УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПОЉОПРИВРЕДНИ ФАКУЛТЕТ

# MATEMATIKA 1

## za studente tehničkih smerova

dr Snežana Matić Kekić

MATEMATIKA 1

1

**dr Snežana Matić-Kekić**

# MATEMATIKA 1

*smerovi: "Poljoprivredna tehnika",*
*"Uređenje, zaštita i korišćenje voda" i*
*"Agroindustrijsko inženjerstvo"*

EDICIJA OSNOVNI UDŽBENIK

**Osnivač i izdavač edicije**

*Poljoprivredni fakultet, Novi Sad,*
*Trg Dositeja Obradovića 8, 21000, Novi Sad*

**Godina osnivanja**
**1954.**

**Recenzenti:**
**dr Ljiljani Gajić,** *redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet*
**dr Nebojša Dedović,** *docent, Poljoprivredni fakultet, UNS*

**Glavni i odgovorni urednik edicije**
**dr Nedeljko Tica, redovni profesor**
*Dekan Poljoprivrednog fakulteta*

**Članovi komisije za izdavačku delatnost:**
**dr Ljiljana Nešić,** *vanredni profesor,*
**dr Branislav Vlahović,** *redovni profesor,*
**dr Nada Plavša,** *vanredni profesor,*
**dr Milica Rajić,** *redovni profesor.*

*Udžbenik posvećujem braći Radomiru i Nenadu Matić († 13.8.1981-6.7.2003.)*

**Predgovor** Udžbenikom "**MATEMATIKA 1** za studente tehničkih smerova" obrađene su u okviru šest glava sledeće oblasti matematičke analize: diferencijalni račun (2. Glava), osnovni elemementi integralnog računa (6. Glava) i realne funkcije jedne realne promenljive. U okviru funkcija dodatno su ilustrovane elementarne funkcije (3. Glava), stepene (4. Glava) i ekonomske funkcije (5. Glava). U poslednjoj 7. Glavi su dati postupci rešavanja i prepoznavanja nekih običnih diferencijalnih jednačina (skr. ODJ) 1. i 2. reda. To su sledeće ODJ 1. reda: linearna, bernulijeva, homogena, totalni diferencijal i razdvojene promenljive, kao i homogena i nehomogena ODJ 2. reda sa konstantnim koeficijentima. Prva glava je uvodna i sadrži osnove potrebne za definisanje i razumevanje pojmova u narednim glavama.

Mnoge oblasti matematike nisu obrađene, a nažalost među njima je i geometrija koju bi trebalo da savlada svaki kvalitetan inženjer poljoprivredne tehnike. Stoga bi udžbenici *Kompjuterska geometrija i grafika* [1] i *Kombinatorna geometrija* [2] trebalo da budu dodatna literatura.

Novi teorijski pojmovi, tvrđenja i metode su ilustrovane brojnim primerima. Detaljno rešenih zadataka ima oko 70. U okviru svake glave data su poglavlja pod nazivom "Zadaci" sa samostalno uvežbavanje predhodno iznetog gradiva. Nadam se da će detaljno rešeni primeri i zadaci za samostalno rešavanje olakšati studentima polaganje. Bogata zbirka zadataka [12] će dodatno pomoći studentima da uvežbaju složenije zadatke.

Ovaj udžbenik pokriva u potpunosti predviđeni sadržaj predmeta *Matematika 1* na sledeća tri smera prve godine Poljoprivrednog fakulteta: "Agroindustrijsko inženjerstvo", "Uređenje zaštita i korišćenje voda" i "Poljoprivredna tehnika".

Autor se zahvaljuje recenzentima redovnom profesoru dr Ljiljani Gajić i docentu dr Nebojši Dedoviću, na pažljivom čitanju udžbenika i nizu korisnih primedbi.

Nadam se da će ovaj udžbenik studentima olakšati uspešnije i brže sticanje potrebnih znanja iz osnova matematičke analize.

red. prof. dr Snežana Matić-Kekić

# Sadržaj

# Glava 1.

# 1 Uvodni pojmovi i motivacioni primeri

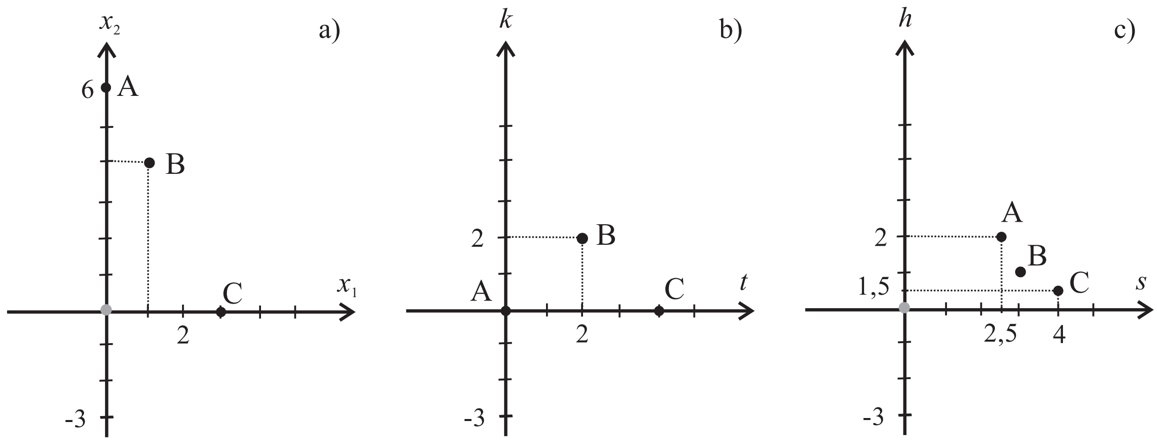
## 1.1 Primeri iz prakse i matematičke oznake

Motivaciju studentima da savladaju gradivo ovog udžbenika bi sledeći primeri iz prakse trebalo da pruže. Sa usvojenim gradivom, njihovo rešavanje je lako.

### 1.1.1 Motivacioni primeri iz prakse

U zagradama u okviru svakog primera je navedena oblast koju treba savladati i poglavlje ovog udžbenika u kome je potrebno gradivo izloženo.

1. Odredite koja elementarna funkcija najbolje aproksimira tri para izmerenih podataka koji su predstavljeni tačkama A, B i C u tri različite situacije na Sl. 1.




Slika 1.

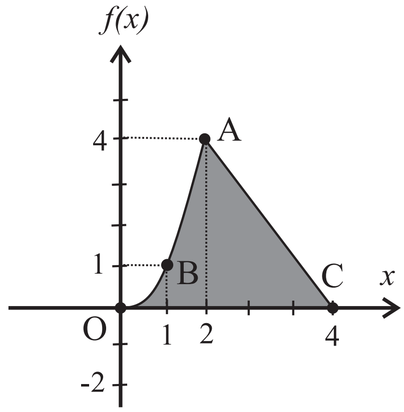
Dodatno nam je poznato da zavisna promenljiva $k$ u tački $t = 2$ ima maksimalnu vrednost i da je konkavna na intervalu (0,2), kao da kada $s \to +\infty$, $h \to 0$[1] i da kad $s \to 2$ funkcija $h \to +\infty$ pri čemu je $h$ na (2,+$\infty$) konveksna i opada.(elementarne funkcije - 3. i 4. Glava)

Rešenja.
a) Linearna funkcija $x_2(x_1) = -2x_1 + 6$ čiji je grafik prava kroz tačke A(0,6), B(1,4) i C(3,0).
b) Kvadratna funkcija $k(x) = x \cdot (x-4) = x^2 - 4x$ čiji je grafik konkavna parabola kroz tačke A(0,0), B(2,2) i C(4,0).

[1]oznaka $s \to +\infty$ znači da $s$ teži ka $+\infty$ odn. neograničeno raste, dok $h \to 0$ znači da se $h$ neograničeno približava nuli.

c) Translirana stepena funkcija $h(s) = \dfrac{1}{s-2}$ čiji je grafik hiperbola kroz tačke A(2,5, 2), B(3,1) i C(4, 1,5).

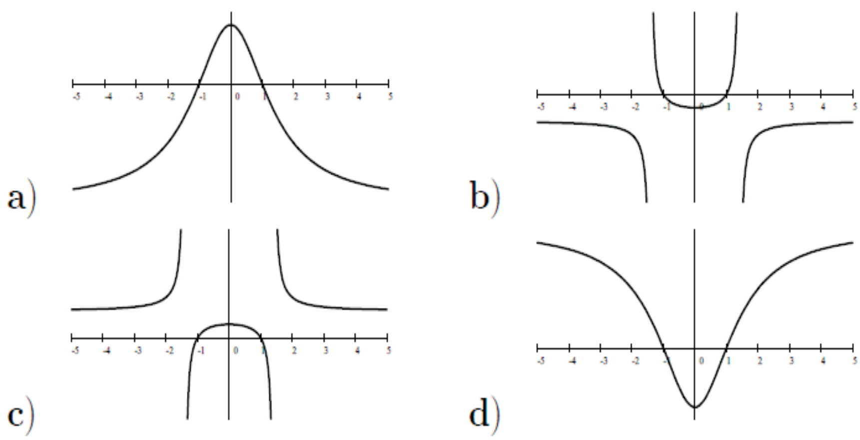
2. Njiva je oivičina potokom - luk kroz tačke O, B i A i sa dva puta (Sl. 2.). Jedan put je na pravoj kroz tačke A i C, a drugi je u pravcu $x$-ose. Odredite površinu njive koja je na Sl. 2 osenčena površina tako što aproksimirate skicirani deo linije potoka temenom parabolom čiji grafik prolazi kroz tačke A i B, a put pravom kroz tačke A i C i potom integralite na (0,4). Razmera skice je 1:300 $m$.




Slika 2.

(elementarne funkcije 3. Glava i integralni račun 6. Glava)

Rešenje. Površina njive je 60 hektara. Detalje rešenja videti u poglavlju 6.6.1.




Slika 3.

3. Pridružite odgovarajući grafik na slici 3 jednoj od sledećih funkcija:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+2},\ g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2},\ h(x) = \frac{x^2-1}{x^2-2} \text{ i } l(x) = \frac{1-x^2}{x^2-2}.$$

(funkcije - Glava 2.)

Rešenje. Dovoljno je proveriti vrednost funkcija u tački $x = 0$ i zaključujemo da graficima a), b), c) i d) redom odgovaraju grafici funkcija $f(x)$, $l(x)$, $h(x)$ i $g(x)$. Da je zadatak drugačije formulisan, na primer kao pitanje da li neki od grafika odgovora nekoj od navedenih funkcija, i ako odgovara koja funkcija je u pitanju bilo bi potrebno mnogo veće znanje i vreme da se dođe do odgovora.

4. Data je funkcija prosečnih troškova za neki proizvod $\overline{C} = 20 + \dfrac{100000}{x}$, i funkcija tražnje tog proizvoda $x = 80000 - 1000p$, gde je $x$ količina robe u komadima, a $p$ cena u dinarima. Odrediti:
a) cenu $p$ pri kojoj će se ostvariti maksimalna dobit i odrediti je;
b) ukupan prihod u uslovima maksimalne dobiti;
c) interval rentabilnosti (proizvodnju za koju je dobit pozitivna).
(ekonomske funkcije - 5. Glava )

Rešenje. Rešenje zadatka 5.7. poglavlja 5.1.1.

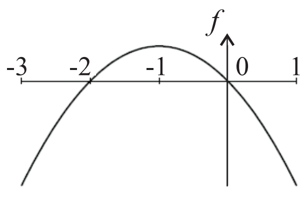
5. Poznato je da tražnja $x(d, p_A, p_K)$ mineralnog đubriva AN sa 33,5% azota zavisi od nacionalnog dohotka $d$, cene $p_A$ mineralnog đubriva AN, ali i od cene $p_K$ mineralnog đubriva KAN (27% azota) na sledeći način:

$$x(d, p_A, p_K) = 0,4d + 170000 - 105p_A^2 + 920p_K$$

a) Odrediti funkciju uzajamne elastičnosti tražnje mineralnog đubriva AN u zavisnosti od cene mineralnog đubriva KAN.
b) Koliko iznosi elastičnost tražnje mineralnog đubriva AN, ako mineralno đubrivo AN košta 35 dinara po kg, mineralno đubrivo KAN 30 dinara po kg, a nacionalni dohodak je 25000 dinara?
(parcijalna elastičnost poslovnih funkcija - poglavlje 5.2.2)

Rešenje. Prvi rešen zadatak poglavlja 5.2.3.

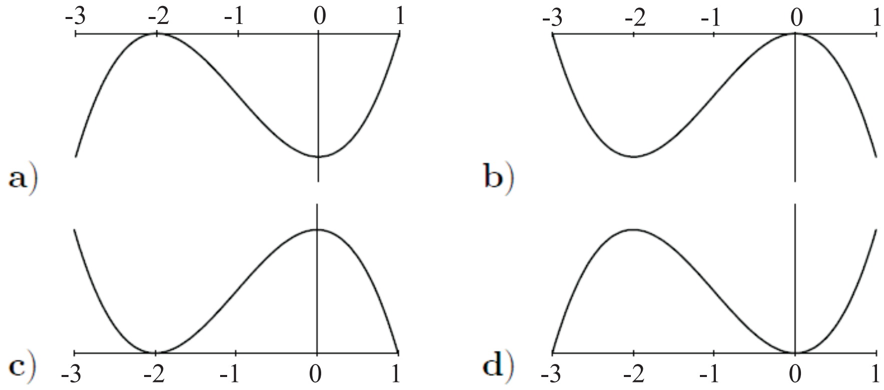
6. (funkcije i integralni račun - 6. Glava )
Ako kvadratna funkcija $f(t)$ ima grafik dat na sl. 4:




Slika 4.

odredite koji od četiri grafika a), b), c) ili d) na sl. 5. odgovara grafiku njene primitivne funkcije $F(x)$ zadate integralom

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$




Slika 5.

Rešenje. Prvi rešen zadatak poglavlja 6.7.

### 1.1.2 Osnovne matematičke oznake

U narednim poglavljima ove glave će biti definisane oznake koje su ovde samo izlistane bez detalja:

| logika | skupovi | brojevi |
|---|---|---|
| $\top$ tačno | $\emptyset = \{\}$ prazan skup | $<$ je manje |
| $\perp$ netačno | $\mathcal{N}$ prirodni brojevi | $\leq$ $<$ ili jednako |
| $\vee$ konjukcija | $\mathcal{N}_0$ 0 i prirodni br. | $>$ je veće |
| $\wedge$ disjunkcija | $\mathcal{Q}$ racionalni brojevi | $\geq$ $>$ ili jednako |
| $\veebar$ ekskluzivna dis. | $\mathcal{I}$ iracionalni brojevi | $\mid$ deli |
| $\Rightarrow$ implikacija | $\mathcal{R}$ realni brojevi | $\mid\ \mid$ apsolutna vred. |
| $\Leftrightarrow$ ekvivalencija | $\mathcal{Z}$ celi brojevi | $=$ je jednako |
| $\neg$ negacija | $\in$ se sadrži u | $\neq$ je različito |
| $\forall$ svaki | $\ni$ sadrži element | $\approx$ je približno |
| $\exists$ postoji | $\subset$ je podskup | $\cong$ je kongruentno |
| $\vee$ i | $\supset$ je nadskup | $\sim$ je slično |
| $\wedge$ ili | $\cap$ presek | $\sum$ suma |
| $\veebar$ ili ili | $\cup$ unija | $\prod$ proizvod |
| $\Rightarrow$ sledi | $\setminus$ razlika | $\sqrt{x}$ koren iz $x$ |
| $\Leftrightarrow$ ekvivalentno | $\times$ proizvod | $\infty$ beskonačno |
| | $\mid\ \mid$ kardinalnost | $\pi$ broj pi |
| | $\triangle$ simetrična razlika | $(a, b)$ otvoren interval |
| | $C_U(A)$ komplement skupa $A$ | $[a, b]$ zatvoren interval |
| | $P(A)$ partitivni skup skupa $A$ | $a!$ $a$ faktorijel |
| | $\notin$ ne sadrži se u | $\binom{a}{b}$ $a$ nad $b$ |
| | $\not\ni$ ne sadrži element | $\frac{a}{b}$ $a$ podeljeno sa $b$ |
| | $\mathcal{C}$ kompleksni brojevi | $i$ imaginarna jedinica |
| | $\mathcal{Z}^+, \mathcal{Q}^+, \mathcal{R}^+$ pozitivni $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ | |

## 1.2 O matematičkoj logici

*Matematička logika* je oblast matematike koja analizira *predikatski račun* i *iskazni račun.*

**Šta proučava iskazni račun?**

- *Objekti* proučavanja iskaznog računa matematičke logike su rečenice kojima *možemo utvrditi tačnost ili netačnost.* Takve rečenice nazivamo *iskazima.* Pri tom nam nije bitno na kom su jeziku napisane ili izgovorene niti koja je njihova sadržina. Stoga ih skraćeno zapisujemo malim slovima latinice: $p, q, r, s$...
- Nije važno na koji način se *utvrđuje* (tu presudnu ulogu obično ima naučna metoda, eksperiment, iskustvo, predanje, verovanje... ) tačnost ili netačnost *prostih*, osnovnih rečenica (iskaza).
- Iskazni račun matematičke logike se bavi utvrđivanjem kako tačnost (netačnost) *složenih* (sastavnih, rastavnih, uslovnih... ) rečenica zavisi od tačnosti (netačnosti) osnovnih objekata koji učestvuju u njoj.
- U matematičkoj logici se definišu *pravila logičkog zaključivanja*, kao složene rečenice koje su uvek tačne, *ne zavisno* od tačnosti njenih osnovnih objekata.

**Da li uvek možemo utvrditi tačnost ili netačnost neke rečenice?**
Ne možemo. Recimo, šta biste mogli da kažete o tačnosti sledećih rečenica:

*Moja mama je najlepša i najpametnija.*
*Da li ćete položiti ispit iz matematike u junskom roku?*
*Svemir je ograničen.*

Jedino prvu rečenicu bismo mogli "matematički ustrožiti" i utvrditi njenu *istinitosnu vrednost* (tačnost ili netačnost). Ukoliko bismo je posmatrali nad odgovarajućim skupom dece od 3-5 godina ona bismo bila tačna, dok bismo njena tačnost ili netačnost varirala nad ostatkom populacije.

Druga rečenica je upitna, ne iznosi nikakvu činjenicu o čijoj tačnosti bismo trebalo suditi. Tek bismo se odgovoru na postavljeno pitanje mogla dodeliti istinitosna vrednost.

Utvrđivanja istinitosne vrednosti treće rečenice je slično kao kod prve rečenice. Dakle, postoji grupa koja smatra da je svemir ograničen i postoji grupa koja smatra da je svemir neograničen. Međutim, ostatak (čini nam se popriličan) ljudske populacije *ne može* da utvrdi istinitosnu vrednost treće rečenice jer je neopredeljen.

**Šta su iskazi?** *Iskazi* su samo one rečenice čija se istinitosna vrednost *jednoznačno* može utvrditi. Tako, primeri koje smo razmatrali nisu iskazi. Dok rečenice:
*Sutra će ili biti vedro ili oblačno.*
*U skupu prirodnih brojeva je jedan plus jedan jednako dva.*
*U skupu* $\mathcal{N}$ *je* $1 + 1 = 2.$
jesu iskazi i to tačni. Primetimo da su poslednje dve rečenice *isti* iskazi posredovani rečenicama na različitim jezicima. Kako nas u matematičkoj logici interesuje samo istinitosna vrednost iskaza, dok nas ne interesuje *na kom jeziku* je iskaz posredovan, niti

koja je *njegova sadržina*, nameće se potreba da iskaze i njihove istinitosne vrednosti što jednostavnije i kraće zapisujemo.

**Koje simbole koristimo za iskaze i za istinitosnu vrednost iskaza?**

Iskaze ćemo označavati malim slovima latinice, na primer sa: $i, p, q, r....$ Istinitosna vrednost $v(i)$ iskaza $i$ pripada skupu $V = \{\top, \bot\}$. Simbol $\top$ (čita se "te" ili "tačno") označava tačnost, dok simbol $\bot$ (čita se "ne te" ili "netačno") označava netačnost iskaza.

### 1.2.1 Konjunkcija, disjunkcija i negacija

Malo složenije rečenice mogu se praviti povezivanjem iskaza operacijama konjunkcije $\boxed{\text{i}}$, disjunkcije $\boxed{\text{ili}}$, i primenom negacije $\boxed{\text{ne}}$ na pojedine iskaze. Recimo, za date iskaze $p, q, r, s$:

$p$ : Banka radi od 9.
$q$ : Banka radi od 8.
$r$ : Na referendum je izašlo više od 50% glasačkog tela.
$s$ : Na referendumu je izglasana podrška stranim savetodavcima.

složenije rečenice su:

$p \vee q$ : Banka radi od 9 $\boxed{\text{ili}}$ od 8.

$\neg r \wedge \neg s$ : Na referendum $\boxed{\text{nije}}$ izašlo više od 50% glasačkog tela $\boxed{\text{i}}$ na referendumu $\boxed{\text{nije}}$ izglasana podrška stranim savetodavcima.

**Koje matematičke simbole koristimo za negaciju, konjunkciju i disjunkciju?**

To su redom sledeći simboli: $\neg$, $\wedge$ i $\vee$.

**Kako se određuju istinitosne vrednosti za negaciju, konjunkciju i disjunkciju iskaza?**

U tabeli 1 su redom date istinitosne vrednosti za negaciju, konjunkciju i disjunkciju u zavisnosti od istinitosne vrednosti iskaza na koje su ove operacije primenjene.

| $v(i)$ | $v(\neg i)$ |
|---|---|
| $\bot$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ |

| $v(p)$ | $v(q)$ | $v(p \wedge q)$ |
|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\bot$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $v(p)$ | $v(q)$ | $v(p \vee q)$ |
|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |

Tabela 1. Istinitosne vrednosti negacije, konjunkcije i disjunkcije

**Ekskluzivna[2] disjunkcija:** $p \veebar q$

Ekskluzivna disjunkcija je tačna ukoliko su iskazi koji učestvuju u ekskluzivnoj disjunkciji različite istinitosne vrednosti. Rečenica: "Ako izađem na ispit ili ću položiti ili ću pasti", je tipičan primer ekskluzivne disjunkcije. Samo jedan od iskaza $p$: položiću ispit i $q$: pašću ispit, može biti tačan, a njegova tačnost zahteva netačnost drugog iskaza (odnosno isključuje mogućnost tačnosti drugog iskaza).

[2]lat. exlusivus znači isključiv, nedopuštajući.

### 1.2.2 Implikacija i ekvivalencija

U govornom i književnom jeziku implikacijama odgovaraju uslovne rečenice, kao na primer:
$\boxed{\text{Ako}}$ *budeš jeo svežu šargarepu* $\boxed{\text{onda}}$ *ćeš imati dobar vid.*

**Kako se matematički zapisuju implikacija i ekvivalencija?** Neka su redom data dva iskaza $p$ i $q$. Tada se njihova implikacija zapisuje:

$$p \Rightarrow q,$$

što se čita na neki od sledećih načina:

1. $p$ $\boxed{\text{implicira}}$ $q$
2. $\boxed{\text{iz}}$ $p$ $\boxed{\text{sledi}}$ $q$
3. $\boxed{\text{ako}}$ $p$ $\boxed{\text{onda}}$ $q$
4. $p$ je $\boxed{\text{potreban uslov}}$ za $q$
5. $q$ je $\boxed{\text{dovoljan uslov}}$ za $p$

Konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su komutativne binarne operacije nad iskazima, dok implikacija nije komutativna. Tako iskaz $p$ u formuli za implikaciju nazivamo *pretpostavkom*, a iskaz $q$ *posledicom.* Jasno je da je ispravan (tačan) način zaključivanja da iz tačne pretpostavke sledi tačna posledica (videti poslednji red u tabeli istinitosne vrednosti za implikaciju). Međutim, nije očigledno da iz netačne pretpostavke možemo dobiti, na ispravan način, netačnu ili tačnu posledicu (videti prva dva reda u tabeli istinitosne vrednosti za implikaciju). Ilustraciju [17] za valjanost ovakvog načina zaključivanja imamo u tačnom stavu: *prazan skup je podskup svakog skupa* . Ako skupove razmatramo nad skupom racionalnih brojeva $\mathcal{Q}$ sledi da je $(\forall x \in \mathcal{Q})$ i za $(\forall S \subset \mathcal{Q})$ zadovoljena implikacija $x \in \emptyset \;\Rightarrow\; x \in S$. Prvi iskaz $x \in \emptyset$ ove implikacije je uvek netačan dok iskaz $x \in S$ može da bude ili tačan ili netačan, međutim implikacija ova dva iskaza je uvek tačna.

Ekvivalencija iskaza $p$ i $q$ se zapisuje sa:

$$p \;\Leftrightarrow\; q,$$

što se najčešće čita sa:

1. $p$ je $\boxed{\text{ekvivalentno}}$ sa $q$;
2. $p$ $\boxed{\text{ako i samo ako}}$ $q$;
3. $p$ je $\boxed{\text{potreban i dovoljan uslov}}$ za $q$.

**Šta je ekvivalencija?**
Ekvivalencija dva iskaza predstavlja konjunkciju dve implikacije. Recimo, sledeća rečenica
*U dobrog domaćina dobra i stoka.*
daje ekvivalenciju dva iskaza (dve relacije): " biti dobar domaćin" i "posedovati dobru stoku":
$\boxed{\text{Ako}}$ je domaćin dobar $\boxed{\text{onda}}$ on poseduje dobru stoku $\boxed{\text{i}}$ $\boxed{\text{ako}}$ je stoka dobra $\boxed{\text{onda}}$ je uzgaja dobar domaćin.

Dakle, ekvivalencija predstavlja kraći zapis konjunkcije dve implikacije sa istim iskazima koji su zamenili mesta, tj.:

$$p \Leftrightarrow q \text{ je ekvivalentno sa } (p \Rightarrow q) \;\wedge\; (q \Rightarrow p).$$

Međutim, značaj ekvivalencije je bitno veći od toga da je ona kraći zapis konjunkcije dve implikacije. U matematici, kao i u životu, je veoma važno da neke objekte (zemljište, sorte, ljude... ) svrstamo u neke *klase* po nekim značajnim *svojstvima* (pH vrednost, rano sazrevanje, biti vozač... ) i da zatim sve pripadnike iste klase tretiramo na isti način.

Dakle, kada kažemo da su dva objekta ekvivalentna ne podrazumevamo da su oni isti nego da imaju jednako neko nama važno svojstvo. Kako je u logici svojstvo objekata koje razmatramo njihova istinitosna vrednost, to je ekvivalencija dva iskaza tačna jedino ako su oba iskaza jednake tačnosti (tabela 2).

U matematici svojstva nazivamo *relacijama* a odgovarajuće objekte nad kojima razmatramo neku relaciju grupišemo u *skup*. Tako bismo na osnovu prethodnog primera skup svih stočara mogli podeliti na dve klase u odnosu na relaciju "biti dobar domaćin". *Relacija ekvivalencije* je jedna od najčešće razmatranih relacija u matematici.

**Određivanje istinitosne vrednosti za implikaciju i ekvivalenciju**

U tabeli 2 su date istinitosne vrednosti za implikaciju i ekvivalenciju u zavisnosti od istinitosne vrednosti iskaza na koje su ove binarne operacije primenjene.

| $v(p)$ | $v(q)$ | $v(p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|
| $\perp$ | $\perp$ | $\top$ |
| $\perp$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\perp$ | $\perp$ |
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $v(p)$ | $v(q)$ | $v(p \Leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|
| $\perp$ | $\perp$ | $\top$ |
| $\perp$ | $\top$ | $\perp$ |
| $\top$ | $\perp$ | $\perp$ |
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |

Tabela 2. Istinitosne vrednosti za implikaciju i ekvivalenciju

Tabelama 1 i 2 su redom definisane negacija, konjunkcija, disjunkcija implikacija i ekvivalencija. Analizom tabela njihovih istinitosnih vrednosti može se dati i sledeća definicija:

**Negacija** *iskaza je tačna ako*[3] *je iskaz netačan.*

**Konjunkcija** *dva iskaza je tačna ako su oba iskaza tačna.*

**Disjunkcija** *dva iskaza je netačna jedino ako su oba iskaza netačna.*

**Implikacija** *dva iskaza je netačna ako je prvi iskaz tačan, a drugi netačan.*

**Ekvivalencija** *dva iskaza je tačna ako oba iskaza imaju jednake istinitosne vrednosti.*

### 1.2.3 Kvantifikatori, iskazne formule i tautologije

Od iskaza uz pomoć operacija sa iskazima gradimo složenije rečenice, iskazne formule. Posebno su značajne one iskazne formule koje su uvek tačne nezavisno od tačnosti iskaza koji u njima učestvuju. Takve iskazne formule predstavljaju ispravan, logičan, način zaključivanja, i nazivaju se **tautologije**.

**Iskazne formule** *su:*

[3] Mada u definicijama koristimo reč "ako" podrazumevamo ekvivalenciju ("ako i samo ako") definisanog pojma sa zahtevanim uslovom iz definicije, a ne implikaciju. I u daljem tekstu, isključivo u definicijama, termin "ako" znači "ako i samo ako", "ekvivalentno"....

**1.** *iskazi* *(predstavljeni iskaznim slovima:* $a, b, c, d, e...$*);*

**2.** $\neg a$, $(a \vee b)$, $(a \wedge b)$, $(a \Rightarrow b)$ *i* $(a \Leftrightarrow b)$,
*gde su* $a$ *i* $b$ *iskazne formule;*

**3.** *konačnom primenom pravila* **1.** *i* **2.** *dobijaju se iskazne formule.*

Tako su iskazne formule: $\neg\neg(a \Rightarrow \neg b)$, $(((\neg a \vee b) \Leftrightarrow \neg(c \wedge b)) \vee a)$, $(a \Leftrightarrow \neg\neg a)$, $p \Rightarrow p$... dok izrazi $\Leftrightarrow a$ ($\Leftrightarrow$ je binarna, a ne unarna operacija), $a \vee b \wedge c$ (nije definisano koja operacija od $\vee$ i $\wedge$ se prvo primenjuje), $a\neg b$, nisu iskazne formule.

Označimo sa $\mathcal{F}$ skup svih iskaznih formula. Istinitosne vrednosti iskaznih formula se određuju polazeći od istinitosnih vrednosti svih iskaznih slova koja učestvuju u formuli i iterativno primenjujući pravila za utvrđivanje istinitosnih vrednosti osnovnih iskaznih formula: negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije i ekvivalencije. Na primer, istinitosna vrednost formule $F(p, q, r) : (p \wedge \neg r) \Rightarrow (q \vee r)$ je za $v(p) = \perp$, $v(q) = \perp$, $v(r) = \top$ je

$v(F(\perp, \perp, \top) = (\perp \wedge \neg\top) \Rightarrow (\perp \vee \top) = (\perp \wedge \perp) \Rightarrow \top = \perp \Rightarrow \top = \top$

Dakle, istinitosna vrednost, $v$ je preslikavanje skupa svih iskaznih formula $\mathcal{F}$ na skup $\{\perp, \top\}$.

| | *formula* | *zakon* |
|---|---|---|
| 1. | $(a \wedge (a \vee b)) \Leftrightarrow a$<br>$(a \vee (a \wedge b)) \Leftrightarrow a$ | zakoni apsorbcije |
| 2. | $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$ | modus ponens |
| 3. | $(b \wedge a) \Leftrightarrow (a \wedge b)$<br>$(b \vee a) \Leftrightarrow (a \vee b)$ | komutativnost $\wedge$<br>komutativnost $\vee$ |
| 4. | $((a \wedge b) \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge (b \wedge c))$<br>$((a \vee b) \vee c) \Leftrightarrow (a \vee (b \vee c))$ | asocijativnost $\wedge$<br>asocijativnost $\vee$ |
| 5. | $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$<br>$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ | De Morganov zakon<br>De Morganov zakon |
| 6. | $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ | zakon dvostruke negacije |
| 7. | $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$<br>$(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ | distributivnost $\vee$ prema $\wedge$<br>distributivnost $\wedge$ prema $\vee$ |
| 8. | $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$ | svođenje na protivurečnost |
| 9. | $p \vee \neg p$ | zakon isključenja trećeg |
| 10. | $\neg(p \wedge \neg p)$ | zakon neprotivurečnosti |
| 11. | $p \Rightarrow p$ | zakon identičnosti |
| 12. | $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ | pravilo silogizma |
| 13. | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ | zakon kontrapozicije |
| 14. | $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ | $\Rightarrow$ izražena preko $\neg$ i $\vee$ |
| 15. | $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ | $\Leftrightarrow$ izražena preko $\Rightarrow$ i $\wedge$ |

Tabela 3. Neke poznate tautologije

Tautologije predstavljaju ispravne načine logičkog zaključivanja.

**Tautologije** *su iskazne formule čija je istinitosna vrednost uvek tačna.*

U tabeli 3 su navedene neke poznatije tautologije Tako, tautologije kod kojih je "glavna" operacija implikacija, kao kod pravila silogizma ili pravila modus ponens (videti tabelu 3) govore o tome koje posledice važe pod datim pretpostavkama. Ukoliko je ekvivalencija glavna operacija u tautologiji, na ravnopravan način možemo koristiti ili levu ili desnu podformulu razmatrane tautologije.

Poslednje dve tautologije (zakoni 14 i 15), navedene u tabeli 3, nam omogućuju da bilo koju formulu iskaznog računa zapisujemo samo preko konjunkcije, disjunkcije i negacije. Formula 14. nam kao tautologija omogućava da eliminišemo implikaciju, dok tautologija 15. eliminiše ekvivalenciju. Tako, primenjujući zakone date u tablicama, formulu $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow c$, možemo ekvivalentno zapisati pomoću operacija $\neg, \wedge, \vee$. Preciznije, imamo sledeći niz ekvivalentnih formula:

$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow c$ $\Leftrightarrow$ (po zakonu 15.)
$((a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow (a \Rightarrow b))$ $\Leftrightarrow$ (po zakonu 14.)
$(\neg(\neg a \vee b) \vee c) \wedge (\neg c \vee (\neg a \vee b))$ $\Leftrightarrow$ (po zakonu 5.)
$((\neg\neg a \wedge \neg b) \vee c) \wedge (\neg c \vee (\neg a \vee b))$ $\Leftrightarrow$ (po zakonima 6. i 4.)
$((a \wedge \neg b) \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg a \vee b)$ $\Leftrightarrow$ (po zakonima 7. i 3.)
$(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

**Kvantifikatori** su oznake koje koristimo u skraćenom zapisu nekih formula. Odnose se na količinu elemenata. Simbol $\forall$ (čita se "za sve", "svaki", "svi"... ) zovemo *univerzalni kvantifikator* i nastao je od prevrnutog (po obe ose) početnog slova engleske reči All (svi). *Egzistencijalni kvantifikator*, $\exists$, koji čitamo "postoji","postoji bar jedan", "za neki", je nastao je od prevrnutog (po $y$-osi) početnog slova engleske reči Exist (postoji). Kvantifikator $\exists$ dozvoljava da postoji više od jednog elementa sa nekom osobinom. Međutim, ako želimo da naglasimo da postoji tačno jedan elemenat koji ima neko svojstvo, koristimo egzistencijalni kvantifikator, $\exists_1$[4] koji čitamo "postoji tačno jedan".

Primer. Rečenice $(\forall x)(x > 0)$ i $(\exists y)(y + 2 < 1)$ su takve da je prva tačna na skupu prirodnih, a netačna na skupu celih brojeva, dok je druga tačna na skupu celih, a netačna na skupu prirodnih brojeva. Međutim, postoje rečenice koje su uvek tačne, nezavisno od skupa na kome se razmatraju. Takve opšte važeće rečenice nazivamo **valjane formule**.

Sledeće rečenice su neki primeri valjanih formula:

Ako za svako $x$ važi $p(x)$ onda postoji $y$ tako da važi $p(y)$:
$(\forall x)p(x) \Rightarrow (\exists y)p(y)$ .

Nije tačno da je za svako $x$ zadovoljena formula $p(x)$ je ekvivalentno da postoji $x$ da ne važi $p(x)$:
$\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg p(x)$.

Pokušajte da tačno pročitate i rečima zapišete sledeće valjane formule:
$(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x))$;
$\neg(\exists x)p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\neg p(x)$.

### 1.2.4 Zadaci

**1.1.** Smislite tri rečenice, tako da kod jedne *uvek možemo* utvrditi istinitosnu vrednost da kod druge *ne možemo* utvrditi istinitosnu vrednost a da kod treće *nekad možemo a*

[4] U literaturi se koristi i oznaka $\exists!$.

*nekad ne možemo* utvrditi istinitosnu vrednost.

**1.2.** Dati su izrazi: $\neg(a \vee \neg b)$, $((\neg a \vee b) \Leftrightarrow)$, $(c \wedge b) \wedge a$, $a \Leftrightarrow \neg\neg a$, $\Rightarrow p$ i $a \vee \wedge b$. Obrazložiti koji od navedenih izraza nisu iskazne formule a za one izraze koji jesu iskazne formule utvrdite na koji način su dobijene posredstvom pravila **1**, **2.** i **3**.

**1.3.** Proverite da li je iskazna formula $(a \wedge (a \vee b)) \Leftrightarrow a$ tautologija.

**1.4.** Nađite skup $A$ (neki skup skupova u ovom slučaju) na kome rečenica $(\exists Y \in A)(\forall X \in A)(Y \subset X) \Rightarrow Y = \emptyset$, nije tačna.

## 1.3 Skupovi, funkcije, operacije, relacije

Skup (množina, mnoštvo... ) i njegovi elementi (članovi, objekti... ) su osnovni pojmovi matematike. Skupove razmatramo u okviru nekog univerzuma, koji ćemo označiti sa $U$. Univerzum je recimo: ljudska populacija, brojevi, biljne vrste... Ako skup $S$ sačinjavaju elementi $x, y, z...$ označava se $S = \{x, y, z...\}$.

Sa $S = \{x : P(x)\}$ ili sa $S = \{x \mid P(x)\}$ označava se skup svih elemenata $x$ koji imaju osobinu $P$. Ako je $S$ skup, tada $x \in S$ označava da je $x$ element skupa $S$ ili da $x$ pripada skupu $S$, dok $x \notin S$ znači da $x$ nije element skupa $S$. Oznaka za prazan skup je $\emptyset$.

### 1.3.1 Skupovi

Definišimo neke poznate operacije sa skupovima: uniju, presek, razliku, simetričnu razliku i komplement skupa; neke binarne relacije na skupovima: $=$, $\subseteq$ ; kao i proizvod dva skupa, kardinalnost i partitivni skup skupa.

*Skup $B$ je* **podskup** *skupa $A$, u oznaci*
$B \subseteq A$, *ako je* $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$[5]

*Skupovi $A$ i $B$ su* **jednaki**, *u oznaci*
$A = B$ *ako je* $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

**Presek** $A \cap B$, *skupova $A$ i $B$ je skup*
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

**Unija** $A \cup B$, *skupova $A$ i $B$ je skup*
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

**Razlika** $A \setminus B$, *skupova $A$ i $B$ je skup*
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

**Proizvod** *skupova $A$ i $B$, $A \times B$, je skup uređenih parova*
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

**Simetrična razlika** $A \triangle B$ *skupova $A$ i $B$ je skup*
$A \triangle B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

**Komplement** *skupa $A$ u odnosu na univerzalan skup $U$ je skup*
$C_U A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = I \setminus A$

**Partitivni skup** $P(A)$ *skupa $A$ je skup svih podskupova skupa $A$*
$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

**Kardinalnost** $|A|$ *skupa $A$ je broj njegovih elemenata.*

[5] Oznake $\Rightarrow, \wedge, \vee$ i $\veebar$ definisane su u poglavlju 1.2.

### 1.3.2 Preslikavanja, operacije i relacije

**Preslikavanje** (**funkcija**) *$f$ nepraznog skupa $A$ na neprazan*[6] *skup $B$ je pridruživanje koje elementima skupa $A$ dodeljuje elemente skupa $B$ tako da je zadovoljeno: svakom elementu $a$ iz skupa $A$ pridružujemo tačno jedan element $b$ iz skupa $B$, koji označavamo sa $b = f(a)$.*

Preslikavanje $f$ skupa $A$ na skup $B$ označavamo sa $f : A \to B$. Skup $A$ je **domen** funkcije $f$, ili skup originala, dok je skup $B$ **kodomen**, ili nadskup skupa slika funkcije $f$.

Funkcija $f$ je *konstantna* ako je njen skup slika jednoelementni skup.

Funkcija je *identično* preslikavanje, u oznaci $id$, na skupu $S$ ako je definisana kao $id : S \to S$, tako da za svako $s \in S$ je $id(s) = s$.

Označimo sa $S^n$ $n$-tostruki proizvod skupa $S$: $S \times S \times ... \times S$. Tako je skup $S^n$ skup svih uređenih $n$-torki iz skupa $S$.

*Preslikavanje $\clubsuit$ je $n$-arna* **operacija** *(operacija dužine $n$), $n \geq 1$, na nepraznom skupu $S$ ako je:*
$\clubsuit : S^n \to S$.

Za $n = 1$, $\clubsuit$ je unarna operacija. Na primer, negacija $\neg$ je unarna operacija u skupu iskaznih formula $\mathcal{F}$. Komplement skupa u odnosu na univerzalan skup $I$ je takođe unarna operacija na partitivnom skupu $P(I)$. Kardinalni broj skupa nije unarna operacija, za konačan univerzalan skup $I$, kardinalnost skupa je preslikavanje $|\,| : P(I) \to \{0, 1, 2...|I|\}$.

Za $n = 2$, $\clubsuit$ je binarna operacija. Unija, presek, razlika, simetrična razlika i proizvod skupova su binarne operacije na skupu $P(I)$. Veoma često kod binarnih operacija umesto da pišemo $\clubsuit((s_1, s_2)) = s_3$ pišemo $s_1 \clubsuit s_2 = s_3$. Kada je $n = 3$ radi se o ternarnim operacijama...

*Neprazan skup $\rho$, je binarna* **relacija** *(relacija dužine 2), na nepraznom skupu $S$ ako je $\emptyset \neq \rho \subseteq S^2$.*

Relacija $\rho$ je podskup skupa svih uređenih parova elemenata iz skupa $S$.

Ako je $\rho$ binarna relacija na skupu $S$ onda se ravnopravno koriste sledeća dva ekvivalentna zapisa: $(s_1, s_2) \in \rho$ i $s_1 \rho s_2$, što se čita kao element $s_1$ je u relaciji $\rho$ sa elementom $s_2$.

## 1.4 Osobine preslikavanja, operacija, relacija

### 1.4.1 Osobine preslikavanja

*Funkcija $f : A \to B$ je:*

- **injektivna** *ili "1-1" ako je*
  $$(\forall a_1, a_2 \in A)\ (f(a_1) = f(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2);$$
- **sirjektivna** *ili "na" ako je* $(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ \ f(a) = b$;
- **bijekcija** *ako je "1-1" i "na".*

[6] U daljem tekstu neće uvek biti naglašeno da se radi o nepraznim skupovima.

Oznake kvantifikatora $\forall$ i $\exists$ definisane su u poglavlju 1.2.3, dok su skupovi brojeva $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^+, \mathcal{R}$ i $\mathcal{R}^+$ uvedeni u poglavlju 1.5.

**Inverzna funkcija** $f^{-1}$, *bijektivne funkcije* $f : A \to B$ *je funkcija* $f^{-1}\ B \to A$, *tako da* $(\forall b \in B) f^{-1}(b) = a \in A \Leftrightarrow f(a) = b$.

*Date su funkcije* $f$ *i* $g$, *tako da* $f : A \to B$ *i* $g : B \to C$. *Tada je funkcija* $k$ **kompozicija** *funkcija* $f$ *i* $g$, *u oznaci* $k = g \circ f$ *ako* $k : A \to C$, *tako da je* $(\forall a \in A)\ k(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Primeri: Posmatrajmo tri funkcije $f$, $g$ i $h$ koje su definisane na sledeći način:
$f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}, \quad g : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}^+ \cup \{0\}$ i $h : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}$,

$f(x) = 2 \cdot x - 1,\ \ g(x) = x^2$ i $h(x) = \ln x$.

Funkcija $f$ je injektivna ali nije sirjektivna, jer se svi celi brojevi preslikavaju na neparne cele brojeve. Druga funkcija nije ni "1-1", jer različiti originali imaju iste slike, recimo $g(-2) = g(2) = 4$, ni "na", jer na primer, ceo pozitivan broj 3 nema ceo koren. Bijektivno preslikavanje je funkcija $h$. Funkcija $h$ je injektivna, jer za svaka dva pozitivna, realna broja, $x$ i $y$, važi $h(x) = h(y) \Leftrightarrow \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$. Takođe, $(\forall x \in \mathcal{R})$ postoji pozitivan realan broj $a \in \mathcal{R}^+$ tako da je $e^x = a > 0$. Tada je $h(a) = \ln a = \ln e^x = x$, što znači da je funkcija $h$ sirjektivna. Kako je $h$ bijekcija, postoji njena inverzna funkcija $h^{-1} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^+$, koja je takođe bijekcija i definisana je kao $h^{-1}(x) = e^x$.

Kompozicija funkcija $f$ i $g$ je funkcija $k = (g \circ f) : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}^+ \cup \{0\}$ i $\forall z \in \mathcal{Z}$ je $k(z) = (g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(2 \cdot z - 1) = (2 \cdot z - 1)^2 = 4 \cdot z^2 - 4 \cdot z + 1 \in \mathcal{Z}^+$.

Primetimo da se proizvod $g \cdot f$, funkcija $f$ i $g$ razlikuje od njihove kompozicije $g \circ f$. Njihov proizvod je funkcija $(g \cdot f)\ (x) = g(x) \cdot f(x) = x^2 \cdot (2x - 1) = 2x^3 - x^2$, za $x \in \mathcal{Z}$.

Važe sledeće osobine:

1. *Kompozicija injektivnih (sirjektivnih) preslikavanja je injektivno (sirjektivno) preslikavanje.*

2. *Ako je funkcija* $g$ *inverzna za funkciju* $f$, *tada je takođe* $f$ *inverzna funkcija funkcije* $g$.

3. *Inverzna funkcija* $g$ *(bijektivne) funkcije* $f$ *je takođe bijekcija i važi* $g \circ f = f \circ g = id$.

4. *Za kompoziciju tri preslikavanja važi asocijativnost. Preciznije, ako su funkcije* $f$, $g$ *i* $h$ *takve da su definisane odgovarajuće kompozicije:* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *i* $h : C \to D$ *zadovoljeno je* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

**Dokaz** *4. Po definiciji kompozicije preslikavanja je* $g \circ f : A \to C$ *i* $h \circ (g \circ f) : A \to D$. *Slično je* $(h \circ g) \circ f : A \to D$. *Takođe je* $(\forall a \in A)\ \ h \circ (g \circ f)\ (a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g) f(a) = (h \circ g) \circ f\ (a)$. *Kako su dva preslikavanja* $f_1 : X \to Y$ *i* $f_2 : X \to Y$ *jednaka ako je* $\forall x \in X\ \ f_1(x) = f_2(x)$, *prethodna izvođenja impliciraju da su kompozicije preslikavanja jednake,* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

*Dokaze tvrđenja 1. 2. i 3. u okviru prethodnog stava ostavljamo kao zadatke.* $\square$

### 1.4.2 Osobine binarnih operacija

*Binarna operacija* $\clubsuit : S^2 \to S$ *je:*

- **komutativna** $\Leftrightarrow$ $(\forall s_1, s_2 \in S)\ s_1 \clubsuit s_2 = s_2 \clubsuit s_1$
- **asocijativna** $\Leftrightarrow$ $(\forall s_1, s_2, s_3 \in S)\ (s_1 \clubsuit s_2) \clubsuit s_3 = s_1 \clubsuit (s_2 \clubsuit s_3)$
- **kancelativna sa leve strane** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in S)(\forall s \in S)\ s \clubsuit a = s \clubsuit b \Rightarrow\ a = b$
- **kancelativna sa desne strane** $\Leftrightarrow (\forall a, b \in S)(\forall s \in S)\ a \clubsuit s = b \clubsuit s \Rightarrow\ a = b$
- **sa neutralnim elementom** $e$ $\Leftrightarrow (\exists e \in S)(\forall s \in S)\ s \clubsuit e = e \clubsuit s = s$
- **sa inverznom unarnom operacijom** $^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $(\forall s \in S)(\exists s^{-1} \in S)\ s \clubsuit s^{-1} = s^{-1} \clubsuit s = e$
- **distributivna** *prema operaciji* $\heartsuit : S^2 \to S$ $\Leftrightarrow$
  $(\forall s_1, s_2, s_3 \in S)(s_1 \heartsuit s_2) \clubsuit s_3 = (s_1 \clubsuit s_3) \heartsuit (s_2 \clubsuit s_3)$ *i* $s_3 \clubsuit (s_1 \heartsuit s_2) = (s_3 \clubsuit s_1) \heartsuit (s_3 \clubsuit s_2)$.

