Dr Nebojša Dedović

M A T E M A T I K A

EDICIJA OSNOVNI UDŽBENIK

Osnivač i izdavač edicije

Poljoprivredni fakultet, Novi Sad,
Trg Dositeja Obradovića 8, 21000 Novi Sad

Godina osnivanja
1954.

Recezenti:

Dr Snežana Matić Kekić, *redovni profesor, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad*
Dr Sanja Konjik, *vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad*

Glavni i odgovorni urednik edicije

Dr Nedeljko Tica, redovni profesor,
Dekan Poljoprivrednog fakulteta

CIP - Каталогизација у публикацији

Библиотека Матице српске, Нови Сад

———————

ДЕДОВИЋ, Небојша

Matematika / Nebojša Dedović. - Novi Sad : Poljoprivredni fakultet, 2019 (Novi Sad : Electra copy & print studio). - 290 str. : matemat. formule ; 24 cm. - (Edicija Osnovni udžbenik)

Tiraž 20. - Bibliografija

ISBN 978-86-7520-471-8

а) Математика

COBISS.SR-ID ____________

Predgovor

Udžbenik **MATEMATIKA** namenjen je pre svega studentima Poljoprivrednog fakulteta koji su izabrali da slušaju predavanja i vežbe iz izbornog predmeta *Matematika*, ali ga mogu koristiti i studenti drugih fakulteta.

Autor udžbenika je svoje dvadesetogodišnje iskustvo u držanju vežbi (Primenjena matematika, Matematika, Poslovna matematika, Matematika 1 i Matematika 2) i petogodišnje u držanju predavanja (Matematika) na Poljoprivrednom fakultetu u Novom Sadu pretočio u ovu knjigu.

Udžbenik se sastoji iz devet glava koje prate kurs matematičke analize prilagođenog studentima Poljoprivrednog fakulteta. Dat je veliki broj primera u svrhu što boljeg savlađivanja gradiva. Takođe, dati su i dokazi pojedinih teorema da bi se studenti upoznali i sa tom stranom matematike. Na kraju prvih osam glava, pažljivo su odabrani zadaci iz literature navedene na kraju udžbenika, koji služe za samostalno vežbanje . U poslednjoj glavi data je mala istorija matematike.

Slike su dobijene u programskom paketu *Mathematica 6*, zatim su obrađene u programu Microsoft Visio 2000 i na kraju, korišćenjem programa *CorelDRAW X3*, pripremljene za obradu, zajedno sa tekstom udžbenika, u programskom paketu MiKTeX 2.9. Fotografije matematičara preuzete su sa odgovarajućih web-stranica na internetu.

Autor se zahvaljuje recezentima, dugogodišnjim koleginicama, prof. dr Snežani Matić Kekić, redovnom profesoru na Poljoprivrednom fakultetu u Novom Sadu, i prof. dr Sanji Konjik, vanrednom profesoru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na detaljnom čitanju rukopisa i veoma korisnim sugestijama, čime je ova knjiga dobila na kvalitetu.

Autor se zahvaljuje i Poljoprivrednom fakultetu u Novom Sadu na izdvojenim sredstvima za štampanje ovog udžbenika.

Na kraju, zahvaljujem se svojoj porodici, supruzi Hristini, sinu Andreju i kćerki Sari koji su bili uz mene i pružali mi najvažniju podršku.

U Novom Sadu, 27. juna 2019. godine — dr Nebojša Dedović

Sadržaj

GLAVA 1

Uvod

U ovoj glavi biće dati neki osnovni pojmovi iz matematike pomoću kojih će se moći pratiti sadržaj ovog udžbenika. Čitalac će se podsetiti matematičke logike, skupova i relacija. Poglavlje *Algebarske strukture* su tu da pomognu pri definisanju polja realnih brojeva i operacija u tom polju. Poslednje poglavlje prati formiranje skupova brojeva zajedno sa njihovim osobinama i operacijama na tim skupovima.

1.1 Matematička logika

Kako se za definiciju skupova koriste simboli iz matematičke logike, samo ćemo dotaći tu granu matematike. Osnovni pojam je iskaz, odnosno rečenica za koju se može odrediti da li je ona tačna ili netačna.

Primer 1.1.1 Navešćemo nekoliko rečenica i odrediti da li su one iskazi ili ne.

- *Minus tri je manje od minus dva* je tačan iskaz.
- *Arhimed je živeo u drugom veku pre nove ere* je netačan iskaz (živeo je u trećem veku p.n.e.).
- *Rene Dekart je izgovorio „mislim, dakle postojim”* je tačan iskaz.
- $2+3\cdot 0=0$ je netačan iskaz.
- $x^2-4=0$ nije iskaz.
- *Godina ima 365 dana* nije iskaz.

Iskazi se obeležavaju slovima p, q, r, $\ldots$, povezuju se logičkim operacijama i time se dobijaju novi iskazi. Tačni iskazi obeležavaju se sa $\top$, a netačni sa $\perp$. Logičke operacije su:

- *konjunkcija* iskaza p i q u oznaci $p\wedge q$, a čita se p *i* q i ona je tačna jedino kada su iskazi p i q tačni (tabela 1.1),

Tabela 1.1: Konjunkcija dva iskaza p i q.

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Primer 1.1.2 $p \wedge q$: Na utakmici je bilo više od 50000 gledalaca *i* većina je navijala za Partizan. Cela rečenica je istinita (tačna), kada su oba njena dela istinita.

- *disjunkcija* iskaza p i q u oznaci $p \vee q$, a čita se p *ili* q i ona je netačna kada su iskazi p i q netačni (tabela 1.2),

Tabela 1.2: Disjunkcija dva iskaza p i q.

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Primer 1.1.3 $p \vee q$: Banka radi od 7 *ili* od 8. Dakle, rečenica je tačna ako banka radi od 7, a tačna je i ako banka radi od 8. U suprotnom je netačna.

- *implikacija* iskaza p i q u oznaci $p \Rightarrow q$, a čita se *ako* p *onda* q (ili *iz* p *sledi* q ili p *implicira* q ili p *je potreban uslov za* q ili q *je dovoljan uslov za* p) i ona je netačna kada je iskaz p tačan, a iskaz q netačan (tabela 1.3),

Tabela 1.3: Implikacija dva iskaza p i q.

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Primer 1.1.4 $p \Rightarrow q$: *Ako* je dva ujutru, *onda* je Sunce zašlo. Dakle p je pretpostavka (dva je ujutru), a q posledica (Sunce je zašlo). Rečenica je netačna ako u njenom drugom delu tvrdimo da Sunce nije zašlo ako je dva ujutru. Daćemo sada dva primera koja ilustruju da iz netačne pretpostavke sledi netačna ili tačna posledica. Recimo, *ako*

je Zemlja ravna ploča, *onda* nije elipsoid. Rečenica je tačna, jer ako je Zemlja ploča, onda ne može biti i elipsoid. Ipak Zemlja nije ravna ploča pa je pretpostavka netačna, ali je i posledica netačna (jer Zemlja jeste elipsoid). A ako kažemo, *ako* je Zemlja ravna ploča, *onda* nije kocka, tada je opet rečenica tačna, iako je iz netačne pretpostavke sledila tačna posledica (Zemlja nije kocka).

- *ekvivalencija* iskaza p i q u oznaci $p \Leftrightarrow q$, a čita se p *ako i samo ako* q (ili *ako* p, *onda* q i *ako* q, *onda* p ili p *je potreban i dovoljan uslov za* q) i ona je tačna ako i samo ako su oba iskaza p i q ili tačni ili netačni (tabela 1.4).

Tabela 1.4: Ekvivalencija dva iskaza p i q.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Primer 1.1.5 $p \Leftrightarrow q$: Neparan broj nije deljiv sa dva. Dakle, *ako* je broj neparan, *onda* nije deljiv sa dva, ali važi i *ako* broj nije deljiv sa dva, *onda* je neparan. Možemo napisati i broj je neparan ako i samo ako nije deljiv sa dva.

- *negacija* iskaza p u oznaci $\neg p$, a čita se *ne* p i ona je tačna ako i samo ako je iskaz p netačan (tabela 1.5),

Tabela 1.5: Negacija iskaza p.

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Primer 1.1.6 $\neg p$: Negacija iskaza matematika je teška je matematika nije teška.

Prioritet operacija je sledeći:

1. negacija ($\neg$) ima najveći prioritet, zatim
2. konjunkcija ($\wedge$) i disjunkcija ($\vee$) i na kraju
3. implikacija ($\Rightarrow$) i ekvivalencija ($\Leftrightarrow$).

Iskaznu algebru čine logičke operacije $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ i skup $\{\top, \bot\}$. *Iskazna slova* su slova p, q, r, ..., odnosno slova kojima obeležavamo iskaze. *Iskazne formule* čine: (i) iskazna slova, (ii) iskazi $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ i $\neg p$, (iii) ako su A i B iskazne formule, tada su to i $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ i $\neg A$, (iv) konačan broj primena (i), (ii), (iii). *Tautologija* je formula koja je tačna za bilo koju vrednost iskaznih slova. Navešćemo sada neke poznate tautologije i dokazati jednu preko odgovarajuće tabele:

(t1) $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ (*princip dvojne negacije*),

(t2) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (*idempotentnost konjunkcije*),

(t3) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (*idempotentnost disjunkcije*),

(t4) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (*zakon apsorpcije*),

(t5) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (*zakon apsorpcije*),

(t6) $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (*modus ponens*),

(t7) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (*komutativnost konjunkcije*),

(t8) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (*komutativnost disjunkcije*),

(t9) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ (*asocijativnost konjunkcije*),

(t10) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (*asocijativnost disjunkcije*),

(t11) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (*distributivnost konjunkcije prema disjunkciji*),

(t12) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (*distributivnost disjunkcije prema konjunkciji*),

(t13) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (*zakon kontrapozicije*),

(t14) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (*zakon uklanjanja implikacije*),

(t15) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (*zakon uklanjanja ekvivalencije*),

(t16) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (*De Morganovi*[1] *zakoni*).

Primer 1.1.7 Dokazati da je zakon uklanjanja implikacije $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (t14) tautologija.
Rešenje. Pogledati tabelu 1.6.

Tabela 1.6: Zakon uklanjanja implikacije je tautologija.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Kako se u poslednjoj koloni tabele 1.6 nalazi samo $\top$, forumula je tautologija.

Primer 1.1.8 Daćemo primer logičkog zaključivanja koristeći, recimo, $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ - modus ponens (t6). Recimo neka $p \Rightarrow q$ ima značenje *Ako napolju pada kiša, poneću kišobran.* Ako važi još i p *napolju pada kiša*, modus ponens daje da važi q, odnosno *poneću kišobran.*

[1] Ogastas De Morgan (1806-1871) - pogledati poglavlje 9.20

Primer 1.1.9 Daćemo još jedan primer logičkog zaključivanja koristeći, ovog puta, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ - zakon kontrapozicije (t13). Neka $p \Rightarrow q$ ima značenje *Ako je kiša padala, ulice su mokre.* Ekvivalentno zaključivanje je *Ako ulice nisu mokre, kiša nije padala.* Pogrešan bi zaključak bio da je *ako je kiša padala, ulice su mokre* logički isto sa *ako kiša nije padala, ulice nisu mokre* jer su možda čistači ulica oprali ulice, pa su one, ipak, mokre.

Napomena 1.1.10 *Često se u dokazima teorema koristi negacija zakona uklanjanja implikacije. Naime, tautologija je i formula*

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q\,. \tag{1.1}$$

1.2 Skupovi

Skupovi su jedan od osnovnih pojmova u matematici. Obeležavaju se velikim slovima, npr. A, B, C, ..., dok elementi skupa malim, npr. a, b, c, ... Skup je poznat ako je poznato pravilo, ograničenje ili osobina na osnovu koje možemo odrediti sve njegove elemente. Ako element x pripada (odnosno ne pripada) skupu X pišemo $x \in X$ ($x \notin X$). Ako element x ima osobinu P, tada pišemo $P(x)$. Skup elemenata x sa osobinom P zapisujemo $\{x|\ P(x)\}$. U teoriji skupova koriste se kvantifikatori 'za svako' - $\forall$ i 'postoji' - $\exists$. Podsetimo se još:

- $\emptyset$ je oznaka za prazan skup koji nema elemenata,

- razlika skupova X i Y je skup $X \setminus Y$ koji sadrži sve elemente skupa X koji nisu u skupu Y, odnosno $X \setminus Y = \{x|\ x \in X \wedge x \notin Y\}$,

- skup X je podsup skupa Y ako svaki element skupa X pripada skupu Y i pišemo $X \subseteq Y = \{x|\ x \in X \Rightarrow x \in Y\}$,

- dva skupa X i Y su jednaka ($X = Y$) ako i samo ako svi elementi skupa X pripadaju i skupu Y ($X \subseteq Y$) i svi elementi skupa Y pripadaju skupu X ($Y \subseteq X$), odnosno $X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$.

- skup X je pravi podsup skupa Y ako svaki element skupa X pripada skupu Y i postoje elementi u Y koji nisu u X što zapisujemo $X \subset Y = \{x|\ x \in X \Rightarrow x \in Y\}$ i $Y \setminus X \neq \emptyset$,

- presek skupova X i Y je skup $X \cap Y$ koji čine svi elementi koji pripadaju i skupu X i skupu Y, tj. $X \cap Y = \{x|\ x \in X \wedge x \in Y\}$,

- unija skupova X i Y je skup $X \cup Y$ koji čine svi elementi koji pripadaju ili skupu X ili skupu Y, što zapisujemo $X \cup Y = \{x|\ x \in X \vee x \in Y\}$,

- Dekartov[2] proizvod skupova X i Y je skup $X \times Y$ koji čine uređeni parovi (x, y) gde je element x iz skupa X, a element y iz skupa Y što zapisujemo $X \times Y = \{(x, y)|\ x \in X \wedge y \in Y\}$,

- skupovi X i Y su disjunktni ako im je presek prazan skup, odnosno $X \cap Y = \emptyset$.

