Teorema o divergenciji

2008/2009

Teorema o divergenciji

Teorema o divergenciji

Neka je V **zatvorena** oblast u $\mathbb{R}^3$ ograničena sa po delovima glatkom površi S, koja sebe ne preseca, $\vec{n}$ je polje spoljnih jediničnih normala na S, a $\vec{F}$ je vektorsko polje sa neprekidnim parcijalnim izvodima. Tada je

$$\int\int_V\int div\vec{F}\,dV = \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS\,.$$

Teorema o divergenciji - analitički oblik

Teorema o divergenciji - analitički oblik

Neka su P, Q, R, P_x, Q_y i R_z neprekidne funkcije nad V i neka je $\partial V = S$. Tada je

$$\int\underset{V}{\int}\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \int\underset{S}{\int} Pdydz + Qdxdz + Rdxdz,$$

pri čemu se površinski integral računa po spoljnoj strani površi.

Teorema o divergenciji - analitički oblik

Neka su P, Q, R, P_x, Q_y i R_z neprekidne funkcije nad V i neka je $\partial V = S$. Tada je

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdz,$$

pri čemu se površinski integral računa po spoljnoj strani površi.

Prethodni izraz se naziva formula Gausa i Ostrogradskog.

Teorema o divergenciji - zadaci

Zadatak 1.

Odrediti fluks sile $\vec{A} = 2xz\,\vec{i} + 2yx\,\vec{j} + 2yx\,\vec{k}$ kroz rub zatvorene oblasti koju obrazuju površi $z^2 = x^2 + y^2,\; z - 2 = -x^2 - y^2$ i $z + x^2 + y^2 = 6$ i kojoj pripada tačka $A(0, 0, 4)$.

Zadatak 2.

Data je sila $\vec{F} = x^3\,\vec{i} + (y+1)\,\vec{j} + (x^2+z+2y)\,\vec{k}$. Površi $9x^2+4y^2=36,\ z=x$ u prvom oktantu ograničavaju zatvorenu trodimenzionalnu oblast V. Naći fluks sile $\vec{F}$ kroz rub od V.

Teorema o divergenciji - zadaci

Zadatak 3.

Naći fluks sile $\vec{A} = (x^2 + 3z)\,\vec{i} + (y^2 + 2xz)\,\vec{j} + (z^2 + xy)\,\vec{k}$ kroz zatvorenu površ $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 = 1$.

Zadatak 4.

Površi $x + 2y + 3z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ i $z = 1$ ograničavaju jednu trodimenzionalnu oblast V. Naći fluks sile $\vec{F} = x^2 y\ \vec{i} + xz\ \vec{j} + z^2\ \vec{k}$ kroz kroz rub od V.

Teorema o divergenciji - zadaci

Zadatak 5.

Tri površi $x^2 + y^2 + z = 2$, $z = 0$ i $z = 1$ ograničavaju trodimenzionalnu oblast V. Naći fluks sile $\vec{A} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ kroz rub od V.

Teorema o divergenciji - zadaci za vežbu

Zadatak 1. Date tri površi $z = y,\ x^2 + y^2 = 1$ i $z = 0$ ograničavaju jednu trodimenzionalnu oblast. Naći fluks sile $\vec{F} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ kroz rub od V.

Zadatak 2. Površi u prvom oktantu
$z = y,\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 2$ ograničavaju zatvorenu trodimenzionalnu oblast V. Naći fluks sile $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ kroz rub od V.

Zadatak 3. Površi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1,\ z \geq 0$ ograničavaju zatvorenu oblast V. Naći fluks sile $\vec{A} = x\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ kroz rub od V.