Na primer, operacija sabiranja $+$ u skupu celih brojeva $\mathcal{Z}$, ima sve navedene osobine za binarnu operaciju iz prethodne definicije. Neutralni elemenat za sabiranje u $\mathcal{Z}$ je 0. Inverzni element za bilo koji ceo broj $x \in \mathcal{Z}$ je njegov suprotni ceo broj $-x \in \mathcal{Z}$.

### 1.4.3 Osobine binarnih relacija

*Binarna relacija* $\rho \subseteq S^2$ *na skupu* $S$ *je:*

- **refleksivna** $\Leftrightarrow$ $(\forall s \in S)\ (s, s) \in \rho$
- **simetrična** $\Leftrightarrow$ $(\forall s_1, s_2 \in S)\ (s_1, s_2) \in \rho \Rightarrow (s_2, s_1) \in \rho$
- **tranzitivna** $\Leftrightarrow$
  $(\forall s_1, s_2, s_3 \in S)\ ((s_1, s_2) \in \rho \land (s_2, s_3) \in \rho) \Rightarrow (s_1, s_3) \in \rho$
- **antisimetrična** $\Leftrightarrow$
  $(\forall s_1, s_2 \in S)\ ((s_1, s_2) \in \rho \land (s_2, s_1) \in \rho) \Rightarrow s_1 = s_2$
- **relacija ekvivalencije** *ako je refleksivna, tranzitivna i simetrična*
- **relacija poretka** *ako je refleksivna, tranzitivna i antisimetrična.*

**Klasa ekvivalencije** elementa $x \in S$ relacije ekvivalencije $\rho \subset S^2$ je skup

$$K_x^\rho = \{y \in S \mid \quad x \rho y\}.$$

Primeri: Osnovni primeri relacija ekvivalencije su sve relacije jednakosti: jednakost krvnih grupa na populacionom skupu, jednakost brojeva na nekom brojnom skupu, jednakost tipa automobila na skupu svih automobila... Paralelnost pravih u skupu svih pravih u prostoru, podudarnost geometrijskih objekata, sličnost trouglova su takođe relacije ekvivalencije. Kongruentnost po modulu $p$, u oznaci $\equiv \pmod{p}$ (dva broja $x$ i $y$ su u relaciji kongruencije po modulu $p$, odnosno $x \equiv y \pmod{p}$ ako je zadovoljeno da je $p | (x - y)$, tj. $x$ i $y$ imaju jednake ostatke pri deljenju sa $p$) je takođe relacija ekvivalencije na skupu brojeva. Na primer, na skupu prirodnih brojeva u odnosu na relaciju $\equiv \pmod{2}$ postoje dve klase ekvivalencije: parni i neparni prirodni brojevi.

Relacije poretka su $\leq$, $\geq$, $|$ na nekom skupu brojeva. Podskup (inkluzija) $\subseteq$ na partitivnom skupu $P(I)$ jeste relacija poretka, dok relacija “biti pravi podskup” $\subset$ nije relacija poretka jer nema osobinu refleksivnosti.

## 1.5 O skupovima brojevima

Od prvih termina: malo, nekoliko, mnogo... koji su trebali da bliže odrede količinu nečega, do skupa kompleksnih brojeva nastajale su i gasile se mnoge civilizacije. Ipak,

$$\boxed{\text{skup } \textbf{prirodnih brojeva } \mathcal{N} = \{1, 2, 3...\}}$$

pokazao se dovoljan za prebrajanje diskretnih količina.

Istorijski gledano, veoma davno su se koristili i racionalni, iracionalni, a samim tim i realni brojevi. Na primer, iracionalan broj $\pi$ je Arhimed (3. vek p.n.e) izrazio preko obima upisanih i opisanih pravilnih mnogouglova u krug, a već stari Kinezi (3 vek n.e.) su računali $\pi$ sa tačnošću do na 7 decimala. Kako su se brojevima pre svega izražavale **mere** (dužina, površina, zapremina) do renesanse su se negativni brojevi uglavnom smatrali fikcijom. Tek krajem XVI veka, u okviru rešavanja kubnih jednačina, stidljivo se pojavljuju kompleksni brojevi. Upotreba kompleksnih brojeva do XVIII veka je bila retka i sa greškama u računu. Oni su bili precizno definisani od strane Gausa.

Na skupu prirodnih brojeva posmatramo dve binarne operacije: sabiranje i množenje. Ove dve operacije su asocijativne, komutativne i važi distributivnost množenja prema sabiranju. Prirodan broj 1 je neutralni elemenat za množenje. Neutralni elemenat za sabiranje je 0 i on ne pripada skupu prirodnih brojeva. Proširen sa 0, skup prirodnih brojeva označavamo sa $\boxed{\mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, 3...\}.}$

### 1.5.1 Matematička indukcija - jedna metoda dokazivanja

Indukcija lat. inductio, znači zaključivanje iz pojedinačnog o opštem, to je suprotna metoda mišljenja i dokazivanja od dedukcije. Matematičkom indukcijom možemo dokazivati tvrđenja koja su obavezno u funkciji prirodnih brojeva. Tako je u primeru koji sledi indukcijom po prirodnom broju dokazana formula za zbir članova geometrijskog niza. Po realnom parametru se ne može izvoditi indukcija.

U opštem slučaju matematičkom indukcijom dokazujemo neko tvrđenje[7] tipa

$$\forall k \in \mathcal{N} \qquad \text{važi} \qquad T(k),$$

u tri tzv. induktivna koraka:

**1. korak:** Pokazujemo da tvrđenje važi za k=1, tj. da je tačno $T(1)$.
**2. korak:** Pretpostavimo da je tvrđenje $T(k)$ tačno za neko $k$, $k \in \mathcal{N}$.
**3. korak:** Dokažemo da pod pretpostavkom da važi **korak 2.** važi i $T(k+1)$.

Objašnjenje: Ako smo dokazali da iz tačnosti $T(k)$ za posledicu imamo tačnost $T(k+1)$ za svaki prirodan broj $k$, onda ako pokažemo tačnost $T(1)$ to ima za posledicu $T(2)$ (za k=1), a zatim tačnost $T(2)$ za posledicu ima $T(3)$, zatim tačnost $T(3)$ povlači tačnost $T(4)$... Na ovaj način vidimo da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve.

Primer. Ilustrujmo matematičku indukciju na dokazu sledećeg tvrđenja, koje je formula za zbir prvih $k+1$ članova geometrijskog niza (videti odeljak 1.3.1, ove glave):

$$\forall k \in \mathcal{N} \qquad \sum_{i=0}^{k} a \cdot q^i = a\frac{1-q^{k+1}}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

[7] $T(k)$ može biti formula, nejednačina, jednakost...

Ovde je tvrđenje $T(k)$ formula $\sum_{i=0}^{k} a \cdot q^i = a \cdot \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$.

**1.** Tvrđenje za k=1, ima s leve strane oblik $\sum_{i=0}^{1} a \cdot q^i = a + aq$, a sa desne $a\dfrac{1-q^{1+1}}{1-q} = a\dfrac{1^2-q^2}{1-q} = a\dfrac{(1-q)(1+q)}{1-q} = a(1+q)$, što je jednako. Znači $T(1)$ je tačno.

**2.** Pretpostavimo da važi za neko $k$, $k \in \mathcal{N}$, formula $T(k)$.

**3.** Da vidimo čemu je jednako $T(k+1)$. Levu stranu možemo razbiti na dva sabirka a zatim iskoristiti pretpostavku **koraka 2.**:

$$\sum_{i=0}^{k+1} a \cdot q^i = \sum_{i=0}^{k} a \cdot q^i \ + \ aq^{k+1} \ = \ a\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \ + \ aq^{k+1}.$$

Dalje, prostim računom imamo

$$a\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \ + \ aq^{k+1} = a\frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}-q^{k+2}}{1-q} = a\frac{1-q^{k+2}}{1-q}.$$

Spajanjem početka i kraja ovog niza jednakosti zaista dobijamo da je tačno tvrđenje $T(k+1)$.

Napomena. Prvi korak matematičke indukcije je najčešće trivijalan. U trećem koraku je neophodno iskoristiti pretpostavku drugog koraka.

### 1.5.2 Celi brojevi

Ukoliko želimo da imamo "jače" osobine za operaciju sabiranja, odnosno ukoliko hoćemo da imamo rešenje po nepoznatoj $x$, za svaku algebarsku jednačinu oblika:
1) $\quad x + a = b \quad a, b \in \mathcal{N}$
(koja u skupu $\mathcal{N}$ ima rešenje samo za $a < b$) moramo proširiti skup prirodnih brojeva $\mathcal{N}$ na

$\boxed{\text{skup } \textbf{celih brojeva } \mathcal{Z} = \{\mathcal{N}\} \cup \{0\} \cup \{-\mathcal{N}\},}$ gde je $-\mathcal{N} = \{-n, n \in \mathcal{N}\}$ i

$-n$ je rešenje jednačine $x + n = 0$.

U strukturi $(\mathcal{Z}, +)$ dodatno važi da svaki element iz skupa celih brojeva ima svoj suprotan ceo broj za inverzni u odnosu na operaciju sabiranja: $x + (-x) = 0,\ x \in \mathcal{Z}$. Rešenje jednačine 1) u skupu $\mathcal{Z}$ se dobija kao $b + (-a)$. U skupu celih brojeva se može definisati **apsolutna vrednost** broja kao unarna operacija

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ova unarna operacija prema sabiranju i množenju se odnosi po sledećim pravilima:
1. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**nejednakost trougla**)
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $|x - y| \geq ||x| - |y||$

### 1.5.3 Racionalni brojevi

Operacija množenja na skupu $\mathcal{Z}$ nema novih osobina. Jednačinu
2) $\quad x \cdot a = b \quad a, b \in \mathcal{Z}$ i $a \neq 0$
ne možemo da rešimo u okviru skupa celih brojeva, sem u slučajevima kada je zadovoljeno da $a|b$. Zato proširujemo skup celih brojeva na

$$\boxed{\text{skup } \textbf{racionalnih brojeva } \mathcal{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in \mathcal{Z},\ y \in \mathcal{N} \right\}.}$$

Rešenje jednačine 2) u skupu $\mathcal{Q}$ se dobija kao $\dfrac{b}{a}$. Kako sada svaki broj oblika $\dfrac{x}{y}$ iz skupa $\mathcal{Q} \setminus \{0\}$ ima svoj inverzni u odnosu na operaciju množenja: $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{y}{x} = 1$.

U ovako definisanom skupu racionalnih brojeva javlja se potreba (zbog različitih zapisa jednakih brojeva, npr., $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = ...$) da se definiše kada su dva racionalna broja jednaka:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \Leftrightarrow\ a \cdot d = c \cdot b}. \qquad \text{Slično, } \boxed{\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \ \Leftrightarrow\ a \cdot d \leq c \cdot b}.$$

Skup prirodnih (celih) brojeva nije imao osobinu da se između bilo koja dva različita prirodna (cela) broja nalazi prirodan (ceo) broj. Međutim, ovakvu osobinu ima skup racionalnih brojeva:

*Za bilo koja dva različita racionalna broja postoji racionalan broj koji je između njih.*

**Dokaz.** Neka su $\dfrac{a}{b}$ i $\dfrac{c}{d}$ dva racionalna broja pri čemu je $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \ \Leftrightarrow\ a \cdot d < c \cdot b$. Tada racionalan broj $\dfrac{a+c}{b+d}$ jeste između njih: $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$. Zaista, iz sledećeg niza ekvivalentnih nejednakosti imamo:
$a \cdot d < c \cdot b \ \Leftrightarrow\ a \cdot d + c \cdot d < c \cdot b + c \cdot d \ \Leftrightarrow\ (a+c) \cdot d < c \cdot (b+d) \ \Leftrightarrow\ \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$. Na sličan način, pokazuje se i druga zahtevana nejednakost. $\square$

Posledica prethodne teoreme je da se između svaka dva različita racionalna broja nalazi beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

**Decimalni zapis racionalnih brojeva**

Svaki racionalan broj može se poznatim postupkom deljenja brojioca sa imeniocem svesti na tzv. *decimalni zapis* sa konačno ($\dfrac{1}{4} = 0,25$) ili beskonačno ($\dfrac{1}{6} = 0,3333... = 0,\dot{3}$ ili $\dfrac{13}{7} = 1,85714285714... = 1,\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}$) mnogo decimalnih mesta koja se počevši od neke pozicije periodično ponavljaju. Iznad cifara koje se ponavljaju stavljamo tačke da bismo označili period ponavljanja.

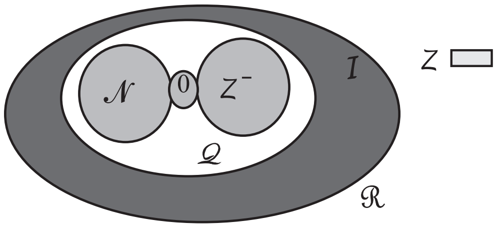
### 1.5.4 Realni brojevi

Iako su racionalni brojevi "gusti", oni ipak nisu dovoljni da izraze čak ni dužine, a kamoli površine i zapremine. Recimo, dužina dijagonale jediničnog kvadrata nije racionalan broj, kako sledi iz sledećeg stava.

**Stav.** *Ne postoji racionalan broj $x$ tako da je $x^2 = 2$.*

**Dokaz.** Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji racionalan broj $\frac{a}{b}$ tako da je $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, pri čemu bez umanjenja opštosti možemo uzeti da su $a$ i $b$ uzajamno prosti. Tada je $a^2 = b^2 \cdot 2$, što implicira da je $a$ paran broj. Neka je $a = 2k, k \in \mathcal{Z}$, tada je $4 \cdot k^2 = 2 \cdot b^2$ sledi da je i $b$ paran broj. Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom da su $a$ i $b$ uzajamno prosti. $\square$

Na osnovu prethodnog stava, rešenja $\sqrt{2} = 1,4142135...$ i $-\sqrt{2}$ jednačine $x^2 = 2$ nisu racionalni brojevi, kao što racionalni brojevi nisu ni $\pi = 3,14...e = 2,718281....$ Iracionalni brojevi su i $\sqrt{5} = 2,2360679775...$, $\sqrt{3} = 1,73205080757...$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ ... (iracionalnih brojeva ima više nego racionalnih).




Slika 6. Skupovi brojeva

Zaključno, svi brojevi koji u decimalnom zapisu imaju beskonačno mnogo decimala koje nemaju periodično ponavljanje su **iracionalni brojevi**. Skup iracionalnih brojeva označavamo sa $\mathcal{I}$.

Skup **realnih brojeva**, $\mathcal{R}$, je unija disjunktnih skupova racionalnih i iracionalnih brojeva

$$\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{I} \cup \mathcal{Q}.}$$

Inkluzivni odnosi ($\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}, \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{R}$) definisanih skupova su Venovim dijagramom predstavljeni na slici 6.

### 1.5.5 Kompleksni brojevi

U skupu realnih brojeva nema rešenja algebarska jednačina $x^2 = -1$. Problem prevazilazimo definisanjem **imaginarne jedinice** $\boxed{i^2 \stackrel{def}{=} -1}$. Skup **kompleksnih brojeva** je

$$\boxed{\mathcal{C} = \{z | z = x + iy, \quad x, y \in \mathcal{R}\}.}$$

Ako je $y = 0$ dobijamo skup realnih brojeva.

Na ovaj način, rešenja jednačine $2x^2+4x+6 = 0$, su $\dfrac{-4 \pm \sqrt{16-48}}{4} = -1 \pm \sqrt{2}i$. Ova rešenja su konjugovano kompleksni brojevi. Uopšte, **konjugovano kompleksni** brojevi $z$ i $\overline{z}$ su oblika $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$ gde su $x, y \in \mathcal{R}$.

Postoji više ekvivalentnih načina zapisivanja kompleksnih brojeva. Dva od njih su:
1. $z = x + iy \qquad x, y \in \mathcal{R},$ po definiciji skupa $\mathcal{C}$;
(koordinate ovako zapisanog kompleksnog broja su $(x, y)$, sl. 7.a)
2. $z = (r, \phi), \quad r \in \mathcal{R}^+ \cup \{0\}, \quad \phi \in [0, 2\pi)$
(Polarne koordinate kompleksnog broja sl. 7.b)

**Geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva**


Slika 7. a) Gausova ravan b) Polarni koordinatni sistem

U Gausovom koordinatnom sistemu (sl. 2.a) imamo dve ortogonalne realne ose. Horizontalna osa nosi vrednost **realnog dela** $x$ kompleksnog broja $z = x + iy$, a vertikalna osa je nosač **imaginarnog dela** $y$. Pišemo, $Re(z) = x$ i $Im(z) = y$. Tako je kompleksan broj $z$ tačka u ravni sa koordinatama $(Re(z), Im(z)) = (x, y)$.

Kompleksan broj u polarnom koordinatnom sistemu je tačka u ravni sa koordinatama $z = (r, \phi)$.

**Radijus** ili **moduo** $r$ kompleksnog broja je njegovo rastojanje od koordinatnog početka, dok je $\phi$ **argument** ili **ugao** koji radijus zaklapa sa pozitivnim delom $x$-ose. Konjugovano kompleksni broj kompleksnog broja $z$ se u opštem slučaju označava sa $\overline{z}$. Konjugovano kompleksni broj kompleksnog broja $z = (r, \phi)$ je $\overline{z} = (r, -\phi)$ (sl. 2.b).

**Moduo** kompleksnog broja $z = x+iy$ označavamo sa $|z|$ i on je jednak $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, i predstavlja rastojanje tačke $z$ od koordinatnog početka. Ako želimo da iz Gausove ravni pređemo u polarni koordinatni sistem za kompleksni broj $z = x + iy$ polarne koordinate su $(|z|, \phi)$, gde je ugao $\phi = \text{arctg}\, \frac{y}{x}$. Suprotno, ako iz polarnog koordinatnog sistema prelazimo u Gausovu ravan, za kompleksni broj $z = (r, \phi)$ koordinate u Gausovoj ravni su $x = r \cdot \cos\phi$ i $y = r \cdot \sin\phi$ (uporedite a) i b) na sl. 2).

## 1.6 Niz brojeva

Niz je preslikavanje skupa prirodnih brojeva ili skupa $\mathcal{N}_0$ u neki skup brojeva. Na primer, preslikavanje $\mathbf{a} : \mathcal{N} \to \{-1, 1\}$ po formuli $\mathbf{a}(n) = (-1)^n$, je niz brojeva $-1, 1, -1, 1, -1, 1....$ Formula $\mathbf{a}(n) = a_n = (-1)^n$, $n \in \mathcal{N}$, se naziva opštim članom niza, a slike preslikavanja $\mathbf{a}$ su $-1$ i $1$, i oni su članovi niza.

### 1.6.1 Geometrijski i aritmetički niz

Niz brojeva:

$$a_1, a_2, a_3 ... a_n ...$$

oblika

$$a, \quad a \cdot q, \quad a \cdot q^2, \quad a \cdot q^3, \quad a \cdot q^4 ...\ aq^n ...$$

pri čemu su $a \neq 0$ i $q \neq 1$ realni brojevi, nazivamo **geometrijskim nizom**. Brojeve koji učestvuju u nizu nazivamo **članovi** niza. Svi članovi niza imaju isti oblik: $a_n = aq^n$, pri čemu je eksponent $n$ prirodan broj ili nula. Član $a_n = aq^n$ nazivamo **opštim članom niza**. Svaki geometrijski niz možemo kraće zapisati preko njegovog opšteg člana. Broj $q$ nazivamo **količnikom** geometrijskog niza jer je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ za sve $n \in \mathcal{N}_0$. Tako bismo niz $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}...$ kraće zapisali kao niz $3\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathcal{N}_0$. Tako su sledeći nizovi brojeva:

**a**: 1, 3, 9, 27, 81...
**b**: 5, 10, 20, 40, 80...
**c**: 1, 0,2, 0,04, 0,008, 0,0016...
geometrijski za parametar $a$ redom jednak 1, 5 i 1 dok je parametar $q$ redom jednak 3, 2 i 0,2.

Formula za zbir prvih $k$ članova geometrijskog niza je,

$$\sum_{i=0}^{k-1} aq^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + ... + a \cdot q^{k-1} = a\frac{1-q^k}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Dokaz ove formule je izveden matematičkom indukcijom u sledećem odeljku.

Na ovaj način brzo sabiramo veći broj članova geometrijskog niza na primer, $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{10} = \dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.

ili recimo

$$4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} = 4 \cdot \frac{1-(\frac{1}{5})^4}{1-\frac{1}{5}} = 4 \cdot \frac{\frac{624}{5^4}}{\frac{4}{5}} = \frac{624}{125}.$$

**Aritmetičkim nizom** nazivamo niz brojeva oblika

$$a, \ a+d, \ a+2d, \ a+3d, \ a+4d...\ a+nd...$$

pri čemu su $a$ i $d$ realni brojevi i $d \neq 0$. Svaka dva susedna člana aritmetičkog niza se razlikuju za $d$. Opšti član aritmetičkog niza je oblika $a_n = a + nd$, $n \in \mathcal{N}_0$.

Aritmetički nizovi su na primer:
**a**: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13... 1+2n...
**b**: 3,4, 2,4, 1,4, 0,4, −1,4, −2,4, −3,4... 3,4 −n...
i njih na kraći način možemo da zapišemo pomoću opšteg člana kao niz $a_n = 1 + 2n$, $n \in \mathcal{N}_0$, odnosno kao niz $b_n = 3,4 - n$, $n \in \mathcal{N}_0$.

Zbir prvih $n$ članova aritmetičkog niza se računa po formuli

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a+id) = n \cdot a + d\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(a_0+a_n)}{2}.$$

Znači, zbir prvih $n$ članova aritmetičkog niza se računa tako što saberemo prvi i poslednji član, i taj zbir pomnožimo sa $n/2$. Tako je zbir prvih 7 članova ($n = 6$) niza $a_n = 3 + 2n$, $n \in \mathcal{N}_0$ ($a = 3$, $d = 2$,)

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \frac{7 \cdot (3+15)}{2} = 63.$$

### 1.6.2 Osobine niza

Neki nizovi su takvi da im je svaki sledeći član veći od prethodnog. Njih zovemo **rastući** nizovi. Slično, **opadajući** nizovi su oni kod kojih je svaki sledeći član manji od prethodnog.

Niz je **konvergentan** ukoliko članovi niza *teže* (*konvergiraju*) ka *fiksnom* realnom broju, kada indeks niza $n$ teži $\infty$ (neograničeno raste). Taj broj zovemo *granica* (limes) niza i precizno je definisana u nastavku.

Članovi niza **b**: $\frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}...$ su svi pozitivni, manji od 1 i prilično brzo se smanjuju, pa je jasno da kada $n$ teži $\infty$ opšti član niza **b** teži ka 0. Sa druge strane, vrednosti članovi niza **a**: 1, -1, 1, -1... ne zavise od veličine indeksa $n$, već samo od njegove parnosti, i očigledno opšti član $a_n$ ne teži jednom fiksnom realnom broju. Za niz **c**, sa opštim članom $c_n = \sin n,\ n \in \mathcal{N}$, nije jednostavno utvrditi da li ima granicu ili ne.

Niz **a konvergira** ka **granici** $g$, što označavamo sa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g, \quad \text{ili sa} \quad a_n \to g \text{ kad } n \to \infty,$$

ako za svaki pozitivan realan broj $\epsilon$, postoji indeks niza $n_0 \in \mathcal{N}$, tako da *svi članovi niza sa indeksom većim od* $n_0$ pripadaju intervalu $(g-\epsilon, g+\epsilon)$.

Ovaj otvoreni interval je podskup skupa realnih brojeva, i naziva se $\epsilon$ **okolina broja** $g$. U $\epsilon$ okolini broja $g$ su svi realni brojevi čija je udaljenost od $g$ manja od $\epsilon$. Kako $\epsilon$ može biti veoma mali pozitivan broj, na primer $10^{-1}, 10^{-5}, 10^{-12}$... sledi da kada postoji granica niza, članovi niza se "neograničeno zgušnjavaju" oko granice. Međutim "zgušnjavaje" oko nekog broja ne obezbeđuje uvek postojanje granice niza. Tako niz

**p**: $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 9, \frac{1}{8}, 27, \frac{1}{16}$...

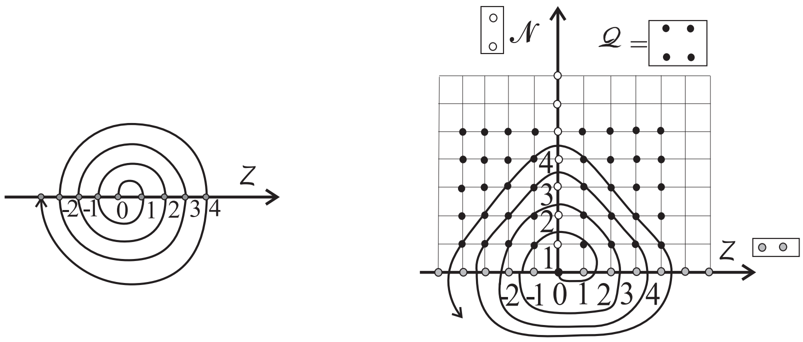
ima neograničeno rastuće neparne članove $p_1, p_3, p_5$..., a parni članovi $p_2, p_2, p_6$... se "zgušnjavaju" ka 0, ali 0 nije granica ovog niza. Broj 0 je tačka nagomilavanja ovog niza. Ukoliko u *svakom intervalu* koji sadrži broj **t** ima bezbroj članova nekog niza, onda je broj **t tačka nagomilavanja** tog niza. Tako niz **a**: 1, $-1$, 1, $-1$... ima dve tačke nagomilavanja 1 i $-1$.

Niz je **ograničen odozdo** ukoliko postoji realan broj od koga su svi članovi niza veći. Sledeći nizovi su:
**a**: 1, $-2$, 3, $-4$, 5, $-6$, 7...
**b**: 1, 2, 3, 4...
**c**: $-1$ $-2$, $-3$, $-4$, $-5$...
**a** neograničen i odozgo i odozdo, **b** neograničen odozgo i ograničen odozdo, a niz **c** neograničen odozdo i ograničen odozgo.

Niz može imati najviše jednu granicu niza, dok može imati više tačaka nagomilavanja. Kako je tačka nagomilavanja niza realan broj u čijoj *svakoj okolini* se nalazi bezbroj članova tog niza, nizovi **a**, **b** i **c** nemaju tačku nagomilavanja, dok niz **d**: 1, 0,$-1$, 1, 0, $-1$, 1, 0, $-1$... ima tri tačke nagomilavanja 1, 0 i $-1$. Iz ovog primera nam je jasno da niz može imati bilo koji konačan broj tačaka nagomilavanja. Međutim granica niza, ukoliko postoji, je jedinstvena. Ukoliko niz ima samo jednu tačku nagomilavanja, ona može, ali i ne mora biti njegova granica. Niz **p**: $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 9, \frac{1}{8}, 27, \frac{1}{16}$... ima jedinstvenu tačku nagomilavanja koja nije njegova granica.

## 1.7 Kardinalnost skupova

Kada skup ima konačan broj elemenata, onda nema dileme o ukupnom broju elemenata (kardinalnosti) takvog skupa. Međutim, kada se posmatraju skupovi sa beskonačno mnogo elemenata, kao što su skupovi $\mathcal{N}, \mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{I}$, prva ideja je da su oni iste kardinalnosti, ali nije tako. U ovom odeljku ćemo pokazati da skupovi prirodnih, celih i racionalnih brojeva imaju istu kardinalnost, dok skupovi iracionalnih, realnih i kompleksnih brojeva imaju međusobno istu, ali striktno veću kardinalnost nego što je kardinalnost, npr, skupa $\mathcal{N}$.




a) b)

Slika 8. Skupovi $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{Q}$ su prebrojivi

Na osnovu sledeće definicije utvrđujemo kada je neki skup sa beskonačno mnogo elemenata:

*Skup $S$ je* **beskonačan** *ukoliko postoji bijekcija između pravog podskupa skupa $S$ i skupa $S$.*

Tako je skup prirodnih brojeva beskonačan, jer je preslikavanje $f(n) = 2 \cdot n,\ n \in \mathcal{N}$, bijektivno preslikavanje između svih prirodnih brojeva i parnih prirodnih brojeva, koji su pravi podskup prirodnih brojeva.

Skup prirodnih brojeva $\mathcal{N}$ se naziva *beskonačno prebrojiv* skup, ili samo *prebrojiv* skup, a njegov kardinalni broj (kardinalnost) se označava sa $|\mathcal{N}| = \aleph_0$ i čita se alef[8]-nula.

*Skup $S$ je* **prebrojiv** *ukoliko postoji bijekcija između skupa $S$ i skupa prirodnih brojeva $\mathcal{N}$.*

*Skupovi celih i racionalnih brojeva su prebrojivi.*

**Dokaz.** Na slici 8.a je dat šematski prikaz bijektivnog preslikavanja $f_1$ između skupa celih brojeva i skupa prirodnih brojeva: $f_1(1) = 0, f_1(2) = 1, f_1(3) = -1, f_1(4) = 2...$ .

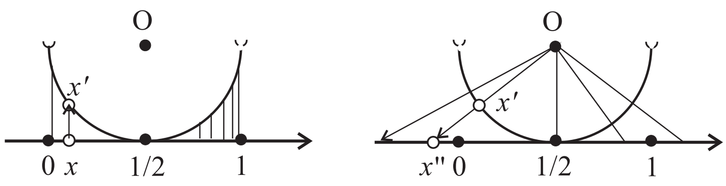
Skup racionalnih brojeva smo definisali $\mathcal{Q} = \left\{ \dfrac{x}{y} \mid x \in \mathcal{Z},\ y \in \mathcal{N} \right\}$. Racionalni brojevi su na sl. 8.b označeni crnim kružićima. Bijektivno preslikavanje $f_2$ je grafički prikazano na sl. 8.b, krivom linijom koja počinje u koordinatnom početku i redom prolazi

[8] $\aleph$ je prvo slovo hebrejskog pisma.

kroz sledeće racionalne brojeve: 0, 1/1, -1/1, 2/1, 1/2, -1/2, -2/1, 3/1, 2/2, 2/3, -1/3, -2/2, -3/1... . Tim redom se vrši preslikavanje u skup prirodnih brojeva. □

Skup iracionalnih, a samim tim i skup realnih i kompleksnih brojeva, nisu prebrojivi. Štaviše, ni interval [0,1] nije prebrojiv.

*Skup realnih brojeva iz intervala [0,1] nije prebrojiv.* Dokaz ovog tvrđenja može da se nađe u [17].




a) b)

Slika 9. Bijektivno preslikavanje: $(0, 1) \rightarrow \mathcal{R}$

*Postoji bijektivno preslikavanje između skupa realnih brojeva i skupa realnih brojeva iz otvorenog intervala (0,1).*

**Dokaz.** Prvo bijektivno preslikamo bilo koju tačku $x \in (0, 1)$ u ortogonalnu projekciju na otvorenu polukružnicu sa centrom u $O = (1/2, 1/2)$ i poluprečnikom 1/2 (sl. 9.a). Zatim, centralno projektujemo iz $O$ tačku $x'$ sa polukružnice na $x''$ na realnoj pravoj (sl. 9.b).

Kako je kompozicija bijektivnih preslikavanja bijektivno preslikavanje, na ovaj način je uspostavljena obostrano jednoznačna veza između skupa realnih brojeva iz (0,1) i cele realne ose.

Tako su iste kardinalnosti skup realnih brojeva i njegov pravi podskup interval (0,1). □

# Glava 2.

# 2 Diferencijalni račun

## 2.1 Granična vrednost funkcije

Da bismo definisali graničnu vrednost funkcije podsetimo se niza i njegove granične vrednosti (poglavlje 1.6).

**Nizovi** su funkcije koje preslikavaju skup prirodnih brojeva u skup realnih brojeva.

Tako su nizovi funkcije $a, b, c : \mathcal{N} \to \mathcal{R}$, definisane redom sa

$a(n) = (-1)^n, \qquad b(n) = \dfrac{1}{n^3}, \qquad c(n) = \sin\ n,$ [9]

za svaki prirodan broj $n$. U daljem tekstu ćemo funkciju koja je niz označavati sa masnim slovima kao **a**, **b**, **c**, ...

Uređenost i prebrojivost skupa prirodnih brojeva nam omogućuje da redom slike niza **a** [10] poređamo u niz

$$a(1),\quad a(2),\quad a(3),\quad a(4),\quad a(5),\quad ...$$

realnih brojeva. Stoga je uobičajeno da se umesto redom $a(1), a(2), a(3), ...$ piše $a_1,\ a_2,\ a_3, ...$ Tako zapisujemo i **opšti član niza a** sa $a_n,\ n \in \mathcal{N}$. Nizovi se najčešće zadaju njihovim opštim članom.

Tako, na primer, sledeći niz brojeva (označimo ga sa **a**)

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{10},\ ...$$

ima opšti član oblika $\dfrac{1}{n},\ \ n \in \mathcal{N}$. Njegovi članovi su redom $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{3}, ...$

Geometrijski i aritmetički niz se često pojavljuju u jednostavnijim problemima. Zato su detaljnije obrađeni u poglavlju 1.6.1. Formula za određivanje zbira prvih $n$ članova geometrijskog niza je već korištena u uvodnom odeljku privrednog računa (4.2.1), međutim na zanimljivije pitanje da li postoji zbir *svih* članova nekog niza, odgovor se može naći na primer u [9].

Kod geometrijskog i aritmetičkog niza, članove niza smo redom označili sa

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad ...$$

Znači, prvi član niza je $a_0$, drugi je $a_1$, treći $a_2$,... Stoga su oni preslikavanje proširenog skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva $\mathbf{a} : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{R}$, a ne $\mathcal{N} \to \mathcal{R}$. Razlozi su tehničke prirode i mogu se izbeći.

Neki nizovi su takvi da im je svaki sledeći član veći od prethodnog. Njih zovemo **rastući** nizovi. Slično, **opadajući** nizovi su oni kod kojih je svaki sledeći član manji od prethodnog.

---

[9] sin računamo u radijanima

[10] Za niz **a** u literaturi se koriste i oznake $(a)_{n\in\mathcal{N}}$ [9], $\{a_n\}$ [11] ili $(a_n)$ [18].

Niz je **konvergentan** ukoliko članovi niza *teže* ( *konvergiraju*) ka *fiksnom* realnom broju, kada indeks niza $n$ teži $\infty$ (neograničeno raste). Taj broj zovemo *granica* (limes) niza.

Članovi niza **b** : $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, ...$ su svi pozitivni, manji od 1 i prilično brzo se smanjuju, pa je jasno da kada $n$ teži $\infty$ opšti član niza **b** teži ka 0. Sa druge strane, članovi niza **a** se isto ponašaju, bez obzira na vrednost indeksa $n$: 1, -1, 1, -1, ... i očigledno ne teže jednom fiksnom realnom broju. Za niz **c**, sa opštim članom $c_n = \sin n, \ n \in \mathcal{N}$, nije jednostavno utvrditi da li ima granicu ili ne.

Niz **a konvergira** ka **granici** $g$, što označavamo sa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g, \quad \text{ili sa} \quad a_n \to g \text{ kad } n \to \infty,$$

ako za svaki pozitivan realan broj $\epsilon$, postoji indeks niza $n_0 \in \mathcal{N}$, tako da svi članovi niza sa indeksom većim od $n_0$ pripadaju intervalu $(g-\epsilon, g+\epsilon)$.

Ukoliko je rastući niz **ograničen odozgo**, što znači da su svi članovi niza manji od nekog broja, on je i konvergentan.

Jedan takav konvergentan (rastući i ograničen odozgo) niz je niz **e** sa opštim članom oblika: $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathcal{N}$. Posebna interesantnost ovog niza je što je potreba za njegovim proučavanjem proistekla iz bankarstva. Lako je izračunati (proverite) da su članovi ovog niza, redom, sledeći realni brojevi:
$e_1 = 2, \ e_2 = 2,25, \ e_3 = 2,\dot{3}\dot{7}, \ e_4 = 2,4414, \ e_5 = 2,48832... \ e_{100} = 2,70481... \ e_{10000} = 2,71825...$

Što je veći indeks niza **e** to je odgovarajući član niza bliže iracionalnom broju $e$=2,71828182846... koji je granica niza. Znači, važi da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Problem određivanja granice niza **e** je postavio poznati švajcarski matematičar Jakov Bernuli na osnovu sledećeg "zelenaškog" zadatka:
Ako kreditor da izvesnu sumu novca na zajam sa kamatom, pod uslovom da se u svakom pojedinom trenutku proporcionalni deo godišnje kamate dodaje kapitalu, koliko će mu se dugovati na kraju godine?

Analizirajmo problem na pojednostavljenim parametrima. Neka pozajmljen kapital iznosi 1 dinar i neka je godišnja kamata 100%. Tada bi uz mesečno ukamaćivanje dug na kraju godine bio $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$, dok bi sa dnevnim ukamaćivanjem dug na kraju godine bio $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$. Neprekidnim (kontinuiranim) ukamaćivanjem (svakog trenutka se dug uvećava za kamatu), ukupan dug na kraju godine bi bio

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{dinara.}$$

Napomena. Broj $e$ je iracionalan. Drugi, veoma poznat iracionalan broj je $\pi$. On je povezan sa merama (površina, obim kruga... ) geometrijskih objekata i otkriven je mnogo ranije od iracionalnog broja $e$.

**Granična vrednost realne funkcije**

Da bismo sa granice niza (specijalne realne funkcije), prešli na granicu opšte realne funkcije, potrebno je da uvedemo pojam tačke nagomilavanja.

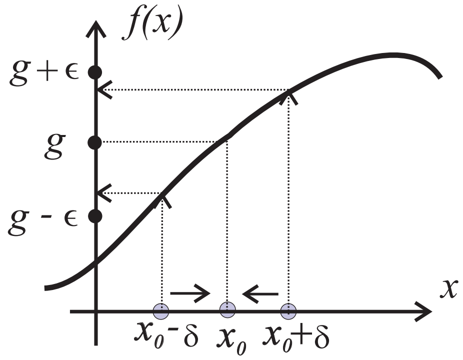
*Realan broj $x_0$ je* **tačka nagomilavanja** *skupa $D$ ako u svakom otvorenom intervalu oko tačke $x_0$ postoji bar jedan element skupa $D$, različit od $x_0$, odnosno, ako*

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in D, x \neq x_0)\ |x - x_0| < \delta.$$

Prethodna definicija ima za posledicu: ako je tačka $x_0$ tačka nagomilavanja skupa $D$ onda je u svakom otvorenom intervalu oko tačke $x_0$ bezbroj elemenata skupa $D$. Naime, ako posmatramo proizvoljno $\delta_1 > 0$, po definiciji tačke nagomilavanja, postoji tačka $x_1 \in D$, tako da je $x_1 \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$. Zatim izaberemo $0 < \delta_2 < |x_0-x_1|$ tako da tačka $x_1 \notin (x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$, međutim, mora postojati nova tačka $x_2$ iz skupa $D$ tako da $x_2 \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Tačka $x_2$ pripada i prvom intervalu jer je $\delta_2 < \delta_1$. Izborom novih, sve manjih $\delta_i > 0$ i novih tačaka $x_i$ koje bi pripadale i početnom intervalu, početni interval bi sadržao bezbroj tačaka iz skupa $D$.

Primeri.

1. Tačke nagomilavanja otvorenog intervala $(1, 2)$ su sve tačke zatvorenog intervala $[1, 2]$.
2. Tačke nagomilavanja skupa $\{\frac{(-1)^n \cdot n}{n+1},\ n \in \mathcal{N}\}$ su -1 i 1.
3. Jedina tačka nagomilavanja skupa $\{\frac{1}{n^2},\ n \in \mathcal{N}\}$ je 0.




Slika 10. Funkcija $f$ ima graničnu vrednost u tački $x_0$

*Neka je realna funkcija $f$ definisana sa $f : D \to R$, na domenu $D \subset \mathcal{R}$. Neka je $x_0$ tačka nagomilavanja skupa $D$. Tada kažemo da funkcija $f$ ima* **graničnu vrednost** $g$ **u tački** *$x_0$ ako za svaki pozitivan broj $\epsilon$ postoji pozitivan broj $\delta$ ($\delta$ zavisi od $x_0$ i od $\epsilon$, $\delta(\epsilon, x_0)$) tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in D)(\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \epsilon\ ).$$

*Tada pišemo da je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

*i čitamo limes funkcije $f$ kad $x$ teži $x_0$ je broj $g$.*

Na sl. 10 je data ilustracija $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$. Uočimo da je bitan detalj da za svaki interval (proizvoljno mali) oko tačke $g$, postoji interval oko tačke $x_0$ tako da su slike svih tačaka iz tog intervala, unutar intervala oko $g$.

*Neka je $x_0$ tačka nagomilavanja domena $D$ realne funkcije $f$. Tada funkcija $f$ ima* **desnu graničnu vrednost** $d$ **u tački** $x_0$ *ako je zadovoljeno da za svaki pozitivan broj $\epsilon$ postoji pozitivan broj $\delta$ tako da važi implikacija* $(\forall x \in D)(\ 0 < x - x_0 < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - d| < \epsilon\ )$, *što zapisujemo sa*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = d.$$

Kod desne granične vrednosti posmatramo šta se dešava kada se približavamo tački $x_0$ preko brojeva većih od $x_0$.

Leva granična vrednost funkcije nastaje kada težimo tački $x_0$ preko brojeva koji su manji od $x_0$:

*Neka je $x_0$ tačka nagomilavanja domena $D$ realne funkcije $f$. Tada funkcija $f$ ima* **levu graničnu vrednost** $l$ **u tački** $x_0$ *ako je zadovoljeno da za svaki pozitivan broj $\epsilon$ postoji pozitivan broj $\delta$ tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in D)(\ 0 < x_0 - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon\ ),$$

*što zapisujemo sa*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = l.$$

*Neka domen $D$ realne funkcije $f$ sadrži interval $(-\infty, a)$ (odn. $(b, +\infty)$), tada $f$ ima* **graničnu vrednost** $g$ **u** $-\infty$ *(odn.* **u** $+\infty$*) ako je zadovoljeno da za svaki pozitivan broj $\epsilon$ postoji pozitivan broj $M$ tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in D)(\ x < -M\ \ (odn.\ x > M)) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \epsilon\ ),$$

*što zapisujemo sa*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = g \quad (odn.\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = g\ ).$$

Jedna od najdirektnijih primena granične vrednosti funkcije je određivanje asimptota grafika funkcija.

### 2.1.1 Asimptote grafika funkcije

Prava sa jednačinom $y = kx + n, \quad k, n \in \mathcal{R}$, je asimptota grafika funkcije $f$ ukoliko se funkcija u beskonačnosti“ponaša” isto kao i prava, odnosno ako je

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x) - (kx + n)) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x\to -\infty}(f(x) - (kx + n)) = 0.$$

Odnosno, prava $y = kx + n$ je asimptota funkcije $f$ ako se rastojanje između odgovarajućih tačaka $(x, f(x))$ i $(x, kx + n)$ njihovih grafika neograničeno smanjuje (teži 0) kada argument $x$ ovih funkcija neograničeno raste (teži $+\infty$) ili opada (teži $-\infty$).

U odnosu na položaj asimptote prema koordinatnim osama razlikujemo tri tipa asimptota: **vertikalne, kose i horizontalne** asimptote.

**Vertikalna asimtota** $x = x_0$, nastaje kada je:

$$(\lim_{x\to x_0+} f(x) = +\infty \ \veebar \ \lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty) \ \vee (\lim_{x\to x_0-} f(x) = +\infty \ \veebar \ \lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty).$$

Tačka $x_0$ je najčešće tačka u kojoj funkcija $f$ nije definisana, ali je tačka nagomilavanja domena funkcije.

Ima 8 različitih situacija u kojima je ispunjena prethodna formula oblika

$$(p \veebar q) \ \vee \ (r \veebar s).$$

Dovoljno je da jedan od četiri limesa bude tačan (4 mogućnosti: $(v(p), v(q), v(r), v(s)) \in \{(\top, \bot, \bot, \bot), (\bot, \top, \bot, \bot), (\bot, \bot, \top, \bot), (\bot, \bot, \bot, \top),\})$ ili po dva limesa, jedan sa jedne a drugi sa druge strane "obične" disjunkcije (4 mogućnosti: $(v(p), v(q), v(r), v(s)) \in \{(\top, \bot, \top, \bot), (\bot, \top, \top, \bot), (\top, \bot, \bot, \top), (\bot, \top, \bot, \top),\})$. Naskicirajte 8 grafika funkcija koje bi redom ispunjavale ovih 8 različitih situacija za vertikalnu asimptotu $x = x_0$.[11] Kod vertikalne asimptote leva i desna granična vrednost mogu biti različite u tački $x_0$.

**Horizontalna asimtota** $y = a$, nastaje kada postoji konačna granična vrednost funkcije u beskonačnosti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \vee \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a \ , \quad a \in \mathcal{R}.$$

Kako $f(x)$ može da teži $a$ ili preko brojeva većih od $a$, tj. da teži $a^+$ ili preko brojeva manjih od $a$, tj. da teži $a^-$ imamo dve ekskluzivno disjunktne situacije za ponašanje vrednosti funkcije. Dakle kada $x \to \pm\infty$ ako $f(x) \to a^+$ tada je grafik funkcije iznad horizantalne asimptote $y = a$, a ispod asimptote ako $f(x) \to a^-$. Kao i kod vertikalne asimptote i kod horizontalne imamo 8 različitih situacija za položaj grafika funkcije u odnosu na asimptotu. Skicirajte ih.

**Kosa asimptota** $y = kx + n, \quad k \neq 0$, u $+\infty$ ili $-\infty$, nastaje kada postoji granična vrednost

$$0 \neq k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \text{ Zatim određujemo i } n, \quad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$$

Ukoliko je prvi limes jednak 0 onda funkcija $f$ nema kosu asimptotu. Slični alternativni zahtevi za egzistenciju kose asmptote treba da budu ispunjeni ili kad $x \to -\infty$ ili kad $x \to \pm\infty$. Dodatno, postoje dve isključive mogućnosti za ponašanje funkcije $\frac{f(x)}{x}$ u prvom limesu - ili teži ka $k^+$ ili ka $k^-$. U prvom slučaju grafik funkcije $f(x)$ je iznad, a u drugom ispod grafika asimptote $y = kx + n$ u asimptotskom ponašanju funkcije. Dakle naveli smo 6 suštinski različitih načina za egzistenciju kose asimptote. Skicirajte ih.

Moguća su još dva dodatna uslova za ekzistenciju kose asimptote:

- $$0 \neq k^- = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad k^+ = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x};$$

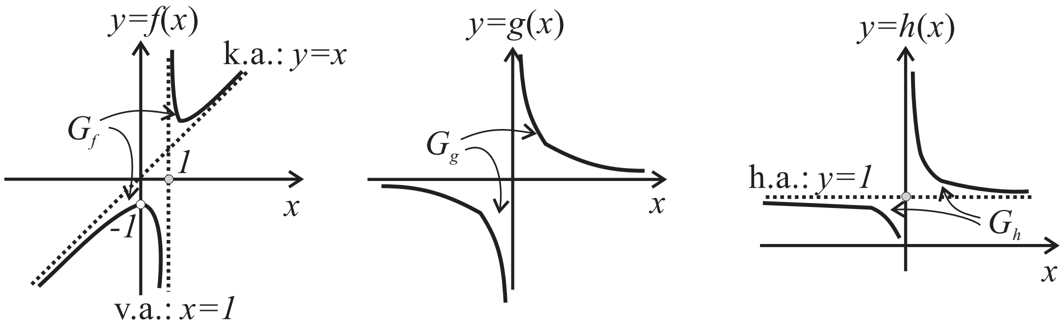
[11] Disjunkcija - $\vee$ i ekskluzivna disjunkcija - $\veebar$ su definisane u poglavlju 1.2.1.

- $$0 \neq k^+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad k^- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Pogledajte grafik prve funkcije $f$ na slici 11. Ova funkcija ima kosu asimptotu za koju je ispunjen drugi od upravo navedenih uslova, grafik je iznad kose asimptote kad $x \to +\infty$, a ispod kad $x \to -\infty$. Ukoliko je $f(x)$ neprekidna na celom domenu u ova dva slučaja grafik $f$ mora da seče kosu asimptotu. U primeru na sl. 11 to nije slučaj jer je funkcija sa prekidom u tački 1.