[2]Rene Dekart (1596-1650) - pogledati poglavlje 9.5.

Primer 1.2.1 Dati su skupovi $A = \{1, 3, 4, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ i $C = \{2, 4, 6, 10\}$. Odrediti $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $B \setminus A$, $C \setminus A$ i $C \setminus B$.

Rešenje. $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10\}$, $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 10\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cap C = \{4\}$, $B \cap C = \{4, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{4\}$, $A \setminus B = \{1, 7\}$, $A \setminus C = \{1, 3, 7\}$, $B \setminus C = \{3, 5\}$, $B \setminus A = \{5, 6\}$, $C \setminus A = \{2, 6, 10\}$ i $C \setminus B = \{2, 10\}$.

Primer 1.2.2 Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 5\}$ i $B = \{a, b\}$. Odrediti $A \times B$ i $B \times A$.

Rešenje. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b)\}$, dok je $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 5)\}$.

Primer 1.2.3 Ako je skup A, skup svih studenata Poljoprivrednog fakulteta, tada su njegovi pravi podskupovi skupovi koje čine studenti različitih smerova. Svi ti podskupovi su disjunktni, a njihova unija je skup A.

Za operacije sa skupovima važe sledeće osobine:

(s1) $A \cap A = A$ (*idempotentnost preseka*),

(s2) $A \cup A = A$ (*idempotentnost unije*),

(s3) $A \cap (A \cup B) = A$ (*zakon apsorpcije*),

(s4) $A \cup (A \cap B) = A$ (*zakon apsorpcije*),

(s5) $A \cap B = B \cap A$ (*komutativnost preseka*),

(s6) $A \cup B = B \cup A$ (*komutativnost unije*),

(s7) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*asocijativnost preseka*),

(s8) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*asocijativnost unije*),

(s9) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*distributivnost preseka prema uniji*),

(s10) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributivnost unije prema preseku*),

(s11) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(s12) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$.

Primer 1.2.4 Korišćenjem odgovarajućih tautologija i skupovnih operacija dokazati da je

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)\,.$$

Rešenje. Neka $x \in A \setminus (B \cap C)$. Tada važi

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \text{ (definicija razlike skupova)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \text{ (definicija preseka skupova)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \text{ (t16)} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \text{ (t11)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \text{ (definicija razlike skupova)} \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \text{ (definicija unije skupova)} \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

1.3 Relacije

Definicija 1.3.1 *Binarna relacija ρ na nepraznom skupu X je podskup skupa $X \times X$.*

Dakle, pišemo $\rho \subseteq X \times X = \{(x,y) | x, y \in X\}$ i ako $(x,y) \in \rho$ tada kažemo da je „x u relaciji ρ sa y" ili „x i y su u relaciji ρ" i zapisujemo još i kao $x\rho y$.

Primer 1.3.2 Neka je dat skup $X = \{a, b, c, d\}$. Odrediti pet binarnih relacija na ovom skupu.

Resenje. Pošto je

$$\begin{aligned} X \times X = \{&(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d), \\ &(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}\ , \end{aligned}$$

tada je, recimo,

$$\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}\,,$$

$$\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,d),(a,d)\}\,,$$

$$\rho_3 = \{(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}\,,$$

$$\rho_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}\,.$$

$$\rho_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d),(d,a),(b,c),(c,a)\}\,.$$

Neke od važnijih osobina relacije ρ su refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivost. Naime, relacija $\rho \subseteq X \times X$ je:

(o1) *refleksivna (R)* ako je $x\rho x$ za svako $x \in X$, odnosno

$$(\forall\, x \in X)\ \ x\rho x\,,$$

(o2) *simetrična (S)* ako iz $x\rho y$ sledi $y\rho x$ za svako $x, y \in X$, tj.

$$(\forall\, x, y \in X)\ \ x\rho y \Rightarrow y\rho x\,,$$

(o3) *antisimetrična (AS)* ako iz $x\rho y$ i $y\rho x$ sledi $x = y$ za svako $x, y \in X$, odnosno

$$(\forall\, x, y \in X)\ \ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y\,,$$

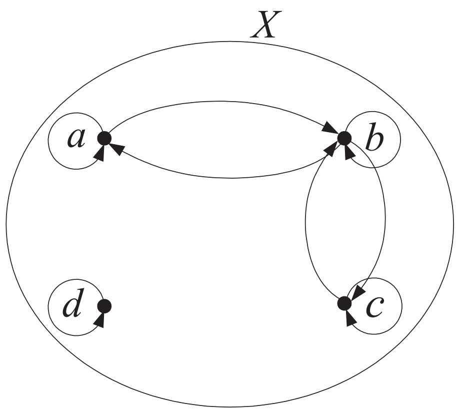
(o4) *tranzitivna (T)* ako iz $x\rho y$ i $y\rho z$ sledi $x\rho z$ za svako $x, y, z \in X$, tj.

$$(\forall\, x, y, z \in X)\ \ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z\,.$$

Primer 1.3.3 Odrediti osobine relacija datih u primeru 1.3.2.

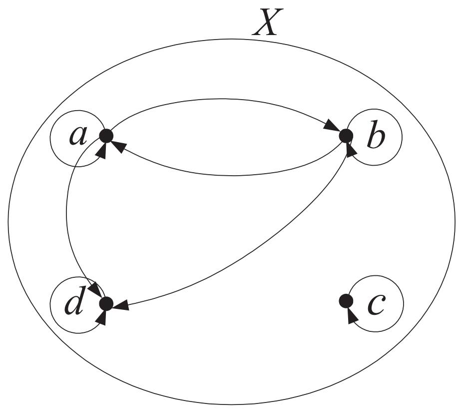
Rešenje.

- Relacija $\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ (slika 1.1)
  - je refleksivna, jer sadrži sve uređene parove (a,a), (b,b), (c,c) i (d,d),
  - je simetrična, jer sadrži parove (a,b) i (b,a), (b,c) i (c,b),
  - nije tranzitivna, jer, na primer, sadrži (a,b) i (b,c), a ne sadrži (a,c).



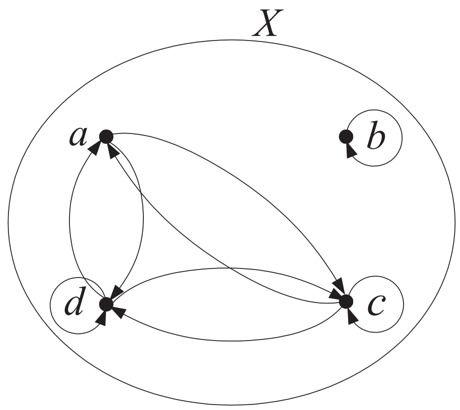
Slika 1.1: Relacija $\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ je R i S, a nije T.

- Relacija $\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,d),(a,d)\}$ (slika 1.2)
  - je refleksivna, jer sadrži sve uređene parove (a,a), (b,b) , (c,c) i (d,d),
  - nije simetrična, jer, na primer, sadrži par (b,d), a ne sadrži par (d,b),
  - je tranzitivna, jer sadrži (a,b), (b,d) i (a,d); (b,a), (a,d) i (b,d), itd.



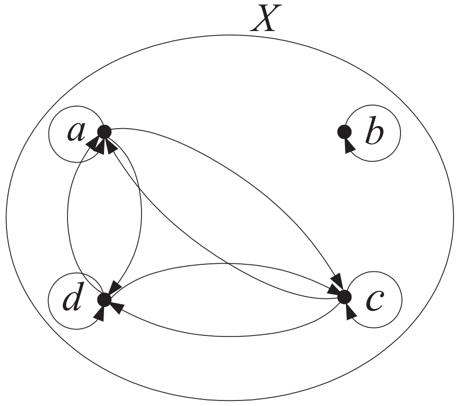
Slika 1.2: Relacija $\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,d),(a,d)\}$ je R i T, a nije S.

- Relacija $\rho_3 = \{(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}$ (slika 1.3)
  - nije refleksivna, jer ne sadrži uređen par (a,a),
  - jeste simetrična, jer sadrži parove (a,c) i (c,a); (c,d) i (d,c); (a,d) i (d,a),
  - jeste tranzitivna, jer sadrži (a,c), (c,d) i (a,d), itd.



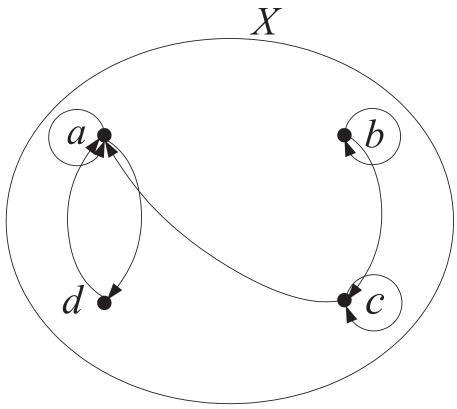
Slika 1.3: Relacija $\rho_3 = \{(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}$ nije R, a jeste S i T.

- Relacija $\rho_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}$ (slika 1.4) je
  - refleksivna, jer sadrži uređene parove (a,a), (b,b) , (c,c) i (d,d),
  - simetrična, jer sadrži parove (a,c) i (c,a); (c,d) i (d,c); (a,d) i (d,a),
  - tranzitivna, jer sadrži (d,c), (c,a) i (d,a), itd.



Slika 1.4: Relacija $\rho_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}$ jeste R, S i T.

- Relacija $\rho_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d),(d,a),(b,c),(c,a)\}$ (slika 1.5)
  - nije refleksivna, jer ne sadrži uređen par (d,d),
  - nije simetrična, jer ne sadrži parove (c,b) i (a,c),
  - nije tranzitivna, jer sadrži, na primer, (b,c) i (c,a), a ne sadrži (b,a).



Slika 1.5: Relacija $\rho_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d),(d,a),(b,c),(c,a)\}$ nije ni R, ni S, ni T.

Definicija 1.3.4 *Binarna relacija ρ definisana na skupu $X \times X$ je relacija ekvivalencije (RST) ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Ako je relacija ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, tada se naziva relacija poretka (RAST).*

Napomena 1.3.5 *Relacija ρ_4 iz primera 1.3.2 je relacija ekvivalencije.*

Ako je ρ relacija ekvivalencije na skupu X, tada možemo definisati klase ekvivalencije za element $x \in X$ u oznaci $C(x) = \{y \in X |\ x\rho y\}$. Unija svih klasa ekvivalencija je ceo skup X, a dve klase ekvivalencije se ili poklapaju ili su disjunktne.

Napomena 1.3.6 *Klase ekvivalencije za relaciju ρ_4 iz primera 1.3.2 su $C(a) = C(c) = C(d) = \{a, c, d\}$ i $C(b) = \{b\}$.*

Još primera relacija biće dato nakon uvođenja skupova brojeva.

1.4 Preslikavanja

Definišimo sada još jedan od osnovnih pojmova u matematici.

Definicija 1.4.1 *Neka su A i B neprazni skupovi. Pridruživanje f koje svakom elementu x iz skupa A dodeli tačno jedan element $f(x)$ iz skupa B, naziva se preslikavanje skupa A u skup B. Pišemo $f : A \to B$. Elementi iz skupa A se još nazivaju originali, a iz skupa B, slike.*

Preslikavanje f naziva se i funkcija koja preslikava skup A u skup B. Pojam funkcije se može definisati i na sledeći način:

Definicija 1.4.2 *Neka su A i B neprazni skupovi. Podskup f od $A \times B$ je funkcija ako važi:*

(i) $(\forall\, x \in A)(\exists y \in B)\ (x, y) \in f$,

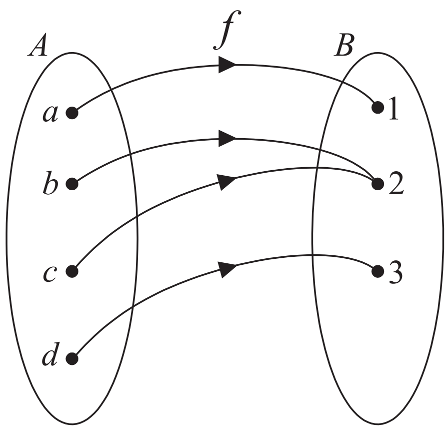
(ii) $(\forall\, x \in A)(\forall\, y_1, y_2 \in B)((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2)$.

Pišemo i $f : A \to B$.

