za $\alpha = 0$ linearna DJ)
 $\alpha \neq 1$ (za $\alpha = 1$ razdvaja promenljive)

Smenom

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \text{ ili jednostavnije } z = y^{1-\alpha}$$

svodi se na linearnu DJ prvog reda.

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$\alpha \neq 0$ (za $\alpha = 0$ linearna DJ)
 $\alpha \neq 1$ (za $\alpha = 1$ razdvaja promenljive)

Smenom

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \text{ ili jednostavnije } z = y^{1-\alpha}$$

svodi se na linearnu DJ prvog reda.

Podeliti Bernulijevu jednačinu sa y^α

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$\alpha \neq 0$ (za $\alpha = 0$ linearna DJ)
 $\alpha \neq 1$ (za $\alpha = 1$ razdvaja promenljive)

Smenom

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \text{ ili jednostavnije } z = y^{1-\alpha}$$

svodi se na linearnu DJ prvog reda.

Podeliti Bernulijevu jednačinu sa y^α

$$y^{-\alpha} y' + f(x) \cdot y^{1-\alpha} = g(x)$$

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$\alpha \neq 0$ (za $\alpha = 0$ linearna DJ)
 $\alpha \neq 1$ (za $\alpha = 1$ razdvaja promenljive)

Smenom

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \text{ ili jednostavnije } z = y^{1-\alpha}$$

svodi se na linearnu DJ prvog reda.

Podeliti Bernulijevu jednačinu sa y^α

$$y^{-\alpha} y' + f(x) \cdot y^{1-\alpha} = g(x)$$
$$z' = (1 - \alpha) y^{-\alpha} y'$$

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

$\alpha \neq 0$ (za $\alpha = 0$ linearna DJ)
 $\alpha \neq 1$ (za $\alpha = 1$ razdvaja promenljive)

Smenom

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \text{ ili jednostavnije } z = y^{1-\alpha}$$

svodi se na linearnu DJ prvog reda.

Podeliti Bernulijevu jednačinu sa y^α

$$y^{-\alpha} y' + f(x) \cdot y^{1-\alpha} = g(x)$$
$$z' = (1 - \alpha) y^{-\alpha} y' \Rightarrow \frac{z'}{1 - \alpha} = y^{-\alpha} y'$$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

Zadatak 2. $xy' + y = y^2 \ln x$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

Zadatak 2. $xy' + y = y^2 \ln x$

Zadatak 3. $xdy = (x^3y^4 - y)dx$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

Zadatak 2. $xy' + y = y^2 \ln x$

Zadatak 3. $xdy = (x^3y^4 - y)dx$

Zadatak 4. $3y' \cos x + y \sin x - \frac{1}{y^2} = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

Zadatak 2. $xy' + y = y^2 \ln x$

Zadatak 3. $xdy = (x^3y^4 - y)dx$

Zadatak 4. $3y' \cos x + y \sin x - \frac{1}{y^2} = 0$

Zadatak 5. $xy' + y = y^2 \ln x$

Zadaci za vežbu

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' - 2xy = 2x^3y^3$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' - 2xy = 2x^3y^3$

Zadatak 2. $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' - 2xy = 2x^3y^3$

Zadatak 2. $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$

Zadatak 3. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$

Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:

Zadatak 1. $y' - 2xy = 2x^3y^3$

Zadatak 2. $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$

Zadatak 3. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$

Zadatak 4. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$