Primeri. Odredimo asimptote za sledeće tri funkcije $f(x), g(x)$ i $h(x)$.[12]

| | | |
|---|---|---|
| 1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1},\ x \neq 1$ | 2. $g(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$ | 3. $h(x) = e^{\frac{1}{x}},\ x \neq 0$ |
| $\lim\limits_{x\to1+} f(x) = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to0+} g(x) = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to0+} h(x) = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to1-} f(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x\to0-} g(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x\to0-} h(x) = 0$ |
| $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ | $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^\pm$ | $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 1^\pm$ |
| $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1^\pm$ <br> $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) =$ <br> $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ | $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 0$ |




Slika 11. Grafici funkcija $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ i $\quad h(x) = e^{\dfrac{1}{x}}$

Funkcija $f$ ima vertikalnu asimptotu $x = 1$ i kosu asimptotu $y = x$. Koordinatne ose su horizontalna i vertikalna asimptota druge funkcije $g(x)$. Treća funkcija, $h$, ima vertikalno asimptotu $x = 0$ (što je $y$-osa) i horizontalnu asimptotu $y = 1$. Na slici 11 su dati grafici ovih funkcija.

Uočimo da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^\pm$ znači $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0^-$. U prvom slučaju broju 0 se približavamo preko brojeva većih a u drugom preko brojeva manjih od 0. Videti drugi grafik na sl. 11.

[12] Oznaka $x \to \infty$, znači da su oba limesa kad $x \to +\infty$ i kad $x \to -\infty$ jednaka. Specijalno, kod granice niza, $n \to \infty$, znači da $n \to +\infty$. Kada pod limesom pišemo $x \to \pm\infty$, to znači da smo oba limesa zajedno posmatrali, ali da postoje neke razlike u ponašanju funkcije, koje želimo da naglasimo.

### 2.1.2 Teoreme o graničnim vrednostima funkcija

*Funkcija $f$ ima graničnu vrednost u tački $x_0$, ako i samo ako ima i levu i desnu graničnu vrednost u tački $x_0$ i one se poklapaju.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) = g = \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

*Neka su funkcije $f$ i $g$ definisane na $(c,d)$, $f,g:(c,d)\to R$, i neka je $x_0$ tačka nagomilavanja intervala $(c,d)$. Ako postoje granične vrednosti $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ tada postoje i sledeće granične vrednosti u tački $x_0$:*

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$;
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = a \cdot b$;
- $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}$ *za* $b \neq 0$.

*Neka su funkcije $f$ i $g$ definisane na $(c,d)$, $f,g:(c,d)\to R$, i neka je $x_0$ tačka nagomilavanja domena $(c,d)$. Ako postoje granične vrednosti $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ i ako je $(\forall x\in(c,d))\ \ f(x)\le g(x)$, tada je i $a\le b$.*

*(**Stav o uklještenju**) Neka su funkcije $f$, $g$ i $h$ definisane na $(c,d)$, $f,g,h:(c,d)\to R$, i neka je $x_0$ tačka nagomilavanja domena $(c,d)$. Ako postoje granične vrednosti $\lim_{x\to x_0} f(x) = a = \lim_{x\to x_0} g(x)$ i ako je $(\forall x\in(c,d))\ \ f(x)\le h(x)\le g(x)$, tada postoji i granična vrednost funkcije $h$, u tački $x_0$ i $\lim_{x\to x_0} h(x) = a$.*

*(**Osobine limesa**) Neka je $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Tada je*

- $\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim_{x\to x_0} f(x))^n = a^n, \quad n\in\mathcal{N}$ ;
- $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{a}, \quad n\in\mathcal{Z}$
  *(ako je $n$ paran broj potrebno je da je $f(x)>0$)* ;
- $\lim_{x\to x_0}\log f(x)) = \log(\lim_{x\to x_0} f(x)) = \log a, \quad$ *za* $f(x)\ge 0$ ;
- $\lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} f(x)} = e^a$ .

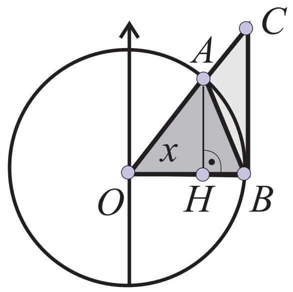
Predhodne teoreme važe i kad $x\to+\infty$ ili kad $x\to-\infty$ umesto kad $x\to x_0$ pod pretpostavkom da domen funkcije sadrži interval $(-\infty,a)$ ili $(b,+\infty)$ i da odgovarajuće granične vrednosti u pretpostavkama teoreme postoje.

**Neki poznati limesi**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

Da postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ i da je jednaka 1 nije jednostavno direktno zaključiti jer i brojilac i imenilac funkcije teže 0, kad $x$ teži 0. Pokazaćemo da su leva i desna granična vrednost funkcije $\dfrac{\sin x}{x}$ u 0 jednake 1, tada sledi da postoji granična vrednost i da je i ona jednaka 1.

Pokažimo prvo da je $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1.$




Slika 12.

Posmatrajmo jediničnu kružnicu na slici 12, i ugao $x$ u radijanima, tako da važi $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Jasno je da je površina $P_1$ trougla $OAB$ manja od površine $P_2$ kružnog isečka nad lukom $AB$ koja je manja od površine $P_3$ trougla $OBC$. Kako su duži $OA$ i $OB$ jedinične sledi da su dužine visine $AH$ trougla $OAB$ i katete pravouglog trougla $OBC$ redom jednake $AH=\sin x$ i $BC=\operatorname{tg} x$. Površina kružnog isečka jednaka je polovini proizvoda, kvadrata poluprečnika i ugla. Sledi da je
$P_1=\frac{1}{2}AH\cdot OB=\frac{1}{2}\sin x,\quad P_2=\frac{1}{2}OA^2\cdot x=\frac{1}{2}\,x,\quad P_3=\frac{1}{2}OB\cdot BC=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Nejednakost površina je ekvivalentna sa
$P_1\le P_2\le P_3 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x\le x\le \operatorname{tg} x$. Pošto je $\sin x$ na intervalu $(0,\pi/2)$ pozitivan, deljenjem prethodne nejednakosti sa $\sin x$ dobijamo da je:
$1\le\dfrac{x}{\sin x}\le\dfrac{1}{\cos x}$. Recipročne vrednosti su tada u odnosu:

$$1\ge\frac{\sin x}{x}\ge\ \cos x,\qquad \text{za svako}\quad x\in(0,\pi/2).$$

Kako je 0 tačka nagomilavanja intervala $(0,\pi/2)$ i kako postoje i jednake su sledeće granične vrednosti: $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x=1=\lim\limits_{x\to 0+}1$, po stavu o uklještenju sledi da je $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Leva granična vrednost je takođe jednaka $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=1$, jer je funkcija $\dfrac{\sin x}{x}$, parna. Kako su leva i desna granična vrednost funkcije $\dfrac{\sin x}{x}$ u tački $x=0$ jednake 1 sledi da je granična vrednost jednaka 1, tj. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Pokažimo da je $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$. Poznato je da je realan broj $e$ granica niza $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

Ako sa $[x]$ označimo najveći ceo deo [13] od $x$, može se pokazati da je

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \le (1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}.$$

Kako su, redom, granične vrednosti $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$, i $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$ jednake graničnim vrednostima $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$, na osnovu stava o uklještenju je i $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Sa druge strane, nakon smene $x = -y$ imamo
$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} = \lim\limits_{y\to+\infty}((\frac{y-1}{y})^{-1})^y = \lim\limits_{y\to+\infty}(\frac{y}{y-1})^y$
$= \lim\limits_{y\to+\infty}(\frac{y-1+1}{y-1})^y = \lim\limits_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^y$. Poslednja granična vrednost je nakon smene $t = y-1$ jednaka $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t \cdot \lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t}) = e\cdot 1$, što je i trebalo pokazati da bismo zaključili da je $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

U sledeća tri primera ćemo pokazati kako se može koristiti prethodna granična vrednost za nalaženje novih graničnih vrednosti.

Primer 1. $\boxed{\lim\limits_{t\to0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = e}$

Dovoljna je smena $x = \frac{1}{t}$ koja teži $\infty$ kad $t$ teži 0.
$\lim\limits_{t\to0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+1)^x = e$.

Primer 2. Pokažimo sad da je $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1.}$

Uvedimo smenu $t = e^x - 1$, kad $x$ teži 0 tada $t$ teži takođe 0, dok je $x = \ln(t+1)$. Sledi
$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\ln(t+1)} = 1/(\lim\limits_{t\to0}\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}) = 1/(\ln(\lim\limits_{t\to0}(t+1)^{\frac{1}{t}})) = \frac{1}{\ln e} = 1.$

Primer 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^{-x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^{-x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^3 = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^x}\cdot 1 =$
$\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}((\frac{1}{2x}+1)^{2x})^{1/2}} = \frac{1}{(\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^{2x})^{1/2}} = \frac{1}{(\lim\limits_{y\to\infty}(\frac{1}{y}+1)^y)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Koristili smo smenu $y = 2x$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0$.

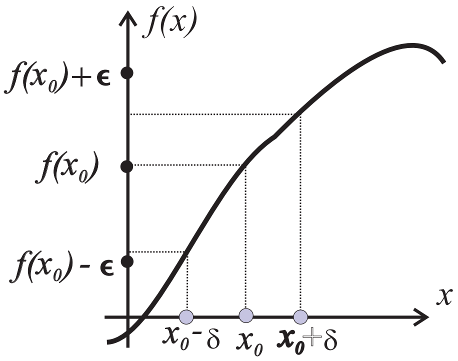
[13] Na primer, [6,7]=6, [6,2]=6, [-2,36] =-3, ...

### 2.1.3 Neprekidnost funkcije

Neprekidnost funkcija će nam omogućiti da jednostavnije primenjujemo granične procese nad njima.

*Neka je realna funkcija $f$ definisana sa $f : D \to R$. Neka tačka $x_0 \in D$. Tada kažemo da je funkcija $f$* **neprekidna** *u* **tački** *$x_0$ ako za svaki pozitivan broj $\epsilon$ postoji pozitivan broj $\delta$ ($\delta$ zavisi od $x_0$ i od $\epsilon$, $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$) tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in D)(\ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\ ).$$




Slika 13. Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački $x_0$

*Funkcija $f : [a, b] \to \mathcal{R}$, je neprekidna u tački $x_0 \in [a, b]$, ako i samo ako postoji granična vrednost u tački $x_0$ i jednaka je $f(x_0)$, tj.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Neka je funkcija $f : D \to R$.*

*Funkcija $f$ je* **neprekidna na otvorenom intervalu** *$(a, b) \subset D$ ako je neprekidna u svakoj tački intervala.*

*Funkcija $f$ je* **neprekidna na zatvorenom intervalu** *$[a, b] \subset D$ ako je*

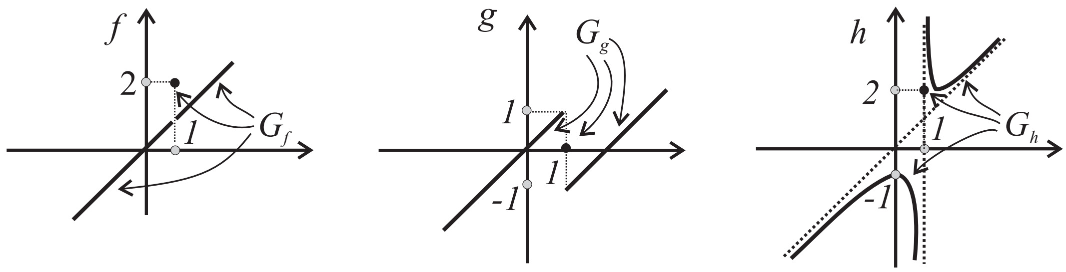
- *neprekidna u svakoj tački otvorenog intervala $(a, b)$;*
- $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$;
- $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

*Funkcija $f$ je* **prekidna u tački** *$x_0 \in D$ ako nije neprekidna u tački $x_0$.*

Postoje tri vrste prekida funkcije u tački, koje ćemo ilustrovati na primerima tri funkcije $f, g$ i $h$ čiji grafici su ilustrovani na sl. 14. Ove funkcije su definisane na celom skupu realnih brojeva, a imaju različite tipove prekide u tački $x = 1$. Funkcija $f(x)$ ima otklonjiv ili prividni prekid, funkcija $g(x)$ ima prekid prve vrste, a funkcija $h(x)$ ima prekid druge vrste. Grafici ovih funkcija $G_f$, $G_g$ i $G_h$ su iz tri dela (dva dela su neograničena a treći je jedna tačka) na koje ukazuju strelice na sl. 14.

**Tipovi prekida funkcije $f$ u tački $x_0 \in D$**

| **prividan prekid** | **prekid prve vrste** | **prekid druge vrste** |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq f(x_0)$ | $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a_1 \neq a_2 \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ | inače |
| $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ | $g(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$ | $h(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ |
| $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$ | $\lim\limits_{x\to 1+} g(x) = 1$<br>$\lim\limits_{x\to 1-} g(x) = -1$ | $\lim\limits_{x\to 1+} h(x) = +\infty$<br>$\lim\limits_{x\to 1-} h(x) = -\infty$ |




Slika 14. Redom su dati grafici funkcije $f$ sa prividnim prekidom, funkcije $g$ sa prekidom prve i funkcije $h$ sa prekidom druge vrste u tački 1

Sa druge strane, funkcija $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, jeste neprekidna na celom domenu definisanosti $\mathcal{R} \setminus \{0\}$.

### 2.1.4 Teoreme o neprekidnosti funkcija

*Ako su funkcije $f$ i $g$ neprekidne u tački $x_0$ tada je:*

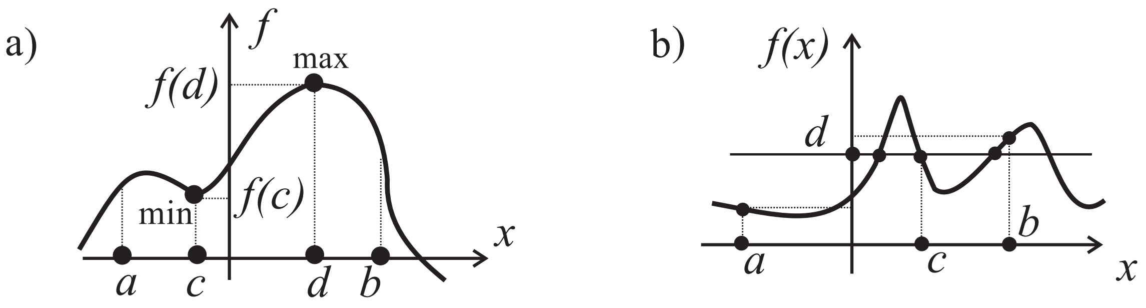
- *zbir (razlika) $f(x) \pm g(x)$ neprekidan u $x_0$;*
- *proizvod $f(x) \cdot g(x)$ neprekidan u $x_0$;*
- *količnik $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ neprekidan u $x_0$, za $g(x_0) \neq 0$.*

Sledeća teorema kaže da neprekidna funkcija na zatvorenom i ograničenom intervalu dostiže svoju maksimalnu i minimalnu vrednost.

*Ako je funkcija $f$ neprekidna na intervalu $[a, b] \subset D_f$ tada postoje tačke $c$ i $d$ koje pripadaju $[a, b]$ tako da je: $\forall x \in [a, b]$ $f(c) \geq f(x)$ i $f(d) \leq f(x)$, što znači da je $f_{max} = f(c)$ i $f_{min} = f(d)$.*

Na sl. 15.a maksimalna vrednost funkcije $f$ na $[a, b]$ je $f(c)$ a minimalna vrednost je $f(d)$.

Ako je funkcija $f$ linearna, primetimo da ona svoju maksimalnu i minimalnu vrednost postiže na krajevima zatvorenog intervala, mada znamo da linearna funkcija nema globalni minimum i maksimum na $\mathcal{R}$.




Slika 15. Osobine neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu

*Ako je funkcija* $f$ *neprekidna na intervalu* $[a,b] \subset D_f$ *i* $f(a) < f(b)$ *tada za svaku vrednost* $d$, *takvu da* $f(a) \leq d \leq f(b)$ *postoji tačka* $c$ *koja pripada* $[a,b]$ *tako da je:* $f(c) = d$.

Jedinstvenost tačke $c$ u prethodnoj teoremi se ne tvrdi, već samo egzistencija, tako, na primer, na sl. 15.b imamo tri kandidata za tačku $c$.

Direktna posledica prethodne teoreme je:

*Ako je funkcija* $f$ *neprekidna na intervalu* $[a,b] \subset D_f$ *i* $f(a) \cdot f(b) < 0$ *tada postoji tačka* $c$ *koja pripada* $(a,b)$ *tako da je:* $f(c) = 0$.

Tačke u kojima funkcija ima vrednost nula se nazivaju **nule** funkcije. Potreban uslov da funkcija ima nulu na intervalu daje prethodna teorema. Ukoliko neka funkcija zadovoljava uslove teoreme možemo primeniti *metodu polovljenja* za eksplicitno nalaženje nule te funkcije.

**Metoda polovljenja**

Neka funkcija $f$ zadovoljava uslove prethodne teoreme na intervalu $[a,b]$. Jedan jednostavan algoritam za nalaženje tačke $c \in (a,b)$, koja je nula funkcije $f$, sastoji se u iterativnom nalaženju sve užih i užih intervala $[a_i, b_i]$, $i = 1, ..., n$ oko tačke $c$. Novi interval se dobija polovljenjem prethodnog intervala. Početni interval je interval $[a,b] = [a_1, b_1]$. Iterativni postupak polovljenja intervala se zaustavlja u $n$-tom koraku kada je na primer, aktuelni interval dovoljno mali, tj. $b_n - a_n < \epsilon_1$, ili je vrednost funkcije u središnjoj tački intervala dovoljno bliska nuli $f(\frac{a_n + b_n}{2}) < \epsilon_2$. Tada uzimamo da je $c \approx \frac{a_n + b_n}{2}$. Vrednosti $\epsilon_1$ i $\epsilon_2$ se zadaju kao ulazne veličine, u zavisnosti od željene preciznosti, to su na primer, $10^{-7}$, $10^{-5}$,... U algoritmu koji dajemo uzeli smo da je $\epsilon_1 = \epsilon_2$ i kombinovali smo oba uslova zaustavljanja iteracija.

### Algoritam metode polovljenja

- **Ulaz:** Funkcija $f$ neprekidna na intervalu $[a,b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, $a_1 = a$, $b_1 = b$. Zadaje se vrednost greške $\epsilon$, odnosno preciznost.

- **Izlaz:** Tačka $c$ za koju je $f(c) \approx 0$.

- **Koraci:** za svako $i = 1, 2, 3, ...$

  1. odredimo sredinu $\frac{a_i + b_i}{2}$ aktuelnog intervala i ako je

$\max\{|f(\frac{a_i+b_i}{2})|, b_i - a_i\} < \epsilon$ zaustavljamo iteracije i uzimamo približno da je $c \approx \frac{a_i+b_i}{2}$, inače prelazimo na korak 2.

2. ako je $f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot f(a_i) < 0$ tada za novi interval biramo $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ pri čemu je $a_{i+1} = a_i$ i $b_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$, zatim idemo na korak 1., u suprotnom idemo na korak 3.
3. ako je $f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot f(b_i) < 0$ tada za novi interval biramo $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ pri čemu je $b_{i+1} = b_i$ i $a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$, zatim idemo na korak 1. u suprotnom, idemo na korak 4.
4. iteracije zaustavljamo, i dobijamo tačnu vrednost $c = \frac{a_i+b_i}{2}$.

Primetimo da se korak 4. u praksi retko događa. On nastaje kada je za neko $i$ nula funkcije baš u sredini $\frac{a_i+b_i}{2}$ aktuelnog intervala.

### 2.1.5 Zadaci

[14]

**2.1.** Odrediti sledeće granične vrednosti:

$$a)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3};\quad b)\ \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-x-12};$$

$$c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4};\quad d)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Rešenje. *a)* 6 *b)* $\frac{4}{7}$ *c)* 3 *d)* 2 .

**2.2.** Naći sledeće granične vrednosti:

$$a)\ \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9};\qquad b)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3};$$

$$c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2};\quad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{x}.$$

Rešenje. *a)* $\frac{1}{6}$ *b)* $\frac{1}{6}$ *c)* 4 *d)* $-\frac{1}{2}$ .

**2.3.** Ako znamo da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ odrediti granične vrednosti:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};\qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 5x};$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2};\quad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin 2x}.$$

Rešenje. *a)* 1 *b)* $\frac{2}{5}$ *c)* $\frac{1}{2}$ *d)* $\frac{1}{4}$ .

**2.4.** Znajući da je $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ odrediti granične vrednosti:

$$a)\ \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}};\qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x;$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+2};\quad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}.$$

[14]Zadaci u ovom odeljku su detaljno urađeni u zbirci rešenih zadataka [27].

Rešenje. $a)$ $e$ $b)$ $e^2$ $c)$ $e^{\frac{1}{2}}$ $d)$ 1. ( Koristite smenu $t = e^x - 1$.)

**2.5.** Nađite sve asimptote sledećih funkcija:

$a)$ $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-9}$; $b)$ $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$;

$c)$ $f(x) = x - \dfrac{3x}{x^2-1}$; $d)$ $f(x) = x \cdot e^{-\dfrac{1}{x^2}}$;

$e)$ $f(x) = (1-x^2)e^{-2x}$; $f)$ $f(x) = x - \dfrac{x(x+1)}{x^2+1}$.

Rešenje. Asimptote su prave: $a)$ $x = 3$, $x = -3$, $y = 0$; $b)$ $x = 0$, $y = x$; $c)$ $x = 1$, $x = -1$, $y = x$; $d)$ $x = 0$, $y = x - 1$; $e)$ $y = 0$; $f)$ $y = 1$.

## 2.2 Diferencijabilnost funkcije

U ovom odeljku uvodimo pojam izvoda realne funkcije. Izvodi funkcije imaju višestruke primene. Neke od njih će biti date u pododeljcima ovog odeljka. Sem toga i u fizičkom svetu izvodi funkcija se sreću kao egzaktne veličine (brzina, ubrzanje, jednačine nekih hemijskih procesa, kretanje nebeskih tela, ...).

Posmatrajmo dve "bliske" vrednosti argumenta funkcije $f$: $x$ i $x+\Delta x$, koje se razlikuju za $\Delta x$. Njihovu razliku $\Delta x$ nazivamo **priraštaj argumenta**. Ako u tim tačkama, $x$ i $x + \Delta x$, posmatramo razliku vrednosti funkcije $f$: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, govorimo o **priraštaju funkcije**. Kod neprekidnih funkcija male promene argumenta uzrokuju male promene vrednosti funkcije. Na primer, za $f(x) = x^2$, je $f(1,01) = 1,0201$ i $f(1,02) = 1,0404$, znači $\Delta x = 0,01$, a $\Delta y = 0,0203$. Međutim male promene argumenta mogu da dovedu do većih promena vrednosti funkcije. Na primer, za funkciju $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ mala promena argumenta $x$ za 0,01 sa vrednosti $x = 1,01$ na vrednost $x = 1,02$ dovodi do promene funkcije za $-7500$. Zaista, razlika vrednosti funkcije u ove dve bliske tačke je $\dfrac{1}{(1-1,02)^2} - \dfrac{1}{(1-1,01)^2} = \dfrac{1}{(2 \cdot 10^{-2})^2} - \dfrac{1}{(10^{-2})^2} = \dfrac{10^4 - 4 \cdot 10^4}{4} = -0,75 \cdot 10^4$. Ovakve situacije nastaju kada se približavamo tački u kojoj funkcija ima prekid ili vertikalnu asimptotu. Za navedeni primer to je tačka $x = 1$.

U graničnom slučaju, kada $\Delta x$ teži 0, količnik priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, posmatramo u sledećoj definiciji.

U graničnom slučaju kada $\Delta x$ teži 0, količnik priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, posmatramo u sledećoj definiciji.

*Neka* $f : (a,b) \to \mathcal{R}$ *i neka* $x_0 \in (a,b)$. **Prvi izvod funkcije** $f$ **u tački** $x_0$ *se definiše kao*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

*ako ovaj limes postoji.*

Izvod u tački $x_0$ može da se definiše i na druge ekvivalentne načine, kao na primer,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

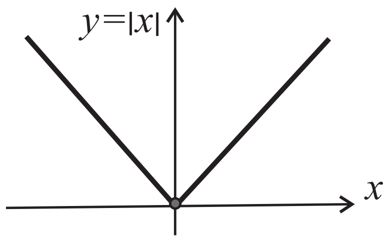
*Funkciju* $f$ *nazivamo* **diferencijabilnom** *u tački* $x_0$ *ukoliko postoji izvod* $f'(x_0)$ *u toj tački.*

*Ako na intervalu* $(a,b)$ *koji je domen funkcije* $f$ *postoji prvi izvod funkcije* $f$ *u svakoj tački* *intervala $(a,b)$ onda definišemo funkciju $f' : (a,b) \to \mathcal{R}$, koja svako $x \in (a,b)$ preslikava u $f'(x)$, i ovu funkciju nazivamo* **prvi izvod funkcije** $f$ *na $(a,b)$.*

Ako u nekoj tački funkcije postoji izvod tada je funkcija i neprekidna u toj tački. Međutim, obrnuto ne važi.

Na primer, funkcija $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ je neprekidna u tački 0, jer je $\lim\limits_{x\to 0+} |x| = \lim\limits_{x\to 0+} x = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0-} |x| = \lim\limits_{x\to 0-} -x = 0$. Grafik ove funkcije je dat na slici 16. Sa druge strane, kada potražimo prvi izvod u 0 vidimo da on ne postoji jer se odgovarajuća leva i desna granična vrednost razlikuju:

$$\lim_{\Delta x\to 0+} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{\Delta x\to 0-} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$




Slika 16. Neprekidna funkcija koja nema prvi izvod u 0.

**Jedan primer izvoda**

Pokazaćemo da brzina predstavlja prvi izvod funkcije pređenog puta. Posmatrajmo funkciju $s(t)$, $t \geq 0$, koja predstavlja ukupnu dužinu puta koji je pređen do vremena $t$ (od početnog trenutka $t = 0$). Na primer, ako smo put od 75 km, Novi Sad - Beograd, prešli za sat vremena, prosečna brzina je bila 75 km/h. Znamo, da srednja brzina kretanja u vremenskom intervalu $(t_1, t_1 + \Delta t)$ predstavlja količnik:
dužina pređenog puta kroz utrošeno vreme, tj. jednaka je $\dfrac{s(t_1+\Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$.

Ukoliko nas interesuje trenutna brzina $v(t_1)$, u trenutku $t_1$, jasno je da bi srednja brzina na itervalu $(t_1, t_1 + \Delta t)$ kada dužina intervala $\Delta t$ teži 0, težila trenutnoj brzini, u trenutku $t_1$, odnosno bila bi jednaka $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{s(t_1+\Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$. Ukoliko poslednja granična vrednost postoji ona je jednaka (uporedite sa definicijom prvog izvoda funkcije $f$ u tački $x_0$) prvom izvodu funkcije dužine pređenog puta u trenutku (tački) $t_1$: $s'(t_1) = v(t_1)$.

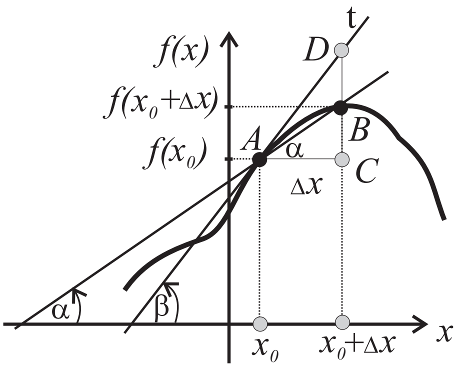
### 2.2.1 Diferencijal funkcije i geometrijski smisao izvoda funkcije u tački

Prvi izvod funkcije $f(x)$ u tački $x_0$ smo definisali kao graničnu vrednost količnika $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ kada priraštaj argumenta $\Delta x$, teži nuli. Ako analiziramo sliku 17, uočavamo da je količnik $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ zapravo tangens ugla $\alpha$, koji prava $AB$ (sečica grafika funkcije) zaklapa sa pozitivnim delom $x$-ose. Međutim, kada priraštaj nezavisne promenljive $\Delta x$ teži 0, tačka $B$ teži tački $A$ preko grafika funkcije $f$, a sečica

$AB$ teži tangenti $t$ u tački $A$ grafika. Stoga, u graničnom slučaju, nagib sečice teži nagibu tangente u tački $A$:

$$\operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \ .$$

Geometrijski smisao prvog izvoda funkcije $f$ u tački $x_0$, je da predstavlja **tangens ugla** koji tangenta u tački $A = (x_0, f(x_0))$, grafika funkcije, zaklapa sa pozitivnim delom $x$-ose.




Slika 17. Prvi izvod funkcije u tački $x_0$

**Diferencijal funkcije**

**Diferencijal nezavisne promenljive** *dx je jednak priraštaju nezavisne promenljive* $\Delta x$, *dok je* **diferencijal funkcije** $dy$ *(ili* $df$*) približno jednak priraštaju funkcije* $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. *Preciznije,*

- $dx = \Delta x$
- $dy = f'(x)dx$

Priraštaj funkcije $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ na slici 17 jednak je dužini duži $BC$, dok je diferencijal funkcije $dy$ jednak dužini duži $DC$. Diferencijal funkcije može biti i veći i manji od priraštaja funkcije. Priraštaj funkcije je funkcija od priraštaja nezavisne promenljive, i može da se izrazi na sledeći način
$\Delta y(\Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + g(\Delta x) \cdot \Delta x$,
gde funkcija $g(\Delta x)$ teži 0 kada argument $\Delta x$ teži 0. Na ovaj način, diferencijal funkcije predstavlja linearan deo priraštaja funkcije u posmatranoj tački $x$.

Na primer, diferencijali funkcija $f(x) = e^x + \sin x$ i $g(t) = t^3$ su redom $df = (e^x + \cos x)dx$ i $dg = 3t^2 dt$ (prve izvode pogledati u tabeli izvoda elementarnih funkcija).

**Levi izvod funkcije** $f$ **u tački** $x_0$ *se definiše kao*

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ ,$$

*ako ovaj limes postoji. Dakle,* $\Delta x$ *teži nuli preko negativnih vrednosti.*

*Slično,* **desni izvod funkcije** $f$ **u tački** $x_0$ *se definiše kao*

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ ,$$

*ako ovaj limes postoji.*

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f$ ima izvod u tački $x = x_0$ je da postoje i levi i desni izvod u tački $x_0$ i da su jednaki, tj. $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Tako na primer funkcija $f(x) = |x|$, data na sl. 16, nema prvi izvod u 0 jer su u 0 levi i desni izvod različiti.

**Diferencijabilnost na intervalu**
U opštem slučaju funkciju $f$ nazivamo *diferencijabilnom* na:

- otvorenom intervalu $(a, b)$ akko ima izvod u svakoj tački intervala;
- zatvorenom intervalu $[a, b]$ akko
  - funkcija ima izvod u svim unutrašnjim tačkama intervala $(a, b)$;
  - postoje desni izvod $f'_+(a)$ u tački $a$;
  - postoji levi izvod $f'_-(b)$ u tački $b$.

Funkciju koja ima neprekidan izvod na intervalu nazivamo *neprekidno diferencijabilnom* ili *glatkom* na intervalu. Kada govorimo o prvom izvodu funkcije $f(x)$, ravnopravno ćemo koristiti oznake $f'(x)$ i $f'_x$ ili samo $f'$ ako se zna po kojoj nezavisnoj promenljivoj vršimo diferenciranje.

### 2.2.2 Izvodi elementarnih funkcija

Izvode složenijih funkcija koje predstavljaju zbir, razliku, proizvod, količnik ili kompoziciju nekih jednostavnijih funkcija, možemo dobiti na osnovu pravila datih u sledećem odeljku, uz dodatno poznavanje izvoda jednostavnijih funkcija. Stoga, izvode elementarnijih funkcija $f(x)$, $x \in D$ dajemo u tabeli [15] niže. Međutim, svaki od izvoda datih u tabeli mogli smo da izračunamo po definiciji izvoda funkcije. Slede neki primeri:

Na osnovu definicije prvog izvoda funkcije u tački $x \in \mathcal{R}$ naćićemo $(x^n)'$, $n \in \mathcal{N}$, $(\sin x)'$ i $(e^x)$'.

1. $(x^n)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$ Po binomnom obrascu to je ekvivalentno sa:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + ... + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + ... + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}.$$

2. Kako je $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ imamo
$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + 0.5\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + 0.5\Delta x) =$$
$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + 0.5\Delta x) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

[15] Ukoliko je domen $D$ funkcije $f$ neki pravi podskup skupa $\mathcal{R}$ to je u tabeli naznačeno, sem u drugoj vrsti, gde domen zavisi od parametra $\alpha$.

Koristili smo smenu $t = \Delta x/2$.

3. $(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$ .

**Tabela izvoda elementarnih funkcija**

1. $(K)' = 0$, $K$ je realna konstanta
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$, $a \neq 1, a > 0, x > 0$
5. $(e^x)' = e^x$,
6. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$
9. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,
11. $(\sin x)' = \cos x$
12. $(\cos x)' = -\sin x$
13. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$
14. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$

### 2.2.3 Pravila diferenciranja

Ako su funkcije $f$, $g$ i $h$ diferencijabilne, tada važe sledeća pravila:

1. $(K \cdot f(x))' = K \cdot f'(x)$, gde je $K$ proizvoljna konstanta ;
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ za $g(x) \neq 0$ ;
5. Ako je $y = f(u)$ i $u = g(x)$ tada je

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \text{ odnosno } y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Slično, ako su $y = f(u)$, $u = g(v)$, i $v = h(x)$ tada je

$$f(g(h(x)))' = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x) \text{ odnosno } y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x .$$

Ovo dva pravila za kompoziciju dve i tri funkcije se nazivaju *pravilima smene.* Slično važi i za kompoziciju više od tri funkcije.

- $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$, odnosno $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ .
- Ako je funkcija $y = f(x)$ zadata parametarski: $y = g(t)$ i $x = h(t)$ tada je

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{h'(t)}$$

- Neka je funkcija $f(x)$ diferencijabilna, i $f'(x) \neq 0$, tada je prvi izvod njene inverzne funkcije $f^{-1}(x)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Slična pravila važe i za diferencijale funkcija. Na primer, $d(f(x) \cdot g(x)) = d(f(x))g(x) + d(g(x))f(x) = (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x))dx$.

Ilustrovaćemo neka od pravila diferenciranja na primerima:

pravilo 2.: Prvi izvod funkcije $y = f(x) = 5x - \cos x + e^x + 9$ je $y'(x) = 5(x)' - (\cos x)' + (e^x)' + (9)' = 5 + \sin x + e^x$.

pravilo 3.: Izvod proizvoda funkcija $3x^2$ i $\sin x$ je $(3x^2 \cdot \sin x)' = 3(x^2)' \cdot \sin x + 3x^2 \cdot (\sin x)' = 6x \cdot \sin x + 3x^2 \cdot \cos x$.

pravilo 4.: Izvod količnika funkcija $3x^2$ i $\sin x$ je $(\dfrac{3x^2}{\sin x})' = \dfrac{3(x^2)' \cdot \sin x - 3x^2 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{6x - 3x^2 \cdot \operatorname{ctg} x}{\sin x}$.

pravilo 5.: Ako je funkcija $y(x)$ kompozicija funkcija $y = f(u) = \ln u$ i $u = g(x) = x^5$ tada je $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = \dfrac{1}{u} 5x^4 = \dfrac{5x^4}{x^5} = \dfrac{5}{x}$.

pravilo 7.: Neka je kružnica poluprečnika 5 zadata parametarski sa $y = 5 \sin \varphi$, $x = 5 \cos \varphi$, tada je prvi izvod funkcije $y(x)$ u tački $x(\varphi)$ jednak $y'(x(\varphi)) = \dfrac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \dfrac{5 \cos \varphi}{-5 \sin \varphi} = -\operatorname{ctg} \varphi$.

pravilo 8.: Pokazali smo da je $(\sin x)' = \cos x$. Nađimo izvod inverzne funkcije $\arcsin x$. Po pravilu 8. imamo $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Kako je $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$, sledi $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

### 2.2.4 Izvodi višeg reda

*Neka je $f'(x)$, $x \in (a,b)$, izvodna funkcija diferencijabilne funkcije $f$. Tada* **drugi izvod funkcije** *$f$ u tački $x_0$ definišemo kao prvi izvod (ukoliko postoji) izvodne funkcije $f'$ u tački $x_0$:*

$$(f')'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} .$$

Drugi izvod funkcije $f$ u tački $x_0$ označavamo sa $f''(x_0)$. Ukoliko je funkcija $f'$ diferencijabilna na nekom skupu $A$, sa $f''$ označavamo izvodnu funkciju funkcije $f'$, koja svaki element $x \in A$ preslikava u $f''(x)$. Funkciju $f'' : A \to \mathcal{R}$ nazivamo drugi izvod funkcije $f$.

Opštije, na sličan način, definiše se i $n$-ti izvod $f^{(n)}$, $n > 1$, funkcije $f$, ukoliko postoji $(n-1)$-vi izvod $f^{(n-1)}(x)$ funkcije $f$ i ako je on diferencijabilna funkcija:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} .$$

Mnoge funkcije imaju $n$-ti izvod za svako $n \in \mathcal{N}$ u svakoj tački njihovog domena definisanosti. Na primer, za $n \in \mathcal{N}$, zadovoljeno je $(e^x)^{(n)} = e^x$, kao i

$$\sin^{(n)} x = \begin{cases} \sin x, & n = 4k \\ \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3 \end{cases} \qquad \cos^{(n)} x = \begin{cases} \cos x, & n = 4k \\ -\sin x, & n = 4k+1 \\ -\cos x, & n = 4k+2 \\ \sin x, & n = 4k+3 \end{cases} ,$$

za $k \in \mathcal{N}_0$.

U fizičkim i hemijskim procesima se izvodi funkcija često pojavljuju. Ubrzanje je na primer, drugi izvod funkcije pređenog puta u zavisnosti od vremena.

### 2.2.5 Lopitalovo pravilo

Ako postoje $f'(x)$ i $g'(x)$, tada je često jednostavnije naći neke granične vrednosti oblika $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ korišćenjem sledećih teorema:

**Lopitalovo pravilo**
*1. Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne na intervalu $(a,b)$, pri čemu je $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$. Neka $c \in [a,b]$ i neka su ispunjena sledeća dva uslova*

- *kada $x$ teži $c$, obe funkcije $f(x)$ i $g(x)$ teže ili ka 0 ili ka $\infty$,*
- *postoji granična vrednost $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

*Tada je*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

**Lopitalovo pravilo**
*2. Neka su funkcije $f$ i $g$ diferencijabilne na intervalu $(a, +\infty)$ (odnosno, $(-\infty, b)$), pri čemu je $g'(x) \neq 0$, za $x \in (\alpha, +\infty)$ za neko $\alpha \geq a$ (odnosno, za $x \in (-\infty, \beta)$ za neko $\beta \leq b$). Neka su ispunjena sledeća dva uslova*

- *kada $x$ teži $+\infty$ (odnosno $-\infty$), obe funkcije $f(x)$ i $g(x)$ teže ili ka 0 ili ka $\infty$,*
- *postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (odnosno $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$).*

*Tada je*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad (\textit{odn.}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)})\ .$$

**Neodređeni izrazi**

U Lopitalovim pravilima se pojavljuju neodređeni izrazi koji su oblika "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$". Osim, ovih neodređenih izraza, postoje i sledećih 6 neodređenih izraza: "$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "$0^0$", "$\infty^0$", "$0^\infty$" i "$1^\infty$" koji mogu manjim transformacijama da dobiju oblik pogodan za primenu Lopitalovog pravila.

Primeri.

1. Neodređeni izraz oblika "$0\cdot\infty$" jednostavno svodimo na bilo koji od neodređenih izraza "$\frac{\infty}{\infty}$" ili "$\frac{0}{0}$". Koji od njih ćemo izabrati zavisi od jednostavnosti odgovarajućih prvih izvoda. Na primer,

$$\lim_{x\to0+}x^2\ln x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-2/x^3}=\lim_{x\to0+}\frac{-x^2}{2}=0.$$

2. Neodređeni izraz oblika "$\infty-\infty$" svodimo na oblik "$0/0$", pogodan za primenu Lopitalovog pravila:

$$\lim_{x\to0}(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}$$

Sada možemo koristiti poznatu graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, a zatim primenjujemo četiri puta prvu Lopitalovu teoremu dok se ne eliminiše nula u imeniocu:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}\cdot(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x})^2=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x\cdot\cos x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{4\sin 2x}{24x}=\lim_{x\to0}\frac{8\cos 2x}{24}=\frac{1}{3}.$$

3. Kako je $x^x=(e^{\ln x})^x=e^{x\cdot\ln x}$, možemo neodređeni izraz $\lim\limits_{x\to0+}x^x$ oblika "$0^0$" svesti na oblik "$\frac{\infty}{\infty}$" na sledeći način:

$$\lim_{x\to0+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to0+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x}},$$ pri čemu smo koristili stav o osobinama limesa.

Na eksponent sada možemo direktno primeniti Lopitalovo pravilo

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0+}-x=0.$$

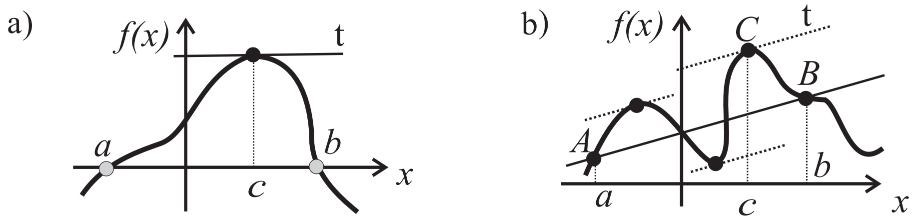
Konačno, imamo da je $\lim\limits_{x\to0+}x^x=e^0=1.$

4. Neodređeni izraz oblika "$\infty^0$" svodimo na neodređeni izraz "$\frac{\infty}{\infty}$", tako što prvo logaritmujemo izraz i svedemo ga na oblik "$0\cdot\infty$", a zatim postupimo kao u primeru

1. Recimo, graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}$, nalazimo tako što prvo nađemo graničnu vrednost logaritma podlimesne funkcije
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln(e^{3x}-5x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27e^{3x}}{9e^{3x}}=3.$
Sledi da je $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}=e^3$.

### 2.2.6 Teoreme o srednjoj vrednosti za izvode

**Rolova teorema**
*Ako je funkcija $f$ neprekidna na intervalu $[a,b]$, diferencijabilna na intervalu $(a,b)$, i ako je $f(a)=f(b)=0$ tada postoji tačka $c$ koja pripada $(a,b)$ tako da je: $f'(c)=0$.*




Slika 18. Ilustracija Rolove i Lagranžove teoreme

Kako geometrijski prvi izvod u tački predstavlja nagib tangente kroz odgovarajuću tačku grafika funkcije, to znači da Rolova teorema tvrdi da postoji tačka $(c,f(c))$ na grafiku funkcije $f$ kroz koju je tangenta na grafik paralelna sa $x$-osom (slika 18.a). Tačka $c$ ne mora biti jedina tačka na intervalu $(a,b)$ u kojoj je prvi izvod funkcije $f$ jednak nuli.

**Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti**
*Ako je funkcija $f$ neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu $(a,b)$ tada postoji tačka $c$ koja pripada $(a,b)$ tako da je*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

*Kako količnik $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (slika 18.b) predstavlja nagib sečice $AB$ (koordinate tačaka su: $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$), sledi, po Lagranžovoj teoremi, da postoji bar jedna tačka $c$ na intervalu $(a,b)$, takva da je tangenta u tački $C(c,f(c))$ paralelna sa sečicom $AB$ (sl. 18.b).*

*Rolova teorema je specijalan slučaj Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti kada je $f(a)=f(b)$.*

**Tejlorova teorema o srednjoj vrednosti**
*Ako funkcija $f$ ima neprekidne sve izvode do $n$-tog reda na intervalu $[a,b]$ i ima izvod $f^{(n+1)}$ na intervalu $(a,b)$, za $n\in\mathcal{N}$, tada postoji tačka $c$ koja pripada $(a,b)$ tako da je za svako $x\in[a,b]$:*

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n$$

*gde je* $R_n$ *ostatak i može da se zapiše u Lagranžovom obliku:*

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \; .$$

Primetimo da je Tejlorova teorema o srednjoj vrednosti uopštenje Lagranžove teoreme. Lagranžova teorema nastaje u slučaju kada je $n = 0$ u Tejlorovoj teoremi i $x = b$. Tada je $f(b) = f(a) + R_0$ i $R_0 = \dfrac{f'(c)(b-a)}{1!}$.

**Tejlorov razvoj funkcije** $f$

Ako su tačke $x$ i $x_0$ iz intervala $(a, b)$, tada direktnom primenom Tejlorove teoreme imamo Tejlorov razvoj funkcije $f$ sa ostatkom:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + ... +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ukoliko je zadovoljeno da je $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ , tada se red koji dobijamo naziva *Tejlorov razvoj funkcije* $f$ *u tački* $x_0$.

Primetimo da se u prethodnoj teoremi vrši razvoj funkcije $f$ u polinomnu funkciju u tački $x_0$.

Ako je specijalno $x_0 = 0$, tada govorimo o **Maklorenovom razvoju funkcije**.

Na primer, Maklorenov razvoj funkcije $e^x$ je

$e^x = e^0 + e^0 x + \dfrac{e^0}{2!}x^2 + \dfrac{e^0}{3!}x^3 + ... = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

Maklorenov razvoj funkcije $\sin x$ je

$\sin x = \sin 0 + \cos 0 \; x + \dfrac{-\sin 0}{2!}x^2 + \dfrac{-\cos 0}{3!}x^3 + ... =$

$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ... = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$,

Maklorenov razvoj funkcije $\cos x$ je

$\cos x = \cos 0 - \sin 0 \; x + \dfrac{-\cos 0}{2!}x^2 + \dfrac{\sin 0}{3!}x^3 + ... =$

$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + ... = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

Vrednosti trigonometrijskih funkcija $\sin x$, $\cos x$, ... na digitronima i računarima upravo i dobijamo tako što u zavisnosti od potrebne preciznosti aproksimiramo funkcije sa odgovarajućim brojem sabiraka u Maklorenovom polinomnom razvoju ovih funkcija (npr. $\sin x \approx x - x^3/6$, $\cos x \approx 1 - x^2/2 + x^4/24$) i zatim računamo vrednosti tih polinoma.

## 2.3 Primena izvoda na ispitivanje osobina funkcija

Neke osobine funkcije $f : A \to B$, kao što su:

- $f$ je **parna** ako je $f(-x) = f(x)$, za sve $x \in A$, $A$ simetričan skup;

- $f$ je **neparna** ako je $f(-x) = -f(x)$, za sve $x \in A$, $A$ simetričan skup;
- $f$ je **periodična** sa osnovnim periodom $p$, ako je $p$ minimalan pozitivan realan broj tako da je
$$(\forall\ x, x+p \in D) \quad f(x+p) = f(x)$$
- $f$ **raste** (**opada**) na intervalu $[a, b]$ ako je za svako $x_1, x_2 \in [a, b]$ zadovoljena implikacija $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

utvrđujemo direktnom proverom. Parne funkcije (na primer, parabole sa temenom na $y$-osi, $\cos x$), imaju grafik simetričan u odnosu na $y$-osu, dok su neparne funkcije ( $x^3, \frac{1}{x}, \sin x, \ldots$) centralno simetrične u odnosu na koordinatni početak. Trigonometrijske funkcije su periodične, i njih je dovoljno ispitivati samo na intervalu $(0, p)$ [16]. Rast i opadanje funkcije je nešto teže ispitivati direktnom proverom.

### 2.3.1 Rast i opadanje funkcije i prvi izvod funkcije

Ako je funkcija diferencijabilna na intervalu $(a, b)$ tada rast i opadanje funkcije možemo ispitati i na osnovu znaka prvog izvoda na intervalu. Preciznije, važi sledeće tvrđenje:

*Neka je funkcija $f$ diferencijabilna na $(a, b)$. Tada važe sledeće implikacije:*

**1.** *Ako je $f$ rastuća na $(a, b)$, sledi da je $f'(x) \geq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

**2.** *Ako je $f$ opadajuća na $(a, b)$, sledi da je $f'(x) \leq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

**3.** *Ako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in (a, b)$, sledi da je $f(x)$ rastuća na $(a, b)$.*

**4.** *Ako je $f'(x) < 0$ za svako $x \in (a, b)$, onda je $f$ opadajuća na $(a, b)$.*

Dokazaćemo samo implikacije **1.** i **3.**, jer se implikacije **2.** i **4.** slično dokazuju.