Primer 1.4.3 Ako je skup $A = \{a, b, c\}$ i skup $B = \{1, 2, 3\}$, tada je jedna funkcija $f : A \to B$ oblika $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je sirjektivno (slika 1.6) ili „na" ako svaka slika iz skupa B ima bar jedan original iz skupa A, odnosno

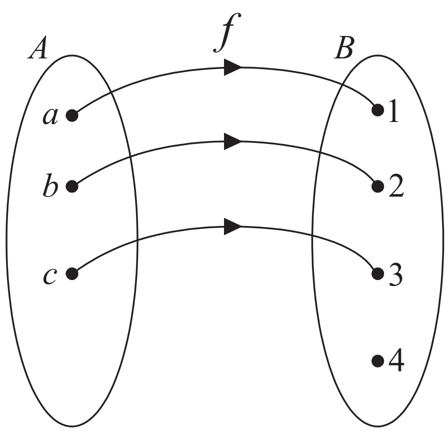
$$(\forall\, y \in B)(\exists x \in A)((x, y) \in f) \text{ ili } (\forall\, y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))\,.$$



Slika 1.6: Sirjektivno preslikavanje $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je injektivno (slika 1.7) ili „1-1" ako svaki original iz skupa A ima tačno jednu sliku iz skupa B, odnosno

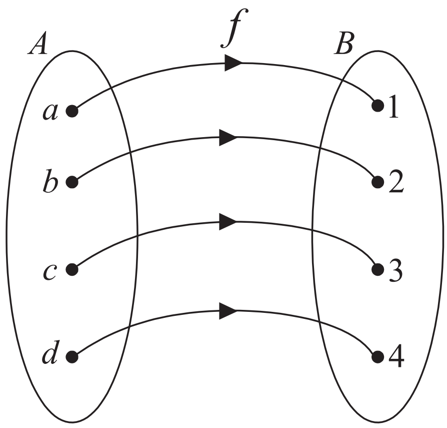
$$(\forall\, x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)\,.$$



Slika 1.7: Injektivno preslikavanje $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je bijektivno (slika 1.8) ili „1-1” i „na” ako svaka slika iz skupa B ima tačno jedan original iz skupa A, odnosno,

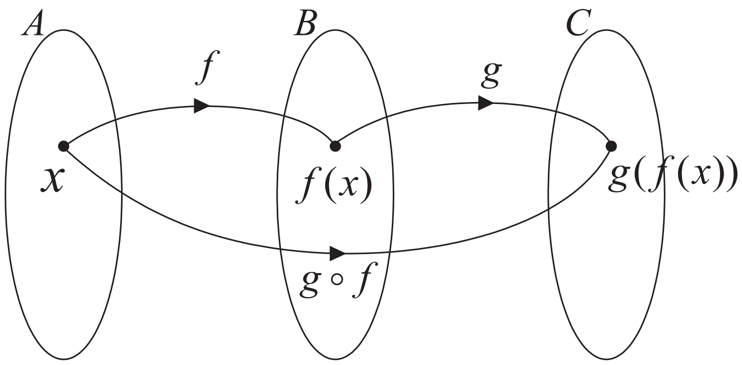
$$(\forall\, y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)) \;\text{ i }(\forall\, x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)\,.$$



Slika 1.8: Bijektivno preslikavanje $f = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$.

Sada ćemo definisati kompoziciju dve funkcije.

Definicija 1.4.4 *Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dve funkcije. Funkcija $g \circ f : A \to C$ definisana sa $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, gde $x \in A$, naziva se kompozicija funkcija f i g (slika 1.9).*

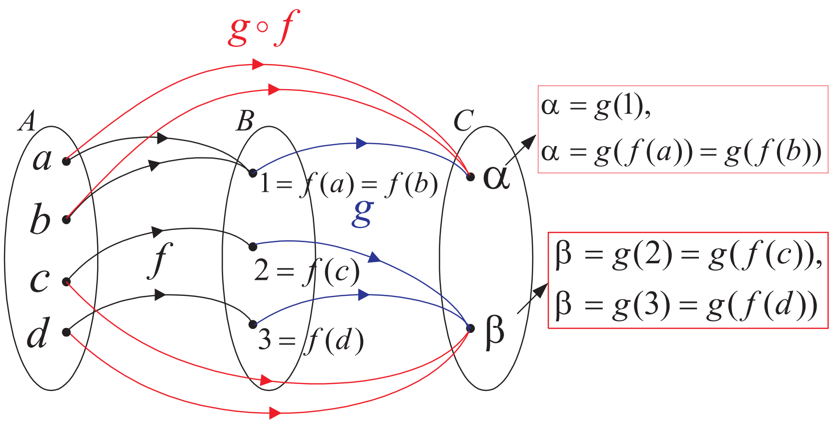


Slika 1.9: Kompozicija funkcija f i g.

Primer 1.4.5 Neka su dati skupovi $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3\}$ i $C = \{\alpha,\beta\}$. Neka je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f = \{(a,1),(b,1),(c,2),(d,3)\}$, a funkcija $g : B \to C$ sa $g = \{(1,\alpha),(2,\beta),(3,\beta)\}$. Odrediti funkciju $g \circ f : A \to C$.

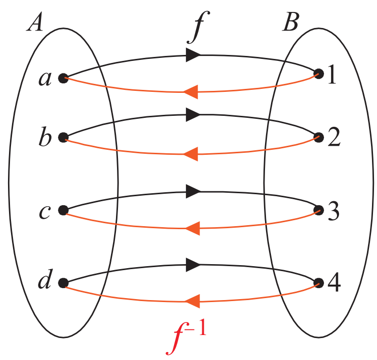
Rešenje. Funkcija $g \circ f$ definisana je kao (slika 1.10)

$$g \circ f = \{(a,\alpha),(b,\alpha),(c,\beta),(d,\beta)\}\,.$$



Slika 1.10: Kompozicija funkcija f i g.

Za bijektivno preslikavanje možemo definisati i inverzno preslikavanje. Bijektivno preslikavanje $f : A \to B$, ima inverzno preslikavanje $f^{-1} : B \to A$, gde važi da iz $y = f(x)$ sledi $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$, a onda i $x = f^{-1}(y)$ (slika 1.11).



Slika 1.11: $f = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$ i $f^{-1} = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$.

Još primera složenih i inverznih funkcija biće dato nakon uvođenja skupova brojeva.

1.5 Algebarske strukture

U ovom udžbeniku, osnovni skup koji budemo koristili biće skup realnih brojeva i, zbog kompletnosti, moramo prikazati put kojim se dolazi do toga da je skup $\mathbb{R}$ uređeno polje i koje su operacije na njemu definisane. Krenimo redom.

Definicija 1.5.1 *Neka je dat skup A i neka je na njemu definisana operacija $\oplus$. Ako za svaki uređeni par $(x,y) \in A \times A$ postoji element $z \in A$, dobijen primenom operacije $\oplus$ na (x,y), odnosno ako važi $x \oplus y = z$, tada skup A zajedno sa operacijom $\oplus$ čini grupoid $(A, \oplus)$.*

Primer 1.5.2 Proveriti da li je struktura $(A, \oplus)$ grupoid ako je $A = \{a, b, e\}$ i operacija $\oplus$ definisana u tabeli 1.7 i, ako jeste, proveriti da li je ta operacija komutativna, odnosno

$$(\forall x, y \in A) \;\; x \oplus y = y \oplus x$$

i asocijativna, tj.

$$(\forall x, y, z \in A) \;\; x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z\,.$$

Tabela 1.7: Na skupu $A = \{a, b, e\}$ definisana je operacija $\oplus$.

$\oplus$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Rešenje. Kako se u tabeli 1.7 nalaze samo elementi skupa A, jasno je da je $(A, \oplus)$ grupoid. Pošto je tablica 1.7 simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu (koja sadrži elemente e, b, a), to znači da je $\oplus$ komutativna operacija. Asocijativnost se proverava po definiciji, a zbog komutativnosti operacije $\oplus$, dovoljno je proveriti

$$e \oplus (e \oplus a) = e \oplus a = a\,, \quad (e \oplus e) \oplus a = e \oplus a = a\,,$$

$$e \oplus (e \oplus b) = e \oplus b = b\,, \quad (e \oplus e) \oplus b = e \oplus b = b\,,$$

$$e \oplus (a \oplus a) = e \oplus b = b\,, \quad (e \oplus a) \oplus a = a \oplus a = b\,,$$

$$e \oplus (a \oplus b) = e \oplus e = e\,, \quad (e \oplus a) \oplus b = a \oplus b = e\,,$$

$$e \oplus (b \oplus b) = e \oplus a = a\,, \quad (e \oplus b) \oplus b = b \oplus b = a\,,$$

$$a \oplus (a \oplus b) = a \oplus e = a\,, \quad (a \oplus a) \oplus b = b \oplus b = a\,,$$

$$a \oplus (b \oplus b) = a \oplus a = b\,, \quad (a \oplus b) \oplus b = e \oplus b = b\,.$$

pa je operacija $\oplus$ asocijativna na skupu A.

Primer 1.5.3 Proveriti da li je struktura $(A, \oplus)$ grupoid ako je $A = \{a, b, c, d\}$ gde je operacija $\oplus$ definisana u tabeli 1.8. U slučaju potvrdnog odgovora, ispitati da li je ta operacija komutativna i asocijativna.

Rešenje. Struktura $(A, \oplus)$ je, očigledno, grupoid. Operacija $\oplus$ je, takođe, i komutativna. Proverimo još asocijativnost.

$$a \oplus (d \oplus c) = a \oplus a = b\,, \quad (a \oplus d) \oplus c = c \oplus c = a\,,$$

što znači da $\oplus$ nije asocijativna operacija.

Tabela 1.8: Na skupu $A = \{a, b, c, d\}$ definisana je operacija $\oplus$.

$\oplus$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	a
d	c	d	a	a

Definicija 1.5.4 *Grupoid $(A, \oplus)$ sa asocijativnom operacijom $\oplus$, naziva se polugrupa ili semigrupa.*

Primer 1.5.5 Proveriti da li su grupoidi iz primera 1.5.2 i 1.5.3 polugrupe.

Rešenje. Grupoid u primeru 1.5.2 jeste polugrupa jer je operacija $\oplus$ asocijativna, dok grupoid iz primera 1.5.3 nije.

Definicija 1.5.6 *Neka je $(A, \oplus)$ polugrupa. Ako*

$$(\exists e \in A)(\forall\, x \in A) \;\; x \oplus e = e \oplus x = x\,,$$

i ako

$$(\forall\, x \in A)(\exists x' \in A) \;\; x \oplus x' = x' \oplus x = e\,,$$

tada je $(A, \oplus)$ grupa, element e naziva se neutralni element u odnosu na operaciju $\oplus$, a x' inverzni element elementa x u odnosu na operaciju $\oplus$.

Primer 1.5.7 Proveriti da li grupoidi iz primera 1.5.2 i 1.5.3 imaju neutralni element i inverzni element za svaki element.

Rešenje. Grupoid u primeru 1.5.2 ima neutralni element e, jer je $e \oplus e = e$, $a \oplus e = e \oplus a = a$ i $b \oplus e = e \oplus b = b$. Pošto je $e \oplus e = e$, sledi da je za element e, inverzni element e. Kako je $a \oplus b = b \oplus a = e$, znači da je su elementi a i b inverzni jedan drugom. Zaključujemo da je grupiod iz primera 1.5.2 grupa. Za grupoid iz primera 1.5.3 važi da je neutralni element b zbog toga što je $b \oplus b = b$, $a \oplus b = b \oplus a = a$, $c \oplus b = b \oplus c = c$ i $d \oplus b = b \oplus d = d$, ali, recimo, element c nema svoj inverzni, jer ne postoji $x \in A$ tako da je $c \oplus x = x \oplus c = b$. Isto važi i za element d.

Definicija 1.5.8 *Uređena dvojka $(A, \oplus)$ je Abelova[3] grupa (komutativna grupa) ako je*

$$(\forall\, x, y \in A) \;\; x \oplus y = y \oplus x\,.$$

Napomena 1.5.9 *Sada je jasno da je grupoid iz primera 1.5.2 i Abelova grupa.*

Definicija 1.5.10 *Uređena trojka $(A, \oplus, \diamond)$ je prsten ako važi:*

(1) $(A, \oplus)$ je Abelova grupa,

(2) $(A, \diamond)$ je polugrupa,

[3]Nils Henrik Abel (1802-1829) - pogledati poglavlje 9.19

(3) $(\forall\, x, y, z \in A)$ $x \diamond (y \oplus z) = (x \diamond y) \oplus (x \diamond z)$ *(levi distributivni zakon operacije* $\diamond$ *u odnosu na* $\oplus$*)*
$(\forall\, x, y, z \in A)$ $(x \oplus y) \diamond z = (x \diamond z) \oplus (y \diamond z)$ *(desni distributivni zakon operacije* $\diamond$ *u odnosu na* $\oplus$*)*

Definicija 1.5.11 *Uređena trojka* $(A, \oplus, \diamond)$ *je komutativan prsten ako važi:*

(1) $(A, \oplus, \diamond)$ *je prsten,*

(2) $(\forall\, x, y \in A)$ $x \diamond y = y \diamond x$ *.*

Definicija 1.5.12 *Uređena trojka* $(A, \oplus, \diamond)$ *je polje ako važi:*

(1) $(A, \oplus, \diamond)$ *je komutativan prsten,*

(2) $(A \setminus \{e\}, \diamond)$*, gde je* e *neutralni element u skupu* A *za operaciju* $\oplus$*, je Abelova grupa,*

Primeri iz struktura prstena i polja biće takođe dati nakon uvođenja skupova brojeva.

1.6 Skupovi brojeva

Sada ćemo navesti skupove prirodnih ($\mathbb{N}$), celih ($\mathbb{Z}$), racionalnih ($\mathbb{Q}$), iracionalnih ($\mathbb{I}$), realnih ($\mathbb{R}$) i kompleksih brojeva ($\mathbb{C}$).

1.6.1 Skup prirodnih brojeva

Skup prirodnih brojeva obeležavaćemo sa $\mathbb{N}$ i definisati kao

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Skup $\mathbb{N}$ je *uređen* jer se za svaka dva njegova elementa m i n može utvrditi da li je $m = n$ ili $m < n$ ili $m > n$. Broj za jedan veći od datog prirodnog broja naziva se *sledbenik*, a broj za jedan manji od datog prirodnog broja je *prethodnik* tog broja. Broj 1 nema svog prethodnika u skupu $\mathbb{N}$.