**Dokaz 1.** Neka su $x, x + \Delta x \in (a, b)$ i neka je $\Delta x > 0$ tada je zbog rasta funkcije $f$, $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$, što implicira da je i količnik $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Slično, ako je $\Delta x < 0$ tada je zbog rasta funkcije $f$, $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$, pa je opet $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Zato u graničnom slučaju kada $\Delta x \to 0$ i preko brojeva većih i preko brojeva manjih od 0, važi da je $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$. $\square$

**Dokaz 3.** Neka su $x_1, x_2 \in (a, b)$ i neka je $x_1 < x_2$. Kako su uslovi Lagranžove teoreme zadovoljeni i na intervalu $[x_1, x_2]$ sledi da postoji tačka $c \in (x_1, x_2] \subset (a, b)$ tako da je $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Pošto su i $f'(c) > 0$ i $x_2 - x_1 > 0$ to je i $f(x_2) - f(x_1) > 0$, što je i trebalo dokazati. $\square$

---

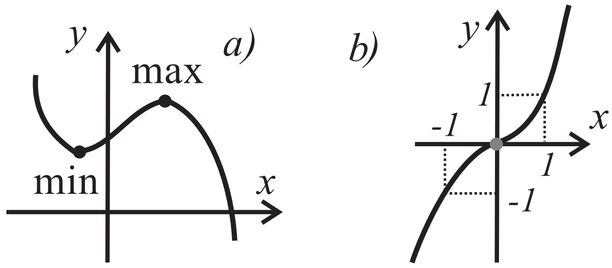
[16] gde je $p$ njihov osnovni period.

### 2.3.2 Ekstemne vrednosti i izvodi funkcije

*Neka tačka* $x_0 \in (a,b) \subset D$*, gde je* $D$ *domen funkcije* $f$*. Tada je* $f(x_0)$

- **lokalni minimum** *funkcije* $f$ *ako je* $\forall x \in (a,b)\ f(x) \geq f(x_0)$ *;*
- **lokalni maksimum** *funkcije* $f$ *ako je* $\forall x \in (a,b)\ f(x) \leq f(x_0)$*.*

**Ekstremne vrednosti** (**ekstremi**) funkcije $f$ su svi lokalni minimumi i maksimumi funkcije na celom domenu definisanosti. Globalni **maksimum** (**minimum**) funkcije $f$ je njena najveća (najmanja) vrednost na celom domenu (oblasti definisanosti).




Slika 19. Primeri funkcija sa i bez ekstrema

Jasno je da bi u nekoj tački neprekidna funkcija imala ekstremnu vrednost (sl. 19.a) mora iz rasta da pređe u opadanje (maksimum) ili iz opadanja da pređe u rast (minimum). Kako rast funkcije prati pozitivan (a opadanje negativan) prvi izvod, za očekivati je da je potreban uslov za ekstrem u tački $x_0$ da je $f'(x_0) = 0$. Međutim, to nije i dovoljan uslov: recimo, u 0 funkcija $x^3$ ima prvi izvod jednak 0, ali nema ekstemnu vrednost. Na slici 19.b vidimo da funkcija $y = x^3$ nema ekstremnih vrednosti jer na celom domenu definisanosti $\mathcal{R}$ stalno raste.

Sledeće dve teoreme daju potrebne i dovoljne uslove da funkcija u tački $x_0 \in (a,b)$ ima lokalni ekstrem:

*Neka je funkcija* $f$ *diferencijabilna na* $(a,b)$ *tada je potreban uslov da u tački* $x_0 \in (a,b)$ *funkcija* $f$ *ima ekstrem,*

*1.* $f'(x_0) = 0$.

*Ako je dodatno zadovoljeno i*

*2.* $f'(x)$ *menja znak u okolini tačke* $x_0$*,*

*to je dovoljno da u tački* $x_0$ *funkcija* $f$ *ima ekstrem.*

*Preciznije, ako je u nekom intervalu levo od* $x_0$*,* $f'(x) < 0$*, a u nekom intervalu desno od* $x_0$ $f'(x) > 0$*, tada je* $f(x_0)$ *lokalni minimum, u suprotnom radi se o lokalnom maksimumu.*

Ipak prethodnom teoremom nisu obuhvaćeni svi slučajevi. Na primer, funkcija $f(x) = |x|$ jeste neprekidna na celom skupu realnih brojeva, i diferencijabilna u svim tačkama sem u 0. Uslov *2.* prethodne teoreme u okolini tačke 0 jeste zadovoljen, uslov *1.* nije, a $f(0)$ je minimum funkcije $f$. Ova situacija može da se uopšti za neprekidne i diferencijabilne funkcije na otvorenom intervalu u svim tačkama sem u tački u kojoj se postiže ekstrem, pri čemu je ispunjen uslov *2.* prethodne teoreme.

Ako funkcija dodatno ima i drugi izvod možemo da koristimo sledeće tvrđenje.

*Neka je funkcija $f$ neprekidna i dva puta diferencijabilna na $(a,b)$, i neka je u tački $x_0 \in (a,b)$ $f'(x_0) = 0$ (uslov 1 prethodne teoreme). Tada je dovoljan uslov da funkcija $f$ ima ekstrem u tački $x_0$ da je*

$$f''(x_0) \neq 0 \ .$$

*Preciznije, ako je $f''(x_0) > 0$, tada u $x_0$ funkcija $f$ ima lokalni minimum, dok, u suprotnom, ako je $f''(x_0) < 0$, tada funkcija u $x_0$ ima lokalni maksimum.*

### 2.3.3 Konkavnost, konveksnost i prevojne tačke

Funkcija $f$ je **konkavna** ili ispupčena na intervalu $(a,b)$ (sl. 20.b) ako je za svako $x \in (a,b)$ grafik funkcije *ispod* bilo koje tangente na grafik u okviru razmatranog intervala. **Konveksnost** ili udubljenost funkcije znači da je grafik funkcije *iznad* tangente (sl. 20.a).

Na primer, funkcija $\sin x$ je konkavna na intervalu $(0,\pi)$, a konveksna na intervalu $(\pi, 2\pi)$.

**Tačka prevoja** funkcije je tačka u kojoj funkcija prelazi iz konkavnosti u konveknost ili obrnuto. Recimo, $\pi$ je jedna od prevojnih tačaka za funkciju $\sin x$.

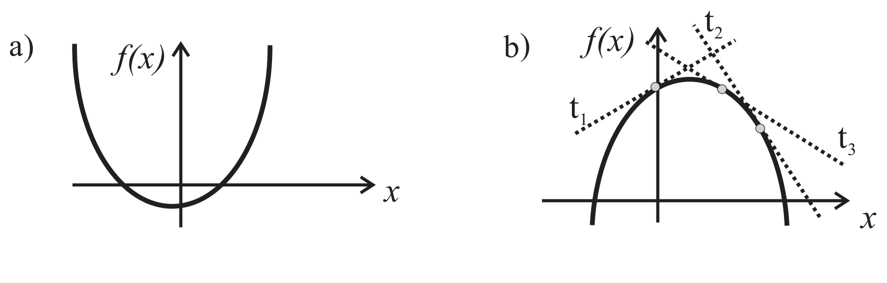
Ove dve definicije konkavnosti i konveksnosti su geometrijski jasne, ali nisu jednostavne za ispitivanje, što nije slučaj sa sledećom ekvivalentnom definicijom:

*Diferencijabilna funkcija $f$ je* **konkavna** *na intervalu $(a,b)$ ako za svako $x_1, x_2 \in (a,b)$ važi*

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f(\frac{x_1+x_2}{2}).$$

*Diferencijabilna funkcija $f$ je* **konveksna** *na intervalu $(a,b)$ ako za svako $x_1, x_2 \in (a,b)$ važi*

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1+x_2}{2}).$$




Slika 20. Konveksna i konkavna funkcija

U narednoj teoremi koristimo drugi izvod funkcije za utvrđivanje konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka funkcije.

*Neka je funkcija $f$ dva puta diferencijabilna na $(a,b)$.*

- *Ako je $(\forall x \in (a,b))$ $f''(x) > 0$, tada je $f$* **konveksna** *(udubljena tj. oblika $\smile$) na $(a,b)$.*

- *Ako je $(\forall x \in (a,b))$ $f''(x) < 0$, tada je $f$* **konkavna** *(ispupčena tj. oblika $\frown$) na $(a,b)$.*

- *Ako je funkcija $f$ konveksna na $(a, c)$, a konkavna na $(c, b)$, ili obrnuto, za neko $c \in (a, b)$, tada je $c$* **tačka prevoja** *funkcije $f$.*

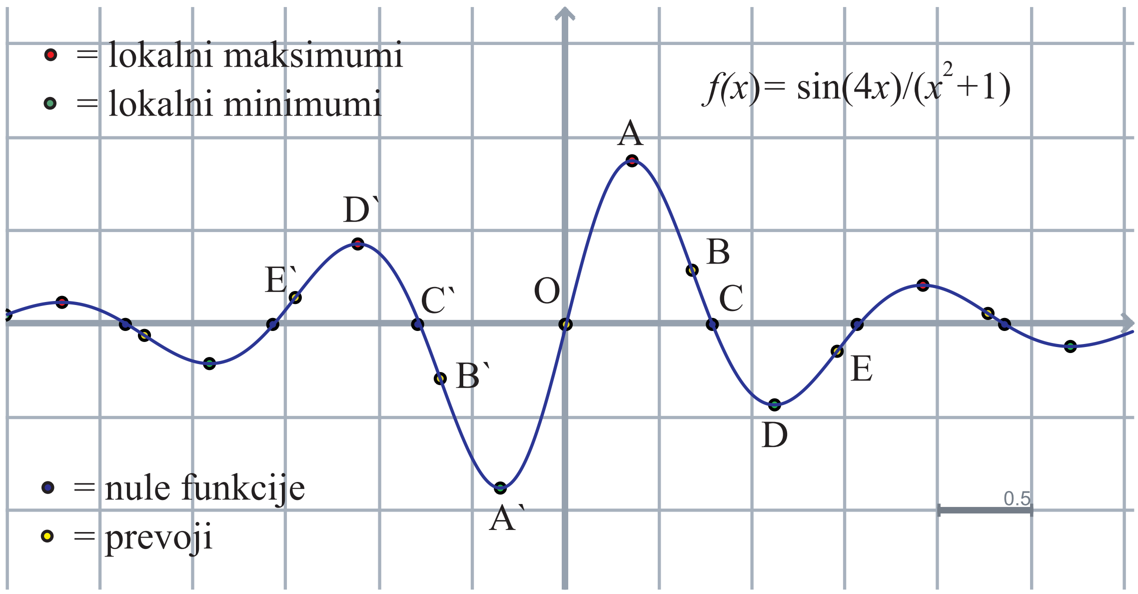
- *Uslov $f''(c) = 0$ je potreban a ne i dovoljan da tačka $(c, f(c))$ bude prevojna tačka grafika funkcije $f$.*

Na primer, funkcija $f(x) = x^2$ ima drugi izvod $f''(x) = 2$, $x \in \mathcal{R}$ i ona jeste udubljena (= konveksna) na celom domenu, dok funkcija $g(x) = -x^2$ ima drugi izvod negativan, i ona je konkavna. Funkcija $h(x) = x^3$ ima drugi izvod $h''(x) = 6x$. Za $x < 0$, $h''(x) < 0$ i funkcija je konkavna, a za $x > 0$, $h''(x) > 0$, i funkcija je konveksna (videti sliku 10.b u prethodnom odeljku). Tačka (0,0) je prevojna tačka grafika.

Primetite da udubljenost (konveksnost) i ispupčenost (konkavnost) ne moraju da budu jasno uočljive na grafiku kao što je slučaj na slici 20. Na primer na slici 19.b funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (0, +\infty)$ i konkavna ($\frown$) za $x \in (-\infty, 0)$, a udubljenost za $x > 1$ i ispupčenost za $x < -1$ jedva da je uočljiva na grafiku.

### 2.3.4 Crtanje grafika funkcije

Sva poglavlja ove glave su ispričana sa ciljem da imamo alat da samostalno nacrtamo grafik neelementarne funkcije. Grafici elementarnih funkcija su sadžaj sledeće glave. Funkcija $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{1 + x^2}$ nije elementarna i njen grafik je nacrtan u programu Cinderella a zatim dorađen u programu CorelDraw (Sl. 21).




Slika 21. Grafik neparne funkcije $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{1 + x^2}$.

Ukoliko bi koristili jednostavni i besplatni interaktivni geometrijski softver Cinderella [22] nemačkih autora Jurgen Richter-Geberta i Ulricha Kortenkampa dovoljno bi bilo da znamo sve što je izneto u prethodnim poglavljima ove glave, a zatim proučimo uputstva programa Cinderella, potom znamo ponešto i o programiranju i otkucamo odgovarajuće komande za crtanje grafika i obeležavanje tačaka na grafiku u kojima funkcija ima nule, lokalne eksteme i prevoje pa da dobijemo grafik kao na slici 21. Za razliku od softvera Cinderella čije mogućnosti su skromne, sofverski paketi Mathematica [32] i MathCad [14] su moćne alatke u kojima je implementirano svo gradivo ovog udžbenika i sav preostali ogromni matematički aparat.

Sa grafik funkcije $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{1+x^2}$ na sl. 21 uočavamo sledeće:

- Domen je $D \subset \mathcal{R}$.

- Grafik je centralnosimetričan u odnosu na koordinarni početak $O(0,0)$. Tako su sledeći parovi tačaka međusobno centralno simetrični $A$ i $A'$, $B$ i $B'$, $C$ i $C'$, .... To znači da je funkcija neparna $f(-x) = -f(x)$ jer je $f(-x) = \dfrac{\sin 4(-x)}{1+(-x)^2} = -\dfrac{\sin 4x}{1+x^2}$.

- Grafik ima bezbroj preseka sa $x$-osom zbog "talasanja oko $x$-ose sa sve manjom visinom talasa", tj. bezbroj nula ( $C$, $C'$, $O$...). Sve nule dobijamo rešavanjem jednačine
$$\sin 4x = 0,$$
a rešenja su tačke $x_k$ iz skupa $\{x_k \mid x_k = \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathcal{Z}\}$.

- Zbog talasanja ima bezbroj intervala $(x_k, x_{k+1})$, $k \in \mathcal{Z}$ i $k$ paran broj na kojima je funkcija pozitivna ili negativna na $(x_k, x_{k+1})$, $k \in \mathcal{Z}$ i $k$ neparan broj. Primetimo da su dužine svih ovih intervala jednake $\dfrac{\pi}{4}$, ali da ipak funkcija $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{1+x^2}$ nije periodična. Funkcija $\sin 4x$ jeste periodična sa periodom $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, ali zbog deljenja sa sve većom i većom vrednošću $1+x^2$ kad $x \to \pm\infty$ **amplituda**[17] se $\sin 4x$ se sve više smanjuje i teži 0.

- Horizontalna asimptote ipak nije $x$-osa, tj. prava $y = 0$ kad $x$ teži $\pm\infty$ jer
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin 4x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sin 4x)'}{(1+x^2)'} == \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4\cos 4x}{2x} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2\cos 4x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\pm\infty} 8\sin 4x,$$
zbog stalnog oscilovanja $\sin 4x$ nema konvergencije.

- Ekstremnih tačaka minimuma ($D$, $A'$...) i maksimuma ($D'$, $A$...) ima bezbroj (prebrojivo).

- Slično i prevojnih tačaka ($E$, $B$, $O$, $B'$, $E'$,...) kao i intervala konveksnosti i konkavnosti ima bezbroj.

Naravno mnogo je jednostavnije "čitati" informacije sa već postojećeg grafika kao što je malopre urađeno za funkciju $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{1+x^2}$ na sl. 21.

Da bi se naskicirao grafik nepoznate funkcije ukoliko ne koristimo neki program potrebno je odrediti:

[17] Amplituda je najveće rastojanje oscilujućeg tela od ravnotežnog položaja. Kod oscilatornih funkcija $\sin x, \sin 4x, \cos x, ...$ amplituda je 1.

1. domen $D \subset \mathcal{R}$ (skup tačaka u kojima je funkcija definisana);

2. parnost ili neparnost i periodičnost (uvod ovog odeljka);

3. nule (tačke iz $D$ u kojima je vrednost funkcije nula = tačke preseka grafika funkcije sa $x$-osom);

4. znak funkcije (intervale iz domena u kojima je funkcija pozitivna ili negativna);

5. asimptote (odeljak 2.1.1);

6. ekstremne tačke (tačke unutar nekog podintervala iz $D$ u kojima je vrednost funkcije maksimalna ili minimalna);

7. intervale konveksnosti i konkavnosti iz $D$ kao i tačke prevoja.

# Glava 3.

## 3 Elementarne funkcije i njihove transformacije

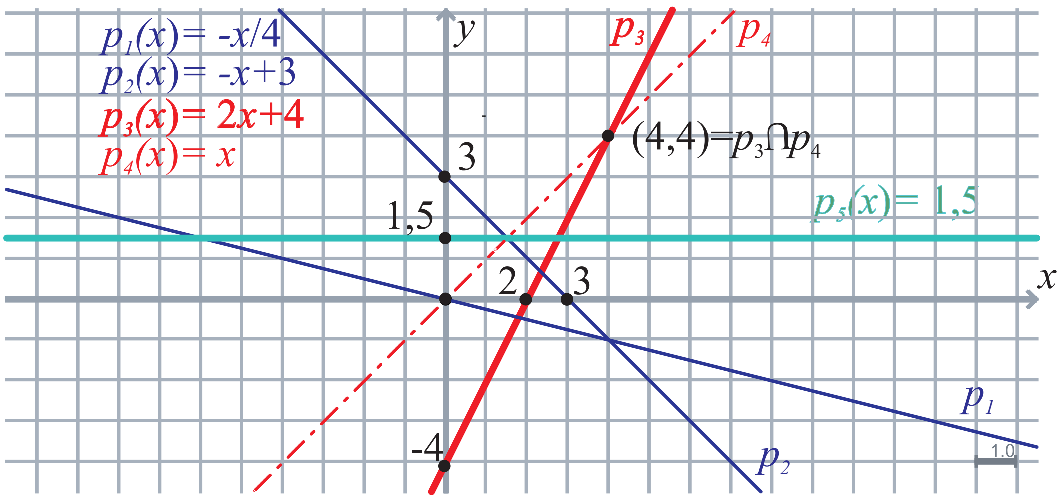
### 3.1 Prave - linearne funkcije

Opšta linearna funkcija je oblika

$$p(x) = a \cdot x + b, \quad a, b \in \mathcal{R},$$

gde su koeficijenti $a$ i $b$ neki realni brojevi. Grafik linearne funkcije je prava linija (sl. 22). Uočimo osobine linearnih funkcija:

- Ako je $a = 0$ grafik je horizontalna linija: takva je na primer linearna funkcija $p_5(x) = 1,5$ na sl. 22. nacrtana tirkiznom linijom.
- Ako je $b = 0$ grafik je prava koja prolazi kroz koordinatni početak, kao na primer linearna funkcija $p_4(x) = x$ na sl. 22. nacrtana isprekidanom crvenom linijom. Ova prava je značajna za međusobno inverzne funkcije jer je ona osa simetrije njihovih grafika.
- Ako je $a > 0$ funkcija je rastuća na celom domenu - crvene prave $p_3(x)$ i $p_4(x)$ na sl. 22, imaju tu osobinu.
- Ako je $a < 0$ funkcija je opadajuća na celom domenu - plave prave $p_1(x)$ i $p_2(x)$ na sl. 22.




Slika 22. Grafici 5 linearnih funkcija $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ i $p_5(x)$ u Dekartovom koordinatnom sistemu.

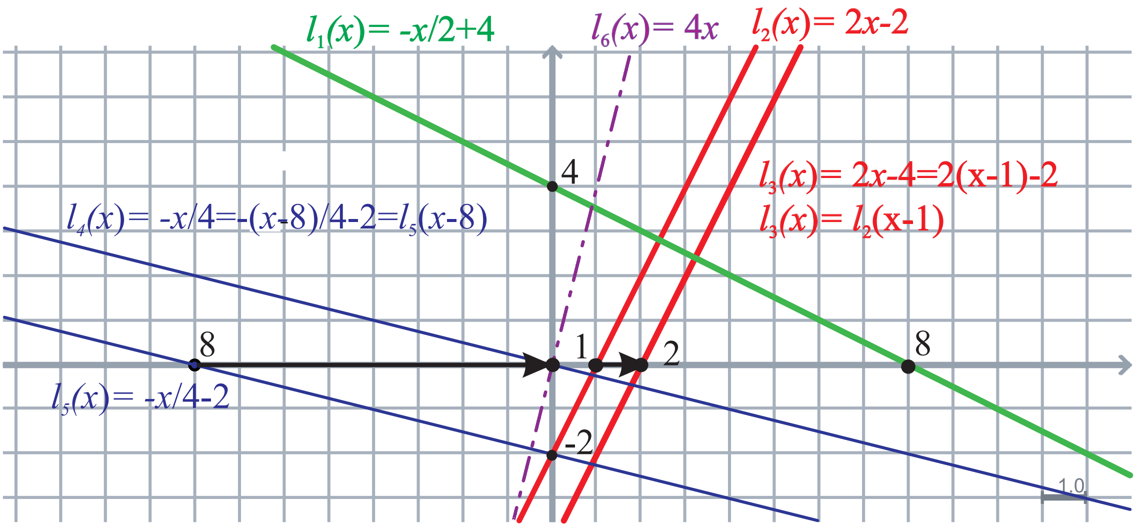
- U tački sa koordinatama $(0{,}b)$ grafik linearne funkcije $p(x)$ seče $y$-osu.
- U tački sa koordinatama $(-\dfrac{b}{a}{,}0)$ za $a \neq 0$ grafik funkcije $p(x)$ seče $x$-osu.
- Domen linearne funkcije $p(x)$ je skup $\mathcal{R}$, ekstremnih i prevojnih tačaka nema, kao i intervala konveksnosti i konkavnosti.

Da razjasnimo - grafik svake linearne funkcije je prava, a nema svaka prava u ravni linearnu funkciju za "podlogu". Tako na primer vertikalna prava koja prolazi kroz tačku sa koordinatama (4,0) i čija je jednačina $x = 4$ nije linearna funkcija jer ne možemo da izrazimo zavisnu promenljivu $y$ preko nezavisne $x$ pošto $y$ uzima sve moguće realne vrednosti za $x = 4$. Naravno ukoliko bi zamenili koordinatne ose i proglasili da je $y$ nezavisna a $x$ zavisna promenljiva sve bi bilo korektno.

### 3.1.1 Dve prave - presek, paralelnost i ortogonalnost

Koordinate tačke koja je **presek** dve prave određuju se rešavanjem linearnog kvadratnog sistema (dve jednačine prave sa dve nepoznate $x$ i $y$). Na primer, prave $p_3$ i $p_4$ na sl. 22 se seku. Njihove jednačine su redom $y = 2x - 4$ i $y = x$. Zamenom druge jednačine u prvu dobijamo jednu jednačinu sa jednom nepoznatom $x = 2x - 4$. Njeno rešenje je $x = 4$. Kako je $y = x$, tačka preseka je $(4{,}4)=p_3 \cup p_4$.

U nekim slučajevima ne moramo da rešavamo sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate da bi smo odredili tačku preseka dve prave. Na primer na sl. 23 obe linearne funkcije $l_4(x) = -\dfrac{x}{4}$ i $l_6(x) = 4x$ imaju slobodni koeficijent jednak 0, tj. $b = 0$ - te njihovi grafici prolaze kroz koordinatni početak $O(0{,}0)$ i naravno on je tačka preseka njihovih pravih.




Slika 23. Paralelne i ortogonalne prave: $l_1(x), l_2(x), l_3(x), l_4(x)$, $l_5(x)$ i $l_6(x)$.

Dve linearne funkcije

$$l_1(x) = a_1 \cdot x + b_1 \quad \text{i } l_2(x) = a_2 \cdot x + b_2$$

su

1. **paralelne** ukoliko su im koeficijenti uz $x$ jednaki tj.
$$a_1 = a_2.$$
2. **ortogonalne** ukoliko su koeficijenti takvi da je zadovoljeno
$$a_1 \cdot a_2 = -1.$$

Zato koeficijente uz $x$ nazivano **koeficijentima pravca** prave. Ako bi prava bila zadata kao skup tačaka u ravni koje zadovoljavaju linearnu jednačinu $ax + by + c = 0$ tada je $-\frac{a}{b}$ koeficijent pravca za $b \neq 0$.

Tako su prave $l_2(x)$ i $l_3(x)$ međusobno paralelne što se označava sa $l_2(x) \parallel l_3(x)$, njihov koeficijent pravca je 2, kao što su paralelne i prave $l_5(x) \parallel l_4(x)$, obe sa koeficijentima pravca od $-\frac{1}{4}$ (sl. 23). Na prave $l_2(x)$ i $l_3(x)$ je ortogonalna prava $l_1(x)$ sa koeficijentom pravca $-\frac{1}{2}$, dok je na prave $l_4(x)$ i $l_5(x)$ ortogonalna prava $l_6(x)$ sa koeficijentom pravca 4 jer važi da je $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$ odnosno $-\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$.

### 3.1.2 Nagib linearne funkcije

Apsolutna vrednost $|a|$ koeficijenta pravca $a$ linearne funkcije $l(x) = a \cdot x + b$ je **nagib prave** $l$. Što je **nagib veći** to je **prava "strmija"**. Tako na sl. 23 prave po nagibu su od najstrmije ka najhorizontalnijoj poređane redom:

$$l_6(x),\ l_2(x),\ l_1(x),\ l_4(x) \quad \text{jer su im nagibi u odnosu} \quad 4 > 2 > |-\frac{1}{2}| > |-\frac{1}{4}|.$$

Naravno međusobno paralelne prave $l_2(x)$ i $l_3(x)$ kao $l_4(x)$ i $l_5(x)$ uvek imaju isti nagib.

Isti nagib mogu da imaju i međusobno ortogonalne prave. Na primer prave $p_2(x) = -x + 3$ i $p_4(x) = x$ na sl. 22. su ortogonalne $-1 \cdot 1 = -1$ i imaju jednak nagib $|-1| = |1| = 1$. Medjutim kako su im koeficijenti pravca različitog predznaka prava $p_2$ se spušta a prava $p_4$ penje.

*Zadatak.*
1. Smislite novi primer međusobno ortogonalnih pravih sa jednakim nagibom.

## 3.2 Translacije grafika funkcije u pravcu osa

Uopšteno važi da:

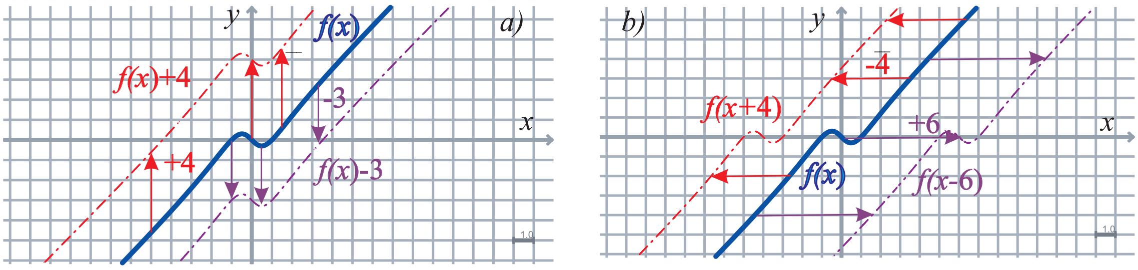
1. (sl. 24.b) grafik funkcije $f(x + a)$, $a \in \mathcal{R}$ se poklapa sa **transliranim grafikom** funkcije $f(x)$ **u pravcu $x$-ose** za vektor translacije $\vec{a} = (-a, 0)$, koji je **paralelan sa $x$-osom** i ima dužinu (=intenzitet) jednaku $|a|$, dodatno
   (a) ako je realni broj $a > 0$ smer vektora translacije $\vec{a}$ je **suprotan od pozitivnog smera $x$-ose**;

(b) za $a < 0$ smer vektora $\vec{a}$ je **isti** kao i smer $x$-ose;

2. (sl. 24.a) grafik funkcije $f(x) + b$, $b \in \mathcal{R}$ se poklapa sa **transliranim grafikom** funkcije $f(x)$ **u pravcu** $y$**-ose** za vektor $\vec{b} = (0, b)$ koji je **paralelan sa** $y$**-osom** i ima dužinu jednaku $|b|$ i

   (a) ako je broj $b > 0$ smer vektora translacije $\vec{b}$ je **isti kao i smer** $y$**-ose**;

   (b) za $b < 0$ smer vektora $\vec{b}$ je **suprotan** od pozitivnog smera $y$-ose.




Slika 24. Translacije grafika funkcije $f(x)$ po osama.

Poznato je da je translacija **izometrijska transformacija**, što znači da očuvava sve **mere** (dužinu, površinu, zapreminu, oblik) i da su translirani objekat i polazni objekat međusobno **podudarni** a različito pozicionirani u ravni ili u prostoru i pri tom **obavezno paralelni**.

Dakle ukoliko imamo dva paralelna i podudarna objekta uvek postoji vektor translacije koji jedan od njih translira u drugi. Tako za paralelne prave $l_2(x) \parallel l_3(x)$ važi da $l_3(x)$ dobijamo translacijom $l_2(x)$ u pravcu i smeru $x$-ose za vektor dužine 1, jer je $l_3(x) = l_2(x-1)$ te je po 1. $a = -1$ (pažljivo pogledati sl. 23). Slično $l_4(x)$ dobijamo translacijom $l_5(x)$ u pravcu i smeru $x$-ose za vektor dužine 8, jer je $l_5(x) = l_4(x-8)$ te je po 1. $a = -8$.

Naravno translacije ovih međusobno paralelnih pravih mogli smo da izvršimo i u pravcu $y$-ose i to:

- $l_3(x)$ dobijamo translacijom $l_2(x)$ u pravcu i suprotnom smeru od smera $y$-ose za vektor dužine 2, jer je $l_3(x) = l_2(x) - 2$ te je po 2. $b = -2$;

- grafik $l_2(x)$ dobijamo translacijom $l_3(x)$ u pravcu i smeru $y$-ose za vektor dužine 2, jer je $l_2(x) = l_2(x) + 2$ te je po 2. $b = 2$;

- $l_5(x)$ dobijamo translacijom grafika $l_4(x)$ u suprotnom smeru a istom pravcu u odnosu na smer i pravac $y$-ose za vektor dužine 2, jer je $l_5(x) = l_4(x) - 2$ te je po 2. $b = -2$;

- $l_5(x)$ dobijamo translacijom $l_4(x)$ u pravcu i smeru $y$-ose za vektor dužine 2, jer je $l_4(x) = l_5(x) + 2$ te je po 2. $b = 2$;

i dodatno još u pravcu $x$-ose važi

- grafik $l_2(x)$ dobijamo translacijom grafika $l_3(x)$ u pravcu i suprotnom smeru od $x$-ose za vektor dužine 1, jer je $l_2(x) = l_3(x+1)$ (proverite!) te je po 1. $a = 1$;

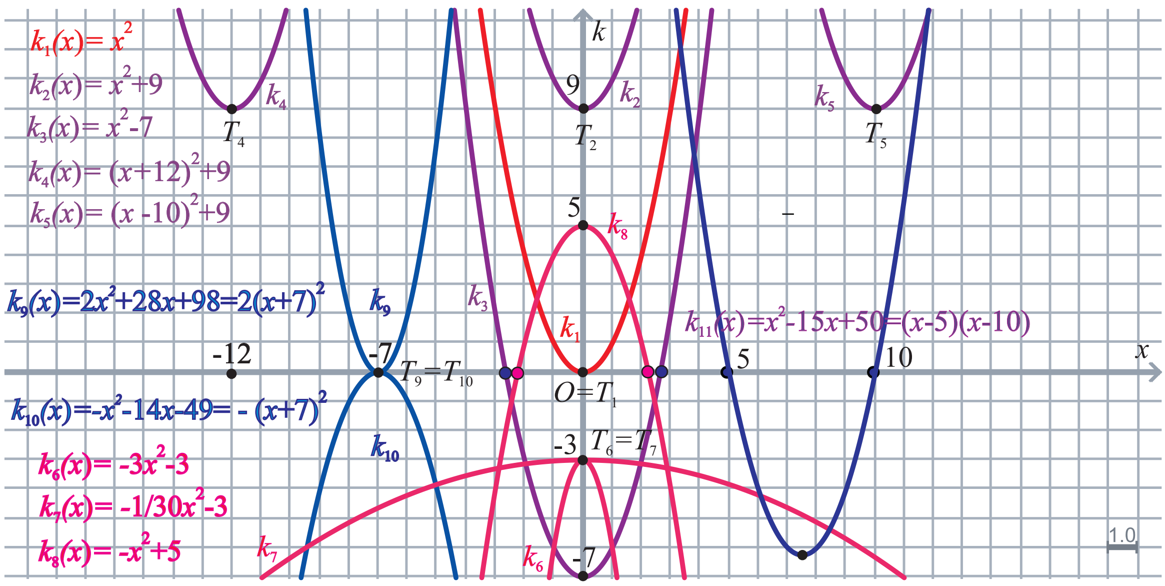
- grafik $l_5(x)$ dobijamo translacijom grafika $l_5(x)$ u pravcu i suprotnom smeru od $x$-ose za vektor dužine 8, jer je $l_4(x) = l_5(x+8)$ te je po 1. $a = 8$.

## 3.3 Kvadratne funkcije - grafik parabola

Linearne i kvadratne funkcije su specijalan slučaj stepenih funkcija (Glava 4) koje su takođe elementarne funkcije ali smo im posvetili posebnu Glavu.

Grafik bilo koje kvadratne funkcije je parabola. Svaka parabola ima jedno teme $T$. Teme je jedina tačka na grafiku u kojoj kvadratna funkcija ima ekstrem. Ukoliko je u pitanju **minimum** (kao kod funkcija od $k_1 - k_5$, $k_9$ i $k_{11}$, sl. 25) grafik kvadratne funkcije je **konveksan** na celom domenu, inače je **konkavan** za **maksimum** u temenu ($k_6$, $k_7$, $k_8$ i $k_{10}$ na sl. 25). Ako je teme parabole smešteno u koordinatnom početku $O$ kažemo da je u pitanju **temena parabola**. Na slici 25 su prikazani grafici sledećih 11 kvadratnih funkcija.

- $k_1(x) = x^2$ je osnovna temena parabola
- $k_2(x) = x^2 + 9$ je translirana $k_1$ za 9 paralelno osi funkcije, tj. $k$-osi
- $k_3(x) = x^2 - 7$ je translirana $k_1$ za $-7$ paralelno $k$-osi
- $k_4(x) = (x + 12)^2 + 9$ je translirana $k_1$ za $-12$ paralelno $x$-osi i za 9 po $k$-osi
- $k_5(x) = (x - 10)^2 + 9$ je translirana $k_1$ za 10 paralelno $x$-osi i za 9 po $k$-osi




Slika 25. Kvadratne funkcije - grafici parabole: $k_1(x), k_2(x), k_3(x), k_4(x), k_5(x), k_6(x), k_7(x), k_8(x),\ k_9(x),\ k_{10}(x)$ i $k_{11}(x)$.

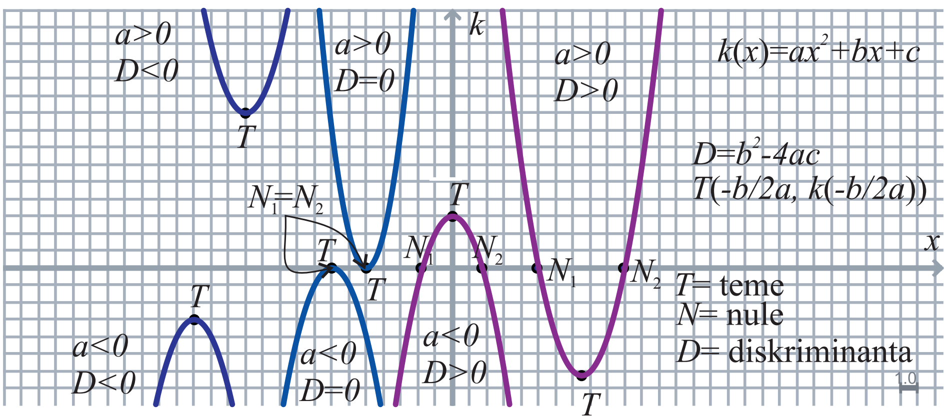
- $k_6(x) = -3x^2 - 3$
- $k_7(x) = -1/30x^2 - 3$
- $k_8(x) = -x^2 + 5$
- $k_9(x) = 2x^2 + 28x + 98 = 2(x + 7)^2$

- $k_{10}(x) = -x^2 - 14x - 49 = -(x+7)^2$
- $k_{11}(x) = x^2 - 15x + 50 = (x-5)(x-10)$

Opšta **kvadratna funkcija** je oblika

$$y = k(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad a \neq 0, \quad a, b, c \in \mathcal{R}.$$

1. Grafik kvadratne funkcije je parabola.
2. Domen definisanosti je ceo skup realnih brojeva $\mathcal{R}$.
3. ako je $a > 0$ kvadratna funkcija je
   (a) konveksna
   (b) ima minimum u temenu $T$ u tački $x = -\dfrac{b}{2a}$
   (c) opada na $(-\infty, -\dfrac{b}{2a})$ i raste na $(-\dfrac{b}{2a}, +\infty)$
4. ako je $a < 0$ kvadratna funkcija je
   (a) konkavna
   (b) ima maksimum u temenu $T$ u tački $x = -\dfrac{b}{2a}$
   (c) raste na $(-\infty, -\dfrac{b}{2a})$ i opada na $(-\dfrac{b}{2a}, +\infty)$
5. u zavisnosti od diskriminante $D = b^2 - 4ac$ kvadratna funkcija
   (a) dodiruje $x$-osu za $D$=0, tj. ima jednu nulu $x = -\dfrac{b}{2a}$
   (b) ne seče osu za $D$ <0, tj. nema nule
   (c) seče $x$-osu za $D$ >0, tj. ima dve nule $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ i $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$




Slika 26. Kvadratna funkcija - nule, monotonost (rast i opadanje), ekstremi i znak.

6. znak kvadratne funkcije može biti

   (a) za $a > 0$ i $D$ <0, je $k(x) > 0$ na celom domenu $\mathcal{R}$,

   (b) za $a > 0$ i $D$ >0,
   je $k(x) > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ i $k(x) < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$,

   (c) za $a > 0$ i $D$ =0, je $k(x) > 0$ za $x \in \mathcal{R} \setminus \{-\dfrac{b}{2a}\}$,

   (d) za $a < 0$ i $D$ <0, je $k(x) < 0$ na celom domenu $\mathcal{R}$,

   (e) za $a < 0$ i $D$ >0,
   je $k(x) < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ i $k(x) > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$,

   (f) za $a < 0$ i $D$ =0, je $k(x) < 0$ za $x \in \mathcal{R} \setminus \{-\dfrac{b}{2a}\}$.

Šest mogućnosti za znak kvadratne funkcije definišu položaj grafika prema $x$-osi. Grafik iznad ose - slučaj 6.a - primer $k_4$ na sl. 25. Grafik ispod ose - slučaj 6.d - primer $k_7$ na sl. 25. Grafik dodiruje osu - slučaj 6.c slučaj 6.f - primeri $k_9$ i $k_{10}$. Grafik seče osu - slučaj 6.b slučaj 6.e - primeri $k_8$ i $k_{11}$.

Slično kao i kod vertikalne prave, postoje "horizontalne" parabole koje nisu grafik neke kvadratne funkcije oblika $k(x)$ nego su rešenja opšte **kvadratne jednačine** oblika

$$d \cdot y^2 + e \cdot y + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \quad a \neq 0 \veebar d \neq 0, \quad a, b, c, d, e \in \mathcal{R},$$

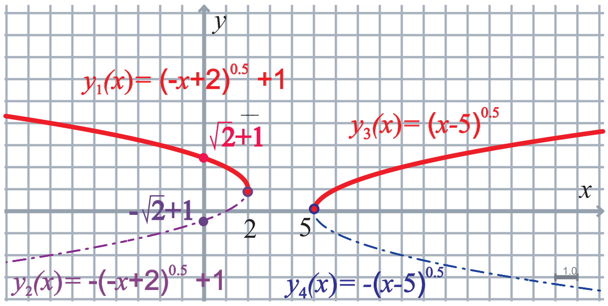
za specijalan slučaj kada je $a = 0$, $b \neq 0$ i $d = 1$. Rešavanjem po $y$ na sledeći način

$$y^2 + e \cdot y + (\frac{e}{2})^2 - (\frac{e}{2})^2 + b \cdot x + c = 0,$$

$$(y + \frac{e}{2})^2 = -b \cdot x - c + \frac{e^2}{4},$$

dobijaju rešenja u obliku dve korene funkcije

$$y_1(x) = +\sqrt{-b \cdot x - c + \frac{e^2}{4}} - \frac{e}{2} \qquad y_2(x) = +\sqrt{-b \cdot x - c + \frac{e^2}{4}} - \frac{e}{2}.$$




Slika 27. Korene funkcije - grafici "horizontalne polu-parabole": $y_1(x) = \sqrt{-x+2} + 1$, $y_2(x) = -\sqrt{-x+2} + 1$, $y_3(x) = \sqrt{x+5}$ i $y_4(x) = -\sqrt{x+5}$.

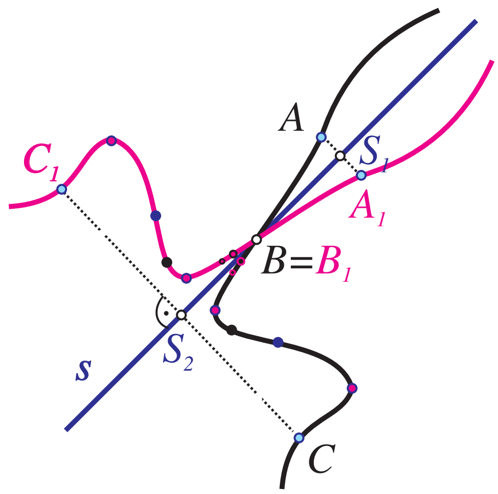
Zajedno nacrtani grafici funkcija $y_1$ i $y_2$ grade "horizontalnu" parabolu. Tako su na primer funkcije $y_1(x) = \sqrt{-x+2}+1$ i $y_2(x) = -\sqrt{-x+2}+1$ rešenja sledeće kvadratne jednačine

$$(y-1)^2 = -x+2, \quad \text{odnosno} \quad y^2 - 2y + x - 1 = 0,$$

i njihovi grafici su prikazani na sl. 27. Funkcije $y_3(x)$ i $y_4(x)$ su rešenja kvadratne jednačine $y^2 - x + 5 = 0$ po $y$.

## 3.4 Osno simetrični grafici funkcija

Da bi pričali o osnoj simetriji u ravni prvo mora da se definiše prava koja će biti osa simetrije. Osno simetrični objekti u ravni su podudarni, ali ne može da se pomeranjem u ravni jedan objekat preklopi preko drugog. Preklapanje je moguće izvršiti jedino rotiranjem u prostoru oko prave koja je osa simetrije tih objekata u ravni. Na sl. 28. dve krive linije (crna i ljubičasta) su međusobno osno simetrične u odnosu na plavu osu koju smo označili sa $s$. Parovi tačaka $A$ i $A_1$, $B$ i $B_1$, $C$ i $C_1$ su međusobno osno simetrični. To podrazumeva da osa $s$ polovi duži $[AA_1]$ i $[CC_1]$ i da je na njih ortogonalna. Tačke koje su na osi su same sebi simetrične ($B$ i $B_1$).




Slika 28. Dve međusobno osno-simetrične krive linije u odnosu na osu $s$

Uopšteno važi da:

1. grafik funkcije $f(-x)$, poklapa se sa **osno simetričnim grafikom** funkcije $f(x)$ za **osu simetrije** jednaku **$y$-osi** i ispunjeno je

   (a) ako je $D$ domen funkcije $f(x)$ onda je $D^- = \{-x, x \in D\}$ domen funkcije $f(-x)$ i obrnuto;

   (b) ako je $x_0$ nula funkcije $f(x)$ onda je $-x_0$ nula funkcije $f(-x)$ i obrnuto;

   (c) ako je $e_0$ tačka maksimuma $f(x)$ onda je $-e_0$ tačka maksimuma $f(-x)$ i obrnuto;

   (d) u tački $e_0$ funkcija $f(x)$ ima minimum akko u tački $-e_0$ funkcija $f(-x)$ ima minimum;

(e) na $(x_1, x_2)$ funkcija $f(x)$ raste akko na $(-x_2, -x_1)$ funkcija $f(-x)$ opada;

(f) na $(x_1, x_2)$ funkcija $f(x)$ opada akko na $(-x_2, -x_1)$ funkcija $f(-x)$ raste;

(g) na $(x_1, x_2)$ funkcija $f(x)$ je konveksna akko je na $(-x_2, -x_1)$ funkcija $f(-x)$ konveksna;

(h) i sl. ...

2. grafik funkcije $-f(x)$, se poklapa sa **osno simetričnim grafikom** funkcije $f(x)$ za **osu simetrije** jednaku $x$**-osi** i posledično važi

   (a) ako je $D$ domen funkcije $f(x)$ onda je $D$ domen funkcije $-f(x)$ i obrnuto;

   (b) ako je $x_0$ nula funkcije $f(x)$ onda je $x_0$ nula funkcije $-f(x)$ i obrnuto;

   (c) ako je $e_0$ tačka maksimuma $f(x)$ onda je $e_0$ tačka minimuma $-f(x)$ i obrnuto;

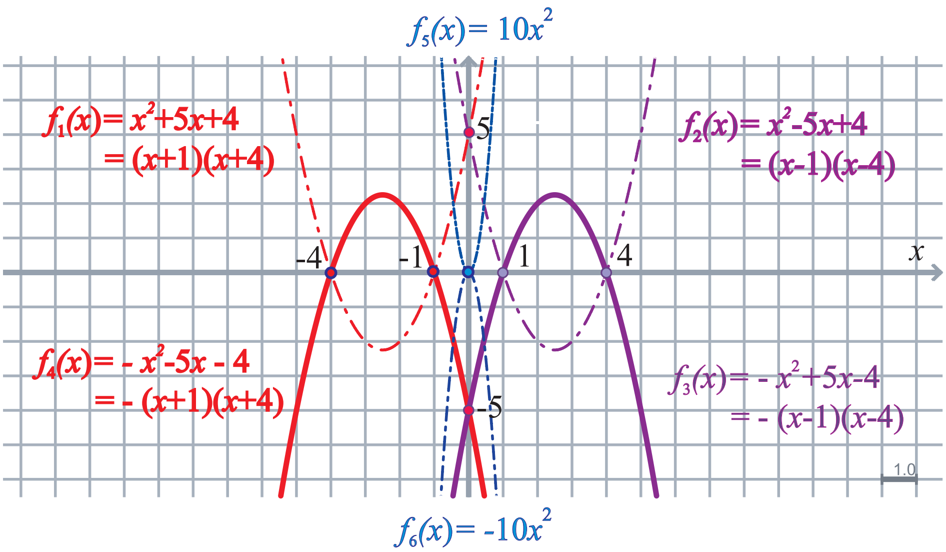
   (d) u tački $e_0$ funkcija $f(x)$ ima minimum akko u tački $e_0$ funkcija $-f(x)$ ima maksimum;

   (e) na $(x_1, x_2)$ funkcija $f(x)$ raste akko na $(x_1, x_2)$ funkcija $-f(x)$ opada;

   (f) na $(x_1, x_2)$ funkcija $f(x)$ opada akko na $(x_1, x_2)$ funkcija $-f(x)$ raste;

   (g) na $(x_1, x_2)$ je $f(x)$ konveksna akko je na $(x_1, x_2)$ funkcija $-f(x)$ konkavna;

   (h) i sl. ...




Slika 29. Primeri parova osno simetričnih funkcija:
po $x$-osi $f_1(x)$ i $f_4(x)$; $f_2(x)$ i $f_3(x)$; $f_5(x)$ i $f_6(x)$;
po $y$-osi $f_1(x)$ i $f_2(x)$; $f_3(x)$ i $f_4(x)$;

3. grafici međusobno inverznih funkcija $f(x)$ i $f^{-1}(x)$, su **osno simetrični** za **osu simetrije** $y = x$ (osa $s$ je prava koja je simetrala I i III kvadranta) i posledično važi

   (a) ako je $D$ domen funkcije $f(x)$ onda je $D$ kodomen funkcije $f^{-1}(x)$ i obrnuto;

(b) ako je $x_0$ nula funkcije $f(x)$ onda je $x_0$ presek sa $y$-osom funkcije $f^{-1}(x)$ i obrnuto;

(c) u tački $e_0$ funkcija $f(x)$ ima maksimum akko u tački $f(e_0)$ funkcija $f^{-1}(x)$ ima minimum;

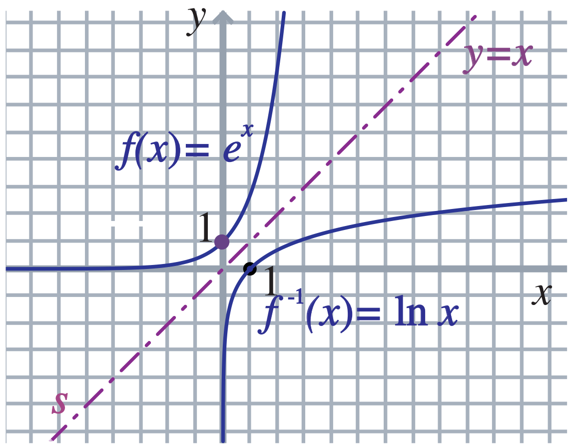
(d) u tački $e_0$ funkcija $f(x)$ ima minimum akko u tački $f(e_0)$ funkcija $f^{-1}(x)$ ima maksimum;

(e) na $(x_1, x_2)$ funkcija $f(x)$ raste akko na $(f(x_1), f(x_2))$ funkcija $f^{-1}(x)$ raste;

(f) na $(x_1, x_2)$ funkcija $f(x)$ opada akko na $(f(x_2), f(x_1))$ funkcija $f^{-1}(x)$ opada;

(g) na $(x_1, x_2)$ je $f(x)$ konveksna akko je na $(f(x_1), f(x_2))$ funkcija $f^{-1}(x)$ konkavna i obrnuto;

(h) i sl. ...




Slika 30. dve međusobno inverzne funkcije $e^x$ i $\ln x$

Poznato je da je osna simetrija kao i translacija izometrijska transformacija, te su osno simetrični grafici međusobno podudarni i imaju isti oblik ali su različito pozicionirani u ravni. Tako su grafici funkcija $y_3(x) = \sqrt{x+5}$ i $y_4(x) = -\sqrt{x+5} = -y_3(x)$ osno simetrični u odnosu na $x$-osu (videti sl. 27) Ove funkcije imaju zajednički domen $D = [5, +\infty)$ i nulu u $x = 5$. Funkcija $y_1(x) = \sqrt{-x+2}+1$ i $y_2(x) = -\sqrt{-x+2}+1$ nisu osno simetrični u odnosu na $x$-osu nego u odnosu na pravu $y = 1$(= translirana $x$-osa za $+1$ u pravcu $y$-ose). Zapravo su osno simetrični za $x$-osu grafici funkcija $\sqrt{-x+2}$ i $-\sqrt{-x+2}$ a zatim je sve translirano za $+1$ u pravcu $y$-ose (videti sl. 27). Ove funkcije imaju takođe zajednički domen $D = (-\infty, 2]$.

## 3.5 Eksponencijalne i logaritamske funkcije

Ako posmatramo izraz

$$a^b = c, \quad 0 < a \neq 1,$$

onda je $a$ **osnova**, $b$ **eksponent**, a $c$ **stepen**.

Nepoznatu osnovu $a$ u gornjem izrazu za pozitivan eksponent $b > 0$ rešili bi korenovanjem $\sqrt[b]{\ }$ gornjeg izraza. Tako je nepoznata osnova jednaka

$$a = \sqrt[b]{c}.$$

Naravno da bi koren bio rešiv u skupu realnih brojeva potrebno je dodatno da i $c$ bude pozitivno. Dakle, **stepenovanje i korenovanje su suprotne operacije**.

Ukoliko bi eksponent $b$ bio nepoznat rešili bi ga logaritmovanjem za osnovu $a$ gornjeg izraza odnosno

$$b = \log_a c,$$

pri čemu osnova mora biti pozitivna $a > 0$. Znači logaritam za osnovu $a$ od broja $c$ daje onu vrednost eksponenta koja nam je potrebna da dobijemo $c$ kad dignemo osnovu $a$ na taj eksponent.

Kada je eksponent proizvoljan realan broj, odn. nezavisna promenljiva $x$, opšti oblik **eksponencijalne funkcije** je

$$f_e(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathcal{R}.$$

Kada je stepen $x$ proizvoljan pozitivan realan broj, opšti oblik **logaritamske funkcije** je

$$f_l(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathcal{R}^+.$$

U oba slučaja $a$ je osnova. Logaritamska i eksponencijalna funkcija sa istom osnovom su dve međusobno inverzne funkcije što zapisujemo $f_l^{-1}(x) = f_e(x)$ i $f_e^{-1}(x) = f_l(x)$. **Logaritmovanje i eksponenciranje za istu osnovu su suprotne operacije**, pa je kompozicija ove dve funkcije indentično preslikavanje $id(x) = x$ odnosno važi da je

$$f_e(x) \circ f_l(x) = f_e(f_l(x)) = f_e(\log_a x) = a^{\log_a x} = x,$$

$$f_l(x) \circ f_e(x) = f_l(f_e(x)) = f_l(a^x) = \log_a a^x = x.$$

Tako su za osnovu $a$ jednaku broju $e \approx 2,71...$ eksponencijalna funkcija $e^x$ i logaritamska funkcija koju označavamo sa $\ln x$ i zovemo **prirodni logaritam** - međusobno inverzne funkcije. Njihovi grafici su **osnovni grafici** eksponencijalne i logaritamske funkcije i dati su na sl. 30. Ukoliko je osnova logaritma $a = 10$ ne naglašavamo je već pišemo $\log x$.

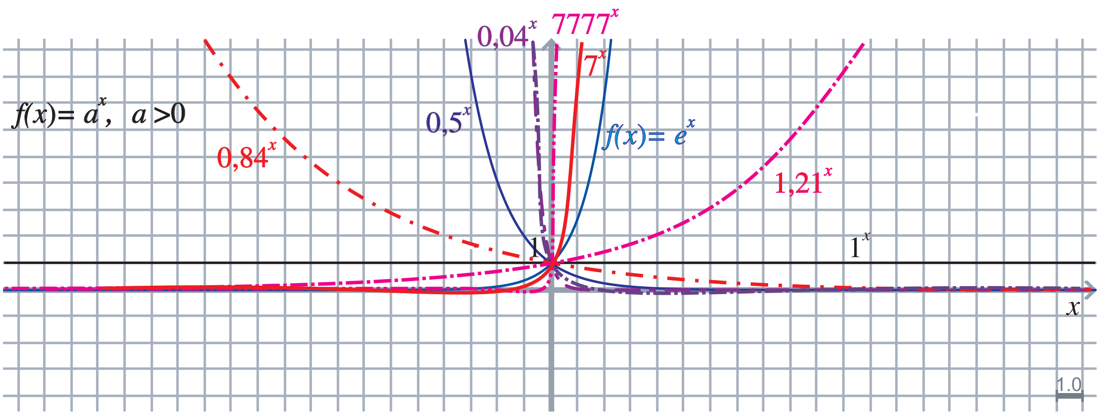
U sledećoj tabeli redom po kolonama su navedene osobine stepena, korena i logaritama.

| | | |
|---|---|---|
| $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ | $\sqrt[b]{a} \cdot \sqrt[b]{c} = \sqrt[b]{a \cdot c},\ a, b, c > 0$ | za $\quad a, b, c, o > 0$ |
| $a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b$ | $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[b\cdot c]{a},\ a, b, c > 0$ | $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ |
| $a^b = \dfrac{1}{a^{-b}}$ | $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}},\ a, b > 0$ | $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{a}{b}$ |
| $a^{b^c} = a^{b \cdot c}$ | $\sqrt[b]{a^b} = a$ | $\log_a b^c = c \log_a b$ |
| $(\sqrt[b]{a})^c = a^{\frac{c}{b}},\ a, b > 0$ | $(\sqrt[b]{a})^b = a,\ a, b > 0$ | $\log_a b = \dfrac{\log_o b}{\log_o a}$ |

### 3.5.1 Eksponencijalna funkcija

Dakle, kao što je izneto opšti oblik eksponencijalne funkcije je $f(x) = a^x$, pri čemu osnova $a$ mora biti pozitivan realan broj različit od 1. Eksponencijalna funkcija ima sledeće osobine:

1. domen $D$ je jednak $\mathcal{R}$;
2. uvek je pozitivna, tj. $f(x) = a^x > 0, \quad x \in \mathcal{R}$;
3. $y$-osu grafik seče u tački 1;
4. nema ekstremnih vrednosti ni prevojnih tačaka;
5. za vrednost osnove $a > 1$
   (a) eksponencijalna funkcija raste na $\mathcal{R}$;
   (b) teži 0 kad $x$ teži $-\infty$, tj. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0^+$;
6. za vrednost osnove $0 < a < 1$
   (a) eksponencijalna funkcija opada na $\mathcal{R}$;
   (b) teži 0 kad $x$ teži $+\infty$, tj. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0^+$;
7. eksponencijalna funkcija je konveksna na celom domenu $D$.



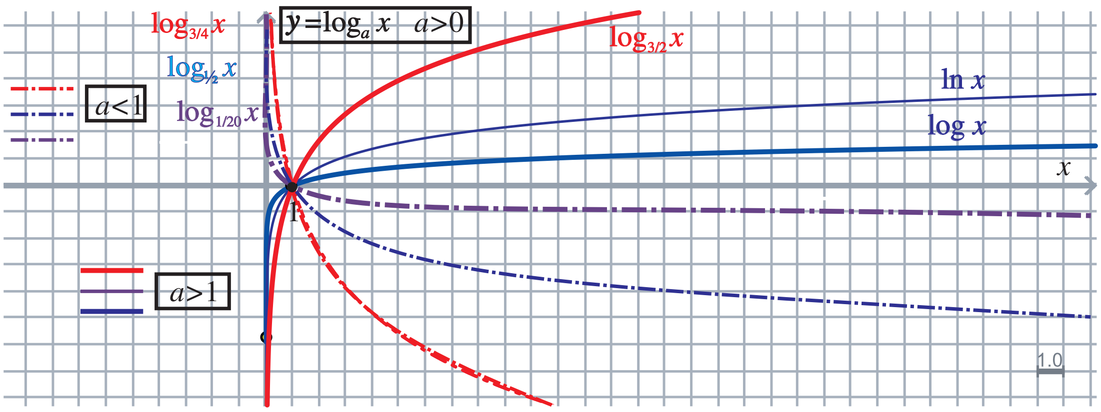

Slika 31. Grafici eksponencijalnih funkcija $f(x) = a^x, \quad a > 0$

Specijalno za $a = 1$, funkcija $f(x) = 1^x = 1$ je linearna i ima za grafik pravu paralelnu sa $x$-osom (crna prava na sl. 31). Primetimo na prikazanim graficima eksponencijalnih funkcija da se brže teži 0 (približava $x$-osi)i brže teži $+\infty$ (približava $y$-osi) ukoliko je osnova "udaljenija" od vrednosti 1.

### 3.5.2 Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x,\ 0 < a \neq 1,\quad x \in \mathcal{R}^+$ sa osnovom $a$ ima sledeće osobine:

1. domen čini skup pozitivnih realnih brojeva tj. $D = \mathcal{R}^+$;
2. $x$-osu grafik seče u tački 1, odnosno jedina nula logaritamske funkcije je u tački $x = 1$;
3. nema ekstremnih vrednosti ni prevojnih tačaka;
4. za vrednost osnove $a > 1$
   (a) logaritamska funkcija raste na $\mathcal{R}^+$;
   (b) teži $-\infty$ kad $x$ teži $0^+$, tj. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$;
   (c) $f(x) < 0,\ x \in (0,1)$, a $f(x) > 0,\ x \in (1, +\infty)$;
   (d) logaritamska funkcija je konkavna na celom domenu $\mathcal{R}^+$;
5. za vrednost osnove $0 < a < 1$
   (a) logaritamska funkcija opada na $\mathcal{R}^+$;
   (b) teži $+\infty$ kad $x$ teži $0^+$, tj. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$;
   (c) $f(x) > 0,\ x \in (0,1)$, a $f(x) < 0,\ x \in (1, +\infty)$;
   (d) logaritamska funkcija je konveksna na celom domenu $D$.



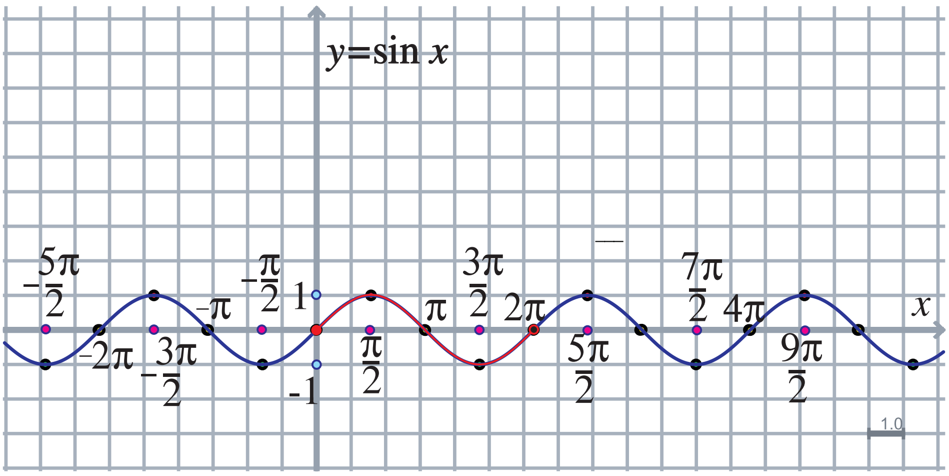

Slika 32. Grafici logaritamskih funkcija.

## 3.6 Osnovne trigonometrijske funkcije

### 3.6.1 Funkcije $\sin x$ i $\cos x$

Sinusna i kosinusna funkcija imaju sledeće zajedničke osobine:

- domen definisanosti je ceo skup realnih brojeva,
- kodomen je interval $[-1,\ 1]$,
- periodične su sa periodom ponavljanja od $2\pi$, odnosno važi $f(x+2\pi)=f(x)$, za svako $x \in \mathcal{R}$.

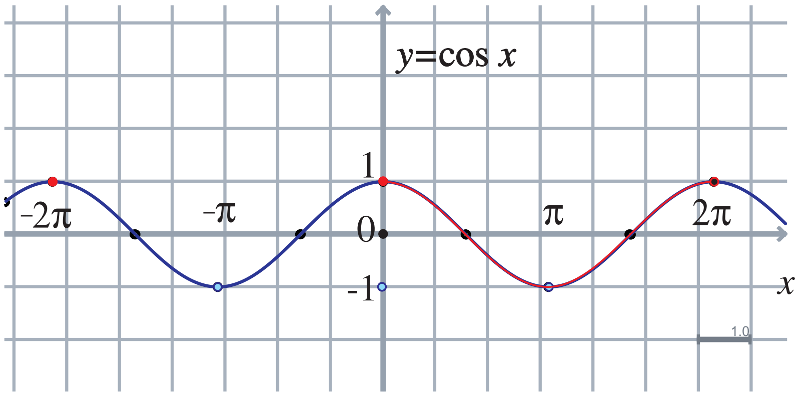



Slika 33. Grafik trigonometrijske funkcije $\sin x$.

Obe funkcije imaju bezbroj nula, prevoja, minimuma, maksimuma kao i intervala, rasta, opadanja, konveksnosti i konkavnosti, a nemaju asimptote.

Osnovni deo grafika sinusne funkcije na intervalu $[0{,}2\pi)$ na sl. 33 je obojen crvenom bojom i taj deo grafika se zbog periodičnosti ponavlja na intervalima desno $[2\pi,\ 4\pi)$,$[4\pi,\ 6\pi)$,... i levo $[-2\pi,\ 0)$,$[-4\pi,\ -2\pi)$, ... Preciznije za funkciju $\sin x$ važi da ima

- nule i prevoje u tačkama $x = k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- minimume u tačkama $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- maksimume u tačkama $x = \dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi,\ \ kin\mathcal{Z}$,
- intervale rasta za $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- intervale opadanja za $x \in (\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- konkavnost $\frown$ i pozitivan znak za $x \in (2 \cdot k \cdot \pi, (2 \cdot k + 1) \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- konveksnost $\smile$ i negativan znak za $x \in ((2 \cdot k - 1) \cdot \pi, 2 \cdot k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$.




Slika 34. Grafik trigonometrijske funkcije $\cos x$.

Na sl. 34 crvenom linijom je označen osnovni deo grafika funkcije $\cos x$ na intervalu $[0{,}2\pi)$. Taj deo grafika se ponavlja slično kao i kod sinusne funkcije na intervalima desno $[2\pi,\ 4\pi)$,$[4\pi,\ 6\pi)$,... i levo $[-2\pi,\ 0)$,$[-4\pi,\ -2\pi)$, ... Funkcija $\cos x$ ima:

- nule i prevoje u tačkama $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- minimume u tačkama $x = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- maksimume u tačkama $x = 2 \cdot k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- intervale rasta za $x \in ((2 \cdot k + 1) \cdot \pi, 2 \cdot k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- intervale opadanja za $x \in (2 \cdot k \cdot \pi, (2 \cdot k + 1) \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- konkavnost $\frown$ i pozitivan znak za $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- konveksnost $\smile$ i negativan znak za $x \in (\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$.

Količnik osnovnih trigonometrijskih funkcija $\sin x$ i $\cos x$ daje dve nove trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ i } \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

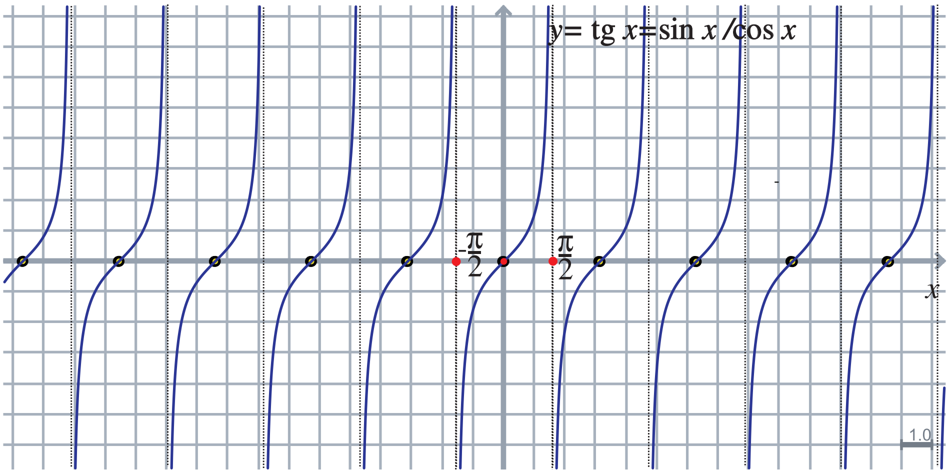
### 3.6.2 Funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$

Grafici osnovnih trigonometriskih funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ su dati na sl. 34 odn. 35. Obe funkcije su periodične, sa periodom $\pi$ - duplo manjim od perioda funkcija $\sin x$ i $\cos x$. Obe funkcije nemaju ekstremne vrednosti, imaju bezbroj vertikalnih asimptota i kodomen im je ceo skup realnih brojeva.

Dodatne osobine funkcije $\operatorname{tg} x$ su:

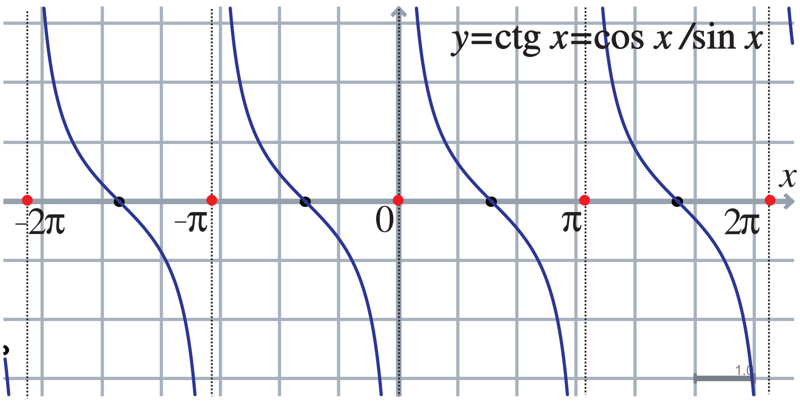
- ima nule i prevoje u tačkama $x = k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- ima vertikalne asimptote $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,

- konveksnost $\smile$ i pozitivan znak za $x \in (0 + k \cdot \pi, \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- konkavnost $\frown$ i negativan znak za $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, 0 + k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- na celom domenu $D = \mathcal{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathcal{Z}\}$ raste.




Slika 35. Grafik trigonometrijske funkcije $\operatorname{tg} x$.

Od analiziranih trigonometriskih funkcija neparne su $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$. Neparne funkcije imaju grafike centralno simetrične u odnosu na koordinatni početak kao što se može proveriti na graficima na sl. 33, 35 i 36.




Slika 36. Grafik trigonometrijske funkcije $\operatorname{ctg} x$.

Dodatne osobine funkcije $\operatorname{ctg} x$ su:

- ima nule i prevoje u tačkama $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- ima vertikalne asimptote $x = k \cdot \pi,\ \ k \in \mathcal{Z}$,

- konveksnost $\smile$ i pozitivan znak za $x \in (0 + k \cdot \pi, \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- konkavnost $\frown$ i negativan znak za $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, 0 + k \cdot \pi),\ \ k \in \mathcal{Z}$,
- na celom domenu $D = \mathcal{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathcal{Z}\}$ opada.

# Glava 4.

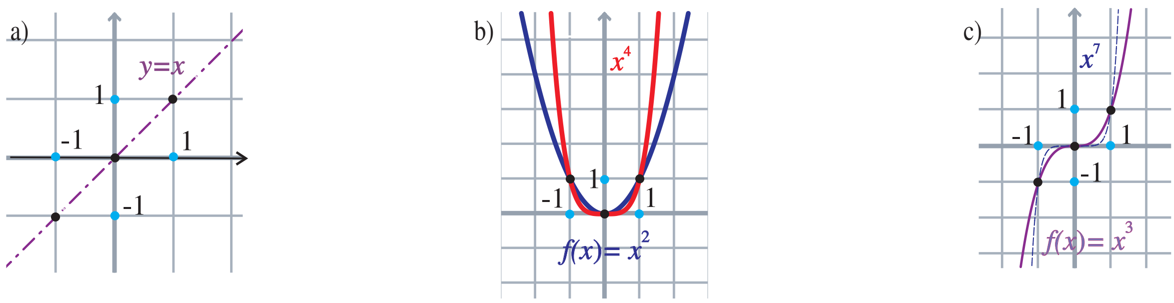
# 4 Stepene funkcije i polinomi

## 4.1 Stepene funkcije

Opšta stepena funkcija je oblika

$$f(x) = x^r, \; r \in \mathcal{R}.$$

Neke elementarne stepene funkcije su obrađene u prethodnoj glavi, kao specijalni slučajevi linearne funkcije za $r = 1$ (sl. 37.a) i $r = 0$ (sl. 38.a), kvadratne za $r = 2$ (sl. 37.b). Kada je broj $r$ prirodan broj imamo tri oblika grafika za stepenu funkciju kao što je prikazano na slici 37. Kada je $r$ paran prirodan broj grafik $f(x) = x^r$ je sličan grafiku temene parabole $x^2$ (sl. 37.b), dok su svi grafici za neparno $r \neq 1$ slični grafiku $x^3$ (sl. 37.c). Naravno za $r = 1$ grafik je prava.




Slika 37. Stepene funkcije $x^r$ za $r$ prirodan broj
a) $r = 1$, b) $r = 2k, \; k \in \mathcal{N}$ i c) $r = 2k+1, \; k \in \mathcal{N}$.

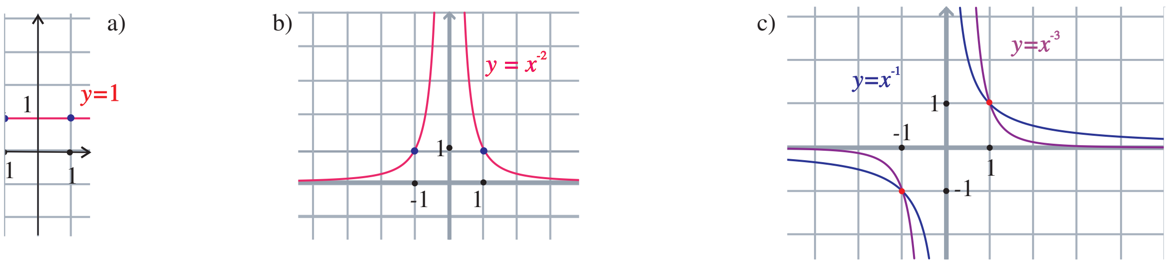
Za stepene funkcije čiji je eksponent prirodan veći od 1 važe osobine:

| $f(x) = x^{2k}, \; k \in \mathcal{N}$ (sl. 37.b) | $f(x) = x^{2k+1}, \; k \in \mathcal{N}$ (sl. 37.c) |
|---|---|
| domen je $\mathcal{R}$, | domen je $\mathcal{R}$, |
| nula i minimum u $x = 0$, | nula i prevoj u $x = 0$, |
| parna funkcija, | neparna funkcija, |
| $f(x) > 0$ za $x \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, | $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, |
| $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$, | $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, |
| $f(x)$ raste za $x \in (0, +\infty)$, | $f(x)$ raste na celom domenu, |
| $f(x)$ opada za $x \in (-\infty, 0)$, | $f(x)$ ne opada, |
| $f(x)$ konveksna za $x \in \mathcal{R}$, | $f(x)$ konveksna za $x \in (0, +\infty)$, |
| $f(x)$ nije konkavna, | $f(x)$ konkavna za $x \in (-\infty, 0)$, |
| nema prevoja, | nema ekstrema, |
| nema asimptota. | nema asimptota. |

Kako je $f(1) = 1^r = 1,\ r \in \mathcal{R}$ sve stepene funkcije imaju grafik koji prolazi kroz tačku (1,1). Dodatno kako je

$$f(-1) = \begin{cases} (-1)^r = 1, & \text{za } r = 2k, k \in \mathcal{Z} \ \text{ sl. 37.b, 38.a i 38.b} \\ (-1)^r = -1, & \text{za } r = 2k+1, k \in \mathcal{Z} \ \text{ sl. 37.a, 37.c i 38.c} \end{cases},$$

sve stepene funkcije sa parnim eksponentom $(x^0, x^2, x^{-2}, x^4, x^{-4},\ldots)$ prolaze kroz tačku $(-1{,}1)$ a sa neparnim $(x^1, x^3, x^{-3}, x^5, x^{-5},\ldots)$ kroz tačku $(-1,-1)$. Na slici 38. su nacrtani slučajevi kada je $r$ negativan ceo broj i to paran na 38.b a neparan na 38.c.




Slika 38. Grafici funkcije $x^r$ za
a) $r = 0$, b) $r = -2k,\ \ k \in \mathcal{N}$ i c) $r = -(2k+1),\ \ k \in \mathcal{N}$.

Stepene funkcije $x^{-4}, x^{-6}, x^{-8},\ldots$ imaju grafik sličan nacrtanom grafiku za $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ (sl. 38.b), sa razlikom u bržoj težnji funkcije ka $+\infty$ kad $x$ teži ka $0^{\pm}$ i bržoj težnji ka $0^{+}$ kad $x$ teži $\pm\infty$. Slično stepene funkcije $x^{-3}, x^{-5}, x^{-7},\ldots$ imaju grafik sličan grafiku hiperbole $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ (sl. 38.c).

Za stepene funkcije čiji je eksponent negativan ceo broj važe osobine:

| $f(x) = x^{-2k},\ \ k \in \mathcal{N}$ (sl. 38.b) | $f(x) = x^{-(2k+1)},\ \ k \in \mathcal{N}$ (sl. 38.c) |
|---|---|
| domen je $D = \mathcal{R} \setminus \{0\}$, | domen je $D = \mathcal{R} \setminus \{0\}$, |
| nema nula, ekstrema i prevoja, | nema nula, ekstrema i prevoja , |
| parna funkcija, | neparna funkcija, |
| $f(x) > 0$ za $x \in D = \mathcal{R} \setminus \{0\}$, | $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, |
| $f(x)$ nije negativna, | $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, |
| $f(x)$ raste za $x \in (-\infty, 0)$, | $f(x)$ ne raste, |
| $f(x)$ opada za $x \in (0, +\infty)$, | $f(x)$ opada na celom domenu, |
| $f(x)$ konveksna na celom domenu, | $f(x)$ konveksna za $x \in (0, +\infty)$, |
| $f(x)$ nije konkavna, | $f(x)$ konkavna za $x \in (-\infty, 0)$, |
| $f(x)$ ima vertikalnu asimptotu $x$=0, | $f(x)$ ima vertikalnu asimptotu $x$=0, |
| $f(x)$ ima horizontalnu asimptotu $y$=0. | $f(x)$ ima horizontalnu asimptotu $y$=0. |

Zadatak. Nacrtajte grafik funkcija
$h_1(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h_2(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $h_3(x) = -\dfrac{1}{x+3}$ i $h_4(x) = x^{-4}$.

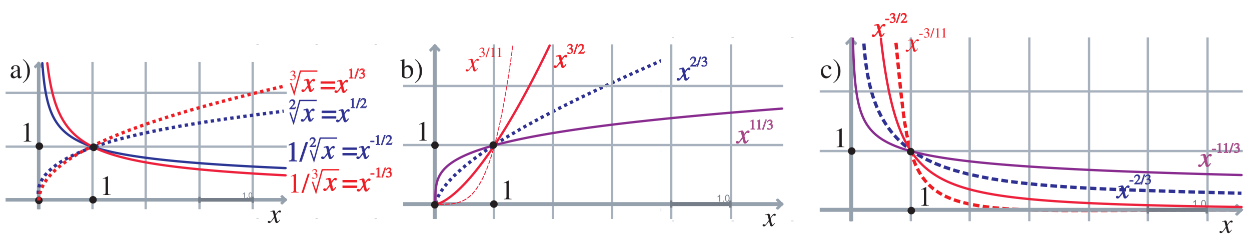
Rešenja.

Grafik $h_1(x)$ je osno simetričan u odnosu na $x$-osu plavom grafiku funkcije $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$

nacrtanom na sl. 38.c.
Grafik $h_2(x)$ je transliran plavi grafik funkcije $\frac{1}{x} = x^{-1}$ nacrtanom na sl. 38.c u pravcu $x$-ose i suprotnom smeru od $+$ smera $x$-ose za vektor dužine 3. Dakle $h_2$ ima vertikalnu asimptotu u $x = -3$.
Grafik $h_3(x)$ je osno simetričan u odnosu na $x$-osu grafiku $h_2(x)$.
Grafik $h_4(x) = x^{-4}$ je vrlo sličan pink grafiku na sl. 38.b stepene funkcije $x^{-2}$. On takođe prolazi kroz tačke $(-1{,}1)$ i $(1{,}1)$ i ima vertikalnu asimptotu u $x = 0$, ali brže joj se približava i brže se "lepi" za $x$-osu koja je horizontalna asimptota.

Neki primeri stepenih funkcija čiji eksponent je "pravi"[18] racionalan broj su dati na slici 39. Prirodni brojevi $m$ i $n$ u tom slučaju su uzajamno prosti. Domen ovih stepenih funkcija se sužava ili na interval $[0, +\infty)$ za pozitivan eksponent, odnosno na otvoren interval $(0, +\infty)$ za negativan eksponent stepene funkcije. Na sl. 39.a su nacrtani grafici korenih funkcija $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ i $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ kao i recipročnih korenih funkcija $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ i $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Primetimo da sve stepene korene funkcije oblika $x^{\pm\frac{1}{k}}$, $k \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$ imaju slične grafike nacrtanim primerima na sl. 39.a. Sve stepene funkcije $x^r$ za $r \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Z}$ (pogledajte primere na sl. 39.) imaju sledeće osobine:

- nemaju ni ekstrema ni prevoja,
- pozitivni su na $x \in (0, +\infty)$,
- nulu u $x = 0$ imaju samo stepene funkcije sa pozitivnim eksponentom,
- stalno rastu i konkavni su za pozitivan eksponent manji od 1,
- stalno rastu i konveksni su za pozitivan eksponent veći od 1,
- za negativan eksponent:
  - stalno opadaju i konveksni su,
  - imaju horizontalnu asimptotu $y = 0$,
  - imaju vertikalnu asimptotu $x = 0$.




Slika 39. Grafici funkcije $x^r$ za $x > 0$
a) $r = \frac{1}{k}$, $k \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$ b) $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathcal{N}$ i c) $r = -\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathcal{N}$.

[18]racionalan broj koji nije ceo broj

Stepene funkcije $x^r$ za $r \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ nećemo analizirati.

Ukoliko stepene funkcije koje imaju prirodan broj u eksponentu pomnožimo nekim realnim brojem a zatim ih saberemo dobijamo **polinomnu** funkciju $p(x)$ oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0, \; n \in \mathcal{N}, \; a_i \in \mathcal{R}, i = 0, 1, ...n \; .$$

Neke elementarne polinomne funkcije su već analizirane u prethodnoj glavi. To su linearna i kvadratna funkcija. Nezavisna promenljiva $x$ je posmatrana kao realna, međutim možemo da je tretiramo kao kompleksnu promenljivu što je i urađeno u sledećem poglavlju o polinomima.

## 4.2 Polinomi

**Polinom** $P$ *po kompleksnoj promenljivoj* $z = x + iy$ *je* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ...a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, *gde su* **koeficienti** $a_k \in \mathcal{C}$ *i* $n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$.

Elementi: $a_n z^n, a_{n-1}z^{n-1}, ...a_1 z, a_0$ su **članovi** polinoma $P$. Ako su svi koeficijenti polinoma realni onda je i polinom $P$ **realan**. U nastavku podrazumevamo da su polinomi po kompleksnoj promenljivoj realni.

Ako je vodeći koeficijent $a_n \neq 0$ tada je polinom $P$ $n$-tog **stepena**, tj. $st(P) = n$. Broj 0 se naziva **nula polinom**.

Ako polinomi $P$ i $Q$ nisu nula polinomi tada je
$st(P(z) + Q(z)) \leq max\{st(P), st(Q)\}$ i $st(P(z) \cdot Q(z)) = st(P) + st(Q)$.

## 4.3 Najveći zajednički delilac polinoma - $NZD$

Slično kao kod prirodnih brojeva, ako su $P$ i $Q$ polinomi i postoji polinom $K$ tako da je $P(x) \cdot K(x) = Q(x)$, onda kažemo da je polinom $P$ delitelj polinoma $Q$, i pišemo $P|Q$.

*Polinom $D(z)$ je* **najveći zajednički delilac** *polinoma $P(z)$ i $Q(z)$, u oznaci $D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ ako je zadovoljeno:*

$$1. \; D|P \wedge D|Q \quad i \quad 2. \; (\forall R) \; (R|P \wedge R|Q) \Rightarrow R|D.$$

Ako polinom $R$ deli polinom $D$, tj. $R|D$, to ima za posledicu da je $st(R) \leq st(D)$. Zato se u prethodnoj definiciji za polinom $D$ koristi pridev najveći, u smislu da je $D$ polinom najvećeg stepena koji deli polinome $P$ i $Q$.

Primetimo da ako je $D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ tada je i $\alpha \cdot D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ gde je $0 \neq \alpha \in \mathcal{R}$.

*Za bilo koja dva nenula polinoma $P$ i $Q$ postoji njihov najveći zajednički delilac. On je jedinstveno određen sa tačnošću do jedne multiplikativne konstante.*

**Dokaz.** Primenimo Euklidov algoritam: prvo podelimo polinom $P$ sa polinomom $Q$, a zatim sve dok je ispunjeno da ostatak pri deljenju nije nula polinom, iterativno delimo delilac sa ostatkom. Tako dobijamo sledeći niz jednačina u kojima su redom $Q, R_1, R_2, ..., R_k$ delioci, a redom $R_1, R_2, ..., 0$ ostaci:

$$\begin{array}{lclcll}
P(z) & = & Q(z) & \cdot & Q_1(z) & +R_1(z) \\
Q(z) & = & R_1(z) & \cdot & Q_2(z) & +R_2(z) \\
R_1(z) & = & R_2(z) & \cdot & Q_3(z) & +R_3(z) \\
\multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
R_{k-3}(z) & = & R_{k-2}(z) & \cdot & Q_{k-1}(z) & +R_{k-1}(z) \\
R_{k-2}(z) & = & R_{k-1}(z) & \cdot & Q_k(z) & +\mathbf{R_k(z)} \\
R_{k-1}(z) & = & R_k(z) & \cdot & Q_{k+1}(z) & +0 \\
\text{deljenik} & & \textbf{delilac} & & \text{količnik} & \textbf{ostatak}
\end{array}$$

Euklidov postupak tvdi da je $R_k(z) = NZD(P(z), Q(z))$. Proverimo to.

Pokažimo prvo da je polinom $R_k$ delilac polinoma $P$ i delilac polinoma $Q$. Iz poslednje jednačine imamo da polinom $R_k$ deli polinom $R_{k-1}$. Zatim uz korišćenje činjenice $R_k|R_{k-1}$, iz pretposlednje jednačine imamo da polinom $R_k$ deli i polinom $R_{k-2}$. Iz treće jednačine od kraja uz činjenice $R_k|R_{k-1}$ i $R_k|R_{k-2}$, imamo i $R_k|R_{k-3}$. Slično, dolazimo do druge jednačine pri čemu smo saznali da važi $R_k|R_i$ za $i = k-1, k-2, k-3, ..., 1$. Tada, iz druge jednačine zaključujemo da $R_k|Q$, i najzad iz prve jednačine zaključujemo $R_k|P$.

Potrebno je još pokazati da je $R_k$ *najveći* zajednički delilac polinoma $P$ i $Q$, odnosno da ako pretpostavimo da postoji polinom $T$, koji deli oba polinoma $P$ i $Q$ da tada mora da važi da je $T|R_k$. Iz pretpostavke da postoji polinom $T$ tako da je ispunjeno $T|P$ i $T|Q$, iz prve jednačine imamo da onda važi $T|R_1$. Zatim, iz druge jednačine dobijamo da $T|R_2$. Potom, iz treće sledi da $T|R_3$,... Iz poslednje jednačine imamo da pošto važi da $T|R_{k-1}$ sledi da je i $T|R_k$, što je i trebalo dokazati. □

## 4.4 Osnovna teorema algebre

Rešenje $z_1$ algebarske jednačine $P(z) = 0$ nazivamo **nulom** ili **korenom** polinoma $P$. Tako su $z_1 = -2$ i $z_2 = 3$ koreni polinoma $P(z) = z^2 - z - 6$, jer je $P(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$ i $P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$. Slično su $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$ i $z_3 = 0$ koreni ili nule polinoma $Q(z) = z^3 - 2z^2 + 5z = z(z^2 - 2z + 5)$, pošto je ispunjeno:

- $Q(z_1) = Q(1+2i) = (1+2i)((1+2i)^2-2(1+2i)+5) = (1+2i)\cdot(1+4i-4-2-4i+5) = (1+2i)\cdot 0 = 0$,
- $Q(z_2) = Q(1-2i) = (1-2i)\cdot((1-2i)^2-2(1-2i)+5) = (1-2i)\cdot(1-4i-4-2+4i+5) = (1-2i)\cdot 0 = 0$ i
- $Q(z_3) = Q(0) = 0^3 - 2\cdot 0^2 + 5\cdot 0 = 0$.

Važi sledeće tvrđenje za realne polinome po kompleksnoj promenljivoj:

*Svaki polinom stepena $n \in \mathcal{N}$ ima $n$ rešenja u skupu kompleksnih brojeva.*

Osnovna teorema algebre nam daje nešto slabije tvrđenje:

*Svaki polinom $P(z)$ stepena $n$, $n \geq 1$ ima bar jednu nulu.*

### 4.4.1 Faktorizacija polinoma

U opštem slučaju faktorisati polinom znači zapisati ga u obliku proizvoda polinoma nižeg stepena. Faktorizaciju polinoma smatramo "uspešnijom" ukoliko su polinomi faktori što nižeg stepena.

*Svaki polinom se na jedinstven način može faktorisati u proizvod polinoma prvog i polinoma drugog stepena pri čemu su polinomi drugog stepena sa diskriminantom manjom od nule.*

Tako polinom $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 3z - 6$ nije faktorisan. Možemo ga faktorisati na više načina, na primer: $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 + z - 2)$, $P(z) = (z^3 - z^2 + 3z - 3)(z + 2)$, $P(z) = (z - 1)(z^3 + 2z^2 + 3z + 6)$, ... (proverite!)

Njegova jedinstvena faktorizacija preko proizvoda polinoma prvog i drugog stepena je: $P(z) = (z^2 + 3)(z - 1)(z + 2)$. Ovaj realan polinom ima dve realne nule $z_1 = 1$ i $z_2 = -2$ i dve konjugovano kompleksne nule $z_3 = \sqrt{3}i$ i $z_4 = -\sqrt{3}i$.

Sledeće tvrđenje je posledica prethodnih:

*Ako je polinom $P$ neparnog stepena onda jednačina $P(z) = 0$ ima bar jednu realnu nulu.*

Ukoliko nam je potreban odgovor na pitanje da li neki polinom sa celobrojnim koeficijentima ima racionalnih rešenja, na osnovu sledeće dve teoreme, zaključujemo da su kandidati za racionalne nule u veoma suženom skupu razlomaka i da sve kandidate efikasno proveravamo da li su nule po Hornerovoj šemi.

*Ako polinom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... a_1 z + a_0$ ima sve koeficijente cele $a_i \in \mathcal{Z}$ i ako su vodeći i slobodni koeficijent različiti od nule tada je potreban uslov da racionalan broj $\dfrac{p}{q}$, $p \cdot q \neq 0$ bude nula jednačine $P(z) = 0$ da je zadovoljeno: $p|a_0$ i $q|a_n$.*

**Dokaz.** Neka je $\dfrac{p}{q}$ koren jednačine $P(z) = 0$. Preciznije, važi jednakost:

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su $p$ i $q$ uzajamno prosti celi brojevi. Pomnožimo jednakost $P(\dfrac{p}{q}) = 0$ sa $q^{n-1}$ i izrazimo prvi sabirak preko preostalih:

1) $$-a_n \frac{p^n}{q} = a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}$$

Na desnoj strani jednakosti 1) imamo ceo broj pa je i $-a_n \dfrac{p^n}{q}$ ceo broj. Kako $q$ ne deli $p$ to mora biti da važi da $q|a_n$.

Pomnožimo sada jednakost $P(\dfrac{p}{q}) = 0$ sa $\dfrac{q^n}{p}$, i prebacimo poslednji sabirak na desnu stranu, dobićemo:

2) $$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1} = -a_0 \frac{q^n}{p}$$

Na levoj strani jednakosti 2) imamo ceo broj pa je i $-a_0 \dfrac{q^n}{p}$ ceo broj. Pošto su brojevi $p$ i $q$ uzajamno prosti to znači da $p|a_0$. $\square$

**Napomena.** Naglasimo da prethodna teorema daje samo *potreban* uslov da algebarska jednačina ima racionalnu nulu. Svi zahtevani uslovi iz teoreme mogu biti zadovoljeni a da ne postoje racionalne nule. Na primer, jednačina $3z^2 - 2 = 0$ je takva, da nijedan racionalan broj iz skupa $\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$ nije njeno rešenje.

Primer. Dat je polinom $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Proverite koji racionalni brojeva su po prethodnom tvrđenju kandidati za nule $P(x)$.
Rešenje. U $P(x)$ slobodni koeficijent je 4 a vodeći 1. Po teoremi $p/q$ je kandidat za nulu ako $p|4$ i $q|1$. Sledi da su kandidati iz skupa $p/q \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$. Zamenom u $P(x)$ se lako proverava da su nule 1, $-1$, 2 i $-2$.

Hornerovom šemom možemo brže (sa manje računanja) da proverimo da li je neki broj nula nekog polinoma ili ne. Ona je zajedno sa prethodnim tvrđenjem dobar aparat za brzo nalaženje racionalnih nula.

## 4.5 Bezuova teorema i Hornerova šema

Ukoliko želimo da utvrdimo kolika je vrednost $P(z_0)$, polinoma $P(z)$, stepena $n$, u tački $z_0$, direktnim računanjem potrebno je izvršiti $n + (n-1) + ... + 1 = \frac{n^2+n}{2}$, množenja i $n$ sabiranja. Za isti posao Hornerova šema zahteva manje vremena (broj množenja smanjuje na $n$). Dodatni kvalitet Hornerove šeme je što u toku izračunavanja $P(z_0)$ dobijamo i koeficijente polinoma koji nastaje prilikom deljenje $P(z)$ linearnim članom $z - z_0$. Preciznije o tome nam govori Bezuova teorema.

**Bezuova teorema.** *Neka polinom* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *delimo polinomom prvog stepena* $z - z_0$, $z_0 \in \mathcal{C}$. *Neka je rezultat deljenja polinom* $Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i$, *tada je ostatak pri deljenju jednak* $P(z_0)$,

$$P(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0) + P(z_0),$$

*pri čemu su koeficijenti polinoma* $Q$ *jednaki*

$$\triangle \qquad b_{n-1} = a_n, \quad b_i = b_{i+1}z_0 + a_{i+1}, \quad i = n-2, ..., 1, 0, \ i \ P(z_0) = b_0 z_0 + a_0.$$

*Koeficijente polinoma* $Q$ *kao i* $P(z_0)$ *je na osnovu prethodnih formula pogodno izračunati po šemi, poznatoj kao* **Hornerova šema***:*

| $z_0$ | $a_n$ | $a_{n-1}$ | ... | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | ... | $b_1$ | $b_0$ | $P(z_0)$ |

**Dokaz.** Pokažimo prvo da je polinom $P(z)$ jednak polinomu $B(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0) + P(z_0)$. Kako su polinomi jednakih stepena jednaki ako su im jednaki odgovarajući koeficijenti nađimo koeficijente polinoma $B$:
$B(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0) + P(z_0)$
$= b_{n-1}z^n + (b_{n-2} - z_0 b_{n-1})z^{n-1} + ... + (b_1 - z_0 b_2)z^2 + (b_0 - z_0 b_1)z - z_0 b_0 + P(z_0)$.

Nakon zamene koeficijenata $b_i$, $\quad i = 0, 1, ..., n-1$ i $P(z_0)$ po formuli $\triangle$ sledi:
$B(z) = a_n z^n + (z_0 b_{n-1} + a_{n-1} - z_0 b_{n-1})z^{n-1} + ... + (z_0 b_2 + a_2 - z_0 b_2)z^2$
$+(z_0 b_1 + a_1 - z_0 b_1)z - z_0 b_0 + z_0 b_0 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = P(z)$.

Na ovaj način smo proverili da su koeficijenti $b_i$ dobro definisani. Dokažimo još da je $P(z_0) = z_0 b_0 + a_0$. U sledećem nizu jednakosti smo redom zamenjivali $b_0$, $b_1$, ..., $b_{n-2}$ i $b_{n-1}$ po formuli $\triangle$.

$z_0 b_0 + a_0 = z_0(z_0 b_1 + a_1) + a_0 = b_1 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 = (z_0 b_2 + a_2) z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 =$
$b_2 z_0^3 + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 = ...$

$$b_{n-1} z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + ... + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i z_0^i = P(z_0). \qquad \square$$

Primeri.

Ako je $P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = 2z^5 + 0z^4 + 0z^3 - 3z^2 + 5z - 4$, i želimo da izračunamo $P(2)$ po Hornerovoj šemi je:

| 2 | 2 | 0 | 0 | −3 | 5 | −4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 8 | 13 | 31 | 58 |

što implicira $P(2) = 58$. Odnosno po Bezuovoj teoremi je
$P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = (z-2)(2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 13z + 31) + 58$. Međutim, ako želimo da izračunamo $P(1)$:

| 1 | 2 | 0 | 0 | −3 | 5 | −4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 2 | 2 | −1 | 4 | 0 |

zaključujemo da je 1 nula polinoma $P$, odnosno da je:
$P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = (z-1)(2z^4 + 2z^3 + 2z^2 - z + 4)$.