Struktura $(\mathbb{N}, +)$, gde je $+$ operacija sabiranja dva prirodna broja, jeste grupoid. Važi i $(\forall\, m, n \in \mathbb{N})$ $m + n = n + m$ i $(\forall\, m, n, p \in \mathbb{N})$ $m + (n + p) = (m + n) + p$, te je operacija $+$ komutativna i asocijativna. Grupoid $(\mathbb{N}, +)$ nema neutralni element.

Struktura $(\mathbb{N}, \cdot)$, gde je $\cdot$ operacija množenja dva prirodna broja, jeste grupoid. Važi i $(\forall\, m, n \in \mathbb{N})$ $m \cdot n = n \cdot m$ i $(\forall\, m, n, p \in \mathbb{N})$ $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$, te je operacija $\cdot$ komutativna i asocijativna. Grupoid $(\mathbb{N}, \cdot)$ ima neutralni element, to je broj 1, jer važi

$$(\forall\, m \in \mathbb{N})\ \ m \cdot 1 = 1 \cdot m = m\,,$$

ali, za svaki broj $m \in \mathbb{N}$ ne postoji inverzni element m' tako da važi $m \cdot m' = m' \cdot m = 1$.

Napomena 1.6.1 *Struktura* $(\mathbb{N}, -)$*, gde je* $-$ *operacija oduzimanja dva prirodna broja nije grupoid jer razlika dva prirodna broja ne mora biti prirodan broj.*

Kao što je bilo rečeno da će biti dati još neki primeri relacija, sada dajemo primer jedne relacije ekvivalencije na skupu $\mathbb{N}$.

Primer 1.6.2 Neka je na skupu $\mathbb{N}$ definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall\, x, y \in \mathbb{N}) \;\; x\rho y \Leftrightarrow 2|x+y \quad (\text{tj. } x+y \text{ je paran broj})\,.$$

Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{N}$ i odrediti klase ekvivalencije.

Rešenje. Pokažimo prvo da je ρ zapravo RST relacija.

- refleksivnost: $(\forall\, x \in \mathbb{N})$ važi $x + x = 2x$, a broj $2x$ je deljiv sa dva, pa sledi $x\rho x$,
- simetričnost: $(\forall\, x, y \in \mathbb{N}) \;\; x\rho y \Rightarrow 2|x+y \Rightarrow 2|y+x \Rightarrow y\rho x$,
- tranzitivnost: $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}) \;\; x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow 2|x+y \wedge 2|y+z \Rightarrow 2|x+y+y+z \Rightarrow 2|x+z \Rightarrow x\rho z$, jer ako je broj $x + 2y + z$ deljiv sa 2, tada je i broj $x + z$ deljiv sa 2.

Jasno je da će postojati dve različite klase ekvivalencije $C(1) = \{1, 3, 5, \dots\}$ i $C(2) = \{2, 4, 6, \dots\}$, jer je zbir dva neparna broja deljiv sa dva i zbir dva parna broja deljiv sa dva. Zbir parnog i neparnog broja nije deljiv sa dva.

Ako proširimo skup $\mathbb{N}$ sa nulom, dobijamo skup

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}\,.$$

Struktura $(\mathbb{N}_0, +)$ jeste komutativni i asocijativni grupoid sa neutralnim elementom 0 jer važi $(\forall\, m \in \mathbb{N}_0) \;\; m + 0 = 0 + m = m$. Grupoid $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ je komutativan, asocijativan, sa neutralnim elementom 1.

U skupu $\mathbb{N}$ važi princip matematičke indukcije koji glasi: *Neka je skup X podskup skupa prirodnih brojeva i neka sadrži broj 1. Dalje, neka skup X ima osobinu da ako $k \in X \cap \mathbb{N}$, tada i $k + 1 \in X \cap \mathbb{N}$. Odavde sledi da je $X = \mathbb{N}$.*

Koristi se pri dokazivanju da formula $T(n)$ važi za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Postupak dokazivanja je sledeći:

- pokaže se da je formula $T(n)$ tačna za $n = n_0$,
- pretpostavi se da je formula $T(n)$ tačna za proizvoljno $n = k > n_0$ (*induktivna pretpostavka (ip)*),
- dokaže se da je formula $T(n)$ tačna za $n = k + 1$.

Primer 1.6.3 Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$T(n) \equiv 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Rešenje. Proverimo da li važi $T(1)$ (ili formula $T(n)$ za $n = 1$).

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1\,,$$

što je tačno. Proverimo, radi vežbe, da formula važi i za $n = 2$.

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2} \Rightarrow 3 = 3\,.$$

Pretpostavimo sada da formula $T(n)$ važi za $n = k$, odnosno

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \text{ (\textit{induktivna pretpostavka (ip)})}$$

i dokažimo da važi za $n = k + 1$, tj.

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\,.$$

Krenimo od leve strane jednakosti

$$\begin{aligned}
\underbrace{1 + 2 + \cdots + k}_{ip} + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\,,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Primer 1.6.4 Dokazati da za svaki prirodan broj n važi

$$T(n) \equiv 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2\,.$$

Rešenje. Proverimo da li važi formula za $n = 1$.

$$1 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1\,,$$

što je tačno. Proverimo još i valjanost formule $T(n)$ za $n = 2$.

$$1 + 3 = 2^2 \Rightarrow 4 = 4\,.$$

Pretpostavimo sada da formula $T(n)$ važi za $n = k$, odnosno

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2 \text{ (\textit{induktivna pretpostavka (ip)})}$$

i dokažimo da važi za $n = k + 1$, tj.

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2\,.$$

Sada je,

$$\underbrace{1 + 3 + \cdots + 2k - 1}_{ip} + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

čime je dokazana formula.

Primer 1.6.5 Dokazati da važi

$$T(n) \equiv 6 | n(n+1)(2n+1)$$

za svaki prirodan broj n, odnosno da je broj $n(n+1)(2n+1)$ deljiv sa 6 za svako $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Proverimo formulu za $n = 1$.

$$1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

što je tačno jer je rezultat deljiv sa 6. Pretpostavimo da je formula $T(n)$ tačna za $n = k$, odnosno

$$6|k(k+1)(2k+1) \ (\textit{induktivna pretpostavka (ip)})$$

i dokažimo da važi za $n = k+1$, tj.

$$6|(k+1)(k+2)(2k+3)\,.$$

Zapišimo $k(k+1)(2k+1) = 6\,M$, $M \in \mathbb{N}$, jer je $k(k+1)(2k+1)$ deljivo sa 6 po induktivnoj pretpostavci. Sada je

$$\begin{aligned}
(k+1)(k+2)(2k+3) &= k(k+2)(2k+3) + (k+2)(2k+3) \\
&= k(k+1+1)(2k+3) + (k+2)(2k+3) \\
&= k(k+1)(2k+3) + k(2k+3) + (k+2)(2k+3) \\
&= k(k+1)(2k+1+2) + k(2k+3) + (k+2)(2k+3) \\
&= k(k+1)(2k+1) + k(k+1)\cdot 2 + k(2k+3) + (k+2)(2k+3) \\
&= \underbrace{k(k+1)(2k+1)}_{ip} + 6k^2 + 12k + 6 = 6\,M + 6(k^2+2k+1)
\end{aligned}$$

što je deljivo sa 6 kao zbir dva broja deljiva sa 6.

Primer 1.6.6 Neka je $n, p \in \mathbb{N}_0$ i $0 \le p \le n$. Dokazati binomnu formulu

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p\,, \tag{1.2}$$

gde je

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

i

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\,, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}\,,$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}\,, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n\,.$$

Izraz $\binom{n}{p}$ naziva se binomni koeficijent.

Rešenje. Proverimo da li važi formula za $n = 0$.

$$(a+b)^0 = \sum_{p=0}^{0} \binom{0}{p} a^{0-p}\, b^p \Rightarrow 1 = \binom{0}{0} a^{0-0}\, b^0 \Rightarrow 1 = 1$$

što je tačno. Proverimo, još i tačnost formule $T(n)$ za $n = 1$.

$$(a+b)^1 = \sum_{p=0}^{1} \binom{1}{p} a^{1-p}\, b^p \quad \Rightarrow \quad a+b = \binom{1}{0} a^{1-0}\, b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1}\, b^1$$

$$\Rightarrow \quad a+b = 1 \cdot a^1\, b^0 + 1 \cdot a^0\, b^1 \Rightarrow a+b = a+b\,.$$

Pretpostavimo sada da formula $T(n)$ važi za $n = k$, odnosno

$$(a+b)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^{k-p}\, b^p \ (\textit{induktivna pretpostavka (ip)})$$

i dokažimo da važi za $n = k+1$, tj.

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} a^{k+1-p}\, b^p\,.$$

Krenimo od leve strane jednakosti

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)\,\underbrace{(a+b)^k}_{ip} = (a+b)\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^{k-p}\, b^p \\
&= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^{k+1-p}\, b^p + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^{k-p}\, b^{p+1} \\
&= \binom{k}{0} a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} a^{k+1-p}\, b^p + \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} a^{k-p+1}\, b^p \\
&= a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} a^{k+1-p}\, b^p + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} a^{k-p+1}\, b^p + \binom{k}{k} b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \left(\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} \right) a^{k+1-p}\, b^p + b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k+1}{p} a^{k+1-p}\, b^p + b^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} a^{k+1-p}\, b^p
\end{aligned}$$

čime je dokazana formula (1.2).

1.6.2 Skup celih brojeva

U skupu $\mathbb{N}$, jednačina $x + 2 = 1$ nema rešenje, te je potrebno formirati skup u kojem će postojati rešenje $x = -1$. Taj skup obeležava se sa $\mathbb{Z}$ i naziva skup celih brojeva,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Očigledno je $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Posmatrajmo strukturu $(\mathbb{Z}, +)$, gde je $+$ operacija sabiranja u skupu $\mathbb{Z}$. Napomenimo da je za $m, n \in \mathbb{Z}$, $m - n = m + (-n)$. Primetimo da važi

$$(\forall m \in \mathbb{Z})\ \ m + 0 = 0 + m = m$$

i

$$(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists (-m) \in \mathbb{Z})\ \ m + (-m) = (-m) + m = 0\,,$$

te je $(\mathbb{Z}, +)$ Abelova grupa zbog komutativnost i asocijativnosti operacije $+$. Jasno je da je i $(\mathbb{Z}, \cdot)$, gde je $\cdot$ operacija množenja u skupu $\mathbb{Z}$, polugrupa i da važe levi i desni distributivni zakoni operacije $\cdot$ u odnosu na $+$. Time je pokazano da je struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ prsten, a zbog komutativnosti operacije $\cdot$, pomenuta struktura je, zapravo, komutativni prsten. Ipak, usled nemogućnosti da se odredi inverzni element za svaki ceo broj (bez nule) u strukturi $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nije polje.

Dajmo sada jedan primer relacije definisane na skupu $\mathbb{Z}$.

Primer 1.6.7 Neka je na skupu X definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall x, y \in X)\ \ x\rho y \Leftrightarrow x - y \in X\,.$$

Ispitati vrstu relacije ρ u skupu X ako je: $a)$ $X = \mathbb{N}_0$ i $b)$ $X = \mathbb{Z}$.

Rešenje.
$a)$ Neka je $X = \mathbb{N}_0$. Pokazaćemo da je relacija ρ relacija poretka (i zbog čega nije simetrična)

- refleksivnost: $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\ \ x - x = 0 \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow x\rho x$,
- nije simetrična jer $(\forall x, y \in \mathbb{N}_0)\ \ x\rho y \Rightarrow x - y \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow y - x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow y\rho x$ nije tačno kada je $x \neq y$.
- antisimetričnost:
$$\begin{aligned}(\forall x, y \in \mathbb{N}_0)\ \ x\rho y \wedge y\rho x \quad &\Rightarrow \quad x - y \in \mathbb{N}_0 \wedge y - x \in \mathbb{N}_0\\ &\Rightarrow \quad x - y = y - x = 0 \Rightarrow x = y\,.\end{aligned}$$
- tranzitivnost:
$$\begin{aligned}(\forall x, y, z \in \mathbb{N}_0)\ \ x\rho y \wedge y\rho z \quad &\Rightarrow \quad x - y \in \mathbb{N}_0 \wedge y - z \in \mathbb{N}_0\\ &\Rightarrow \quad (x - y) + (y - z) \in \mathbb{N}_0\\ &\Rightarrow \quad x - z \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow x\rho z\,.\end{aligned}$$

$b)$ Refleksivnost i tranzitivnost se dokazuje potpuno analogno kao i pod $a)$ kada se umesto skupa $\mathbb{N}_0$ koristi $\mathbb{Z}$. Pokažimo simetričnost.

$$(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ \ x\rho y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x - y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y\rho x\,.$$

1.6.3 Skup racionalnih brojeva

Kako jednačina $2x = 3$ nema rešenje u skupu celih brojeva, skup u kom će $x = 3/2$ biti rešenje date jednačine se obeležava sa $\mathbb{Q}$ i on se naziva skup racionalnih brojeva i zapisuje kao

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ovaj skup čine svi brojevi koji se mogu napisati u obliku razlomaka. Treba napomenuti da su elementi ovog skupa i brojevi koji su predstavljeni u decimalnom zapisu, kod kojih, posle decimalnog zareza, postoji pravilno ponavljanje iste grupe brojeva. Na primer, $0.3333\ldots = 0.\dot{3} = 1/3$, $1.23232323\ldots = 1.\overline{23} = 122/99$. Zaključujemo da je $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Napomena 1.6.8 *Ako je broj* $a = 1.\overline{23}$, *tada je* $100a = 123.\overline{23}$ *pa je* $100a - a = 122$, *te je* $a = 122/99$.