Za razvijanje polinoma $Q(z) = z^5 - 5z^4 - 14z^3 - z^2 + 2z + 5$ po stepenima od $z + 2$ možemo višestruko primeniti Hornerovu šemu:

| −2 | 1 | −5 | −14 | −1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −7 | 0 | −1 | 4 | −3 |
| | 1 | −9 | 18 | −37 | 78 | |
| | 1 | −11 | 40 | −117 | | |
| | 1 | −13 | 66 | | | |
| | 1 | −15 | | | | |
| | 1 | | | | | |

Sledi da je $Q(z) = (z+2)^5 - 15(z+2)^4 + 66(z+2)^3 - 117(z+2)^2 + 78(z+2) - 3$.

## 4.6 Zadaci

**4.1.** Da li je polinom $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ deljiv sa polinomom $x - 2$? Koristite Hornerovu šemu.

Rešenje. Nije. Ostatak je $-20$.

**4.2.** Da li je 3 nula polinoma $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$?

Rešenje. Jeste.

**4.3.** Odredite sve racionalne nule polinoma $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$.

Rešenje. Sve nule su mu racionalne: $1, -2, 3$ i $-3$.

**4.4.** Polinom $P = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$, razviti po stepenima linearnog faktora $x - 2$, višestrukom primenom Bezuove teoreme.

Rešenje. $P = (x-2)^4 + 9(x-2)^3 + 19(x-2)^2 - 9(x-2) - 20$.

# Glava 5.

## 5 Ekonomske funkcije

Označimo sa $x$ (najčešće nezavisnu) promenljivu koja predstavlja **ukupnu količinu jedinica robe** (skraćeno j.r.). Sa $p$ označimo **cenu** u novčanim jedinicama (skraćeno n.j.) po jedinici robe.

Potražnja robe $x$, od strane kupaca, zavisi od cene, sledi da je funkcija $x(p)$ funkcija **tražnje** (tj. **potražnje**). U zavisnosti od aktuelne cene $p$ robe na tržištu zavisi i ukupna količina proizvoda $y$ koji se prodaju. Ovu funkciju $y(p)$ zovemo funkcijom **ponude**. Tržište je u ravnoteži kada je ponuda jednaka potražnji, odnosno kada su funkcije potražnje i ponude robe jednake, tj. $x(p) = y(p)$. Cena za koju su ponuda i tražnja iste je dobro nivelisana.

Funkcija **ukupnih prihoda** $P$ je direktno proporcionalna ukupnoj količini robe $x$ i ceni $p$ po jedinici robe:

$$P \ = \ p \cdot x.$$

Prihode možemo izraziti i samo preko cene ukoliko ih prikažemo kao proizvod cene i količine robe $x$:

$$P(p) = \ p \cdot x(p),$$

ili samo preko ukupne količine robe ako cenu izrazimo preko potražnje

$$P(x) = \ p(x) \cdot x.$$

Funkcija **ukupnih troškova** se označava sa $C(x)$, dok funkciju **ukupne dobiti** označavamo sa $D(x)$. Dobit je jednaka razlici između ukupnih prihoda i ukupnih troškova te je funkcija ukupne dobiti:

$$D(x) = P(x) - C(x).$$

Funkcije **prosečnih troškova**, **prihoda** i **dobiti**, redom označavamo sa $\overline{C}(x), \overline{P}(x)$ i $\overline{D}(x)$, su definisane kao količnici funkcija ukupnih troškova, prihoda i dobiti sa ukupnom količinom robe $x$:

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}, \quad \overline{P}(x) = \frac{P(x)}{x} \quad \text{i} \quad \overline{D}(x) = \frac{D(x)}{x}, \ x > 0.$$

Stoga je $\overline{C}(x)$ tršak po jedinici robe, $\overline{P}(x)$ prihod po jedinici robe a $\overline{D}(x)$ dobit po jedinici robe.

Primeri.

1. Funkcija ukupnih prihoda je $P(x) = -5x^2 + 100x$. Naći funkcije tražnje i $P(p)$.

Kako je $p(x) = \frac{P(x)}{x} = -5x + 100$, sledi da $x(p) = -0.2p + 20$. Tako je $P(p) = p \cdot x(p) = -0.2p^2 + 20p$.

2. Ako je funkcija tražnje $x = \dfrac{400}{p+50}$ i prosečnih troškova $\overline{C}(x) = 2x - 5 + 100/x$, naći prosečnu dobit.

Funkcija ukupnih troškova je $C(x) = x \cdot \overline{C}(x) = 2x^2 - 5x + 100$. Iz $p = 400x^{-1} - 50$ imamo $P(x) = x \cdot p(x) = 400 - 50x$. Funkcija ukupne dobiti je
$D(x) = P(x) - C(x) = 400 - 50x - 2x^2 + 5x - 100 = 300 - 45x - 2x^2$.

Jasno je da je vrlo bitno da se zna do koje granice smemo da smanjujemo ili povećavamo proizvodnju, a da preduzeće još uvek ostvaruje dobit. Sve one vrednosti količine proizvedene robe $x$ za koju preduzeće ima pozitivnu dobit čine **interval rentabilnosti**.

Kada su poznate ekonomske funkcije koje prate određenu proizvodnju ili trgovinu, važno je da znamo da izračunamo parametre proizvodnje koji će nam omogućititi efikasniju proizvodnju, odnosno trgovinu.

Neki od tih parametara su: **minimalni prosečni troškovi** $\overline{C}_{min}$, **maksimalni prihod** $P_{max}$ u zavisnosti od cene $p_{opt}$ ili u zavisnosti od količine robe $x_{opt}$, **maksimalna dobit** $D_{max}$, interval rentabilnosti robe $(x_1, x_2)$. Ekstremne vrednosti (minimume ili maksimume) ekonomskih funkcija možemo da izračunamo na način opisan u poglavlju 10.3. Nađimo nule prvog izvoda i proverimo promene znaka prvog izvoda.

Ilustrujmo računanje ovih važnih parametara proizvodnje na primerima:

Primeri:

1. Neka je funkcija tražnje $x = \sqrt{19200 - 4p}$. Naći cenu i količinu robe tako da ukupan prihod bude maksimalan i naći taj prihod.
Rešenje. Ako kvadriramo obe strane funkcije tražnje a zatim izrazimo $p$, dobija se $p = 4800 - 1/4 \cdot x^2$. Funkcija ukupnog prihoda je
$P = p \cdot x = 4800x - 1/4 \cdot x^3$.
$P'(x) = 4800 - 3/4 \cdot x^2$. Iz $P' = 0$ sledi $4800 - 3/4 \cdot x^2 = 0$, što je ekvivalentno sa $x^2 = 6400$.

Rešenja ove kvadratne jednačine su $x_1 = -80$ i $x_2 = 80$. Negativna količina proizvedene robe nema smisla pa dalje posmatramo samo rešenje $x = 80$. Proverimo po da li se za količinu robe od $x = 80$ jedinica robe dobija maksimalan prihod.
$P''(x) = -3/2 \cdot x$, pa je $P''(80) = -120 < 0$, što znači da se maksimalan prihod $P_{max}$ ostvaruje za $x_{opt} = 80$ jediniuca robe, i on iznosi $P_{max} = P(80) = 4800 \cdot 80 - 1/4 \cdot 80^3 = 256000$.

Tražena cena za maksimalan prihod je $p = 4800 - 1/4 \cdot 80^2 = 3200$ novčanih jedinica po jedinici proizvoda.

2. Neka su ukupni troškovi dati funkcijom $C(x) = 1/100 \cdot x^2 + 20x + 900$. Odrediti minimalne prosečne troškove kao i proizvodnju $x$ tako da se oni postižu.
Rešenje. Funkcija prosečnih troškova je
$\overline{C}(x) = C(x)/x = 1/100 \cdot x + 20 + 900 \cdot x^{-1}$.
$\overline{C}'(x) = 1/100 - 900 \cdot x^{-2}$. Sledi
$\overline{C}'(x) = 0$ je ekvivalentno sa jednačinom $x^2 = 90000$, čija su rešenja $x_1 = 300$ i $x_2 = -300$ (neinteresantno rešenje).

Kako je $\overline{C}''(x) = 1800 \cdot x^{-3}$, sledi da je $\overline{C}''(300) > 0$, što po teoremi 17 znači da se za $x_{opt} = 300$ postižu minimalni prosečni troškovi koji su jednaki $\overline{C}_{min} = \overline{C}(300) = 26$ novčanih jedinica.

3. Data je funkcija ukupnih troškova za neki proizvod $C = 2x^2 + 2000000$, i funkcija tražnje tog proizvoda $x = 10000 - p/2$, gde je $x$ količina robe, a $p$ cena u dinarima. Odrediti:
a) cenu $p$ pri kojoj će se ostvariti maksimalna dobit i odrediti je;
b) ukupan prihod u uslovima maksimalne dobiti;

c) interval rentabilnosti (proizvodnju za koju je dobit pozitivna).
Rešenje. Date su nam funkcija troškova i tražnje: $C = 2x^2 + 2000000$, $x = 10000 - p/2$. Kako je $D(x) = P(x) - C(x)$, i $P(x) = x \cdot p(x)$ treba nam još funkcija cene u zavisnosti o tražnje $p(x) = 20000 - 2x$.
$P(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (20000 - 2x) = 20000x - 2x^2$.
a) Odredimo prvo maksimalnu dobit $D_{max}$, u zavisnosti od količine proizvodnje.
$D(x) = P - C = 20000x - 2x^2 - 2x^2 - 2000000 = -4x^2 + 20000x - 2000000$.
$D'(x) = -8x + 20000$ sledi $D'(x) = 0$ za $x = 2500$. Kako je $D''(x) = -8$ sledi da je $D''(2500) = -8 < 0$, pa u tački $x = 250$ dobit ima maksimalnu vrednost, tj,
$D_{max} = D(x_{opt}) = D(2500) = -4 \cdot 2500^2 + 20000 \cdot 2500 - 2000000 = 23000000$.

Cena koju imamo za proizvodnju od $x = 2500$ je $p(2500) = 20000 - 2 \cdot 2500 = 15000$. Znači, maksimalna dobit $D_{max}$= 23 000 000 se postiže pri ceni od $p_{opt} = 15000$.
b) Ukupan prihod u uslovima maksimalne dobiti
$D_{max}$= 23 000 000 =D(2500), se postiže za optimalnu proizvodnju od $x_{opt} = 2500$ i jednak je
$P(2500) = 20000 \cdot 2500 - 2 \cdot 2500^2 = 37500000$.
c) Nađimo granične količine proizvodnje $x_1$ i $x_2$ za koju je dobit nula, $D = 0$, tj. za koju su prihodi jednaki troškovima $P = C$:
$D(x) = -4x^2 + 20000x - 2000000 = 0$. Kada podelimo sa -4 dobijamo kvadratanu jednačinu:

$$x^2 - 5000x + 500000 = 0 \ ,$$

čija su rešenja $x_{1,2} = \dfrac{5000 \pm \sqrt{25000000 - 2000000}}{2} = \dfrac{500 \pm \sqrt{23000000}}{2} = \dfrac{5000 \pm 4800}{2}$,
$x_1 = 100$ i $x_2 = 4900$, pa je interval rentabilne proizvodnje $x \in (100, 4900)$.

Jedan od važnih pojmova koji doprinose objektivnom upoređivanju i analizi različitih poslovnih preduzeća je elastičnost odgovarajućih ekonomskih funkcija.

## 5.1 Elastičnost funkcije

Priraštaj argumenta i funkcije su definisani u poglavlju 10.2. **Relativni priraštaji** funkcije $f$ i argumenta u tački $x$ su redom količnici $\dfrac{\Delta f}{f(x)}$ i $\dfrac{\Delta x}{x}$, pri čemu su $\Delta f$ i $\Delta x$ priraštaj funkcije i priraštaj argumenta.

Na primer, neka je funkcija $f(x) = 5x^2 - 10$ i neka je $x = 2$ i $\Delta x = 1$, tada je priraštaj funkcije $\Delta f = f(3) - f(2)$=35-10=25, relativni priraštaj funkcije u tački $x = 2$ je $\dfrac{25}{f(2)} = 2,5$, dok je relativni priraštaj argumenta $\dfrac{\Delta x}{x} = 0,5$.

Kada posmatramo relativni priraštaj funkcije i relativni priraštaj argumenta onda se gube jedinice mere u kojima su izražene nezavisna i zavisna promenljiva. Na taj način, posmatrajući samo relativne odnose možemo da upoređujemo funkcije izražene u različitim jedinicama mere. Na primer, jedna funkcija ukupnih troškova $C_1(x)$ za jedinicu mere nezavisne promenljive $x$ može da ima 100 t, dok jedinica mere zavisne promenljive može biti u 1000 dinara, dok druga funkcija troškova $C_2(x)$ za odgovarajuće jedinice mere nezavisne i zavisne promenljive može imati metre i dolare. Jasno je da bi ovakve dve proizvodnje bilo teško uporedjivati bez prelaska na relativne odnose promenljivih.

*Granična vrednost količnika relativnog priraštaja funkcije $f$ i relativnog priraštaja neza-*

*visne promenljive x, kad priraštaj nezavisne promenljive teži 0, naziva se* **elastičnost** *funkcije* $y = f(x)$ *i označava sa* $E_{y,x}$.

Povezaćemo elastičnost funkcije sa prvim izvodom funkcije, ukoliko on postoji. Po definiciji elastičnosti imamo:

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot x}{\Delta x \cdot y} =$$

$$\frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Znači, elastičnost funkcije $y$ ćemo nadalje računati kao funkciju

$$\boxed{E_{y,x} = \tfrac{x}{y} y'.}$$

Odgovarajuće formule za elastičnost funkcija: ukupnih prihoda u zavisnosti od cene, ukupnih prihoda u zavisnosti od količine robe, ukupnih troškova, ukupne dobiti, prosečnih prihoda, troškova i dobiti, kao i elastičnost tražnje i cene slede:

$$E_{P,p} = \frac{p}{P(p)} P'(p), \qquad E_{P,x} = \frac{x}{P(x)} P'(x),$$

$$E_{C,x} = \frac{x}{C(x)} C'(x), \qquad E_{D,x} = \frac{x}{D(x)} D'(x),$$

$$E_{\overline{P},x} = \frac{x}{\overline{P}(x)} \overline{P}'(x), \qquad E_{\overline{C},x} = \frac{x}{\overline{C}(x)} \overline{C}'(x), \qquad E_{\overline{D},x} = \frac{x}{\overline{D}(x)} \overline{D}'(x),$$

$$E_{x,p} = \frac{p}{x(p)} x'(p), \qquad E_{p,x} = \frac{x}{p(x)} p'(x).$$

Kada tumačimo elastičnost funkcije $y(x)$, $x \in D$, u tački $x$, ona predstavlja približno procenat relativnog priraštaja funkcije pri jednoprocentnom relativnom priraštaju nezavisne promenljive. Odnosno, ako se za 1% poveća $x$ onda se ili za $E_{y,x}$% poveća $y$ (kada je $E_{y,x} > 0$) ili za $E_{y,x}$% smanji $y$ (kada je $E_{y,x} < 0$).

Pošto se radi o relativnom odnosu zavisne i nezavisne promenljive, elastičnost je pogodna za komparativnu analizu. Sledi primer.

Primer. Date su dve funkcije ukupnih prihoda:
$P_1(p) = -5p^2 + 100p, \quad P_2(p) = -10p^2 + 1000p.$

Gde nezavisna promenljiva $p$ u $P_1$ predstavlja cenu po kg pšenice, dok promenljiva $p$ u $P_2$ predstavlja cenu po kubnom metru građe. Za cenu od $p$=15 novčanih jedinica po jedinici robe uporediti odgovarajuće vrednosti elastičnosti $E_{P_1,p}$ i $E_{P_2,p}$.
Rešenje. Odredimo prvo funkcije elastičnosti:

$$E_{P_1,p} = \frac{p}{P_1(p)} P_1'(p) = \frac{p}{-5p^2 + 100p} \cdot (-10p + 100) = \frac{-2p + 20}{-p + 20}.$$

$$E_{P_2,p} = \frac{p}{P_2(p)} P_2'(p) = \frac{p}{-10p^2 + 1000p} \cdot (-20p + 1000) = \frac{-2p + 100}{-p + 100}.$$

Tako su za $p = 15$ n.j. po j.r, $E_{P_1,15} = -2$ i $E_{P_2,15} = 0,82353$, što znači: ako cenu povećamo za 1% pri trenutnoj ceni od 15 n.j., ukupni prihodi $P_1$, za prvo preduzeće će opasti za 2%, dok će ukupni prihodi $P_2$ za drugo preduzeće da se povećaju za približno 0,8%.

U sledećoj teoremi su date veze između elastičnosti ekonomskih funkcija.

*Elastičnosti ekonomskih funkcija su u sledećim međuzavisnostima:*

**a)** $E_{P,p} = 1 + E_{x,p}$; **b)** $E_{C,x} = 1 + E_{\overline{C},x}$;

**c)** $C'(x) = \overline{C}(x)(1 + E_{\overline{C},x})$; **d)** $P'(p) = x(1 - E_{x,p})$ ;

**e)** $E_{C,x} = \dfrac{C'(x)}{\overline{C}(x)}$;

**Dokaz.**

**a)** $P(p) = x(p) \cdot p$, sledi da je $E_{P,p} = \dfrac{p}{P}P' = \dfrac{p}{x(p) \cdot p}(x(p) \cdot p)'_p = \dfrac{x'(p) \cdot p + x(p)}{x(p)} = \dfrac{p}{x} \cdot x' + 1 = E_{x,p} + 1$;

**b)** $1 + E_{\overline{C},x} = 1 + \dfrac{x}{\overline{C}}\overline{C}' = 1 + \dfrac{x}{C/x}(C/x)' = 1 + \dfrac{x^2}{C} \cdot \dfrac{C' \cdot x - C}{x^2} = 1 + \dfrac{x}{C}C' - 1 = E_{C,x}$;

**c)** $\overline{C}(x)(1 + E_{\overline{C},x}) \overset{\mathbf{b)}}{=} \overline{C}(x)E_{C,x} = \dfrac{C}{x} \cdot \dfrac{x}{C}C'(x) = C'(x)$;

**d)** $x(1 - E_{x,p}) = x(1 - \dfrac{p}{x}x'(p)) = x - p \cdot x'(p) = (x(p) \cdot p)' = P'(p)$;

**e)** $\dfrac{C'(x)}{\overline{C}(x)} = \dfrac{C'(x)}{C/x} = \dfrac{x}{C}C'(x) = E_{C,x}$. □

Ilustrujmo na još dva primera ekonomska tumačenja elastičnosti ekonomskih funkcija:

Primeri:

1. Data je funkcija tražnje $x(p) = \dfrac{400}{p + 50}$. Odrediti:

a) funkciju elastičnosti tražnje;
b) koeficijent elastičnosti za cenu $p$ od 200 n.j.;
c) dati ekonomsko tumačenje dobijenog rezultata.

Rešenje:

a) Po definiciji elastičnosti, elastičnost funkcije tražnje je :
$E_{x,p} = \dfrac{p}{x(p)}x'$.
Prvi izvod $x'$ tražimo po nezavisnoj promenljivoj $p$:
$x'(p) = (400(p + 50)^{-1})' = -400(p + 50)^{-2}$. Sledi
$E_{x,p} = \dfrac{p}{400(p + 50)^{-1}}(-400(p + 50)^{-2}) == -\dfrac{p}{p + 50}$.

b) $E_{x,200} = -\dfrac{200}{200 + 50} = -0,8$.

c) Rezultati pod b) ukazuju da pri ceni od 200 n.j., porast cene od 1% dovodi do smanjenja tražnje od približno $0,8\%$.

2. Data je funkcija prihoda $P(x) = -5x^2 + 100x$. Odrediti funkciju elastičnosti ukupnih

prihoda u zavisnosti od količine proizvodnje $x$, kao i tumačenje za $E_{P,5}$ i za $E_{P,12}$.
Rešenje: Po formuli je
$E_{P,x} = \frac{x}{P(x)} P'(x) = \frac{x}{-5x^2 + 100x} \cdot (-10x + 100) = \frac{-2x + 20}{-x + 20}$. Sledi
$E_{P,5} = \frac{-10 + 20}{-5 + 20} = \frac{2}{3} = 0,66$, dok je $E_{P,12} = \frac{-24 + 20}{-12 + 20} = -\frac{1}{2} = -0,5$.

To znači pri količini proizvedene robe od 5 j.r. pri povećanju proizvodnje od 1% približno se povećava ukupni prihod za $0,66\%$, dok se pri proizvodnji od 12 j.r. pri povećanju proizvodnje robe za 1% smanjuje prihod za 0,5%. Zaključak bi bio da je maksimalan prihod sa proizvodnjom negde između 5 i 12 jedinica robe.

Sledeća teorema povezuje optimalnu proizvodnju sa elastičnošću prosečnih troškova.

*Optimalna proizvodnja $x_{opt}$ je ona za koju su prosečni troškovi minimalni.*

Formulom, ukoliko sa $x_{opt}$ označimo optimalnu količinu proizvodnje, to može da se izrazi:

$$x_{opt} \text{ je optimalna proizvodnja } \Leftrightarrow \min_x \overline{C}(x) = \overline{C}(x_0).$$

*Optimalna proizvodnja je ona za koju je elastičnost ukupnih troškova jednaka 1.*

Preciznije, prethodna teorema tvrdi da za optimalnu proizvodnju $x_0$ važi:

$$x_{opt} \text{ je optimalna proizvodnja } \Leftrightarrow E_{C,x_{opt}} = 1.$$

U sledećim primerima ilustrujemo kako elastičnost i prethodne dve teoreme koristimo u zadacima:

Primeri:
1. Neka je funkcija ukupnih troškova oblika $C = 100e^{0,2x-4}$. Odredite količinu proizvoda $x$ tako da koeficijent elastičnosti ukupnih troškova bude jednak 1. Zatim pokažite da za tu izračunatu vrednost $x$ imamo optimalnu proizvodnju.
Rešenje: Prvi izvod troškova je $C' = 20e^{0,2x-4}$, pa je elastičnost
$E_{C,x} = \frac{x}{100e^{0,2x-4}} 20e^{0,2x-4} = \frac{x}{5}$.
$E_{C,x} = 1$ znači da je $\frac{x}{5} = 1$, odnosno da je $x = 5$.

Da bi za 5 jedinica proizvoda proizvodnja bila optimalna potrebno je proveriti da su prosečni troškovi minimalni. To će biti tačno ako je:
$\overline{C}'(5) = 0$, i $\overline{C}''(5) > 0$ po teoremi 19.
$\overline{C}(x) = \frac{100e^{0,2x-4}}{x}$, sledi da izvodi prosečnih troškova
$\overline{C}'(x) = \frac{20e^{0,2x-4}(x-5)}{x^2}$,
$\overline{C}''(x) = (\frac{20e^{0,2x-4}(x-5)}{x^2})' =$
$\frac{(20 \cdot 0,2e^{0,2x-4}(x-5) + 20e^{0,2x-4})x^2 - 2x \cdot 20e^{0,2x-4}(x-5)}{x^4} =$
$\frac{xe^{0,2x-4}(4x^2 - 20x + 20x - 40x + 200)}{x^4} = \frac{e^{0,2x-4}(4x^2 - 40x + 200)}{x^3}$.

Zaista,

$\overline{C}'(5) = 0$ i $\overline{C}''(5)\dfrac{e^{1-4}(4\cdot 5^2 - 40\cdot 5 + 200)}{5^3} = \dfrac{4}{5e^3} > 0.$

2. Neka je funkcija ukupnih troškova $C = 4x^2 - 60x + 10000$. Odrediti optimalnu proizvodnju i pokazati da je za tu proizvodnju koeficijent elastičnosti ukupnih troškova jednak 1.

Rešenje: Po teoremi 20, treba da odredimo minimalne prosečne troškove $\overline{C}$, a po teoremi 19 nam za to treba ona količina proizvodnje $x_0$ za koju je $\overline{C}'(x_0) = 0$ i $\overline{C}''(x_0) > 0$:

$\overline{C}(x) = \dfrac{C}{x} = 4x - 60 + 10000x^{-1}$,

$\overline{C}'(x) = 4 - 10000x^{-2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2500 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm 50.$

Kako nas jedino pozitivna rešenja jednačine $\overline{C}'(x) = 0$ interesuju, ostaje još da proverimo da li je $\overline{C}''(50) > 0$:

$\overline{C}''(x) = 20000x^{-3}$, što implicira $\overline{C}''(50) > 0$.

Sada je potrebno naći koeficijent elastičnosti ukupnih troškova za $x = 50$ j.r.:

$$E_{C,x} = \frac{x}{C}C'(x) = \frac{x}{4x^2 - 60x + 10000}(8x - 60) = \frac{2x^2 - 15x}{x^2 - 15x + 2500}$$

$$E_{C,50} = \frac{2\cdot 50^2 - 15\cdot 50}{50^2 - 15\cdot 50 + 2500} = 1.$$

### 5.1.1 Zadaci

**5.1.** Naći prve izvode sledećih funkcija koristeći tablice i osnovna pravila za prvi izvod ($a$ je konstanta, dok su $x, t, y, s, u$ nezavisne promenljive):

$a)\ f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ ; $b)\ g(t) = \sqrt[3]{t^2} - \sqrt[4]{t} + 5\sqrt{t^3}$ ;
$c)\ f(y) = 2^y - 4e^y + 2a^y,$ ; $d)\ h(x) = (\sin x + 5x)\cdot \ln x + 3\cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} x$ ;
$e)\ f(s) = \dfrac{s^5 - 4s^3 + 2s - 3}{\cos s}$ ; $f)\ s(u) = \dfrac{\ln u \cdot u^5 - 2\sqrt{u^5}}{\sin u + \cos u}$ .

Rešenje.

$a)\ f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2$ ;
$b)\ g'(t) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{t}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{t^3}} + \frac{5}{2}\sqrt{t}$ ;
$c)\ f'(y) = 2^y \cdot \ln 2 - 4e^y + 2\ln a \cdot a^y,\ a \in \mathcal{R}$ ;
$d)\ h'(x) = (\cos x + 5)\cdot \ln x + \dfrac{\sin x + 5x}{x} + 3\ln 3 \cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{3\cdot 3^x}{\cos^2 x}$ ;
$e)\ f'(s) = \dfrac{(5s^4 - 12s^2 + 2)\cos s + (s^5 - 4s^3 + 2s - 3)\sin x}{\cos^2 s}$ ;
$f)\ s'(u) = \dfrac{(u^4(1 + 5\ln u) - 3u^{3/2})(\sin u + \cos u) - (\cos u - \sin u)(u^5 \ln u - 2u^{5/2})}{(\sin u + \cos u)^2}$ .

**5.2.** Naći prve izvode složenih funkcija:

$a)\ f(x) = \sin((5 - 4x^3)\cdot \sin x)$ ; $b)\ g(t) = \sqrt[3]{x^2 + x^3} + 5\sqrt{x^3 \cdot e^{-x}}$ ;
$c)\ f(x) = 2^{x - 4e^x}$ ; $d)\ h(x) = \ln(\sin^5 x + 5x) + \operatorname{tg}^2(2x - 5)$ .

Rešenje.

$$a)\ f'(x) = \cos((5-4x^3)\cdot \sin x)\cdot(-12x^2\sin x + (5-4x^3)\cdot\cos x)\ ;$$
$$b)\ g'(t) = -2/3\sqrt[3]{(x^2+x^3)^2(2x+3x^2)} - 5/2\frac{3x^2\cdot e^{-x} - x^3e^{-x}}{\sqrt{x^3\cdot e^{-x}}}\ ;$$
$$c)\ f'(x) = \ln 2\cdot 2^{x-4e^x}\cdot(1-4e^x),\ ;$$
$$d)\ h'(x) = \frac{5\sin^4 x\cdot\cos x + 5}{\sin^5 x + 5x} + 4\frac{\operatorname{tg}(2x-5)}{\cos^2 x}\ .$$

**5.3.** [19] Odrediti sledeće granične vrednosti koristeći Lopitalovo pravilo:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 3x - 1}{2x}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos 2x}\ ;$$
$$c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}\ ;\quad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}\ ;$$
$$e)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ ;\quad f)\ \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}\ ;$$
$$g)\ \lim_{x\to 0}(2x+1)^{\operatorname{ctg} x}\ ;\quad h)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\ ;$$
$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\ ;\quad j)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\ .$$

Rešenje.

$$a)\ \frac{3}{2};\ b)\ \frac{1}{2};\ c)\ 3;\ d)\ 1;\ e)\ 0;\ f)\ 2;\ g)\ e^2;\ h)\ 2;\ i)\ 0;\ j)\ -\frac{1}{2}.$$

**5.4.** Ako su ukupni dnevni prihodi i ukupni dnevni troškovi redom jednaki $P = 12x - 3x^2,\ C = 2x^3$, odrediti najveću dnevnu dobit.

Rešenje. Funkcija dobiti je $D(x) = 12x - 3x^2 - 2x^3$, a njen maksimum je za proizvodnju od $x = 1$ jedinica robe i iznosi $D(1) = 7$ novčanih jedinica.

**5.5.** Neka su redom date funkcije ukupnog prihoda i ukupnih proizvodnih troškova: $P = -x^2 + 3000x$ i $C = 2x^2 - 9000x + 2000000$. Odrediti cenu $p$ za koju će dobit biti najveća.

Rešenje. $p = 1000$ za $x = 2000$ j.r.

**5.6.** Data je funkcija ukupnih troškova $C = x^3 - 2x^2 + 3x$. Pokazati da su minimalni prosečni troškovi jednaki graničnim troškovima.

Rešenje. Minimum prosečnih troškova $\overline{C}$ se postiže za $x = 1$ i iznosi $\overline{C}(1) = 2$. a granični troškovi $C' = 3x^2 - 4x + 3$ za $x = 1$ su takođe 2.

**5.7.** Data je funkcija prosečnih troškova za neki proizvod $\overline{C} = 20 + \dfrac{100000}{x}$, i funkcija tražnje tog proizvoda $x = 80000 - 1000p$, gde je $x$ količina robe u komadima, a $p$ cena u dinarima. Odrediti:

a) cenu $p$ pri kojoj će se ostvariti maksimalna dobit i odrediti je;
b) ukupan prihod u uslovima maksimalne dobiti;
c) interval rentabilnosti (proizvodnju za koju je dobit pozitivna).

Rešenje.

a) $p = 50$ dinara, maksimalna dobit je $D(30000)$=800000;
b) $P(30000)$= 1500000; c) $x \in (1716, 58284)$.

[19]Ovi zadaci su detaljno urađeni u zbirci rešenih zadataka [27].

## 5.2 Parcijalni izvodi

Do sada smo uglavnom razmatrali realne funkcije jedne realne promenljive. Međutim, vrlo često neke veličine zavise od više nezavisnih promenljivih. Na primer: energetska vrednost veštačkog đubriva zavisi od azota, fosfora i kalijuma; dobit u nekoj proizvodnoj firmi zavisi od troškova i prihoda; plate radnika bi trebalo da zavise od stručne spreme, dužine radnog staža i radnog učinka. Kako nam je cilj da obradimo minimum matematičkog aparata koji nam je potreban da možemo da nađemo ekstremne vrednosti (minimum i maksimum) funkcije više promenljivih obradićemo samo početne elemente diferencijalnog računa funkcija više promenljivih.

Parcijalne izvode definišemo kod funkcija sa *bar dve* realne promenljive. Na primer, funkcije $f(x,y) : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ i $g(u,v,w) : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$, definisane sa $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ i $g(u,v,w) = \sin w + 5u - v^3$, su realne funkcije sa dve odnosno tri realne promenljive. Grafike funkcija dve realne promenljive još uvek možemo da nacrtamo. U prostoru to su odgovarajuće površi. Tako je na primer, grafik $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, gornja (iznad $xy$ ravni) kalota jedinične lopte (videti sliku 41). Ako funkcija ima više od dve promenljive, njen grafik ne možemo nacrtati.

**Prvi parcijalni izvod po promenljivoj** $x$ funkcije $f(x,y)$ u tački $(x_0, y_0)$ označavamo sa $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ i definišemo kao sledeći limes (ako postoji):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

**Prvi parcijalni izvod po promenljivoj** $y$ funkcije $f(x,y)$ u tački $(x_0, y_0)$ označavamo sa $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ i definišemo kao

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Kada tražimo prvi parcijalni izvod po promenljivoj $x$ funkcije $f(x,y)$, tada promenljivu $y$ tretiramo kao konstantu i tražimo prvi izvod po $x$. Slično, ako tražimo prvi parcijalni izvod po $y$, nezavisnu promenljivu $x$ tretiramo kao konstantu.

Sem oznake $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, za prvi parcijalni izvod po promenljivoj $x$ u tački $(x_0, y_0)$ koristimo ravnopravno i oznaku $f_x(x_0, y_0)$, odnosno $f_y(x_0, y_0)$, za prvi parcijalni izvod po promenljivoj $y$.

Sva pravila (izvod zbira, razlike, proizvoda funkcija, količnika i složene funkcije) koja važe za prvi izvod funkcije jedne promenljive važe u odgovarajućem obliku i za prve parcijalne izvode funkcija više realnih promenljivih.

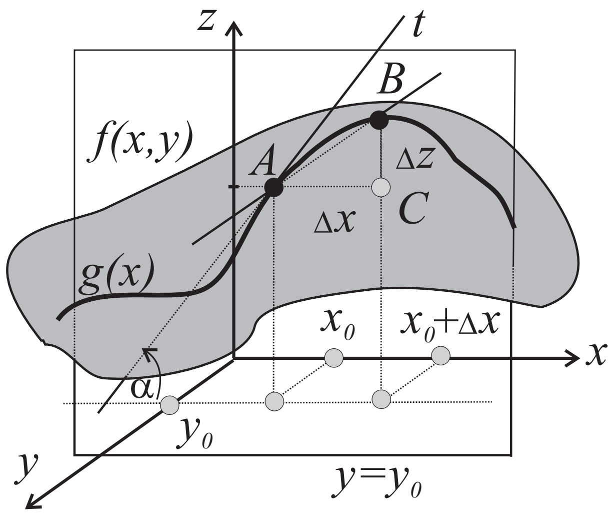
Primeri. Odredite sve prve parcijalne izvode funkcija $f(x,y) : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ i $g(u,v,w) : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$, definisanih sa $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ i $g(u,v,w) = u \cdot \sin w + 5u - v^3$.
Rešenja. $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y$, $\frac{\partial g}{\partial u} = \sin w + 5$, $\frac{\partial g}{\partial v} = -3v^2$, $\frac{\partial g}{\partial w} = u \cos w$.

**Geometrijska interpretacija prvog parcijalnog izvoda funkcije** $z = f(x,y)$

Podsetimo se da je prvi izvod funkcije $f(x)$ u tački $x_0$ ako postoji, bio jednak tangensu ugla $\beta$ koji tangenta na grafik funkcije $f$, kroz tačku $(x_0, f(x_0))$, zaklapa sa pozitivnim krakom $x$-ose. Odnosno, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\beta$ (sl. 39). Sasvim sličnu situaciju imamo i sa prvim parcijalnim izvodima funkcije dve promenljive.

Posmatrajmo funkciju $f(x, y)$ i njen prvi parcijalni izvod po promenljivoj $x$ u tački $(x_0, y_0)$ (sl. 40). Prvi parcijalni izvod po $x$ u tački $(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, kada suzimo posmatranje na ravan $y = y_0$, ima isto geometrijsko tumačenje kao i prvi izvod funkcije jedne realne promenljive u tački $x_0$.

Sa $A$ i $B$ smo redom označili tačke na površi $f(x, y)$ sa koordinatama $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ i $(x_0 + \Delta x, y_0, f(x_0 + \Delta x, y_0))$. Ove dve tačke su na grafiku krive $g(x)$ koju dobijamo u preseku ravni $y = y_0$ i površi $f(x, y)$.




Slika 40. Geometrijsko tumačenje prvog parcijalnog izvoda $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$

Ako sva posmatranja suzimo na ravan $y = y_0$, uočićemo da je količnik priraštaja funkcije $z = f(x, y)$ i priraštaja argumenta $x$
$\dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ jednak tangesu ugla koji sečica $AB$ krive $g$ zaklapa sa pozitivnim krakom $x$ ose[20]. U graničnom slučaju kada priraštaj promenljive $x$ teži 0, $(\Delta x \to 0)$, sečica $AB$ teži tangenti $t$ u tački $A$ na površ. Tako je prvi parcijalni izvod po $x$, $f_x(x_0, y_0)$ jednak tangensu ugla $\alpha$ koji tangenta $t$ (u ravni $y = y_0$) na površ u tački $A$ zaklapa sa pozitivnim krakom $x$ ose.

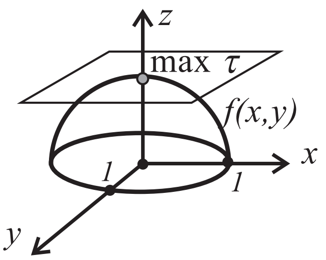
Geometrijska interpretacija prvog parcijalnog izvoda po promenljivoj $y$ bi na analogan način značila da je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\gamma$, gde je $\gamma$ ugao koji nova tangenta na površ u tački $A$, ovog puta u ravni $x = x_0$ zaklapa sa pozitivnim krakom $y$ ose.

### 5.2.1 Ekstremne vrednosti funkcije dve promenljive

Primetimo (zamislite loptu i ravan koja je dodiruje), da u opštem slučaju površ u tački površi tangira čitava ravan a ne samo jedna prava (sl. 40). Tu ravan nazivamo **tangencijalna ravan** (sl. 41).

[20] $x$-osa i sečica $AB$ u opštem slučaju nisu u istoj ravni. Međutim, ugao koji $AB$ zaklapa sa pravom $y = y_0$ (iz $xy$-ravni) je jednak uglu koji $AB$ zaklapa sa pozitivnim krakom $x$-ose, jer je prava $y = y_0$ istog pravca kao i $x$ osa.

Geometrijski je očigledno, da je potreban uslov da neka tačka na površi bude ekstremna (lokalni minimum ili maksimum) da je tangencijalna ravan u toj tački na površ paralelna sa $xy$-ravni (sl. 41). Ovaj uslov je ispunjen ako su dve tangente iz tangencijalne ravni paralelne sa $xy$-ravni.




Slika 41. Tangencijalna ravan $\tau$ u tački maksimuma gornje kalote

Ukoliko je tangenta $t$ (sl. 40), paralelna sa $xy$ ravni ugao $\alpha$ će biti jednak 0 pa će i $\operatorname{tg}\alpha = 0$, odnosno prvi parcijalni izvod po $x$ u $(x_0, y_0)$ će takođe biti 0. Slično, kada je tangenta koja odgovara $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\gamma$ paralelna sa $y$ osom, onda je ugao $\gamma = 0$, odnosno $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Znači, potreban uslov da tangencijalna ravan u tački $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ bude paralelna sa $xy$ ravni je da su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \;, \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \;.$$

To je potreban uslov da u tački $(x_0, y_0)$ funkcija $f(x, y)$ ima ekstrem i takvu tačku nazivamo **stacionarnom**.

Da bismo dali i dovoljan uslov za postojanje ekstremne vrednosti na površi moramo definistai parcijalne izvode višeg reda.

**Parcijalni izvodi višeg reda**

Parcijalni izvodi prvih parcijalnih izvoda $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ nazivaju se **parcijalni izvodi drugog reda** funkcije $f$ i označavaju se na neki od sledećih načina:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}.$$

Slično se definišu i označavaju parcijalni izvodi trećeg, četvrtog, ... reda.

Ako su mešoviti parcijalni izvodi drugog reda neprekidne funkcije onda su oni jednaki $f_{xy} = f_{yx}$. Uopšteno važi: ako su parcijalni izvodi koje treba izračunati neprekidne funkcije tada rezultat višestrukog diferenciranja ne zavisi od redosleda diferenciranja. Tako na primer, za funkciju $f(x, y) = 5x^2y - x^3y^3$ važi da su jednaki parcijalni izvodi trećeg reda $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$. Zaista:
$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(5x^2y + x^3y^3) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(10xy + 3x^2y^3) = \frac{\partial}{\partial y}(10y + 6xy^3) = 10 + 18xy^2$

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(5x^2y + x^3y^3) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(10xy + 3x^2y^3) = \frac{\partial}{\partial x}(10x + 6x^2y^2) = 10 + 18xy^2$
$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(5x^2y + x^3y^3) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(5x^2 + 3x^3y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(10x + 9x^2y^2) = 10 + 18xy^2$

Već smo utvrdili da je slično, kao i kod funkcije jedne promenljive, potreban uslov da je tačka kandidat za ekstremnu vrednost, da su prvi parcijalni izvodi u toj tački jednaki nuli, odnosno da je tačka stacionarna. Sledeća teorema daje dovoljan uslov.

*Potreban uslov za ekstrem $f(x, y)$, ako postoje prvi parcijalni izvodi, u $(x_0, y_0)$ je da $(x_0, y_0)$ bude stacionarna tačka funkcije, odnosno da je*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

*Ako je dodatno ispunjeno da su drugi parcijalni izvodi neprekidne funkcije i da važi*

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) > 0,$$

*tada je to zajedno sa uslovom 1. ili uslovom 2. dovoljno da funkcija $f$ ima ekstremnu vrednost u $(x_0, y_0)$ i to:*

*1.* **lokalni minimum** *ako je* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$;

*2.* **lokalni maksimum** *ako je* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$.

*Ako je $D = 0$ ne može se ništa tvrditi, a za $D < 0$ u $(x_0, y_0)$ funkcija $f$ nema ekstremnu vrednost.*

Primer: Neka je funkcija $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Nađimo njene stacionarne tačke i proverimo da li u njima $f(x, y)$ ima ekstrem.

Rešenje.

$f_x = 1/2(1 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

$f_y = 1/2(1 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$

$f_x = 0$ za $x = 0$ i $f_y = 0$ za $y = 0$, pa je jedina stacionarna tačka $(0, 0)$. Nađimo i druge parcijalne izvode.

$$f_{xx} = \frac{-1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - (-x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}}{(\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2} =$$

$$\frac{-1 + x^2 + y^2 - x^2}{(1 - x^2 - y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{y^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}},$$

zbog simetričnosti nezavisnih promenljivih jasno je da

$$f_{yy} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y}(-x(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}) =$$

$$1/2 \cdot x \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-3/2} \cdot (-2y) = \frac{xy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}}.$$

Sledi, da su drugi parcijalni izvodi u stacionarnoj tački (0,0):
$f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = -1$ i $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 0$.

Tako je uslov da je broj $D = -1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1$ veći od 0 iz teoreme 21 zadovoljen pa je (0,0) tačka u kojoj funkcija dostiže ekstrem, a kako je uslov *2.* teoreme takođe zadovoljen ($f_{xx}(0,0) = -1 < 0$), taj ekstrem je maksimum (sl. 41) funkcije.

### 5.2.2 Parcijalna elastičnost ekonomskih funkcija

Parcijalna elastičnost je mera promene (u procentima) zavisne promenljive $y = f(x_1, x_2 ... x_n)$ kada se jedna od nezavisnih promenljivih promeni za 1%. Ako je $y$ zavisna promenljiva, onda parcijalna elastičnost promenljive $y$ po nezavisnoj promenljivoj $x_i$ jednaka je po analogiji sa definicijom elastičnosti funkcije jedne nezavisne promenljive:

$$E_{y,x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y \cdot x_i}{\Delta x_i \cdot y} =$$

$$\frac{x_i}{y} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{y} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ... x_i + \Delta x_i, ... x_n) - f(x_1, ... x_i, ... x_n)}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{y} \cdot f_{x_i}.$$

Znači, parcijalnu elastičnost funkcije $y = f(x_1, x_2 ... x_n)$ po promenljivoj $x_i$ ćemo nadalje računati kao funkciju

$$\boxed{E_{f,x_i} = \frac{x_i}{y} f_{x_i}.}$$

Kada posmatramo ekonomsku funkciju više promenljivih, jedna od promenljivih je u nekom smislu dominatna. Tako, ako, na primer, gledamo tražnju nekog artikla, onda ćemo dominatnom promenljivom smatrati cenu tog istog artikla, dok cenu konkurentnog ili nacionalni dohodak nećemo smatrati dominantnim. Ako gledamo ukupne troškove, onda će dominantna promenljiva biti proizvedena količina, dok, na primer, cenu sirovine, cenu skladištenja, cenu zakupa lokala i sl. nećemo smatrati dominantnom. U suštini, dominantnom promenljivom ćemo smatrati onu po kojoj smo odgovarajuću funkciju proučavali kao funkciju jedne promenljive. Parcijalnu elastičnost po toj promenljivoj ćemo jednostavno nazivati elastičnost kao i ranije.

Što se tiče funkcije tražnje, za koju najčešće ispitujemo elastičnost, razlikovaćemo još dva tipa elastičnosti:

- Uzajamna elastičnost tražnje dva artikla (cross elasticity) je mera (u procentima) promene tražnje nekog arikla $A_1$ sa cenom $p_1$, ako se cena $p_2$ artikla $A_2$ promeni za 1%, dok se ostale promenljive ne menjaju.

- Elastičnost tražnje od nacionalnog dohotka je promena tražnje nekog artikla ako se nacionalni dohodak poveća za 1%, a ostale promenljive ne menjaju.

Dakle, da rezimiramo, ako je funkcija tražnje artikla $A_1$ $f = f(p_1, p_2, d)$, gde je $p_1$ cena artikla $A_1$, $p_2$ cena artikla $A_2$, a $d$ nacionalni dohodak, onda je

- Elastičnost $E_{f,p_1} = \dfrac{p_1}{f} \cdot f_{p_1}$;

- Uzajamna elastičnost $E_{f,p_2} = \dfrac{p_2}{f} \cdot f_{p_2}$;

- Elastičnost tražnje od nacionalnog dohotka $E_{f,d} = \dfrac{d}{f} \cdot f_d$.

Primer. Neka je data funkcija tražnje lubenica $x$, tako da zavisi od cene lubenica $p_l$, cene dinja $p_d$ kao konkurentnog proizvoda i od nacionalnog dohodka $d$ po sledećoj funkcionalnoj vezi

$$x(p_l, p_d, d) = d - 20000 - 5p_l + 2p_d.$$

Naći funkcije elastičnosti, uzajamne elastičnosti i elastičnosti tražnje od nacionalnog dohotka pri ceni lubenica od 65 dinara, ceni dinja od 50 dinara i nacionalnom dohotku od 30 000 dinara.

Rešenje.

- Elastičnost tražnje lubenica $E_{x(p_l,p_d,d),p_l}$:

$$\begin{aligned} E_{x(p_l,p_d,d),p_l} &= \frac{p_l}{x(p_l,p_d,d)} \cdot x_{p_l} \\ &= \frac{p_l}{d - 20000 - 5p_l + 2p_d} \cdot (d - 20000 - 5p_l + 2p_d)_{p_l} \\ &= \frac{p_l}{d - 20000 - 5p_l + 2p_d} \cdot (-5) \\ &= \frac{-5 \cdot 65}{30000 - 20000 - 5 \cdot 65 + 2 \cdot 50} \\ &= \frac{-325}{10000 - 325 + 100} = \frac{-325}{9775} \\ E_{x(65,50,30000),p_l} &= -0,0333 \end{aligned}.$$

- Uzajamna elastičnost tražnje lubenica prema ceni dinja $E_{x(p_l,p_d,d),p_d}$ je:

$$\begin{aligned} E_{x(p_l,p_d,d),p_d} &= \frac{p_d}{x(p_l,p_d,d)} \cdot x_{p_d} \\ &= \frac{p_d}{d - 20000 - 5p_l + 2p_d} \cdot (d - 20000 - 5p_l + 2p_d)_{p_d} \\ &= \frac{p_d}{d - 20000 - 5p_l + 2p_d} \cdot 2 \\ &= \frac{2 \cdot 50}{30000 - 20000 - 5 \cdot 65 + 2 \cdot 50} = \frac{100}{9775} \\ E_{x(65,50,30000),p_d} &= -0,010 \end{aligned}.$$

- Elastičnost tražnje od nacionalnog dohotka $E_{f,d} = \dfrac{d}{f} \cdot f_d$ u ovom primeru je:

$$\begin{aligned} E_{x(p_l,p_d,d),d} &= \frac{d}{x(p_l,p_d,d)} \cdot x_d \\ &= \frac{d}{d - 20000 - 5p_l + 2p_d} \cdot (d - 20000 - 5p_l + 2p_d)_d \\ &= \frac{d}{d - 20000 - 5p_l + 2p_d} \cdot 1 \\ &= \frac{30000}{30000 - 20000 - 5 \cdot 65 + 2 \cdot 50} = \frac{30000}{9775} \\ E_{x(65,50,30000),d} &= 3,069 \end{aligned}.$$

Možemo reći da je tražnja u odnosu na cenu lubenica, kao i u odnosu na cenu dinja, neelastična, i to u tolikoj meri da skoro da možemo da kažemo da je indiferentno elastična. Tumačenje ovih vrednosti bi bilo da je tržište stabilno podeljeno na one koji jedu lubenice i na one koji jedu dinje, tako da oscilacije u ceni ovih artikala ne utiču značajno na tražnju. Kod tražnje lubenica u odnosu na nacionalni dohodak, uočavamo izraženu elastičnost, to tumačimo da sa rastom primanja puno lakše i češće kupujemo lubenice.