Jednakost dva racionalna broja u skupu $\mathbb{Q}$ definisana je na sledeći način:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1 \,, \; p_1, p_2 \in \mathbb{Z} \,, \; q_1, q_2 \in \mathbb{N} \,.$$

Sabiranje dva racionalna broja p_1/q_1 i p_2/q_2, $q_1, q_2 \neq 0$, definiše se kao

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2} \,,$$

a množenje sa

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2} \,.$$

Pokazaćemo da je struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ zapravo polje. Prvo $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelova grupa, neutralni element je 0, a za element $\frac{p}{q}$ inverzni je $-\frac{p}{q}$ jer važi

$$\left(\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right) \;\; \frac{p}{q} + 0 = 0 + \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$$

i

$$\left(\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right) \left(\exists \left(-\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Q}\right) \;\; \frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = \left(-\frac{p}{q}\right) + \frac{p}{q} = 0 \,.$$

Operacija $+$ je i komutativna i asocijativna na posmatranom skupu. Jasno je da je $(\mathbb{Q}, \cdot)$ polugrupa jer je operacija $\cdot$ asocijativna. Pokažimo da je $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelova grupa. Neutralni element je sada broj 1 jer važi

$$\left(\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right) \;\; \frac{p}{q} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \,,$$

a pošto važi i

$$\left(\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\right) \left(\exists \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\right) \;\; \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q} = 1 \,,$$

imamo da je, zbog komutativnosti i asocijativnosti operacije $\cdot$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ zaista Abelova grupa. Kako važe i oba zakona distributivnosti

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}) \;\; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \,, \; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \,,$$

jasno je da je $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ polje.

Na skupu $\mathbb{Q}$, relacija $\leq$ je relacija poretka. Za svaka dva racionalna broja može se odrediti da li su jednaki ili je jedan manji ili veći od drugog. Naime,

$$\frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 \leq p_2 \cdot q_1\,,\ p_1, p_2 \in \mathbb{Z}\,,\ q_1, q_2 \in \mathbb{N}\,.$$

Pošto važi

$$(\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q})\ \ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

i

$$(\forall\, a, b \in \mathbb{Q})\ \ a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0\,,$$

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ sa relacijom $\leq$ čini uređeno polje.

Napomena 1.6.9 *Između bilo koja dva racionalna broja $a = \frac{p_1}{q_1}$ i $b = \frac{p_2}{q_2}$, $a < b$ uvek postoji racionalan broj c za koji važi $a < c < b$. Taj broj je, na primer,*

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}{2} = \frac{p_1\, q_2 + p_2\, q_1}{2\, q_1\, q_2} \in \mathbb{Q}\,.$$

Ova osobina ne važi u skupovima $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

1.6.4 Skup iracionalnih brojeva

U skupu racionalnih brojeva, jednačina $x^2 = 2$ nema rešenja jer brojevi $x = \pm\sqrt{2}$ nisu racionalni. Ako pretpostavimo da jesu, to bi značilo da se, recimo, $\sqrt{2}$ može zapisati kao količnik dva uzajamno prosta prirodna broja, tj. $\sqrt{2} = p/q$. Ako kvadriramo tu jednakost imaćemo $p^2 = 2\,q^2$, odnosno p^2 je paran broj, a time i p. Ako p zamenimo sa $p = 2k$, tada je $(2k)^2 = 2\,q^2 \Rightarrow 4\,k^2 = 2\,q^2 \Rightarrow 2\,k^2 = q^2$, te je i q^2 paran broj, a time i q. Dolazimo do zaključka da su i p i q parni brojevi, a to je u suprotnosti sa pretpostavkom da su uzajamno prosti. Dakle, pogrešna je pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Potrebno je formirati skup brojeva koji nisu racionalni i njega ćemo zvati skup iracionalnih brojeva i obeležavati sa $\mathbb{I}$,

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \pi, e, \ldots\}.$$

Treba napomenuti da u ovaj skup ulaze i brojevi u decimalnom zapisu kod kojih se cifre iza decimalnog zareza ne ponavljaju po nekom pravilu, na primer broj $3,1415926535\ldots = \pi$ je iracionalan[4]. Sada je jasno da je $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

1.6.5 Skup realnih brojeva

Skup koji čine unija skupova racionalnih i iracionalnih brojeva nazvaćemo skup realnih brojeva i obeležavati sa $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Sada ćemo dati primere relacija i na skupu $\mathbb{R}$.

[4]Zapis broja π do desete decimale može se lako zapamtiti ako se u narednoj rečenici umesto reči upiše broj slova u svakoj reči „Čuj, i broj i možeš zapamtiti sa pesmom dragi moj brate.” Nazivamo ga i Ludolfovim brojem - pogledati poglavlje 9.4. Arhimed je dao metod za izračunavanje broja π - pogledati poglavlje 9.2.

Primer 1.6.10 Daćemo primere relacija ekvivalencije i poretka.

- Relacija ρ definisana sa $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Leftrightarrow x = y$ je relacija ekvivalencije.
  - refleksivnost: $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x\rho x$ jer je $x = x$,
  - simetričnost: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow y\rho x$,
  - tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \Rightarrow x\rho z$.
- Relacija ρ definisana sa $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Leftrightarrow x \geq y$ je relacija poretka.
  - refleksivnost: $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x\rho x$ jer je $x \geq x$,
  - antisimetričnost: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$,
  - tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z \Rightarrow x\rho z$.

Napomena 1.6.11 *Relacija ρ definisana sa $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Leftrightarrow x > y$ nije relacija poretka jer ne važi da je $x > x$ pa nije refleksivna.*

Primetimo da za strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, gde su $+$ i $\cdot$ operacije sabiranja i množenja, redom, sa relacijom $\geq$ važi: neutralni element za operaciju sabiranja je 0, za operaciju množenja 1 i svaki realan broj x (ne uključujući nulu) ima inverzni $1/x$. Lako se proverva da važi i da je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ uređeno polje. Između svaka dva realna broja a i b, postoji realan broj c tako da je $a < c < b$.

Sada ćemo dati i nekoliko primera složenih i inverznih funkcija, kao što je ranije bilo napomenuto.

Primer 1.6.12 Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 3x + 4$ i $g(x) = 2x^2 - 3$. Odrediti $g \circ f$.

Rešenje. Tada i $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i važi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+4) = 2(3x+4)^2 - 3 = 2(9x^2 + 24x + 16) - 3 = 18x^2 + 48x + 29\,.$$

Primer 1.6.13 Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = e^x$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Odrediti $f \circ g$ i $g \circ g$.

Rešenje. Imamo da $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i da važi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = e^{\sqrt[3]{x}}\,,$$

dok je

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[9]{x}\,.$$

Primer 1.6.14 Odrediti inverznu funkciju za $f(x) = 2x - 4$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rešenje.

$$f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x-4) \Rightarrow x = f^{-1}(2x-4)$$

Uvođenjem smene $t = 2x - 4 \Rightarrow x = \frac{t+4}{2}$ imaćemo

$$\frac{t+4}{2} = f^{-1}(t)$$

i nakon zamene $t \to x$ dobijamo inverznu funkciju

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}\,.$$

Sada možemo i da proverimo da li je $f^{-1}(f(x)) = x$.

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)+4}{2} = \frac{2x-4+4}{2} = x\,.$$

Primer 1.6.15 Odrediti inverznu funkciju za $f(x) = \sqrt[3]{3-x}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rešenje.

$$f(x) = \sqrt[3]{3-x} \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{3-x}) \Rightarrow x = f^{-1}(\sqrt[3]{3-x})$$

Smenom $t = \sqrt[3]{3-x} \Rightarrow t^3 = 3 - x \Rightarrow x = 3 - t^3$ imamo

$$3 - t^3 = f^{-1}(t)\,,$$

a nakon zamene $t \to x$, inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = 3 - x^3$.

Primer 1.6.16 Odrediti inverznu funkciju za $f(x) = \ln x$, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Rešenje.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\ln x) \Rightarrow x = f^{-1}(\ln x)$$

Smenom $t = \ln x \Rightarrow e^t = e^{\ln x} \Rightarrow e^t = x$ imaćemo

$$e^t = f^{-1}(t)\,,$$

pa nakon zamene $t \to x$, inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = e^x$.

Apsolutna vrednost broja $x \in \mathbb{R}$ definiše se kao:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0\,. \end{cases}$$

Na primer, $|7| = 7$, $|0| = 0$, $|-7| = -(-7) = 7$.

Teorema 1.6.17 *Neka su x i y proizvoljni realni brojevi. Tada važi (nejednakost trougla)*

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,. \tag{1.3}$$

Dokaz. Postoje četiri mogućnosti:

- Ako je $x \geq 0$ i $y \geq 0$, tada je $|x+y| = x + y = |x| + |y|$.
- Ako je $x \leq 0$ i $y \leq 0$, tada je $|x+y| = -x + (-y) = |x| + |y|$.
- Ako je $x \geq 0$ i $y \leq 0$, tada je $|x+y| \leq |x + (-y)| = x + (-y) = |x| + |y|$.
- Ako je $x \leq 0$ i $y \geq 0$, tada je $|x+y| \leq |-x+y| = -x + y = |x| + |y|$.

Time je teorema dokazana. □

Posledica teoreme 1.6.17 je:

Posledica 1.6.18 *Neka su x i y proizvoljni realni brojevi. Tada važi*

$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|.$$

Dokaz. Koristeći nejednakost trougla (1.3) imaćemo

$$|(x-y)+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|.$$

Tada je i

$$|y-x| \geq |y|-|x| \Rightarrow |x-y| \geq |y|-|x| \Rightarrow -|x-y| \leq |x|-|y|.$$

Dakle važi

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \Rightarrow \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|.$$

□

Lako je pokazati da važi i $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ i $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

Koristićemo i uobičajene oznake za intervale:

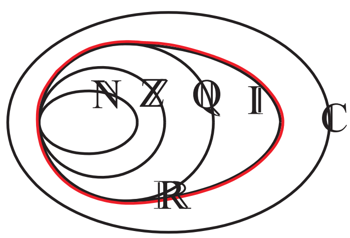
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$,
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}$,
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\}$,
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$,
- $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x\}$,
- $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\}$,
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq b\}$,
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ x < b\}$,
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$,
- $\mathbb{R}^- = (-\infty,0)$.

1.6.6 Skup kompleksnih brojeva

Ako se želi rešiti jednačina $x^2 = -1$, jasno je da, u skupu realnih brojeva, ova jednačina nema rešenje jer je $x^2 \geq 0$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Uvodi se novi skup, skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, kojem će pripadati rešenje ove jednačine $x = \pm i$, gde se i naziva imaginarna jedinica i definiše kao $i^2 = -1$,

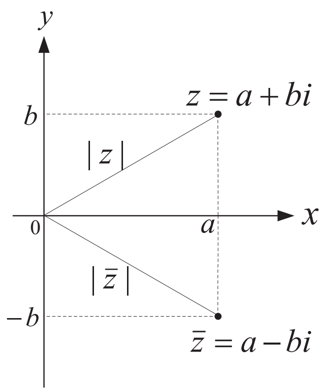
$$\mathbb{C} = \{a + b\,i = (a,b) |\ a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Važi i $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (slika 1.12).



Slika 1.12: Skupovi brojeva.

Broj a se naziva realni deo, a broj b imaginarni deo kompleksnog broja $z = a + b\,i = (a, b)$. Sa $\bar{z} = a - b\,i = (a, -b)$ označavamo konjugovano kompleksan broj kompleksnom broju $z = a + b\,i = (a, b)$. Udaljenost kompleksnog broja z od koordinatnog početka označavamo sa $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i nazivamo moduo kompleksnog broja (slika 1.13).



Slika 1.13: Kompleksna ravan, Dekartov koordinatni sistem, x-realna osa, y-imaginarna osa.

Dva kompleksna broja $z_1 = (a_1, b_1)$ i $z_1 = (a_2, b_2)$ su jednaka ako i samo ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$. Sabiranje dva kompleksna broja se definiše kao

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

ili

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\,,$$

a proizvod

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

ili

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + b_1 \cdot b_2\, i^2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i\,.$$

Struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ čini polje, gde je $+$ operacija sabiranja, a $\cdot$ operacija množenja kompleksnih brojeva. Koristeći oznaku kompleksnog broja $z = a + b\,i$ daćemo primer da bismo ilustrovali pomenute operacije.

Napomena 1.6.19 *Primetimo da ako saberemo kompleksni broj i njegov konjugovani kompleksni broj dobijamo realan broj, odnosno*

$$(a + b\,i) + (a - b\,i) = 2\,a\,.$$

Napomena 1.6.20 *Primetimo da ako pomnožimo kompleksni broj i njegov konjugovani kompleksni broj dobijamo kvadriran moduo kompleksnog broja, tj.*

$$(a + b\,i) \cdot (a - b\,i) = a^2 - a\,b\,i + a\,b\,i - b^2\, i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2 = |z|^2\,.$$

Primer 1.6.21 Neka je $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = -3 + 5i$. Odrediti $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$.

Rešenje.