### 5.2.3 Zadaci

**5.8.** Poznato je da tražnja mineralnog đubriva AN $x(d, p_A, p_K)$ zavisi od nacionalnog dohotka $d$, cene $p_A$ mineralnog đubriva AN, ali i od cene $p_K$ mineralnog đubriva KAN na sledeći način:

$$x(d, p_A, p_K) = 0,4d + 170000 - 105p_A^2 + 920p_K$$

a) Odrediti funkciju uzajamne elastičnosti tražnje mineralnog đubriva AN u zavisnosti od cene mineralnog đubriva KAN.
b) Koliko iznosi elastičnost tražnje mineralnog đubriva AN, ako mineralno đubrivo AN košta 35 dinara po kg, mineralno đubrivo KAN 30 dinara po kg, a nacionalni dohodak je 25000 dinara?
Rešenje.

a) Funkcija uzajamne elastičnosti je $E_{x(d,p_A,p_K),p_K} = \dfrac{920p_K}{0,4d + 170000 - 105p_A^2 + 920p_K}$ pa je njena vrednost $E_{x(25000,35,30),30} = \dfrac{27600}{78975} = 0,35$. Tumačenje ove vrednosti bi bilo da je tržište neindiferentno - blago elastično na cenu mineralnog đubriva KAN u odnosu na tražnju mineralnog đubriva AN. Preciznije, povećanje cene mineralnog đubriva KAN od 1% dovodi do blagog povećanja od 0,35% tražnje mineralnog đubriva AN.

b) Elastičnost tražnje mineralnog đubriva AN
$E_{x(d,p_A,p_K),p_K} = \dfrac{-210p_K^2}{0,4d + 170000 - 105p_A^2 + 920p_K}$ što daje vrednost elastičnosti od
$E_{x(25000,35,30),35} = \dfrac{-257250}{78975} = -3.26$ Tražnja mineralnog đubriva AN u odnosu na cenu mineralnog đubriva AN, ima izraženu elastičnost, to tumačimo da sa rastom cene mineralnog đubriva AN puno teže i ređe kupujemo mineralno đubrivo AN.

**5.9.** Tražnja maline $x(d, p_m, p_v)$ zavisi od nacionalnog dohotka $d$, cene maline $p_m$ i cene višanja $p_v$ na sledeći način:

$$x(d, p_m, p_v) = 0,25d + 1200 - 1123p_m + 3p_v^2$$

a) Odrediti funkciju uzajamne elastičnosti tražnje maline u zavisnosti od cene višanja.
b) Koliko iznosi elastičnost tražnje maline, ako kg malina košta 500 dinara, kg višanja 200 dinara, a nacionalni dohodak je 35000 dinara?

**5.10.** Poznato je da tražnja brazilske kafe zavisi od nacionalnog dohotka $n$, cene brazilske kafe $p_k$, ali i od cene indijskog čaja $p_c$:

$$x(n, p_k, p_c) = 0,1n + 2841 - 10000p_k^2 + 100p_c.$$

a) Odrediti funkciju uzajamne elastičnosti tražnje brazilske kafe u zavisnosti od cene indijskog čaja.
b) Koliko iznosi elastičnos tražnje brazilske kafe, ako kafa košta 1 500 dinara, indijski čaj 750 dinara, a nacionalni dohodak je 15 000 dinara?

**5.11.** Totalni herbicid (aktivna materija glifosat) na našem tržištu prodaju *Galenika Fitofarmacija A.D.* pod nazivom Glifol i *Chemical Agrosava* pod nazivom Glifosav 480.

Ako tražnja Glifola zavisi od cene Glifola $p_g$, cene Glifosava 480 $p_a$ i nacionalnog dohodtka $d$ po sledećoj funkcionalnoj zavisnosti

$$x(d, p_g, p_a) = 0,15d + 32000 - 11p_g^2 + 2,2p_a^2,$$

odredite sve tri vrste elastičnosti tražnje Glifola pri cenama $p_g = 590$, $p_a = 520$ dinara po litru i nacionalnom dohodhku od $d = 40000$ dinara.

# Glava 6.

# 6 Integralni račun

## 6.1 Neodređen integral

U prethodnom poglavlju smo se upoznali sa prvim izvodom funkcije i njegovim mnogobrojnim primenama. Kako je prvi izvod diferencijabilne funkcije opet funkcija, nameće se potreba da na skupu funkcija definišemo i suprotnu operaciju od operacije diferenciranja. Zato uvodimo pojam primitivne funkcije:

*Funkcija $F(x)$ je* **primitivna funkcija** *ili anti-izvod funkcije $f(x)$ akko je* $F'(x) = f(x)$.

Međutim, lako je uvideti da primitivna funkcija nije jedinstvena za bilo koju fiksiranu funkciju $f(x)$. Na primer, ako je $f(x) = x$, njene primitivne funkcije su: $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^2}{2}+1$, $\frac{x^2}{2}-5$, $\frac{x^2}{2} + 0.98$, ... Preciznije, važi sledeće tvrđenje.

*Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ tada su sve primitivne funkcije, funkcije $f(x)$ oblika $F(x) + C$, $C \in \mathcal{R}$ .*

Predhodna teorema nam dozvoljava da definišemo neodređeni integral, kao suprotnu operaciju operaciji diferenciranja.

*Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nazivamo* **neodređeni integral** *funkcije $f(x)$ i označavamo sa*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Funkciju $f(x)$ nazivamo **podintegralnom** funkcijom, $dx$ je diferencijal nezavisne promenljive, kako je $f'(x) = \frac{df}{dx}$, iz prethodne definicije sledi da je

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \; ; \quad \int f'(x)dx = \int df = f(x) + C.$$

## 6.2 Neodređeni integrali nekih funkcija

Prvih jedanaest neodređenih intergrala u sledećoj tabeli su direktna posledica poznavanja prvih izvoda elementarnih funkcija koje smo naveli u poglavlju 2.2.2 u tabeli izvoda elementarnih funkcija. U 12. i 13. vrsti su integrali koji se smenom (metod integraljenja opisan u sledećoj sekciji) svode na 10. i 11. integral. Preostale integrale u tabeli ćemo pokazati u narednim sekcijama.

$$
\begin{array}{llcl}
1. & \int dx & = & x + C \\
2. & \int x^n dx & = & \dfrac{x^n}{n+1} + C \quad n \neq -1 \\
3. & \int \dfrac{1}{x} dx & = & ln|x| + C, \quad x \neq 0 \\
4. & \int e^x dx & = & e^x + C \\
5. & \int a^x dx & = & \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, a > 0 \\
6. & \int \sin x dx & = & -\cos x + C \\
7. & \int \cos x dx & = & \sin x + C \\
8. & \int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx & = & \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathcal{Z} \\
9. & \int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx & = & -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathcal{Z} \\
10. & \int \dfrac{1}{1+x^2} dx & = & \operatorname{arctg} x + C \\
11. & \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & = & \arcsin x + C \\
12. & \int \dfrac{1}{a^2+x^2} dx & = & \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C \\
13. & \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} & = & arcsin \dfrac{x}{a} + C \\
14. & \int \dfrac{dx}{a^2-x^2} & = & \dfrac{1}{2a} \ln |\dfrac{a+x}{a-x}| + C, \quad a \neq 0, \ x^2 \neq a^2 \\
15. & \int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx & = & \ln |x + \sqrt{x^2 \pm x^2}| + C, \quad a \neq 0 \\
16. & \int \sinh x dx & = & \cosh x + C \\
17. & \int \cosh x dx & = & \sinh x + C \\
18. & \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx & = & \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln |a + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \\
19. & \int \sqrt{a^2 - x^2} dx & = & \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{2} + C \\
20. & \int \dfrac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} & = & \dfrac{1}{a} \ln |\dfrac{x}{x + \sqrt{a^2 \pm x^2}}| + C
\end{array}
$$

Neodređeni integrali nekih funkcija

### 6.2.1 Osnovne osobine neodređenih integrala

Na osnovu osobine da je izvod zbira (razlike) dve diferencijabilne funkcije jednak zbiru (razlici) prvih izvoda tih funkcija, kao i osobine da se konstantni umnožak može izvući ispred funkcije koju diferenciramo, slede dve osnovne osobine neodređenih integrala:

*Ako su redom $F(x)$ i $G(x)$ primitivne funkcije funkcija $f(x)$ i $g(x)$ tada važe sledeće osobine:*

*1.* $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,\quad k$ *je konstanta*

*2.* $\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \;\pm\; \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C.$

Primeri. Odredite $\displaystyle\int(x^5 - 3e^x + 7\cos x)dx$ i $\displaystyle\int(2 + \frac{1}{x^5} - 3^x)dx.$

Rešenja: $\displaystyle\int(x^5 - 3e^x + 7\cos x)dx = \int x^5 dx - 3\int e^x dx + 7\int \cos x dx = \frac{x^6}{6} - 3e^x + 7\sin x + C.$

$\displaystyle\int(2 + \frac{1}{x^5} - 3^x)dx = 2\int dx + \int \frac{1}{x^5}dx - \int 3^x dx = 2x - \frac{1}{4x^4} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

## 6.3 Neke metode za rešavanje integrala

### 6.3.1 Metoda smene

Metoda smene je metoda kojom se manjim transformacijama (smenom promenljive) integrali svode na neki od poznatih integrala.

**Metoda smene 1.** *Ako je $F(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(t)$ i neka je funkcija $t = \phi(x)$ diferencijabilna na $D$, tada je*

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx \;=\; \int f(t)dt = F(t) + C = F(\phi(x)) + C\ .$$

Funkciju $t = \phi(x)$ u prethodnoj teoremi nazivamo funkcijom smene. Njen diferencijal je $dt = \phi'(x)dx$.

Primeri. Nađite sledeće neodređene integrale:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Rešenja:

1. Nakon manjih transformacija podintegralne funkcije i zatim uvođenjem smene $t = \frac{x}{a}$, čiji diferencijal je $dt = \frac{1}{a}\,dx$, sledi da je

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\ dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

2. Koristimo istu smenu kao i u prethodnom primeru. Takođe, izvlačimo konstantu ispred integrala.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

### 6.3.2 Parcijalna integracija

Mnoge integrale ne možemo rešiti smenom promenljive. Na primer, $\int x^2 \ln x dx$ ima podintegralnu funkciju u obliku proizvoda dve funkcije, od kojih je jedna ($x^2$) podesna za integraljenje, a druga ($\ln x$) za diferenciranje. U ovakvim slučajevima, se primenjuje metoda parcijalne integracije. Metoda je posledica poznatog pravila za nalaženje prvog izvoda proizvoda dve diferencijabilne funkcije $u(x)$ i $v(x)$:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{d\ (u(x)v(x))}{dx} = \frac{du(x)}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv(x)}{dx}\ .$$

Nakon deljenja sa diferencijalom nezavisne promenljive $dx$ i integraljenja dobijamo

$$\int d\ (u(x)v(x)) = \int (v(x)du(x) + u(x)dv(x)) = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x)\ .$$

Kako je $\int d\ (u(x)v(x)) = u(x)v(x)$ direktno sledi formula parcijalne integracije u sledećem tvrđenju.

**Metoda parcijalne integracije 1.** *Ako su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne tada važi formula parcijalne integracije*

$$\int u(x)dv = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)du.$$

Iz formule za parcijalnu integraciju zaključujemo da funkciju $u(x)$ treba da biramo tako da bude pogodna za diferenciranje, dok diferencijal funkcije $v(x)$ treba da je pogodan za integraljenje.

Primer. Ako izaberemo za $u(x) = lnx$ i za $dv = x^2dx$ imamo da je $du = 1/xdx$ i $v(x) = \int x^2dx = 1/3x^3$. Na osnovu formule za parcijalnu integraciju sledi da je $\int x^2 \ln x\ dx = 1/3x^3lnx - 1/3\int x^2dx = 1/3x^3lnx - 1/9x^3 + C.$

Nekada je potrebno više puta obaviti parcijalnu integraciju. Odredimo $\int e^x \cos x\ dx$ tako što prvo biramo za $u(x) = e^x$ i za $dv = \cos x\ dx$. Sledi da je $du = e^xdx$ i $v = \int \cos x\ dx = \sin x$. Zato je
$\int e^x \cos x\ dx = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx$

Na integral $\int e^x \sin xdx$ takođe primenjujemo parcijalnu integracijom sa izborom $w(x) = e^x$ i $ds = \sin x\ dx$, pri čemu je $dw(x) = e^xdx$ i $s = \int \sin x\ dx = -\cos x$. Zato je
$\int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\ dx.$

Polazni integral je jednak $\int e^x \cos x\ dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\ dx$ , što je ekvivalentno sa $2\int e^x \cos x\ dx = e^x \sin x + e^x \cos x.$

Konačno imamo da je $\int e^x \cos x\ dx = \dfrac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$ .

Primetimo da smo u prethodnom primeru mogli sa pođednakim uspehom da izaberemo za funkcije $u(x) = \cos x$, $dv = e^xdx = ds$ i $w(x) = \sin x$.

### 6.3.3 Integraljenje racionalnih funkcija

Funkcija u obliku razlomka, kod koje su i brojilac i imenilac polinomi, naziva se **racionalna funkcija**. **Elementarne racionalne funkcije** su nekog od oblika

1. $\dfrac{1}{(x+a)^s}$ , $s \in \mathcal{N}$

2. $\dfrac{1}{(x^2+bx+c)^s}$ i 3. $\dfrac{dx+e}{(x^2+bx+c)^s}$,

pri čemu je $b^2 - 4c < 0$ i $s \in \mathcal{N}$.

Nađimo prvo integrale elementarnih racionalnih funkcija za $s = 1$.

1. Koristimo smenu $t = x + a$:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|x+a| + C$$

2. Kako je $b^2 - 4c < 0$, sledi da je $c - b^2/4 > 0$. Stoga možemo koristiti smenu $t = \dfrac{x+b/2}{\sqrt{c-b^2/4}}$, $dt = \dfrac{2dx}{\sqrt{c-b^2}}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dx}{(x+b/2)^2 + c - b^2/4} = \int \frac{2/\sqrt{c-b^2}}{(\dfrac{x+b/2}{\sqrt{c-b^2/4}})^2+1}\,dx =$$

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} + C.$$

3. Polazni, treći integral ćemo transformisati u zbir dva integrala. Prvi rešavamo smenom $t = x^2 + bx + c$ i $dt = (2x+b)dx$. Drugi je oblika koji je rešen u prethodnom slučaju.

$$\int \frac{dx+e}{x^2+bx+c}dx = \frac{d}{2}\int \frac{2x+b+2e-b}{x^2+bx+c}dx = \frac{d}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx +$$

$$\frac{d(2e-b)}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{d}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{d(2e-b)}{2}arctg\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} =$$

$$\frac{d}{2}ln|x^2+bx+c| + \frac{d(2e-b)}{2}arctg\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} + C.$$

Uglavnom, na sličan način, istim smenama i transformacijama, nalazimo integrale elementarnih racionalnih funkcija za $s > 1$. Jedina razlika je što se umesto integrala $\displaystyle\int \frac{dt}{t}$ pojavljuju integral oblika $\int \dfrac{dt}{t^s}$. Ipak, kod integraljenja elementarne racionalne funkcije tipa 2. moramo izvršiti dodatno ($s-1$ puta) parcijalnu integraciju. Demonstriraćemo postupak za $s = 2$.

2. Istom smenom kao i za $s = 1$ dobijamo da je $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^2} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$. Stoga ćemo rešavati

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^2} = arctgt - \int t\frac{tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Poslednji integral rešavamo parcijalnom integracijom. Neka je $u(t) = t$ i $dv(t) = \dfrac{tdt}{(t^2+1)^2}$. Tada je $du = dt$ i $v(t) = \int \dfrac{tdt}{(t^2+1)^2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} = 1/2\int \frac{dw}{w^2} = \frac{-1}{2w} = \frac{-1}{2(t^2+1)}$. Pri čemu je funkcija smene $w(t) = t^2 + 1$. Po formuli parcijalne integracije imamo:

$$\int t\frac{tdt}{(t^2+1)^2}=\frac{-t}{2(t^2+1)}+\int\frac{dt}{2(t^2+1)}=\frac{-t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Konačno, sledi da je $\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$

Na osnovu prethodnih izvođenja, zaključujemo da su integrali elementarnih racionalnih funkcija:

- $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+a)^s}=\begin{cases}\ln|x+a|+C, & \text{za}\ \ s=1\\ -\dfrac{1}{(s-1)(x+a)^{s-1}}+C, & \text{za}\ \ s>1\end{cases}$

- $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^s}=$
$$\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+C, & \text{za } s=1\\ \dfrac{(2x+b)\sqrt{4c-b^2}}{8(x^2+bx+c)}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+C, & \text{za } s=2\end{cases}.$$

- $\displaystyle\int\frac{dx+e}{x^2+bx+c}dx=$
$$\begin{cases}\dfrac{d}{2}\ln|x^2+bx+c|\ +\ \dfrac{d(2e-b)}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+C, & \text{za } s=1\\ -\dfrac{d}{2(x^2+bx+c)}\ +\ \dfrac{d(2e-b)}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+C, & \text{za } s=2\end{cases}$$

Opštu racionalnu funkciju integralimo tako što prvo ako je stepen polinoma u brojiocu veći ili jednak od stepena polinoma u imeniocu podelimo polinome i problem svedemo na integraljenje polinomne funkcije i integraljenje racionalne funkcije kod koje je stepen polinoma u brojiocu manji od stepena polinoma u imeniocu. Odgovor kako integralimo takve racionalne funkcije daje sledeći stav.

**Stav.** *Dati su polinomi $P(x)$ i $Q(x)$, pri čemu je $st(P)<st(Q)$. Neka je faktorizacija polinoma*

$$P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)^{s_i}\prod_{i=1}^{m}(x^2+b_ix+c_i)^{r_i}.$$[21]

*Tada postoje konstante $A_i,\ i=1,2,...,s_1+...+s_n$ i $B_i,C_i$ $i=1,2,...,r_1+...+r_n$ tako da racionlnu funkciju $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ možemo prikazati kao zbir elementarnih racionalnih funkcija oblika*

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x+a_1}+...+\frac{A_{s_1}}{(x+a_1)^{s_1}}+...+\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}+...+\frac{B_{r_1}x+C_{r_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{r_1}}+...$$

Po stavu bismo mogli izvršiti sledeće razlaganje racionalne funkcije

$$\frac{5x^5+7x-2}{(x+3)^2(x-7)(x^2+2)^3(x^2+9)}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{(x+3)^2}+\frac{A_3}{x-7}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2}+$$

[21]Po osnovnoj teoremi algebre znamo da je $st(P)=s_1+...+s_n+2(r_1+...+r_n)$.

$$\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}+\frac{B_3x+C_3}{(x^2+2)^3}+\frac{B_4x+C_4}{x^2+9}.$$

Primeri. Odredite integrale

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ 2. $\displaystyle\int\frac{(2x+5)dx}{x^4+10x^2+25}$ 3. $\displaystyle\int\frac{(2x^6+x^3)dx}{x^3-3x^2+3x-1}$

Rešenja:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\int\frac{dx}{(a-x)(a+x)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{a-x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{a+x}=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{-dt}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{\ln|a-x|}{2}-\frac{\ln|a+x|}{2}+C=\frac{1}{2}\ln|\frac{a-x}{a+x}|+C.$

2. $\displaystyle\int\frac{(2x+5)dx}{x^4+10x^2+25}=\int\frac{(2x+5)dx}{(x^2+5)^2}.$

Nađimo konstante $B_1,C_1,B_2,C_2$, koje na osnovu prethodnog Stava. omogućuju da se racionalna funkcija razloži:
$\displaystyle\frac{2x^3+10x-3}{(x^2+5)^2}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+5)^2}.$ Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene polinoma u brojiocima sa leve i desne strane jednačine, nalazimo nepoznate konstante $B_1,C_1,B_2,C_2$.
$2x^3+10x-3=(B_1x+C_1)(x^2+5)+B_2x+C_2 \quad\leftrightarrow\quad$ uz $x^3$ $B_1=2$, uz $x^2$ $C_1=0$, uz $x$ $5B_1+B_2=10,$ uz $x^0$ $5C_1+C_2=-3$. Sledi, na osnovu poznavanja integrala elementarnih racionalnih funkcija,
$\displaystyle\int\frac{2x^3+15x-3}{(x^2+5)^2}dx=\int\frac{2xdx}{x^2+5}+\int\frac{-3dx}{(x^2+5)^2}=\int\frac{dt}{t}-15\int\frac{dx}{((x/\sqrt{5})^2+1)^2}=\ln|x^2+5|-\frac{15x}{2\sqrt{5}(x^2+5)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$

3. Kako je stepen polinoma u brojiocu podintegralne funkcije veći od stepena polinoma u imeniocu prvo ćemo izvršiti deljenje
$\displaystyle\int\frac{(2x^6+x^3)dx}{x^3-3x^2+3x-1}=\int(2x^3+6x^2+12x+21+\frac{30x^2-48x+20}{x^3-3x^2+3x-1})dx=2\int x^3dx+6\int x^2dx+12\int xdx+21\int dx+\int\frac{30x^2-48x+20}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\frac{x^4}{2}+2x^3+6x^2+21x+\int\frac{30x^2-48x+20}{(x-1)^3}dx.$

Po Stavu znamo da postoje konstante $A_1,A_2$ i $A_3$
$\displaystyle\frac{30x^2-48x+20}{(x-1)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}.$ Što je ekvivalentno sa
$30x^2-48x+20=A_1(x^2-2x+1)+A_2x-A_2+A_3$
$30=A_1 \quad -48=-2A_1+A_2 \quad 20=A_1+A_3 \quad\leftrightarrow\quad A_1=30 \quad A_2=12 \quad A_3=-10$

Početni problem se svodi na rešavanje integrala elementarnih racionalnih funkcija
$\displaystyle\int\frac{30x^2-48x+20}{(x-1)^3}dx=\int\frac{30dx}{x-1}+\int\frac{12dx}{(x-1)^2}-\int\frac{10dx}{(x-1)^3}=30\ln|x-1|-\frac{12}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}+C.$

### 6.3.4 Integraljenje racionalnih funkcija po $\sin x$ i $\cos x$

Integral $\int R(\sin x, \cos x)dx$, gde je $R$ racionalna funkcija po dve promenljive $\sin x$ i $\cos x$ se rešava smenom

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Sa ovakvim izborom smene, lako sa promenljive $x$ prelazimo na promenljivu $t$ jer je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{i} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Zaista,

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x \text{ i}$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x/2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} = \cos x.$$

Nakon prelaska na promenljivu $t$ polazni integral se transformiše u integral obične racionalne funkcije, što je analizirano u prethodnom paragrafu.

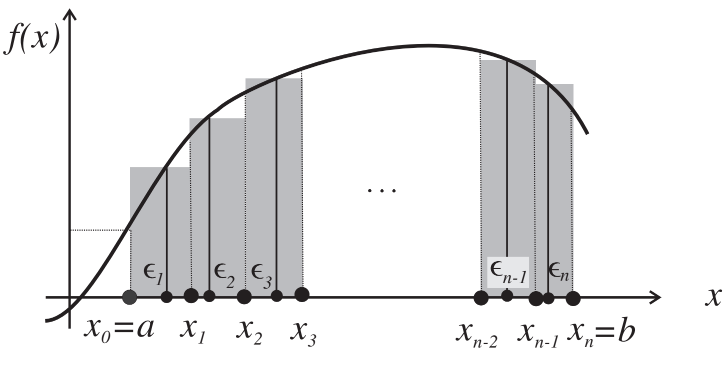
Primer. Odrediti $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{1+\cos x}$.

Rešenje. $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{4t\, dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \frac{2t\, dt}{1+t^2} = \int \frac{du}{u} = \ln|1+$ $t^2| + C = \ln|1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}| + C.$

## 6.4 Određeni integral

### 6.4.1 Definicija određenog integrala

Površina ograničena krivom $y = f(x)$, $x$-osom i ordinatama povučenim iz $x = a$ i $x = b$ (videti sliku 42.) se najčešće vezuje za koncept definicije određenog integrala. Međutim, definicija može da se formira i bez pozivanja na geometriju.




Slika 42. Određeni integral i površina

Podelimo interval $[a, b]$ na $n$ nepraznih podintervala proizvoljno izabranim tačkama $x_1, x_2, ...x_{n-1}$ tako da je zadovoljeno $a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$. Redom u svakom od intervala $(a, x_1), (x_1, x_2), ...(x_{n-1}, b)$ izaberimo po jednu tačku $\epsilon_1, \epsilon_2, ...\epsilon_{n-1}, \epsilon_n$ i formirajmo sumu

$$S = (x_1 - a)f(\epsilon_1) + (x_2 - x_1)f(\epsilon_2) + ... + (x_{n-1} - x_{n-2})f(\epsilon_{n-1}) + (b - x_{n-1})f(\epsilon_n).$$

Ako redom sa $x_0, x_n$ i $\Delta x_i$ označimo $a, b$ i dužinu $i$-tog intervala $x_i - x_{i-1}$ za $i = 1, ...n$ onda sumu možemo kraće zapisati sa

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i) \cdot \Delta x_i.$$

Geometrijski smisao ove sume je ukupna površina svih pravougaonika na slici 42. za slučaj kada je funkcija $f(x)$ neprekidna i pozitivna nad intervalom $[a, b]$.

Neka se broj podintevala $n$ neograničeno povećava tako da svaki $\Delta x_i \to 0$. Ako nezavisno od načina izbora podintervala prethodna suma konvergira ka istoj vrednosti (postoji granica $\lim_{n\to\infty} S$), onda tu vrednost zovemo **određeni integral funkcije** $f(x)$ **nad** $[a, b]$ i označavomo sa

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Inerval $[a, b]$ nazivamo **domenom integracije**, dok je $a$ **donja granica** integracije a $b$ **gornja granica**.

Određeni integral postoji kada je funkcija $f(x)$ neprekidna (ili neprekidna po delovima) na intervalu $[a, b]$. U opštem slučaju funkciju $f(x)$ nazivamo **Riman integrabilnu** ili samo **integrabilnu** na intervalu $[a, b]$ ako postoji određeni itegral.

**Geometrijski smisao**

Realan broj koji je vrednost određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ je površina figure (krivolinijskog trapeza) ograničenog krivom $y = f(x)$, $x$-osom i ordinatama $x = a$ i $x = b$ kada je $f(x) \geq 0$ na intervalu $[a, b]$. Međutim, ako je funkcija nekad negativna a nekad pozitivna onda određeni integral predstavlja algebarsku sumu površina iznad i ispod $x$-ose tretirajući površine iznad $x$-ose kao pozitivne, a one ispod kao negativne.

**Mera nula**

Za skup tačaka na $x$-osi kažemo da ima *meru nula* ukoliko se suma dužina intervala koji sadrže sve tačke skupa može napraviti proizvoljno malom (manjom od svakog zadatog pozitivnog broja $\epsilon$). Svaki prebrojiv skup brojeva na realnoj osi ima meru nula.

Sada možemo formulisati važnu teoremu (Rimanove) integrabilnosti:

*Ako je* $f(x)$ *ograničena na* $[a, b]$, *tada je potreban i dovoljan uslov za postojanje* $\int_a^b f(x)dx$ *da skup prekida funkcije* $f(x)$ *ima meru nula.*

### 6.4.2 Osobine određenog integrala

*Ako su funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *integrabilne na* $[a,b]$ *onda je:*

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2. $\int_a^b K \cdot f(x)dx = K \cdot \int_a^b f(x)dx$ *gde je* $K$ *proizvoljna konstanta*

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
   *pri čemu je* $f(x)$ *integrabilna i na* $[a,c]$ *i na* $[c,d]$.

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

6. *Ako je* $a \leq x \leq b$, $m \leq f(x) \leq M$, *gde su* $m$ *i* $M$ *konstante , tada je*

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$$

7. *Ako je* $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq g(x)$, *tada je*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

8. $\left| \int_b^a f(x)dx \right| \leq \int_b^a |f(x)|dx$ *ako je* $a < b$

### 6.4.3 Teoreme o srednjoj vrednosti za integrale

**Prva teorema o srednjoj vrednosti**

*Ako je funkcija* $f(x)$ *neprekidna na intervalau* $[a,b]$, *tada postoji tačka* $\epsilon$ *koja pripada* $(a,b)$ *tako da je:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\epsilon) \cdot (b-a).$$

**Uopštena prva teorema o srednjoj vrednosti**

*Ako su funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *neprekidne na intervalau* $[a,b]$ *i funkcija* $g(x)$ *ne menja znak na intervalu, tada postoji tačka* $\epsilon$ *koja pripada* $(a,b)$ *tako da je:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\epsilon) \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

Uopštena prva teorema se restrikuje na prethodnu teoremu o srednjoj vrednosti kada je $g(x) = 1$.

**Druga teorema o srednjoj vrednosti (Bonnet)**
*Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne na intervalau $[a, b]$ i funkcija $g(x)$ je pozitivna monotono-opadajuća na intervalu, tada postoji tačka $\epsilon$ koja pripada $(a, b)$ tako da je:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ = \ g(a) \cdot \int_a^\epsilon f(x)dx,$$

*Ako je funkcija $g(x)$ pozitivno monotono-rastuća na intervalu, tada postoji tačka $\epsilon$ koja pripada $(a, b)$ tako da je:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ = \ g(b) \cdot \int_\epsilon^b f(x)dx.$$

**Uopštena druga teorema o srednjoj vrednosti**
*Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne na intervalau $[a, b]$ i ako je funkcija $g(x)$ ili monotono-opadajuća ili monotono-rastuća na intervalu, tada postoji tačka $\epsilon$ koja pripada $(a, b)$ tako da je:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ = \ g(a) \cdot \int_a^\epsilon f(x)dx \ + \ g(b) \cdot \int_\epsilon^b f(x)dx.$$

Primetimo da se u prethodnoj teoremi ne traži pozitivnost funkcije $g(x)$ kao u njenoj specijalnoj verziji već samo monotonost.

### 6.4.4 Osnovna teorema za računanje određenih integrala

Podsetimo se prvo da je neodređeni integral

$$\int f(x)dx$$

skup svih primitivnih funkcija oblika $F(x) + C$, [22] pri čemu je $F'(x) = f(x)$.

**Njutn-Lajbnicova teorema.** *Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$ i ako je $F(x)$ neka primitivna funkcija funkcije $f(x)$ tada je:*

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ F(b) - F(a).$$

Ova važna teorema nam omogućuje, kada nam je poznat neodređeni integral, da *izračunamo* određeni integral na jednostavan način, direktno, bez traženja granične vrednosti.

Primer: Kako je $F'(x) = (\frac{x^4}{4} + k)' = 4 \cdot \frac{x^3}{4} = x^3$ onda je
$\int_1^2 x^3 dx = F(2) - F(1) = (\frac{2^4}{4} + k) - (\frac{1^4}{4} + k) = \frac{15}{4}$ jedan neodređeni integral ili anti-izvod

[22] Svi anti-izvodi neke funkcije razlikuju se samo za konstantu.

funkcije $x^3$. Pošto konstanta $k$ svakako nestaje, podesno je jednostavnije zapisivanje: $\int_1^2 x^3 dx = \frac{2^4}{4}|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$.

**Dokaz.** Dokažimo prvo da je $F'(x) = f(x)$ gde smo sa $F(x)$ označili $\int_a^x f(t)dt$ . Po prvoj teoremi o srednjoj vrednosti za integrale imamo:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(\epsilon)$$

gde $\epsilon \in (x, x+h)$.

Stoga, zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$, ako je $x$ bilo koja tačka unutar $[a, b]$,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ \epsilon \in (x, x+h)}} f(\epsilon) = f(x).$$

Za $x = a$ i za $x = b$ rezultat takođe važi uz korišćenje $\lim\limits_{h \to 0^+}$ odnosno $\lim\limits_{h \to 0^-}$ .

Kako smo pokazali da je $F(x)$ bilo koja funkcija čiji je prvi izvod $f(x)$ možemo pisati

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \ + \ k,$$

gde je $k$ proizvoljna konstanta.

Kako je $F(a) = k$ , sledi da je

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt \ + \ F(a)$$

što je i trebalo dokazati. □

### 6.4.5 Metoda smene i parcijalna integracija kod određenog integrala

U skladu sa Njutn-Lajbnicovom formulom za određivanje određenih integrala može se metoda smene i metoda parcijalne integracije primeniti i na određene integrale.

**Metoda smene 2.** *Neka je $f(t)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$ i $F(t)$ njena primitivna funkcija i neka je $\phi(x) : [c, d] \to [a, b]$ monotona funkcija sa neprekidnim prvim izvodom. Tada ako je $\phi(a) = c$ i $\phi(b) = d$, posle smene $t = \phi(x)$ imamo*

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx \ = \ \int_c^d f(t)dt = F(t)|_c^d = F(d) - F(c).$$

Primetimo da kod određenog integrala posle prelaska na promenljivu $t$ ne moramo vraćati se na promenljivu $x$, što je potrebno kod neodređenog integrala. Neodređeni integral je skup *funkcija* koje se razlikuju za konstantu pa je stoga prirodno da se funkcije zapisuju direktno preko polazne promenljive a ne preko neke posredne promenljive. Sa druge strane određeni integral je *broj* i lakše nam je da ga računamo kao $F(d)-F(c)$ nego kao $F(\phi(a))-F(\phi(b))$.

**Metoda parcijalne integracije 2.** *Neka su* $u(x)$ *i* $v(x)$ *diferencijabilne funkcija na intervalu* $[a,b]$ *tada važi formula parcijalne integracije*

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x)dx &= u(x)\cdot v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)du \\ &= u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)du \end{aligned} .$$

Primeri. Nađite sledeće određene integrale:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ 2. $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} x\cdot \sin x \; dx$

Rešenja:

1. Smenom $t=e^x$, $dt=e^x\,dx$, donja i gornja granica integrala se redom menja u $1=e^0$ i $e=e^1$. Sledi da je
$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t|_1^e = \pi/4 - \operatorname{arctg} e.$

2. Ako izaberemo $u=x$, $dv=\sin x\; dx$, sledi $du=dx$, $v=\int \sin x\; dx = -\cos x$. Ovo implicira
$\displaystyle\int_\pi^{2\pi} x\cdot\sin x\; dx = -x\cos x|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi} \cos x\; dx = 2\pi - \pi\cdot(-1) + \sin x|_\pi^{2\pi} = 3\pi$ .

## 6.5 Nesvojstveni integrali

Ako granice integraljenja nisu konačne ili podintegralna funkcija $f(x)$ u domenu integraljenja nije definisana u nekoj tački ili nije ograničena, tada takav integral zovemo **nesvojstvenim** integralom. Pogodnim graničnim procesom se može ili odrediti vrednost nesvojstvenog integrala ili zakljuciti da nesvojstveni integral *divergira*, ukoliko odgovarajući granični proces divergira.

Primeri.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} \operatorname{arctg} x\;|_0^M =$
$\displaystyle\lim_{M\to\infty} arctgM = \frac{\pi}{2}$ .

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0+} 2\sqrt{x}\;|_a^1 = \lim_{a\to 0+} (2-2\sqrt{a} = 2$ .

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0+} \ln|x|\;|_a^1 = \lim_{a\to 0+} (-\ln a).$

Kako poslednja granična vrednost ne postoji kažemo da integral
$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ divergira.

Ukoliko su same granice integraljenja neograničene radi se o nesvojstvenom integralu **prve vrste** u ostalim slučajevima radi se o nesvojstvenom integralu **druge vrste**.

## 6.6 Primena integrala

### 6.6.1 Površina figura u ravni

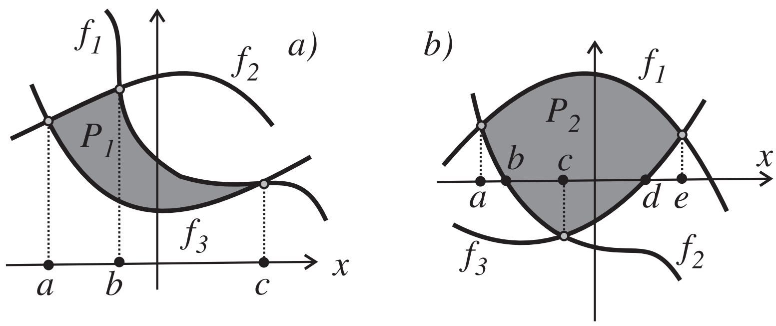
Sa jednom primenom određenih integrala smo se već sreli kada smo govorili o geometrijskoj interpretaciji određenog integrala. Znamo, ako je podintegralna funkcija neprekidna i $f(x) > 0$ na domenu integraljenja $[a, b]$ tada je

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; P,$$

gde je $P$ površina krivolinijskog trapeza ograničenog sa grafikom funkcije $f(x)$, $x$-osom, i pravama $x = a$ i $x = b$. Sa druge strane, ako je grafik funkcije ispod $x$-ose, tj., ako je $f(x) < 0$, sledi da je

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; -P.$$

Osenčene površine $P_1$ i $P_2$ na slici 43, ograničene krivama $f_1$, $f_2$ i $f_3$ možemo izračunati pomoću određenih integrala na sledeći način:
$P_1 = \int_a^b f_2(x)dx + \int_b^c f_3(x)dx - \int_a^c f_1(x)dx$
$P_2 = \int_a^e f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_d^e f_3(x)dx - (\int_b^c f_2(x)dx + \int_c^d f_3(x)dx)$.
Da bismo odredili površine moraju se odrediti apscise značajnih tačaka na grafiku. Označili smo ih sa $a, b, c, d, e$. To su presečne tačke grafika ili nule funkcija.

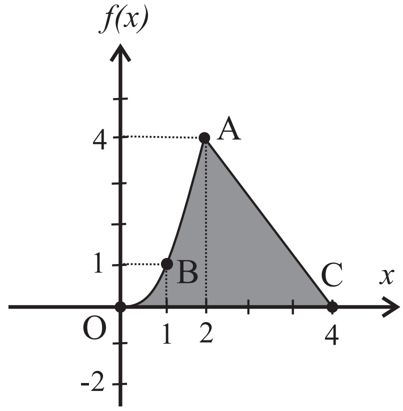



Slika 43. Površina figure u ravni ograničene krivama $f_1$, $f_2$ i $f_3$

Rešimo sledeći primer naveden u poglavlju 1.1.1:
Primer. Njiva je oivičena potokom - luk kroz tačke O, B i A i sa dva puta (Sl. 44). Jedan put je na pravoj kroz tačke A i C, a drugi je u pravcu $x$-ose. Odredite površinu njive koja je na Sl. 44 osenčena površina tako što aproksimirate skicirani deo linije potoka temenom parabolom čiji grafik prolazi kroz tačke A i B, a put pravom kroz tačke A i C i potom integralite na (0,4). Razmera skice je 1:300 $m$.
Rešenje. Temena parabola $k(x) = x^2$ prolazi kroz tačke O, B i A i lepo "prati" tok potoka. Nepoznate koeficijente $a$ i $b$ linearne funkcije $y(x) = ax + b$ dobijamo rešavanjem sistema dve jednačine sa dve nepoznate. Prvu jednačinu $4 = 2a + b$ dobijamo uvrštavanjem koordinata tačke A(2,4) u funkciju, a drugu $0 = 4a + b$ uvrštavanjem koordinata tačke C(4,0). Iz druge jednačine je $b = -4a$, a kad prvu jednačinu pomnožimo sa $-1$ i dodamo

je drugoj dobijamo $2a = -4$. Sledi da je $a = -2$ i $b = 8$. Tako je površina njive izražena u kvadratnim jedinicama sa osa jednaka

$$P = \int_0^2 x^2\, dx + \int_2^4 (-2x+8)\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + (-2\frac{x^2}{2} + 8x)\Big|_2^4 = \frac{8}{3} + (-16+32-(-4+16)) = 6\frac{2}{3}.$$

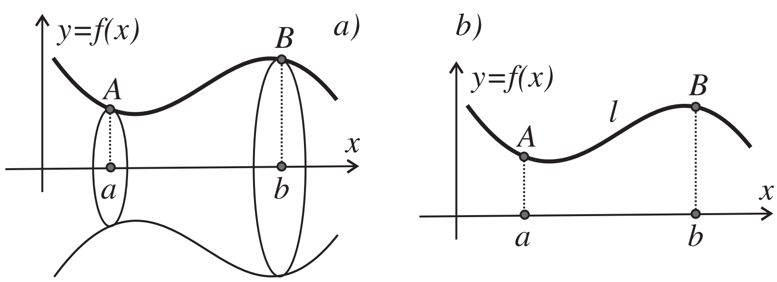



Slika 44.

Primetimo da smo vrednost 4 drugog integrala mogli i bez integraljenja dobiti znajuci na osnovu skice da je on jednak površini pravouglog trougla sa katetama dužine 2 i 4, dakle $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$. Kako zbog razmere 1:300 $m$ jednoj kvadratnoj jedinici skice odgovara $300^2\ m^2$ realne površine, njiva ima površinu od 60 hektara jer je $6\frac{2}{3} \cdot 300^2\ m^2 = \frac{20}{3} \cdot 9 \cdot 10000\ m^2 = 600000\ m^2 = 60 \cdot (100m)^2 = 60\ ha$.

### 6.6.2 Zapremina obrtnih tela

Posmatrajmo telo (sl. 45.a) koje nastaje rotiranjem neprekidnog dela krive $f(x)$ od tačke $A$ do tačke $B$ na intervalu $[a, b]$ oko $x$-ose.




Slika 45. Obrtno telo

Zapreminu ovog obrtnog tela označimo sa $V$. Nju možemo izračunati pomoću sledećeg određenog integrala

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

Slično, ako bimo posmatrali telo koje nastaje rotiranjem oko $y$-ose neprekidne funkcije $x = g(y)$ na intervalu $[c, d]$, njegova zapremina je

$$V \;=\; \pi \int_c^d \; (g(y))^2 \; dy.$$

### 6.6.3 Dužina luka krive

Neka funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod (glatka je) na intervalu $[a, b]$. Dužinu luka krive $l$ od tačke $A(a, f(a))$ do tačke $B(b, f(b))$ (sl. 45.b) može da se odredi pomoću određenog integrala

$$l \;=\; \int_a^b \; \sqrt{1 + (f'(x))^2} \; dx.$$

Ukoliko je funkcija zadata parametarski sa $x = f(t)$ $y = g(t)$ na intervalu $t \in [a, b]$ tada dužinu luka krive na razmatranom intervalu dobijamo po formuli

$$l \;=\; \int_a^b \; \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} \; dt.$$

Primer. Neka je polukružnica poluprečnika $r$ zadata parametarski sa $y = r \sin t$ $x = r \cos t$, $t \in [0, \pi]$. Odredite dužinu luka polukružnice.
$l = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \; dt = r \int_0^\pi dt = rt|_0^\pi = \; r\pi.$

### 6.6.4 Površina obrtnih tela

Neka funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod na intervalu $[a, b]$ i neka je $f(x) \geq 0$ nad intervalom. Površina tela, koje nastaje obrtanjem krive $f(x)$ oko $x$-ose na razmatranom intervalu je jednaka određenom integralu

$$P \;=\; 2\pi \int_a^b \; f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \; dx.$$

Primer. Odredite površinu i zapreminu jedinične polulopte, koju posmatramo kao telo koje nastaje kada se kriva $y = \sqrt{1 - x^2}$, na intervalu $[0, 1]$, rotira oko $x$-ose.
Rešenje. Zapremina jedinične polulopte je
$V \;=\; \pi \; \int_0^1 \; (1 - x^2) \; dx \;=\; \pi(x - \frac{x^3}{3})|_0^1 \;=\; 2/3\pi.$
Prvi izvod funkcije je $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. Površina jedinične polulopte je
$P = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\pi x|_0^1 = 2\pi.$

## 6.7 Zadaci

**6.1.** (6. zadatak poglavlja 1.1.1) Ako kvadratna funkcija $f(t)$ ima grafik dat na sl. 4 (videti str. 3 prve Glave) odredite koji od četiri grafika a), b), c) ili d) na sl. 5. datoj na 4. strani odgovara grafiku njene primitivne funkcije $F(x)$ zadate integralom

$$F(x) = \int_0^x f(t) \; dt.$$

Rešenje.Konkavna kvadratna funkcija $f(t)$ ima dve realne nule u tačkama $t = 0$ i $t = -2$ pa je jednaka $f(t) = t(t+2) = t^2 + 2t$. Njena primitivna funkcija je

$$F(x) = \int_0^x (t^2 + 2t)\ dt = (\frac{t^3}{3} + \frac{2t^2}{2})|_0^x = (\frac{x^3}{3} + x^2) - (0+0) = x^2(\frac{x}{3} + 1).$$

Nule funkcije $F(x)$ su $x = 0$ i $x = -3$ te njen grafik može biti pod b) ili d). Kako se znak funkcije poklapa sa znakom njenog faktora $\frac{x}{3} + 1$ jer je faktor $x^2 > 0$ za $x \neq 0$ sledi da je $F(x) < 0$, za $x < -3$, a $F(x) > 0$, za $x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$. Dakle grafik primitivne funkcije $F(x) = x^2(\frac{x}{3} + 1)$ je na slici 5. pod d).

**6.2.** Odredite po dve primitivne funkcije za sledeće funkcije:

1. $f(x) = e^x$,
2. $g(x) = 2x - 3$,
3. $h(x) = 3x^2$.

Rešenje. Neke primitivne funkcije su redom:

1. $F(x)$ je oblika $e^x$,$-3 + e^x$, $e^x + 2$,...
2. $G(x)$ je oblika $x(x-3)$, $x^2 - 3(x+1)$,...
3. $H(x)$ je oblika $x^3$, $x^3 - 2$,...

**6.3.** Da li su tačni sledeći identiteti:

1. $\int_3^4 h(x)\ dx = -\int_3^4 h(x)\ dx$,
2. $\int_3^5 h(x)\ dx = \int_5^3 h(x)\ dx - \int_4^4 h(x)\ dx$,
3. $\int_3^4 h(x)\ dx - \int_2^4 h(x)\ dx - \int_3^2 h(x)\ dx$=0?

Rešenje.

1. da,
2. ne,
3. da.

**6.4.** Za koje od navedenih određenih integrala bez integraljenja možemo zaključiti da su jednaki 0?

1. $-\int_3^5 h(x)\ dx + \int_4^5 h(x)\ dx + \int_3^4 h(x)\ dx$,
2. $\int_{2005}^{2005} (4x^5 + 4x^3 - 4x^2 + 4x + 4)dx$,

3. $\int_{-1}^{1} \sin x \cdot x^{2007}\ dx,$

4. $\int_{-3}^{3} x^{2007}\ dx + \int_{-5}^{5} x^{2005}\ dx + \int_{-7}^{7} x^{2003}\ dx,$

5. $\int_{-2}^{2} \cos x \cdot x^{2006}\ dx?$

Rešenje. Svi određeni integrali su jednaki 0. Prvi na osnovnu osnovnih osobina određenih integrala a ostali na osnovu osobine da je određeni integral na simetričnom intervalu od neparne funkcije jednak 0.

**6.5.** Odredite koje od navedenih integrala rešavamo smenom a koje metodom parcijalne integracije.

1. $\int e^{x+2}\ dx$ ,

2. $\int x \cdot e^{2006+x^2}\ dx$ ,

3. $\int 2x \cdot e^{x^2}\ dx$ ,

4. $\int x\ e^{3x^2}\ dx$ ,

5. $\int x \cdot \sin(x^2)\ dx$ .

Rešenje. Svi navedeni integrali se rešavaju smenom. Smene koje treba primeniti su redom:

1. $t = x + 2,$

2. $t = 2006x + x^2,$

3. $t = x^2,$

4. $t = 3x^2,$

5. $t = x^2.$

**6.6.** Rešite metodom parcijalne integracije $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \cos x\ dx.$

# Glava 7.

# 7 ODJ 1. i višeg reda

## 7.1 Obične diferencijalne jednačine - uvod

Obične diferencijalne jednačine, čije osnove ćemo izučavati u ovoj glavi, sreću se u praksi prilikom modeliranja pojava u prirodi, hemijskih ili fizičkih procesa. Na primer, Keplerovi zakoni kretanja planeta su u obliku običnih diferencijalnih jednacina (videti [26]). Takođe, zakoni u kojima učestvuju brzina, ili ubrzanje su obične diferencijalne jednačine. Ukoliko nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini ili u sistemu diferencijalnih jednačina zavisi samo od jedne realne promenljive radi se o **običnim** diferencijalnim jednačinama. Ako nepoznata funkcija zavisi od više realnih promenljivih radi se o **parcijanim** diferencijalnim jednačinama.