- $z_1 + z_2 = (2-3i) + (-3+5i) = -1+2i\,,$
- $z_1 - z_2 = (2-3i) - (-3+5i) = 2-3i+3-5i = 5-8i\,,$
- $z_1 \cdot z_2 = (2-3i)\cdot(-3+5i) = -6+10i+9i-15i^2 = -6+19i+15 = 9+19i\,.$

Deljenje kompleksnih brojeva $z_1 = a_1 + b_1\, i$ i $z_2 = a_2 + b_2\, i$ definiše se na sledeći način:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1\,i}{a_2+b_2\,i} = \frac{a_1+b_1\,i}{a_2+b_2\,i}\cdot\frac{a_2-b_2\,i}{a_2-b_2\,i} = \frac{(a_1\,a_2+b_1\,b_2)+(a_2\,b_1-a_1\,b_2)\,i}{(a_2)^2+(b_2)^2}\,,$$

uz uslov $(a_2)^2+(b_2)^2 \neq 0$ što je ekvivalentno sa uslovom da a_2 i b_2 nisu istovremeno jednaki nuli.

Primer 1.6.22 Neka je $z_1 = 2-3i$ i $z_2 = -3+5i$. Odrediti $\frac{z_1}{z_2}$.

Rešenje.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-3+5i}\cdot\frac{-3-5i}{-3-5i} = \frac{(2-3i)(-3-5i)}{(-3)^2+5^2} = \frac{-6-10i+9i-15}{9+25} = \frac{-21-i}{34}\,.$$

Napomena 1.6.23 *Pošto važi*

$$i^0 = 1\,,\ i^1 = i\,,\ i^2 = -1\,,\ i^3 = i\cdot i^2 = -i\,,\ i^4 = i^2\cdot i^2 = 1\,,\ i^5 = i^4\cdot i = i\,,\ i^6 = i^4\cdot i^2 = -1\,,\ldots,$$

a takođe i

$$\ldots, i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i\,,\ i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1\,,\ i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1}{-i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i\,,$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1\,,\ i^{-1} = \frac{1}{i} = -i\,.$$

vidimo da važi $i^{-5} = i^{-1} = i^3 = -i$, $i^{-4} = i^0 = i^4 = 1$, $i^{-3} = i^1 = i^5 = i$, $i^{-2} = i^2 = i^6 = -1$, *odnosno, uopšteno, važiće* $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, $i^{4k} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Napomena 1.6.24 *Primetimo da je*

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$$

i

$$(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i\,.$$

Primer 1.6.25 Izračunati: *a*) $(1+i)^{132}$ i *b*) $(2-2i)^{73}$ korišćenjem napomena 1.6.23 i 1.6.24.

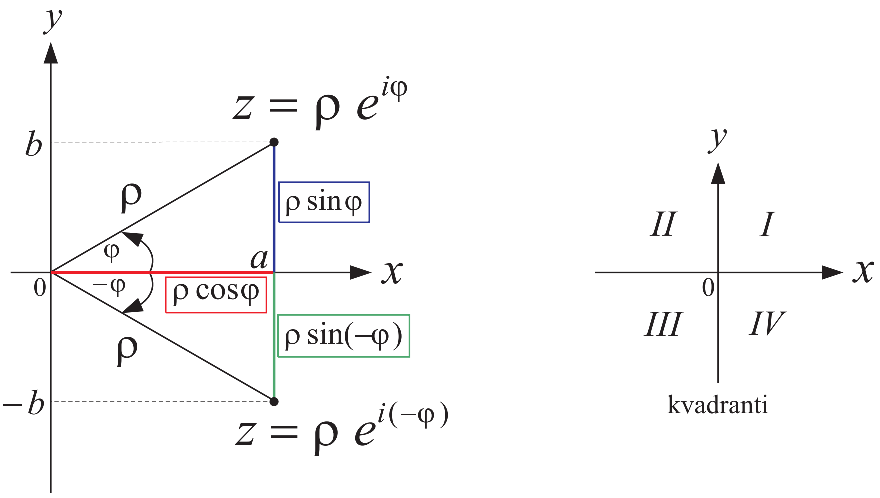
Rešenje.
a)

$$(1+i)^{132} = \left((1+i)^2\right)^{66} = (2\,i)^{66} = 2^{66}\,i^{66} = 2^{66} i^{4\cdot16+2} = 2^{66}\,i^2 = -2^{66}$$

b)

$$\begin{aligned}
(2-2i)^{75} &= (2(1-i))^{75} = 2^{75}(1-i)^{75} = 2^{75}(1-i)(1-i)^{74} = 2^{75}(1-i)\left((1-i)^2\right)^{37}\\
&= 2^{75}(1-i)\,(-2i)^{37} = 2^{75}(1-i)(-2)^{37}\,i^{37} = -2^{112}(1-i)\,i^{4\cdot9+1}\\
&= -2^{112}(1-i)\,i = -2^{112}(i-i^2) = -2^{112}(1+i)\,.
\end{aligned}$$

Kompleksni broj $z = a + b\,i$ može se napisati i u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku. Kao što je prikazano na slici 1.14, sa ρ ćemo obeležiti radijus, odnosno udaljenost broja z od koordinatnog početka ($\rho = |z|$), a sa φ ugao (argument kompleksnog broja) koji radijus zaklapa sa pozitivnim delom x-ose.



Slika 1.14: Kompleksna ravan, polarni koordinatni sistem, x-realna osa, y-imaginarna osa. Kvadranti.

Tada je $\cos\varphi = a/\rho$, a $\sin\varphi = b/\rho$, odnosno

$$a = \rho\cos\varphi\,,\ \ b = \rho\sin\varphi$$

i sada dobijamo trigonometrijski oblik broja z

$$z = a + b\,i = \rho\cos\varphi + i\,\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,. \tag{1.4}$$

Argument kompleksnog broja je, dakle, ugao $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ i njega određujemo pri prelasku sa Dekartovih na polarne koordinate. Ako se podsetimo Ojerove[5] formule

$$e^{i\,x} = \cos\,x + i\,\sin x\,,\ x \in \mathbb{R}$$

na osnovu (1.4), dolazimo do eksponencijalnog oblika kompleksnog broja z, tj.

$$z = \rho\,e^{i\,\varphi}\,. \tag{1.5}$$

Čitaocu se preporučuje da, pre prelaska na naredne primere, pogleda poglavlje o trigonometrijskim funkcijama (poglavlje 2.2.5).

Primer 1.6.26 Predstaviti sledeće kompleksne brojeve u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku: $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$, $z_2 = -1 + i$ i $z_3 = -i$.

Rešenje.

[5] Leonard Ojler (1707-1783) - pogledati poglavlje 9.13

Krenimo od broja $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$. Pošto je $a = 1$ i $b = \sqrt{3}$, tada je $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Pošto je $a, b > 0$, ugao φ je u prvom kvadrantu. Sada je $\operatorname{tg} \varphi = b/a = \sqrt{3}$, te je $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi/3$. Dakle, $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ je trigonometrijski oblik broja z_1. Eksponencijalni oblik je $z_1 = 2\, e^{i\pi/3}$.

Za $z_2 = -1+i$ važi $a = -1$, $b = 1$ (ugao φ je u drugom kvadrantu), $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = -1$ i $\varphi = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$. Tada je $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ ili $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\, 3\pi/4}$.

Neka je $z_3 = -i$. On se nalazi na udaljenosti 1 od koordinatnog početka na negativnom delu imaginarne ose. Dakle, $\rho = 1$ i $\varphi = 3\pi/2$. Tada je $z_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = e^{i\, 3\pi/2}$.

Ako se želi izražunati z^n, $n \in \mathbb{N}$, tada je, korišćenjem (1.5),

$$z^n = \rho^n \left(e^{i\,\varphi}\right)^n = \rho^n\, e^{i\, n\varphi}\,,$$

dok se za računanje $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, koristi formula

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}\,, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Primer 1.6.27 Ako je $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$ i $z_2 = -1 + i$, izračunati $(z_1)^{12}$ i $\sqrt[3]{z_2}$.

Rešenje.

U primeru 1.6.26 je pokazano da je eksponencijalni oblik kompleksnog broja $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$ zapravo

$$z_1 = 2\, e^{i\pi/3} \Rightarrow (z_1)^{12} = 2^{12}\, e^{i12\pi/3} = 2^{12}\, e^{i4\pi}\,,$$

a pošto je $e^{i4\pi} = \cos(4\pi) + i \sin(4\pi) = 1 + i \cdot 0 = 1$, tada je $(z_1)^{12} = 2^{12}$.

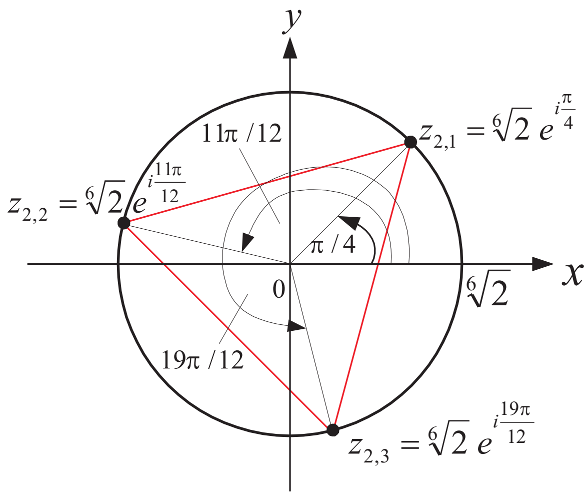
Ako je $z_2 = -1 + i$, tada je (vidi primer 1.6.26) $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\, 3\pi/4}$, pa je

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\, e^{i \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}}}\,, \ k = 0, 1, 2\,,$$

odnosno

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[6]{2} \cdot \begin{cases} e^{i \frac{\frac{3\pi}{4} + 0}{3}}\,, & (k = 0), \\ e^{i \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{3}}\,, & (k = 1), \\ e^{i \frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{3}}\,, & (k = 2), \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{z_2} = \begin{cases} \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}} =: z_{2,1}\,, \\ \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \frac{11\pi}{12}} =: z_{2,2}\,, \\ \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \frac{19\pi}{12}} =: z_{2,3}\,. \end{cases}$$

Geometrijski, tri rešenja koja smo dobili obrazuju jednakostranični trougao (slika 1.15).



Slika 1.15: Geometrijski prikaz $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{-1+i}$ sa rešenjima $z_2 = z_{2,1}$, $z_2 = z_{2,2}$ i $z_2 = z_{2,3}$.

1.7 Zadaci za vežbu

1. Navesti pet potvrdnih rečenica i odrediti njihovu istinitost.

2. Za svaku logičku operaciju navesti po jednu rečnicu i objasniti njenu tačnost.

3. Dokazati preostale navedene tautologije iz ovog udžbenika.

4. Dati su skupovi $A = \{2,4,6,8,10,12\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ i $C = \{1,2,3,5,8,13\}$. Odrediti $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $B \setminus A$, $C \setminus A$, $C \setminus B$.

5. Dati su skupovi $A = \{a,b,c,d\}$ i $B = \{1,2,3\}$. Odrediti $A \times B$ i $B \times A$.

6. Dokazati preostale osobine skupovnih operacija koristeći iskazni račun.

7. Odrediti osobine relacije ρ definisane na skupu $X = \{a,b,c,d,e\}$, ako je

$$\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,c),(a,c),(b,a),(c,b),(c,a),(d,e),(e,d)\}.$$

Ako je u pitanju relacija ekvivalencije, odrediti klase ekvivalencije.

8. Pokazati da je relacija ρ definisana sa $(\forall x,y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Leftrightarrow x \le y$ relacija poretka.

9. Neka je na skupu $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall x,y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\ \ x\rho y \Leftrightarrow x\,y > 0\,.$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i odrediti klase ekvivalencije za elemente -1 i 1.

10. Neka je na skupu $\mathbb{N}$ definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall x,y \in \mathbb{N})\ \ x\rho y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ \ x - y = 3k\,.$$

Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{N}$ i odrediti klase ekvivalencije.

11. Neka je na skupu $\mathbb{N}$ definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall\, x, y \in \mathbb{N}) \;\; x\rho y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) \;\; y = k\, x\,.$$

Pokazati da je ρ relacija poretka na skupu $\mathbb{N}$.

12. Naći sve funkcije koje preslikavaju skup $A = \{1, 2, 3\}$ u skup $B = \{a, b\}$ i odrediti tip preslikavanja.

13. Dati primer dva skupa i definisati bijektivno preslikavanje. Odrediti i inverzno preslikavanje.

14. Ispitati da je grupa, polugrupa ili grupa svaki od sledećih skupova zajedno sa naznačenom operacijom:

(i) parni brojevi u odnosu na sabiranje,

(ii) celi brojevi, deljivi sa datim $n \in \mathbb{N}$, u odnosu na sabiranje,

(iii) negativni celi brojevi u odnosu na množenje,

(iv) pozitivni racionalni brojevi u odnosu na deljenje,

(v) skup kompleksnih brojeva $\{1, -1, i, -i\}$ u odnosu na operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

15. Neka je S skup pozitivnih realnih brojeva i $*$ operacija u tom skupu definisana kao a) $a * b = a^b$ i b) $a * b = a^2 b^2$. Šta je algebarska struktura $(S, *)$?

16. Ispitati da li su sledeći skupovi, sa naznačenim operacijama, prsten ili polje:

(i) parni brojevi sa operacijama sabiranja $+$ i množenja $\cdot$,

(ii) skup brojeva oblika $a + b\sqrt{2}$, gde su a i b celi brojevi, u odnosu na $+$ i $\cdot$,

(iii) skup brojeva oblika $a + b\sqrt{3}$, gde su a i b racionalni brojevi, u odnosu na $+$ i $\cdot$.

17. Matematičkom indukcijom dokazati da važi:

(i) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dfrac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$,

(ii) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$,

(iii) da je $2^{12n+3} - 3^{6n+2}$ deljivo sa 13 za $n \geq \mathbb{N}_0$,

(iv) da je $3^{2n+3} + 40n - 27$ deljivo sa 64 za $n \geq \mathbb{N}_0$,

(v) $(1 + a)^n \geq 1 + n\, a$, $n \in \mathbb{N}$, $a > -1$.

18. Dokazati da je

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2, \; n \in \mathbb{N}\,.$$

19. Dokazati da je

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \; n \in \mathbb{N}\,.$$

20. Broj $4n+3$ ne može biti kvadrat ni jednog prirodnog broja za bilo koje $n \in \mathbb{N}$. Dokazati.

21. Dokazati da ako je n prirodan broj i ako je $n^3 + 5$ neparan broj, tada n mora biti paran broj.

22. Pokazati da brojevi $3n + 1$ i $2n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}$, nemaju zajedničkih delitelja.

23. Ako su a i b prosti brojevi veći od 3, pokazati da je broj $a^2 - b^2$ deljiv sa 24.

24. Dokazati da $\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

25. Dokazati da $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nije racionalan broj.

26. Ako je $z_1 = 4 - 3i$ i $z_2 = -1 + 2i$, odrediti realne i imaginarne delove kompleksnih brojeva $3z_1 + z_2$, $z_1 - 2z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, kao i njihove udaljenosti od koordinatnog početka.

27. Odrediti kompleksni broj z koji zadovoljava jednačinu $|z| + z = 2 + i$.

28. Odrediti kompleksne brojeve z_1 i z_2 ako je

$$z_1 + z_2 = 1 - i,\ \arg(z_1) = \frac{\pi}{6},\ \arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}.$$

29. Ako je $z = -2\sqrt{3} - 2i$, odrediti z^4 i $\sqrt[4]{z}$.

30. Rešiti jednačinu $e^{i\pi/4}z + e^{i\pi/6}z + i = 0$.

GLAVA 2

Realne funkcije jedne realne promenljive

U ovoj glavi uvešćemo osnovne pojmove u vezi sa realnim funkcijama jedne realne promenljive koje ćemo koristiti kroz ceo udžbenik. Veoma je važno da studenti savladaju skiciranje i da nauče osobine elementarnih funkcija koje ćemo koristiti kod funkcija koje budemo ispitivali.

2.1 Osnovni pojmovi

Realna funkcija jedne realne promenljive preslikava skup A u B, gde su A i B podskupovi skupa realnih brojeva. Pisaćemo $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Skup A nazivamo domen funkcije f (obeležava se i sa D), a skup B kodomen funkcije f. Sa $f(A)$ (ili $f(D)$) obeležavaćemo skup vrednosti funkcije f koji je podskup skupa B na sledeći način:

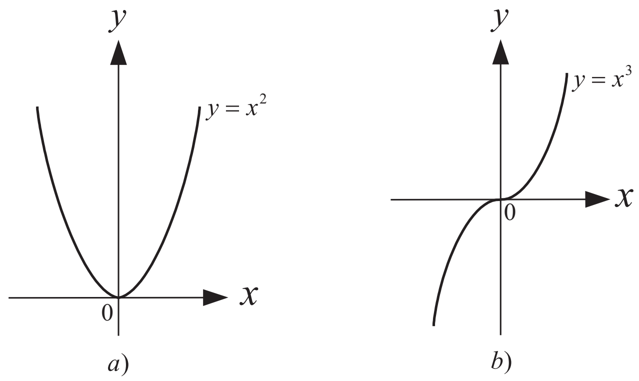
$$f(A) = \{y |\, y \in B,\, \exists\, x \in A,\, y = f(x)\}\,.$$

Definicija 2.1.1 *Grafik funkcije $f : A \to B$ je podskup G_f skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ koji je definisan sa*

$$G_f = \{(x, f(x)) |\, x \in A,\, f(x) \in B\}\,.$$

Primeri grafika funkcija dati su na slici 2.1.

Primer 2.1.2 Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisanu sa $f(x) = x^2$ (slika 2.1 a)), kodomen je skup realnih brojeva, ali je skup vrednosti $f(\mathbb{R}) = \{x |\, x \in \mathbb{R},\, x \geq 0\}$. Ako je $f(x) = x^3$ (slika 2.1 b)) tada je kodomen jednak sa skupom vrednosti $f(\mathbb{R})$.



Slika 2.1: Grafici funkcija: *a)* $f(x) = x^2$, *b)* $f(x) = x^3$.

Definicija 2.1.3 *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : A \to B$ je parna ako za svako $x \in A$, gde je A simetričan skup u odnosu na $x = 0$, važi*

$$f(-x) = f(x)$$

i tada je grafik funkcije f osno simetričan u odnosu na y-osu.

Definicija 2.1.4 *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : A \to B$ je neparna ako za svako x iz simetričnog skupa A (u odnosu na $x = 0$) važi*

$$f(-x) = -f(x)$$

i tada je grafik funkcije f centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Primer 2.1.5 Jedna parna funkcija je $f(x) = x^2$ (slika 2.1 *a)*) jer je $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, a jedna neparna funkcija je $f(x) = x^3$ (slika 2.1 *b)*) jer je $f(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f(x)$.

Uvedimo sada pojmove ograničenosti i periodičnosti funkcije.

Definicija 2.1.6 *Funkcija $f : A \to B$ je ograničena ako postoji $M > 0$ tako da za svako $x \in A$ važi $|f(x)| \leq M$.*

Primer 2.1.7 Funkcija $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ je ograničena za svako $x \in \mathbb{R}$ jer važi

$$|f(x)| = \left| -\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2}.$$

Definicija 2.1.8 *Funkcija $f : A \to B$ je periodična ako postoji $\omega \in \mathbb{R}$ tako da za svako $x \in A$ važi $f(x + \omega) = f(x)$. Najmanje takvo $\omega > 0$ označićemo sa ω_0 i zvaćemo ga osnovnim periodom funkcije f.*

Primer 2.1.9 Funkcije $y = a\sin(bx+c)$ i $y = a\cos(bx+c)$ imaju osnovni period $\omega_0 = 2\pi/|b|$, dok funkcije $y = a\,\mathrm{tg}(bx + c)$ i $y = a\,\mathrm{ctg}(bx + c)$ imaju osnovni period $\omega_0 = \pi/|b|$, za $a, b \neq 0$. Detaljnije o ovim funkcijama u poglavlju 2.2.5.

Definišimo sada nulu funkcije.

Definicija 2.1.10 *Neka $f : A \to B$. Tačka $x_0 \in A$ je nula funkcije f ako važi $f(x_0) = 0$.*

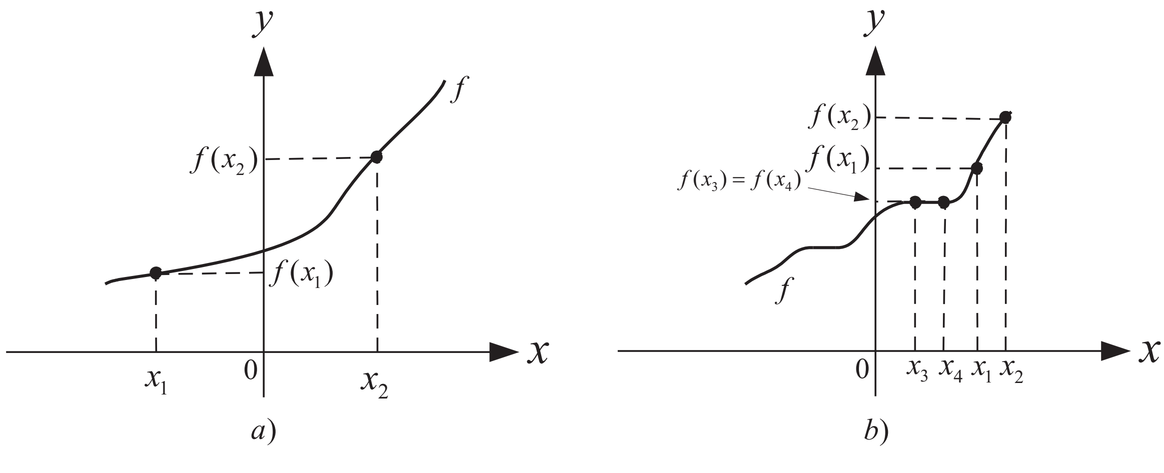
Kada se bude ispitivao znak funkcije, biće određivani intervali na kojima je funkcija negativna ili pozitivna.

Primer 2.1.11 Za funkcije $f(x) = x^2$ (slika 2.1 *a*)) i $f(x) = x^3$ (slika 2.1 *b*)) nula funkcije je $x = 0$. Funkcija $f(x) = x^2$ je negativna za $x \in \emptyset$, a pozitivna za $x < 0$ i $x > 0$. Funkcija $f(x) = x^3$ je negativna za $x < 0$, a pozitivna za $x > 0$.

Monotono rastuće, monotono neopadajuće, monotono opadajuće i monotono nerastuće funkcije se definišu na sledeći način.

Definicija 2.1.12 *Funkcija $f : A \to B$ je monotono rastuća (neopadajuća) na intervalu $(a, b) \subseteq A$ (slika 2.2 a) i b)), ako za svako $x_1, x_2 \in (a, b)$ važi*

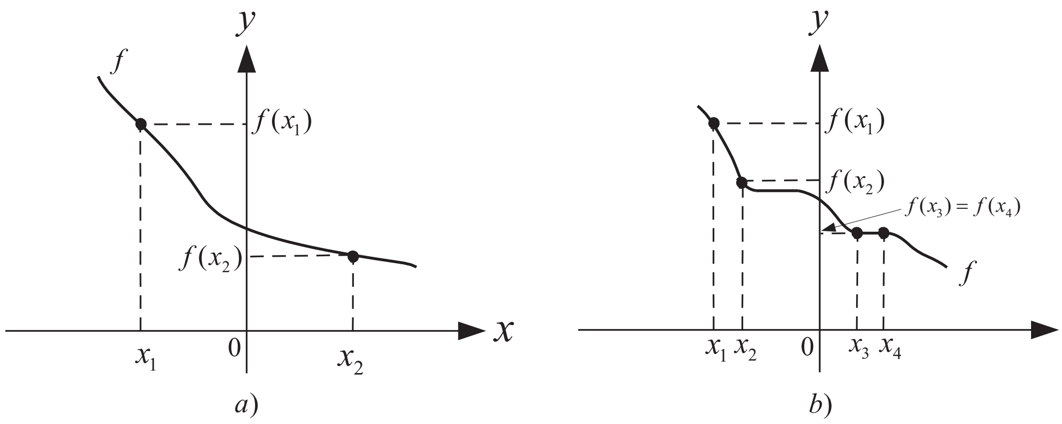
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \;\; (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)) \; .$$



Slika 2.2: Grafici funkcija: *a*) f - monotono rastuća, *b*) f - monotono neopadajuća.

Definicija 2.1.13 *Funkcija $f : A \to B$ je monotono opadajuća (nerastuća) na intervalu $(a, b) \subseteq A$ (slika 2.3 a) i b)), ako za svako $x_1, x_2 \in (a, b)$ važi*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \;\; (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)) \; .$$



Slika 2.3: Grafici funkcija: *a*) f - monotono opadajuća, *b*) f - monotono nerastuća.

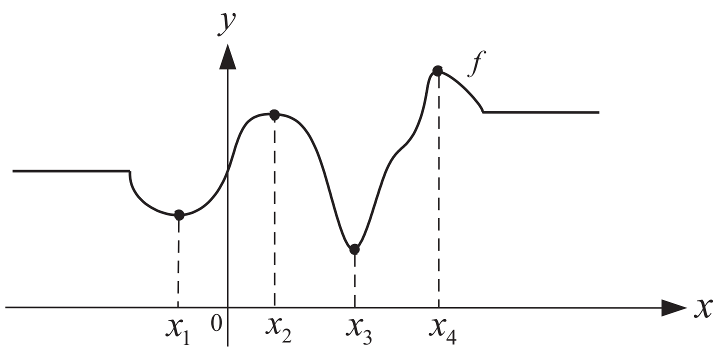
Primer 2.1.14 Funkcija $f(x) = x^2$ (slika 2.1 *a*)) je monotono opadajuća za $x < 0$, dok je za $x > 0$ monotono rastuća. Funkcija $f(x) = x^3$ (slika 2.1 *b*)) je monotono rastuća za svako $x \in \mathbb{R}$.

Definišimo još i lokalne (globalne) minimume i maksimume.

Definicija 2.1.15 *Funkcija* $f : A \to B$ *ima lokalni minimum (maksimum) u tački* $x_0 \in A$ *ako postoji* $\delta > 0$ *tako da je za svako* $x \in (x - \delta, x + \delta) \cap A$ *važi* $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$*.*

Definicija 2.1.16 *Funkcija* $f : A \to B$ *ima globalni minimum (maksimum) u tački* $x_0 \in A$ *ako za svako* $x \in A$ *važi* $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$*.*

Na slici 2.4 dat je primer za prethodne dve definicije. Izraze minimum ili maksimum funkcije još nazivamo i ekstremne vrednosti funkcije.



Slika 2.4: Funkcija f u tački x_1 ima lokalni minimum, a u x_3 i lokalni i globalni minimum. U tački x_2 je lokalni maksimum funkcije f, a u x_4 i lokalni i globalni maksimum.