*Jednačinu*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \ ,$$

*u kojoj figuriše bar jedan od izvoda nepoznata funkcija $y(x)$, nazivamo* **obična diferencijalna jednačina**. *Red najvećeg izvoda koji figuriše u jednačini je* **red** *diferencijalne jednačine.*

Kod diferencijalnih jednačina prvog reda najčešće se sreću **normalni oblik**

$$y' = f(x, y)$$

i **simetrični oblik**

$$P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0 \ .$$

U daljem tekstu, umesto termina obična diferencijalna jednačina, koristimo termin diferencijalna jednačina ili samo jednačina.

**Rešiti** ili **integraliti**[23] diferencijalnu jednačinu reda $n$ na intervalu $I$, znači naći *sve* funkcije $y(x)$, koje su $n$ puta diferencijabilne na $I$ i koje na intervalu identički zadovoljavaju polaznu diferencijalnu jednačinu.

Najjednostavniji oblik diferencijane jednačine

$$y^{(n)} = f(x),$$

se rešava $n$-tostrukim integraljenjem.

Primer. Diferencijalna jednačina drugog reda
$y'' = 3x^2$ ima za rešenje nakon deljenja [24] sa $dx$ i integraljenja, dva puta primenjenog, dobijamo
$\int dy' = \int 3x^2 dx \ \Leftrightarrow \ y' = x^3 + C_1 \ \Leftrightarrow \ \int dy = \int (x^3 + C_1)dx \ \Leftrightarrow$
$y(x) = 1/4x^4 + C_1 x + C_2$, gde su $C_1$ i $C_2$ proizvoljne konstante. Ovo rešenje nije jednoznačo određena funkcija, nego je skup funkcija koje zavise od izbora konstanti $C_1$ i $C_2$. Ako

[23] U okviru rešavanja se uvek javlja i integraljenje.

[24] Znamo da je $y'' = dy'/dx$.

rešavamo diferencijalnu jednačinu $n$-tog reda onda opšte rešenje zavisi od $n$ konstanti. Preciznije,

**opšte rešenje** *diferencijalne jednačine n-tog reda je familija krivih u ravni koja je definisana jednačinom u eksplicitnom ili implicitnom obliku*

$$y = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \quad \textit{odnosno} \quad \varphi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

*gde funkcija y identički zadovoljava polaznu diferencijalnu jednačinu i* $C_1$*,* $C_2, ..., C_n$ *su proizvoljne konstante iz domena definisanosti funkcija* $\psi$ *i* $\varphi$*.*

Konstante $C_1, C_2, ..., C_n$ se mogu fiksirati ukoliko se dodatno zada još $n$ ograničenja, što se zahteva u tzv. Košijevom problemu [25]

**Košijev problem** *(ili* **početni problem***) čini diferencijalna jednačina*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

*zajedno sa* **početnim uslovima**

$$y(x_0) = t_0, \quad y'(x_0) = t_1, \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = t_{n-1},$$

*gde su* $x_0, t_0, t_1, ..., t_{n-1}$*, dati realni brojevi.*

**Partikularno rešenje** *diferencijalne jednačine je ona funkcija iz opšteg rešenja kod koje su fiksirane vrednosti konstanti.*

Znači, ukoliko kod Košijevog problema postoji jedinstveno rešenje ono je partikularno.

Primer. Diferencijalna jednačina drugog reda iz prethodnog primera, $y'' = 3x^2$, ima za opšte rešenje $y(x) = 1/4x^4 + C_1 x + C_2$. Partikularno rešenje Košijevog problema

$$y'' = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

posle određivanja $y(0) = C_2 = 1, \quad y'(0) = C_1 = 0$, bi bila funkcija $y(x) = 1/4x^4 + 1$.

## 7.2 Diferencijalne jednačine prvog reda

Sledeće tri teoreme daju potrebne uslove za postojanje, odosno jedinstvenost rešenja Kosijevog problema za diferencijalne jednačine prvog reda.

**Peanova teorema.** *Ako je funkcija* $f$ *neprekidna na pravougaoniku* $P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ *tada* **postoji bar jedno** *rešenje Košijevog problema*

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

*nad intervalom* $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$*, gde je*

$$\alpha = min\{a, \frac{b}{M}\}, \qquad M = \max_{(x,y)\in P} |f(x, y)| \ .$$

**Pikarova teorema.** *Neka su zadovoljene sve pretpostavke i usvojene sve oznake prethodne teoreme. Ako je dodatno prvi parcijalni izvod po y, funkcije* $f$*, ograničen, tada* **postoji jedinstveno** *rešenje Košijevog problema na intervalu* $I$*.*

[25]Koristi se [26] i termin Košijev zadatak.

Sledeća teorema je uopštenje Pikarove teoreme, govori o jedinstvenosti Košijevog problema za širi skup diferencijalnih jednačina prvog reda.

*Ako je funkcija $f$ neprekidna na pravougaoniku $P$ i ako funkcija $f(x,y)$ zadovoljava* **Lipšicov uslov** *po promenljivoj $y$ na $P$*

$$(\forall (x,y_1),(x,y_2)\in P)\ (\exists L)\quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\ \leq\ L\cdot|y_1-y_2|,$$

*tada* **postoji jedinstveno** *rešenje Košijevog problema*

$$y'=f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0,$$

*nad intervalom $I=(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$.*

### 7.2.1 ODJ 1. reda sa razdvojenim promenljivima

Diferencijalne jednačine prvog reda sa razdvojenim promenljivima spadaju u jednostavnije diferencijalne jednačine prvog reda. Nakon razdvajanja promenljivih $x$ i $y$, i njihovih diferencijala, na različite strane, jednačina se rešava direktnim integraljenjem, bez upotrebe bilo kakve smene.

*Jednačina normalnog oblika*

$$y'=f_1(x)f_2(y),$$

*ili simetričnog oblika*

$$g_1(x)g_2(y)\ dx+g_3(x)g_4(y)\ dy=0,$$

*gde su funkcije $f_1(x), 1/f_2(y), g_1(x)/g_3(x), g_4(y)/g_2(y)$, neprekidne na razmatranim intervalima, su* **diferencijalne jednačine prvog reda sa razdvojenim promenljivima**.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine prvog reda sa razdvojenim promenljivima se dobija integraljenjem

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}\ =\ \int f_1(x)\ dx\ ,$$

odnosno

$$\int\frac{g_1(x)\ dx}{g_3(x)}\ =\ -\int\frac{g_4(y)\ dy}{g_2(y)}\ .$$

Primeri. Odredite opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina prvog reda:

a) $y'=3x^2\dfrac{1}{cosy}$, b) $\operatorname{tg}x\cdot\cos^2 y\ dy+\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}y\ dx=0.$

Rešenja.

a) Nakon razdvajanja promenljivih i njihovih diferencijala, a zatim integraljenja sledi $\int\cos y\ dy=3\int x^2dx$ , opšte rešenje je $\sin y=x^3+C$.

b) $\int\sin x\cdot\cos x\ dx=-\int\cos y\cdot\sin y\ dy\quad\Leftrightarrow\quad\int tdt=-\int t_1dt_1\quad\Leftrightarrow\quad t^2=-t_1^2+C\quad\Leftrightarrow$ $\sin^2 x+\sin^2 y=C$. Koristili smo smene $t=\sin x, dt=cosx\ dx\ t_1=\sin y, dt_1=\cos y\ dy$.

### 7.2.2 Homogena ODJ 1. reda

Za određivanje koje su diferencijalne jednačine prvog reda homogene, podsetićemo se prvo definicije homogenih funkcija.

*Neprekidna realna funkcija* $f(\mathbf{x}) : D \to \mathcal{R}$ *je* **homogena stepena** $n$ *ako zadovoljava za svako* $\mathbf{x} \in D \subset \mathcal{R}^m$

$$(\forall \lambda \in \mathcal{R}^+) \quad f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) \quad .$$

Recimo, funkcije $f_1$ i $f_2$ definisane sa

$f_1(t) = t^3$, $t \in [0,1]$ i $f_2(x,y) = x + 5y$, $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathcal{R}^2$,
su redom homogene trećeg i prvog stepena jer je za svaki pozitivan realan broj $\lambda$
$f_1(\lambda t) = (\lambda t)^3 = \lambda^3 t^3 = \lambda^3 f_1(t), \quad t \in [0,1] \quad$ i
$f_2(\lambda \mathbf{x}) = f_2(\lambda(x,y)) = f_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + 5\lambda y = \lambda(x+5y) = \lambda f_2(x,y) = \lambda f_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathcal{R}^2$.

*Ako su funkcije* $P(x,y)$ *i* $Q(x,y)$ *homogene funkcije istog stepena na zajedničkom domenu* $D$ *tada je diferencijalna jednačina prvog reda oblika*

$$P(x,y)dx \ + \ Q(x,y)dy = 0 \ ,$$

**homogena diferencijalna jednačina** *prvog reda na domenu* $D$.

**Rešavanje homogenih diferencijalnih jednačina prvog reda**

Svaka homogena diferencijalna jednačina prvog reda može se svesti na oblik

$$\boxed{y' \ = \ f(\frac{y}{x}) \ ,}$$

gde je funkcija $f$ neprekidna funkcija. Nakon svođenja na prethodni oblik homogenu diferencijalnu jednačinu rešavamo smenom

$$u(x) = \frac{y}{x} \qquad y'(x) = (u(x) \cdot x)' = u'x + u \ ,$$

nakon koje se jednačina transformiše u

$$\frac{du}{dx} x + u = f(u) \ \Leftrightarrow \ \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \ ,$$

diferencijalnu jednačinu sa razdvojenim promenljivima $u$ i $x$, koju rešavamo integraljenjem.

Primeri. Rešiti sledeće diferencijalne jednačine

1. $\quad y' \ = \ \dfrac{x-y}{x+y} \qquad\qquad$ 2. $\quad xyy' + x^2 - y^2 \ = \ 0.$

Rešenja.

1. $\quad y' \ = \ \dfrac{x(1-y/x)}{x(1+y/x)} = \dfrac{1-y/x}{1+y/x}$. Nakon smene $u = y/x$, $y' = u'x + u$, sledi

$$u'x = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-u-u(1+u)}{1+u} = \frac{1-2u-u^2}{1+u}.$$

Zamenom $u' = du/dx$, zatim razdvajanjem promenljivih i integraljenjem dobijamo

$$\int \frac{(1+u)du}{1-2u-u^2} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

Integral sa leve strane se rešava smenom $t = 1 - 2u - u^2, \quad dt = -2(1+u)du$
$\int \frac{(1+u)du}{1-2u-u^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}ln|t| = -\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2| = \ln|x| + \ln C.$
Iz $-\frac{1}{2}ln|1-2u-u^2| = \ln|x| + \ln C$, množenjem sa -2 i eksponovanjem sledi $1 - u - u^2 = \frac{1}{C^2x^2}$, odnosno, $1 - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{C^2x^2}$.
Opšte rešenje diferencijalne jednačine je oblika $y^2 + 2xy - x^2 = C_1, \quad C_1 > 0$.
2. Nakon deljenja diferencijalne jednačine $xyy' + x^2 - y^2 = 0$, sa $x^2$ dobijamo $\frac{y}{x}y' + 1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$. Nakon smene $u = y/x, \; y' = u'x + u$, sledi
$u(u'x+u) + 1 - u^2 = uu'x = -1 \;\Leftrightarrow\; udu = -\frac{dx}{x}$. Posle integraljenja je
$\frac{u^2}{2} = \ln|\frac{C}{x}|$ , odnosno $y^2 = x^2 \ln\frac{C^2}{x^2}$ je opšte rešenje.

### 7.2.3 Diferencijalne jednačine koje se svode na homogene

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f(\frac{C_1x + C_2y + C_3}{K_1x + K_2y + K_3}),$$

pri čemu su $C_1, C_2, C_3, K_1, K_2$ i $K_3$ konstante, dok je funkcija $f$ neprekidna na razmatranom intervalu.

Ukoliko je determinanta $\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ K_1 & K_2 \end{vmatrix} \neq 0$, linearnom smenom nezavisne i zavisne promenljive $x = u + a$ i $y = v + b$ se ova diferencijalna jednačina svodi na homogenu nalaženjem vrednosti konstanti $a$ i $b$ tako da se anuliraju slobodni koeficijenti u imeniocu i brojiocu argumenta funkcije $f$. Preciznije, polazna diferencijalna jednačina dobija oblik

$$v' = f(\frac{c_1u + c_2v}{k_1u + k_2v}).$$

Međutim, ukoliko je determinanta $\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ K_1 & K_2 \end{vmatrix} = 0$, koristimo smenu $t(x) = C_1x + C_2y(x)$, pri čemu se polazna diferencijalna jednačina svodi na diferencijalnu jednačinu po nepoznatoj funkciji $t(x)$, kod koje su razdvojene promenljive.

Posmatrajmo na primer sledeće tri diferencijalne jednačine:
a) $y' = \frac{4x+2y}{-y-2x}$ b) $y' = \frac{3x+3y+1}{x+y+1}$ c) $y' = \frac{4x-y-1}{y-x-2}$.

Prva diferencijalna jednačina već ima jednake nuli slobodne koeficijente u imeniocu i brojiocu pa direktno bez smene može da se transformiše u homogenu.

Druga diferencijalna jednačina ima determinantu $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, pa ćemo koristiti smenu $t = x + y$ (dobra bi bila i smena $t = 3x + 3y$), pri čemu je $t' = 1 + y'$.

Determinanta treće jednačine je $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, stoga koristimo smene $x = u + a$ i $y = v + b$.

Rešenja.

a) $\quad y' = \dfrac{4x+2y}{-y-2x} = \dfrac{x(4+2y/x)}{x(-y/x-2)} = \dfrac{4+2y/x}{-2-y/x}.$

Što je nakon smene $u = y/x, \;\; y' = u'x + u,$ ekvivalentno sa:

$u'x = \dfrac{4+2u}{-2-u} - u = \dfrac{4+2u+2u+u^2}{-2-u} = \dfrac{(2+u)^2}{-(2+u)} = -2-u.$

Tako je $-\displaystyle\int \frac{du}{2+u} = \int \frac{dx}{x}.$

Nakon integraljenja je $\ln \dfrac{1}{|2+u|} = \ln|xC| \quad\Leftrightarrow\quad y = -2x + C_1.$

b) $\quad y' = \dfrac{3(x+y)+1}{x+y+1} \;\Leftrightarrow\; t' = \dfrac{3t+1}{t+1} - 1 = \dfrac{3t+1-t-1}{t+1} = \dfrac{2t}{t+1} \;\Leftrightarrow\; \displaystyle\int \frac{t+1}{t}dt = 2\int dx \;\Leftrightarrow\; \int (1+1/t)dt = 2x + C \;\Leftrightarrow\; t + ln|t| = 2x + C \;\Leftrightarrow\; y + \ln|x+y| = x + C.$

c) $\quad y' = \dfrac{4x-y-1}{y-x-2} \;\Leftrightarrow\; v' = \dfrac{4(u+a)-(v+b)-1}{(v+b)-(u+a)-2} = \dfrac{4u-v+4a-b-1}{v-u+b-a-2}.$

$a$ i $b$ biramo tako da je $\;4a-b-1=0\;$ i $\;-a+b-2=0.$ Ako saberemo prethodne jednačine dobijamo $3a = 3$. Sledi $a = 1$ i $b = 3$. Sada dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu i koristimo smenu $w(u) = v/u, \;\; v' = w'u + w$:

$v' = \dfrac{4u-v}{v-u} = \dfrac{4-v/u}{v/u-1} \;\Leftrightarrow\; w'u = \dfrac{4-w}{w-1} - w = \dfrac{4-w-w^2+w}{w-1} = \dfrac{4-w^2}{w-1} \;\Leftrightarrow\; \displaystyle\int \frac{1-w}{w^2-4}dw = \int \frac{du}{u} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{(w-2)(w+2)}dw - 1/2\int \frac{2wdw}{w^2-4} = \ln|uC| \;\Leftrightarrow\; -1/4\ln\left|\frac{w+2}{w-2}\right| - 1/2\ln|w^2-4| = \ln|uC| \;\Leftrightarrow\; \ln\left|\frac{w-2}{(w+2)(w^2-4)^2}\right| = \ln(uC)^4 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{(w+2)^3(w-2)} = u^4C^4 \;\Leftrightarrow\; C^4u^4\frac{(v+2u)^3}{u^3}\cdot\frac{(v-2u)}{u} = C^4(v+2u)^3\cdot(v-2u) = 1.$

Kako je $x = u+1$ i $y = v+3$, vraćamo se na polazne promenljive, sledi da je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine:

$C^4(y-3+2(x-1))^3\cdot(y-3-2(x-1)) = 1 \;\Leftrightarrow\; C^4(y+2x-5)^3(y-2x-1) = 1.$

### 7.2.4 Linearna ODJ prvog reda

*Ako su funkcije $P$ i $Q$ neprekidne tada je diferencijalna jednačina*

$(a) \qquad\qquad y' \;+\; P(x)\cdot y \;=\; Q(x),$

**linearna diferencijalna jednačina prvog reda** *po nepoznatoj funkciji* $y(x)$.

Ako u opštem obliku $(a)$ linearne diferencijalne jednačine prvog reda po nepoznatoj funkciji $y(x)$ zamenimo zavisnu i nezavisnu promenljivu $y$ i $x$ dobijamo opšti oblik $(b)$ linearna diferencijalna jednačina prvog reda **po nepoznatoj funkciji** $x(y)$.

$(b) \qquad\qquad x' \;+\; P(y)\cdot x \;=\; Q(y)$

Diferencijalnu jednačinu $(a)$ rešavamo smenom

$$y(x) = u(x)\cdot v(x), \qquad\qquad y' = u'v + uv'.$$

Tada linearna diferencijalna jednačina dobija oblik

$(1) \qquad\qquad (u' + P(x))v + uv' = Q(x).$

Funkciju $u(x)$ određujemo tako da je $u' + P(x) = 0$, odnosno $\dfrac{du}{u} = -P(x)dx$. Sledi da je opšte rešenje ove diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivima

$$u = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Ako izaberemo da je $C = 1$ i zamenimo u jednačinu (1) sledi

$$e^{-\int P(x)dx} \cdot v' = Q(x).$$

Tako je opšte rešenje funkcije $v(x)$

$$v = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx.$$

Konačno, opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine je

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx} \cdot (C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx).$$

Primetimo da je data definicija linearne diferencijalne jednačine prvog reda *po promenljivoj* $y$. Preciznije, rešenje smo tražili u obliku $y(x)$. Međutim, promenljive $y$ i $x$ mogu da razmene uloge i tada govorimo o *linearnoj diferencijalnoj jednačini prvog reda po promenljivoj* $x$. Njen opšti oblik je

$$x' \ + \ P(y) \cdot x \ = \ Q(y),$$

i način rešavanja je sasvim analogan već izloženom.

Primeri. Naći opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina:

1. $y' + 2xy - e^{-x^2} = 0$ 2. $y' = \dfrac{3x}{3x^2y^2 + y^3x}$.

Rešenja.

1. Jednačina je oblika linearne diferencijalne jednačine po $y$ pri čemu su funkcije $P(x) = 2x$ i $Q(x) = e^{-x^2}$. Znamo da je opšte rešenje oblika $y = uv$, pri čemu je

$$u = e^{-\int P(x)dx} = e^{-2\int xdx} = e^{-x^2}$$

$$v = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx = C + \int e^{-x^2}e^{x^2}\, dx = C + x.$$

Rešenje ove linearne jednačine je $y(x) = e^{-x^2}(C + x)$.

2. Napišimo jednačinu u obliku

$x' = \dfrac{3x^2y^2 + y^3x}{3x} = xy^2 + \dfrac{1}{3}y^3.$

U pitanju je linearna diferencijalna jednačina po $x$ pri čemu su funkcije $P(y) = -y^2$ i $Q(y) = \frac{1}{3}y^3$. Znamo da je opšte rešenje oblika $x = uv$ pri čemu je

$$u(y) = e^{-\int P(y)dy} = e^{\int y^2 dy} = e^{\frac{1}{3}y^3}$$

$$v(y) = C + \int Q(y)e^{\int P(y)dy}\, dy = C + \int e^{\frac{1}{3}y^3}e^{-\frac{1}{3}y^3}\, dy = C + y.$$

Rešenje ove linearne jednačine je $x(y) = e^{\frac{1}{3}y^3}(C + y)$.

### 7.2.5 Bernulijeva ODJ prvog reda

*Ako su funkcije $p$ i $q$ neprekidne tada je diferencijalna jednačina*

$$(c) \qquad y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^r, \quad r \notin \{0,1\}$$

**bernulijeva diferencijalna jednačina prvog reda** *po nepoznatoj funkciji $y(x)$.*

Za vrednost 0 realnog broja $r$ bernulijeva ODJ postaje linearna, a za vrednost 1 se svodi na ODJ 1. reda sa razdvojenim promenljivima.

**Rešavanje Bernulijeve ODJ 1. reda**

Uvrštavanjem smene

$$z(x) = y(x)^{1-r}, \quad z'(x) = (1-r)\cdot y(x)^{1-r}\cdot y'(x)$$

u diferencijalnu jednačinu $(c)$ nakon što smo je predhodno pomnožili sa $y(x)^{-r}$ dobijamo

$$\frac{z'}{1-r} + p(x)\cdot z = q(x),$$

što je linearna ODJ 1. reda po nepoznatoj funkciji $z(x)$. Kako se rešava linearna ODJ 1. reda je opisano u prethodnom poglavlju.

Primer 1.
Nađimo opšte rešenje sledeće ODJ 1. reda

$$y' + x\cdot y = x\cdot\sqrt{y}.$$

Prvo uporedimo ovu ODJ sa opštim oblikom $(c)$ bernulijeve ODJ 1. reda. Zaista, funkcije $p(x) = x$ i $q(x) = x$ su neprekidne i kako je $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ sledi da je $r = \dfrac{1}{2} \notin \{0,1\}$ pa je u pitanju bernulijeva diferencijalna jednačina. Uvrštavanjem smene

$$z(x) = y(x)^{1-\frac{1}{2}} = y(x)^{\frac{1}{2}}, \quad z'(x) = \frac{1}{2}\cdot y(x)^{-\frac{1}{2}}\cdot y'(x)$$

u diferencijalnu jednačinu nakon što smo je predhodno pomnožili sa $y(x)^{-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ dobijamo

$$\frac{z'}{\frac{1}{2}} + x\cdot z = x.$$

Ovo je linearna ODJ 1. reda po nepoznatoj funkciji $z(x)$ koju rešavamo smenom nepoznate funkcije sa proizvodom dve nepoznate funkcije $u(x)$ i $v(x)$. Zamenom i $z'$ sa $u'v + uv'$ dobijamo

$$2(u'\cdot v + u\cdot v') + x\cdot u\cdot v = x,$$

odnosno

$$(d) \qquad 2u'\cdot v + u(2v' + x\cdot v) = x.$$

Izjednačavanjem $2v' + x \cdot v = 0$ i razdvajanjem zavisnih $(v, dv)$i nezavisnih promenljivih $(x, dx)$ na različite strane jednačine i integraljenjem

$$\int \frac{dv}{v} = -\int x\ dx$$

dobijamo

$$\ln|v| = -\frac{x^2}{2},$$

odnosno

$$v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Nakon što se uvrsti rešenje $v(x)$ u jednačinu $(d)$ dobijamo

$$2u' \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x.$$

Razdvajanjem zavisnih $(u, du)$ i nezavisnih promenljivih $(x, dx)$ na različite strane ove jednačine

$$2du = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\ dx$$

i integraljenjem uz upotrebu smene $t = \frac{x^2}{2}$ i $dt = x\ dx$ dobijamo rešenje $2u(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + C_1C$ odnosno $u(x) = 0,5e^{\frac{x^2}{2}} + C_1$.

Konačno opšte rešenje polazne ODJ je

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = 0,5 + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}},\ C_1 \in \mathcal{R}.$$

### 7.2.6 Jednačine totalnog diferencijala

Ukoliko bi realnu funkciju jedne realne promenljive umesto u eksplicitnom $y = f(x)$, zapisali u implicitnom obliku $u(x, y) = 0$, ili ukoliko bi posmatrali funkciju dve nezavisne promenljive $u(x, y) = C, C \in \mathcal{R}$ a zatim odredili njen totalni diferencijal

$$du = u_x dx + u_y dy = 0,$$

dobili bi diferencijalnu jednačinu prvog reda.

Stoga ukoliko ODJ prvog reda oblika

(1) $$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0,$$

ispunjava uslov jednakosti prvih parcijalnih izvoda

(2) $$p_y(x, y) = q_x(x, y),$$

ona je **totalni diferencijal nepoznate funkcije** $u(x, y) = C$, pri čemu je

$$p(x, y) = u_x \quad u_y = q(x, y).$$

Tako je uslov (2) posledica poznate činjenice da su mešoviti parcijalni izvodi funkcije dve promenljive jednaki ukoliko su neprekidni, odnosno $u_{xy} = u_{yx}$.

**Rešavanje ODJ 1. reda u obliku totalnog diferencijala**

Nepoznatu funkciju $u(x,y)$ rešavamo integraleći $p(x,y) = u_x$ po $x$ tretirajući $y$ kao konstantu, odnosno

$$u(x,y) = \int p(x,y)dx = P(x,y) + C(y),$$

gde je $P(x,y)$ primitivna funkcija za $Pp(x,y)$, a $C(y)$ nepoznata funkcija. Izjednačavanjem prvih parcijalnih izvoda po $y$, tj.

$$(P(x,y) + C(y))_y = u_y = q(x,y),$$

rešavamo nepoznatu funkciju $C(y)$ nakon dodatnog integraljenja po $y$.

Primer 1.
Nađimo opšte rešenje sledeće ODJ 1. reda

$$2xdx \ + \ 2ydy \ = \ 0.$$

Rešenje.
Kako je oblik (1) zadovoljen $(p(x,y) = 2x \ \ 2y = q(x,y))$ i uslov (2)

$$p_y(x,y) = (2x)_y = 0, \ q_x(x,y) = (2y)_x = 0$$

ispunjen diferencijalna jednačina jeste totalni diferencijal.

Integralimo $p(x,y) = 2x$ po $x$ tretirajući $y$ kao konstantu, odnosno

$$u(x,y) = \int 2x \ dx = x^2 + C(y).$$

Izjednačimo prve parcijalne izvode po $y$:

$$2y = q(x,y) = (x^2 + C(y))_y = 0 + C'(y).$$

Sledi da je

$$dC = 2y \ dy.$$

Nakon integraljenja po $y$ funkcija $C(y)$ je jednaka $C(y) = y^2 + C_1$, te je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$$u(x,y) = \int 2x \ dx = x^2 + y^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathcal{R}.$$

### 7.2.7 Zadaci

1. Rešite diferencijalne jednačine prvog reda sa razdvojenim promenljivima:
   a) $y' = ln(x^y)$ b) $y' = 1 - x - y + xy$
   c) $xy' + y = y^2$ d) $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$

2. Odredite partikularno rešenje Košijevog problema:
   $xy'' = 3x^3 + 3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$

3. Nađite opšte rešenje *homogene* diferencijalne jednačine prvog reda:
   a) $x^2y' + xy + x^2 = 0,\ x \neq 0$ b) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$
   c) $xy' \cdot \cos y/x = y \cdot \cos y/x \ - x,\ x \neq 0$ d) $y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x},\ x \neq 0$
   e) $x^2y' - y^2y' - 2xy = 0,\ x \neq 0$ f) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0.$

4. Rešite *homogene* diferencijalne jednačine prvog reda:
   a) $(2x + 3y)dx + (5x - y)dy = 0$ b) $y' = \dfrac{2x + 4y + 1}{x + 2y + 3}$
   c) $(6x - 3y - 18)dx + (x + 2y + 2)dy = 0$ d) $y' = \dfrac{2x + 3y + 1}{3x + 4y + 1}.$

5. Odredite opšta rešenja sledećih *linearnih* diferencijalnih jednačina prvog reda:
   a) $xy' + y - e^x = 0$ b) $(3x^2 + 2y)dx + 2xdy = 0$
   c) $y' + \frac{y}{x} = x,\ x \neq 0$ d) $\sin x \cdot y' = y \cdot \cos x - 1$
   e) $y^2dx = (3xy + \frac{5}{y})dy,\ y \neq 0$ .

## 7.3 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima su specijalan slučaj linearnih diferencijalnih jednačina višeg reda.

*Jednačina*

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x),$$

*gde su realne funkcije* $f(x), f_i(x),\quad i = 0, 1, ..., n-1$ *neprekidne na nekom intervalu, je* **linearna diferencijalna jednačina** $n$*-tog reda. Ako je funkcija* $f(x) = 0$*, tada je jednačina*

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0,$$

**homogena linearna diferencijalna jednačina** $n$*-tog reda. Ako su dodatno sve realne funkcije* $f_i(x) = a_i,\quad i = 0, 1, ..., n-1$*, konstantne, onda je*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0,$$

**homogena linearna diferencijalna jednačina** $n$*-tog reda* **sa konstantnim koeficijentima**.

Primetimo da su linearne diferencijalne jednačine višeg reda uopštenje linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda, dok to nije slučaj sa homogenim linearnim jednačinama.

U sledećoj sekciji analiziramo homogene linearne diferencijalne jednačine $n$-tog reda sa konstantnim koeficijentima.

### 7.3.1 Homogena

Ako pretpostavimo da je funkcija $y(x) = e^{rx}$, gde je $r$ realan ili kompleksan broj, jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0.$$

Pošto je $k$-ti izvod $y^{(k)}(x) = r^k e^{rx}$, $k = 1, 2, ..., n$, zadovoljena je sledeća jednačina,

$$r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + ... + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0,$$

odnosno ($e^{rx} > 0$), algebarska jednačina

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0,$$

koju nazivamo **karakteristična jednačina**, a njene korene **karakterističnim korenima**. Znači, da bi funkcija $y(x) = e^{rx}$, bila partikularno rešenje polazne homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima potrebno je da $r$ bude karakteristični koren karakteristične jednačine. Na osnovu osnovne teoreme algebre znamo da karakteristična jednačina ima tačno $n$ korena, koji su realni ili konjugovano kompleksni brojevi.

U zavisnosti od prirode karakterističnih korena svakom korenu pridružujemo po jedno partikularno rešenje $y_i(x)$, $i = 1, ..., n$, a opšte rešenje polazne homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je

$$C_n y_n(x) + C_{n-1} y_{n-1}(x) + ... + C_1 y_1(x) = 0,$$

gde su $C_i$ proizvoljne kostante. Može da se pokaže da su partikularna rešenja $y_i(x)$, $i = 1, ..., n$, linearno nezavisna. Njih generišemo na sledeći način:

- Ako je $r$ **realan** karakterističan **koren** karakteristične jednačine **višestrukosti** $v$, tada on implicira sledećih $v$ partikularnih rešenja:

$$e^{rx}, \quad xe^{rx}, \quad ... \quad x^{v-2} e^{rx}, \quad x^{v-1} e^{rx}.$$

- Ako je $r = a + ib$ **kompleksan** karakterističan **koren** karakteristične jednačine **višestrukosti** $v$, tada je i njegov konjugovano kompleksni parnjak $\overline{r} = a - ib$ koren višestrukosti $v$, i oni impliciraju sledećih $2v$ partikularnih rešenja:

$$e^{ax}\cos bx, \quad xe^{ax}\cos bx, \quad ... \quad x^{v-2}e^{ax}\cos bx, \quad x^{v-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx, \quad xe^{ax}\sin bx, \quad ... \quad x^{v-2}e^{ax}\sin bx, \quad x^{v-1}e^{ax}\sin bx,$$

Primeri. Odrediti opšte rešenje sledećih homogenih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima:
a) $y'' - 2y' - 3y = 0$ b) $y'' - 4y' + 8y = 0$
c) $y^{iv} - 5y''' = 0$ d) $y^{iv} + 16y'' + 56y' + 48y = 0$ .
Rešenja.
a) Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je $r^2 - 2r - 3 = 0$, njeni karakteristični koreni su realni i jednostruki $r_1 = -1$ i $r_2 = 3$, oni impliciraju partikularna rešenja $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{3x}$. Opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

b) Karakteristična jednačina je $r^2 - 4r + 8 = 0$, njeni karakteristični koreni su konjugovano kompleksni brojevi $r_1 = 2 + 2i$ i $r_2 = 2 - 2i$, oni impliciraju partikularna rešenja $y_1(x) = e^{2x}\sin 2x$, $y_2(x) = e^{2x}\cos 2x$. Opšte rešenje diferencijalne jednacine je

$$y(x) = C_1 e^{2x}\sin 2x + C_2 e^{2x}\cos 2x \ .$$

c) Karakteristična jednačina je $r^4 - 5r^3 = 0$, njeni karakteristični koreni su realni, pri čemu je $r_1 = 0$ trostruki koren i $r_2 = 5$ jednostruki, oni impliciraju 4 partikularna rešenja

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1, \quad y_2(x) = xe^0 = x, \quad y_3(x) = x^2e^{0\cdot x} = x^2, \quad y_4(x) = e^{5x}.$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{5x}.$$

d) Diferencijalna jednačina ima karakterističnu jednačinu $(r^2 - 4r + 8)^2 = 0$, njeni karakteristični koreni višestrukosti 2, su konjugovano kompleksni brojevi $r_1 = 2 + 2i$ i $r_2 = \overline{r_1} = 2 - 2i$, oni impliciraju 4 partikularna rešenja

$$y_1(x) = e^{2x} \sin 2x, \quad y_2(x) = xe^{2x} \sin 2x, \quad y_3(x) = e^{2x} \cos 2x, \quad y_4(x) = xe^{2x} \cos 2x.$$

Opšte rešenje diferencijalne jednacine je

$$y(x) = C_1e^{2x} \sin 2x + C_2xe^{2x} \sin 2x + C_3e^{2x} \cos 2x + C_4xe^{2x} \cos 2x\ .$$

### 7.3.2 Partikularna rešenja nehomogenog dela diferencijalne jednačine

*Neka su* $a_i$, $i = 0, 1, ..., n-1$, *realne konstantne, i* $f(x)$ *neprekidna funkcija na razmatranom intervalu onda je*

$$(a) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = f(x),$$

**nehomogena linearna** *diferencijalna jednačina* **sa konstantnim koeficijantima**.

Opšte rešnje $y(x)$ diferencijalne jednačine $(a)$ je u obliku zbira funkcija

$$y(x) \ = \ y_h(x) \ + \ y_p(x),$$

gde je $y_h(x)$ opšte rešenje odgovarajuće homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$(b) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0,$$

dok je $y_p(x)$ partikularno rešenje $(a)$ koje *zavisi od funkcije* $f(x)$. U opštem slučaju se $y_p(x)$ nalazi metodom varijacija konstanti ([10]), dok se u specijalnim slučajevima koristi **metoda neodređenih koeficijenata**. Ove specijalne slučajeve analiziramo u nastavku:

- Neka je funkcija $f(x)$ iz jednačine $(a)$ oblika

  $$f(x) \ = \ e^{rx}P_s(x),$$

  gde je $P_s(x)$ polinom $s$-tog stepena i $r$ realan broj.

– Ako $r$ **nije koren** karakteristične jednačine diferencijalne jednačine $(b)$, onda je partikularno rešenje $y_p(x)$ diferencijalne jednačine $(a)$ oblika

$$y_p(x) = e^{rx} Q_s(x),$$

gde je $Q_s(x)$ polinom $s$-tog stepena sa **neodređenim koeficijentima**, koje treba odrediti. Nepoznati koeficijenti polinoma $Q_s$ se određuju na osnovu činjenice da je $y_p(x) = e^{rx} Q_s(x)$, partikularno rešenje $(a)$. Znači, nalazimo izvode $y_p'(x), y_p''(x), ..., y_p^{(n)}(x)$, i nepoznate koeficijente nalazimo iz jednačine

$$(c) \qquad y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + ... + a_1 y_p' + a_0 y_p = f(x) \ .$$

– Ako $r$ **jeste koren** karakteristične jednačine diferencijalne jednačine $(b)$, višestrukosti $v$ onda je partikularno rešenje $y_p(x)$ diferencijalne jednačine $(a)$ oblika

$$y_p(x) = x^v \cdot e^{rx} \cdot Q_s(x),$$

gde je $Q_s(x)$ polinom $s$-tog stepena sa **neodređenim koeficijentima**, koji se određuju na osnovu $(c)$.

- Neka je funkcija $f(x)$ iz jednačine $(a)$ oblika

$$f(x) \ = \ e^{ax}(P_s(x) \cdot \sin bx \ + \ Q_m(x) \cdot \cos bx)$$

gde su redom $P_s(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi $s$-tog i $m$-tog stepena i $a$ i $b$ realani brojevi.

– Ako $a \pm bi$ **nisu koreni** karakteristične jednačine, jednačine $(b)$, onda je partikularno rešenje $y_p(x)$ diferencijalne jednačine $(a)$ oblika

$$y_p(x) = e^{ax}(R_t(x) \cdot \sin bx \ + \ S_t(x) \cdot \cos bx),$$

gde su $R_t(x)$ i $S_t(x)$ polinomi $t$-tog stepena, $t = \max\{s, m\}$ sa **neodređenim koeficijentima**, koje određujemo na osnovu jednačine $(c)$.

– Ako $a \pm bi$ **jesu koreni** višestrukosti $v$ karakteristične jednačine, homogene diferencijalne jednačine $(b)$, onda je partikularno rešenje $y_p(x)$ diferencijalne jednačine $(a)$ oblika

$$y_p(x) = x^v \cdot e^{ax}(R_t(x) \cdot \sin bx \ + \ S_t(x) \cdot \cos bx),$$

gde su $R_t(x)$ i $S_t(x)$ polinomi $t$-tog stepena, $t = \max\{s, m\}$ sa **neodređenim koeficijentima**, koje određujemo na osnovu jednačine $(c)$.

- Ako je funkcija $f(x)$ iz diferencijalne jednačine $(a)$ u obliku zbira

$$f(x) \ = \ f_1(x) \ + \ f_2(x) \ + \ ... \ + \ f_k(x),$$

gde su funkcije $f_i(x)$, $i = 1, ..., k$ , nekog od prethodna dva oblika, tada je partikularno rešenje jednačine $(a)$ jednako zbiru

$$y_p(x) \ = \ y_{p_1}(x) \ + \ y_{p_2}(x) \ + \ ... \ + \ y_{p_k}(x),$$

gde su funkcije $y_{p_i}(x)$, $i = 1, ..., k$ , redom **partikularna rešenja** sledećih diferencijalnih jednačina

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = f_i(x), \qquad i = 1, ..., k \ ,$$

koja nalazimo kao u prethodne dve tačke.

Primeri. Odrediti opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine
a) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{3x}$ b) $y'' - 4y' + 8y = -9x \cdot \cos 2x$
c) $y^{iv} - 5y''' = 30 + 3e^{2x}$.
Rešenja.
a) Rešenje homogenog dela diferencijalne jednačine smo našli u prethodnom primeru

$$y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

Kako je $f(x) = 5e^{3x}$ i 3 je jednostruki koren karakteristične jednačine partikularno rešenje tražimo u obliku $y_p(x) = axe^{3x}$, gde je $a$ nepoznati koeficijent polinoma 0-tog stepena. Izvodi partikularnog rešenja su

$$y_p' = 3axe^{3x} + ae^{3x} = ae^{3x}(3x + 1), \ y_p'' = 3ae^{3x}(3x + 1) + 3ae^{3x} = 3ae^{3x}(3x + 2).$$

Nakon uvrštavanja u diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' - 3y = 4e^{3x}$ dobijamo

$$e^{3x}(9ax + 6a) + e^{3x}(-6ax - 2a) + e^{3x} \cdot (-3ax) = 4e^{3x}.$$

Sledi da je $4a = 4$, odnosno $a = 1$. Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + xe^{3x}.$$

b) Homogeni deo opšteg rešenja je

$$y_h(x) = C_1e^{2x}\sin 2x + C_2e^{2x}\cos 2x \ .$$

Kako konjugovano kompleksni brojevi $\pm 2i$ nisu koreni karakteristične jednačine, a u funkciji $f(x) = x \cdot \cos 2x + 0 \cdot \sin 2x$ imamo uz $\cos 2x$ i $\sin 2x$ polinome prvog i nultog stepena. Stoga, partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = (ax + b)\sin 2x + (cx + d)\cos 2x \ .$$

Izvodi partikularnog rešenja su

$$y_p'(x) = (-2cx - 2d + a)\sin 2x + (2ax + 2b + c)\cos 2x$$

$$y_p''(x) = (-4ax - 4b - 4c)\sin 2x + (-4cx - 4d + 4a)\cos 2x.$$

Nakon njihove zamene u polaznu jednačinu $y'' - 4y' + 8y = -9x \cdot \cos 2x$, i izjednačavanja koeficijenata u polinomima uz $\sin 2x$ i $\cos 2x$ dobijamo sistem od 4 jednačine sa 4 nepoznate $a, b, c, d$:

$$\begin{array}{c} -8a + 4c = -9 \\ a - 2b - c + d = 0 \\ a + 4c = 0 \\ a + b - c + 4d = 0 \end{array} , \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} a = 1, \quad c = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{12}, \quad d = -\frac{5}{12} \end{array} .$$

Opšte rešenje jednačine je

$$y(x) = C_1 e^{2x} \sin 2x + C_2 e^{2x} \cos 2x + (x + \frac{5}{12}) \sin 2x - (\frac{1}{4}x + \frac{5}{12}) \cos 2x.$$

c) Opšte rešenje homogene jednačine $y^{iv} - 5y''' = 0$ je

$$y_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{5x}.$$

Funkciju $f$ možemo rastaviti na dve funkcije koje imaju odgovarajući oblik $f_1(x) = 30$ i $f_2(x) = 3e^{2x}$. Partikularno rešenje tražimo kao zbir $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$, pri čemu je $y_{p_1}(x)$ partikularno rešenje $y^{iv} - 5y''' = 30$ dok je $y_{p_2}(x)$ partikularno rešenje $y^{iv} - 5y''' = 3e^{2x}$.

Odredimo prvo $y_{p_1}(x)$. Nula je trostruki karakteristični koren karakteristične jednačine homogenog dela diferencijalne jednačine, što implicira da $y_{p_1}(x)$ tražimo u obliku $y_{p_1}(x) = ax^3$. Nepoznati koeficijent $a$ nalazimo uvrštavanjem $y_{p_1}'''(x) = 6a$ i $y_{p_1}^{iv}(x) = 0$ u jednačinu. Nalazimo da je $a = -1$.

Sad odredimo $y_{p_2}(x)$. Kako 2 nije koren karakteristične jednačine $y_{p_2}$ tražimo u obliku $y_{p_2}(x) = be^{2x}$. Iz $y_{p_2}'''(x) = 8be^{2x}$ i $y_{p_2}^{iv}(x) = 16be^{2x}$, sledi $-24b = 3$, odnosno $b = -\frac{1}{8}$.

Opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{5x} - x^3 - \frac{1}{8} e^{2x}.$$

### 7.3.3 Zadaci

1. Nađite opšta rešenja sledećih *homogenih linearnih* diferencijalne jednačina *višeg* reda sa *konstantnim koeficijentima*:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $y'' - 5y + 4y = 0$ | b) | $y'' + 3y' = 0$ |
| c) | $y'' + 4y = 0$ | d) | $y^{iv} + 8y'' + 16y = 0$ |
| e) | $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$ | f) | $y^{v} - 8y^{iv} + 26y''' - 40y'' + 25y' = 0$ |
| g) | $y''' - 12y'' + 6y' - 8y = 0$ | h) | $y^{iv} + 18y'' + 81y = 0.$ |

2. Rešite sledeće nehomogene *linearne* diferencijalne jednačine *višeg* reda sa *konstantnim koeficijentima*:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + 3x$ | b) | $y'' - y' - 6y = -2xe^{-2x}$ |
| c) | $y''' - 13y' + 12y = 2x + e^{x}$ | d) | $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x}$ |
| e) | $y'''' - 3y'' + 2y = x^2 + 3sinx$ | f) | $y'' - 2y' + y = 4e^{x}.$ |

# Literatura


[1] Acketa M.D., Matić-Kekić S. *Kompjuterska geometrija i grafika,* Edicija Univerzitetski udžbenici 113, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2000. str 399.

[2] Bodroža-Pantić, O. *Kombinatorna geometrija* Edicija Univerzitetski udžbenici 132, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2000. str 194.

[3] Cvetković, M.D., Simić, K.S., *KOMBINATORIKA klasična i moderna*, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

[4] Elazar, M., *Privredna i finansijska matematika*, Savremena administracija, Beograd, 1961.

[5] Gajić, Lj., Munitlak, D., Vukasović, M. *Poslovna matematika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1996.

[6] Gajić, Lj., Lozanov-Crvenković Z., *Matematika za geografe*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1997.

[7] Pavlović, A., Gajić, Lj. *Poslovna matematika - zbirka zadataka*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, ??.

[8] Hadživuković, S., *Planiranje eskperimenata*, Privredni pregled, Beograd 1977.

[9] Hadžić, O., Takači, Đ., *MATEMATIKA za studente prirodnih nauka*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1998.

[10] Hadžić, O., Budinčević, M., *Obične diferencijalne jednačine za studente hemije*, Univerzitet u Novom Sadu, 19??.

[11] Ljaško, I.I, Bojarčuk, A.K, Gaj, Ja. G, Golobač, G.P, *Spravočnoe posobie po matematičeskomu analizu,* "Visša škola", Kijev, 1984.

[12] Konjik, S., Dedović, N., MATEMATIKA zbirka zadataka za studente Poljoprivrednog fakulteta, Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2007.

[13] Matić-Kekić, S., PRIVREDNA MATEMATIKA za studente bioloških smerova, 2. izdanje, Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2006.

[14] MathCad http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad/free-trial

[15] Matić-Kekić, S., MATEMATIKA za studente agroekonomskog smera, Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2002.

[16] Mamuzić, P. Z., *Determinante, matrice, vektori, analitička geometrija*, Univerzitet u Beogradu, Građevinska knjiga, Beograd, 1977.

[17] Milić, S., *Elementi algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, 1984.

[18] Pap, E., Šešelja, B., Takači, A., *MATEMATIKA za biološke smerove*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, 1983.

[19] Petrić, J. *Operaciona istraživanja*, I knjiga, OEconomica - Beograd, 1972.

[20] Petrić, J. *Operaciona istraživanja*, II knjiga, Savremena administracija - Beograd, 1979.

[21] Petrić, J., Šarenac, L., Kojić, Z., *Operaciona istraživanja I*, zbirka, Naučna knjiga - Beograd, 1979.

[22] Jurgen Richter-Gebert, J., Kortenkampa, U., *Cinderella*, Version 2.6, http://www.ciderella.de, preuzet 2012.

[23] Savin, L., Matić-Kekić, S., Dedović, N., Tomić, M., Simikić, M., *Profit maximization algorithm including the loss of yield due to uncertain weather events during harvest*, Biosystems Engineering 123, 2014. pp 56-67.

[24] Stojaković, Z., *Linearna algebra*, Zavod za izdavanje udžbenika, Novi Sad, 1979.

[25] Spiegel, R.M., *Theory and Problems of Advanced Calculus*, New York Schaum Publ. Co. 1963., Shaum's Outline Series.

[26] Šćepanović, R., Knežević-Miljanović, J., Protić, Lj. *Diferencijalne jednačine*, Univerzitet u Beogradu i Univerzitet Crne gore, Beograd, Vesta Comp. 1997.

[27] Takači, Đ., Hadžić, O., *Zbirka rešenih zadataka iz DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, Novi Sad, 1992.

[28] Uzelac Zorica, Adžić Nevenka, Doroslovački R., *Priprema za prijemni ispit iz matematike,* Novi Sad, 2003.

[29] Vadnal, A. *Linearno programiranje*, Informator - Zagreb, 1972.

[30] Veljan, D., *KOMBINATORIKA s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[31] Zečević, T., *Operaciona istraživanja,* Naučna knjiga, Beograd, 1974.

[32] Wolfram Research Inc. Mathematica version 5.0. http://www.wolfram.com 2003.