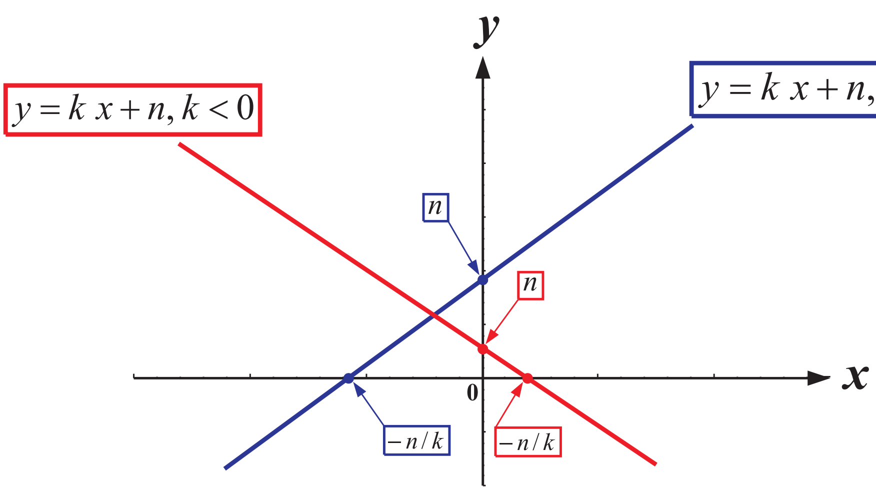
Primer 2.1.17 Funkcija $f(x) = x^2$ ima lokalni i globalni minimum u tački $x = 0$ (slika 2.1 *a*)). Funkcija $f(x) = x^3$ nema ni minimum ni maksimum (slika 2.1 *b*)).

2.2 Osnovne elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su: linearna funkcija, stepena funkcija, eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i ciklometrijske funkcije. Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija $(+, -, \cdot, :)$ i konačnog broja kompozicija elementarnih funkcija. Za svaku od tih funkcija odredićemo domen, nule, znak, parnost i neparnost, monotonost i ekstremne vrednosti.

2.2.1 Linearna funkcija

Eksplicitni oblik linearne funkcije (prave) je $y = f(x) = k\,x + n$, gde je k koeficijent pravca prave, a n odsečak na y-osi. Ako je $k \neq 0$, odsečak na x-osi je $-n/k$ (slika 2.5).



Slika 2.5: Linearna funkcija $y = kx + n$ za $k \neq 0$.

Ako je $k \neq 0$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = -kx + n \notin \{f(x), -f(x)\}$, nije ni parna ni neparna za $n \neq 0$,

(4) Nule: $x = -n/k$.

Posebno, ako je $k > 0$, tada je:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-n/k, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -n/k)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća funkcija za $x \in D$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

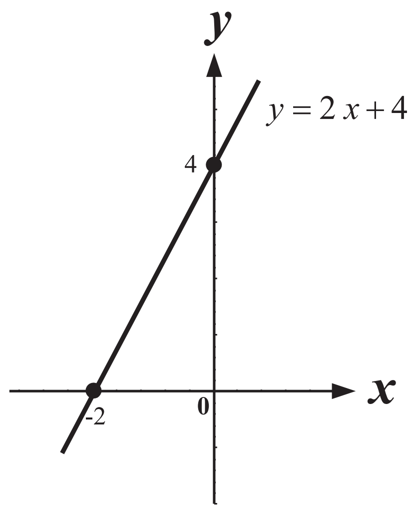
U slučaju da je $k < 0$:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -n/k)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-n/k, +\infty)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća funkcija za $x \in D$,

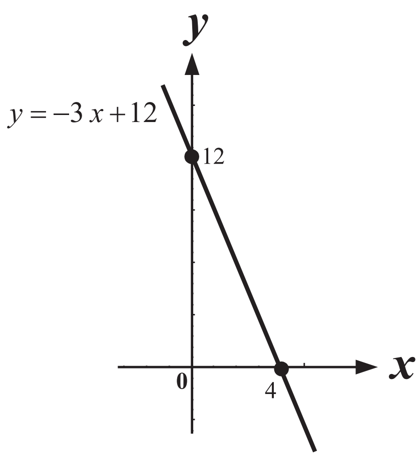
(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Primer 2.2.1 Na slici 2.6 skicirana je prava $y = 2x + 4$.

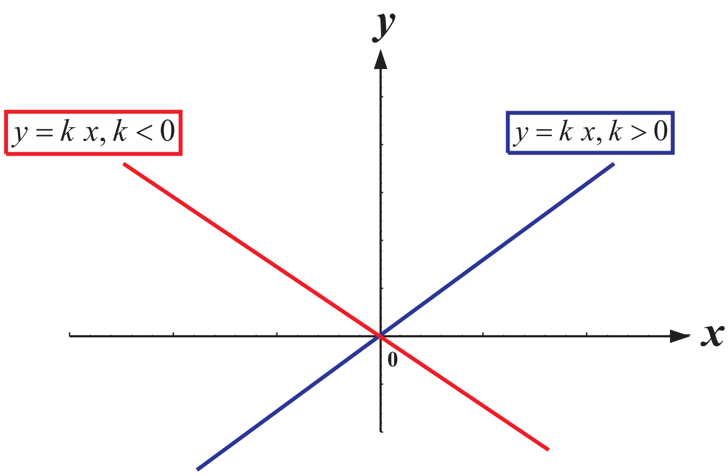


Slika 2.6: Linearna funkcija $y = 2x + 4$.

Primer 2.2.2 Na slici 2.7 skicirana je prava $y = -3x + 12$.



Slika 2.7: Linearna funkcija $y = -3x + 12$.



Slika 2.8: Linearna funkcija $y = kx$ za $k \neq 0$.

Ako je linearna funkcija oblika $y = k\,x$, $k \neq 0$, tada ona prolazi kroz koordinatni početak (slika 2.8).

Za $k \neq 0$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = k(-x) = -(kx) = -f(x)$, pa je funkcija neparna,

(4) Nule: $x = 0$.

Ako je $k > 0$, tada je:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća funkcija za $x \in D$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

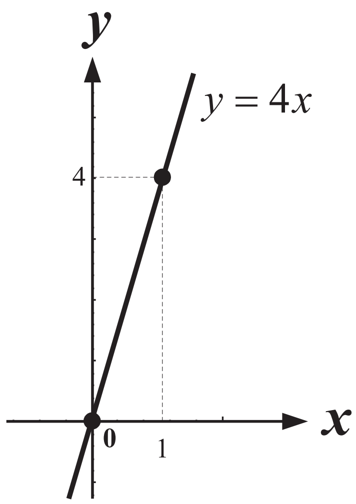
U slučaju da je $k < 0$, tada je:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) < 0$ za $x \in (0, +\infty)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća funkcija za $x \in D$,

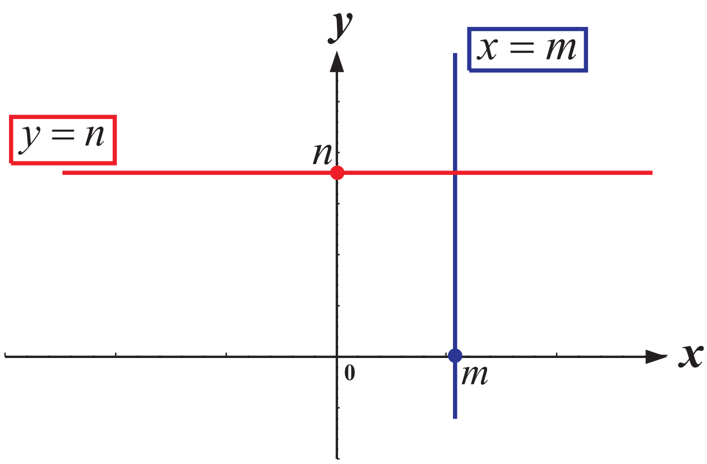
(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Primer 2.2.3 Na slici 2.9 skicirana je prava $y = 4x$.



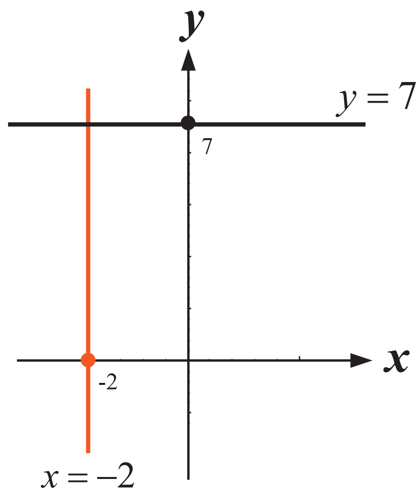
Slika 2.9: Linearna funkcija $y = 4x$.

Za pravu $y = n$, na y-osi obeleži se tačka n i povuče se prava paralelna sa x-osom. U slučaju prave $x = m$, na x-osi obeleži se tačka m i povuče se prava paralelna sa y-osom (slika 2.10).



Slika 2.10: Prave $y = n$ i $x = m$.

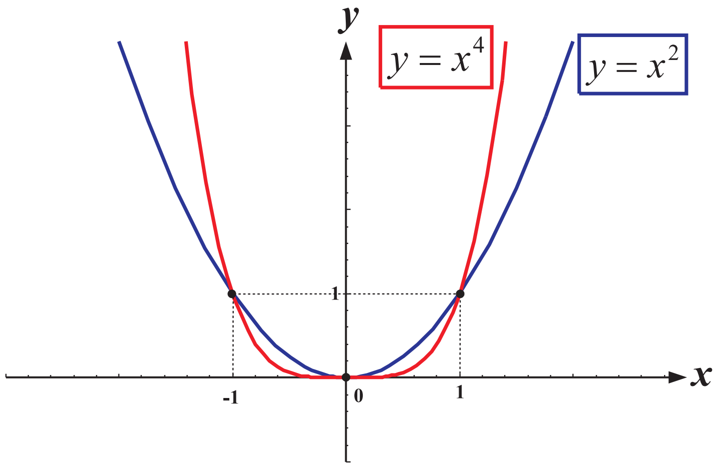
Primer 2.2.4 Na slici 2.11 predstavljene su prave $y = 7$ i $x = -2$.



Slika 2.11: Prave $y = 7$ i $x = -2$.

2.2.2 Stepena funkcija

Stepena funkcija oblika je $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$. Na slici 2.12 prikazane su stepene funkcije ako je eksponent paran prirodan broj.



Slika 2.12: Funkcije $y = x^a$ za $a = 2$ i $a = 4$.

Dakle, ako je eksponent paran prirodan broj, $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, tada je:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$, pa je funkcija parna,

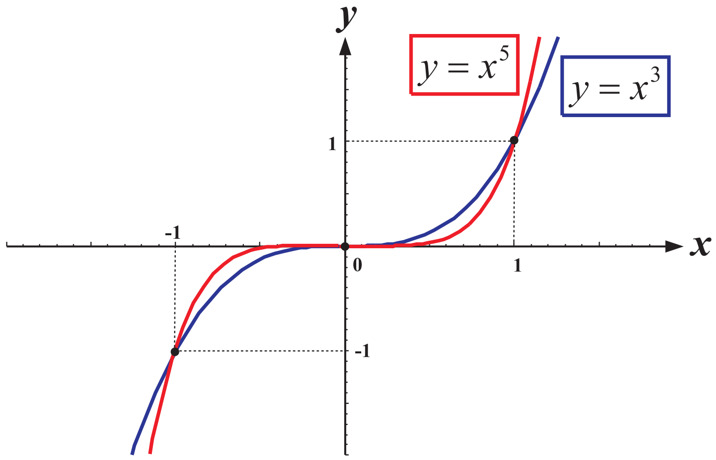
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$, a rastuća za $x \in (0, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = 0$ postoji lokalni i globalni minimum funkcije.

Na slici 2.13 prikazane su stepene funkcije ako je eksponent neparan prirodni broj.



Slika 2.13: Funkcije $y = x^a$ za $a = 3$ i $a = 5$.

Tada, za $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, važi i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x)$, pa je funkcija neparna,

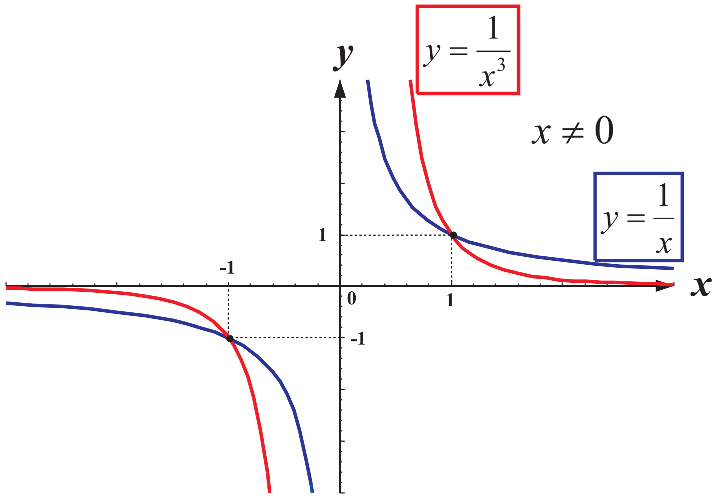
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Ako je eksponent neparan negativan ceo broj, grafici funkcija su predstavljeni na slici 2.14.



Slika 2.14: Funkcije $y = x^a$ za $a = -1$ i $a = -3$.

Tada važi, za $a = -(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{-(2k+1)} = -x^{-(2k+1)} = -f(x)$, pa je funkcija neparna,

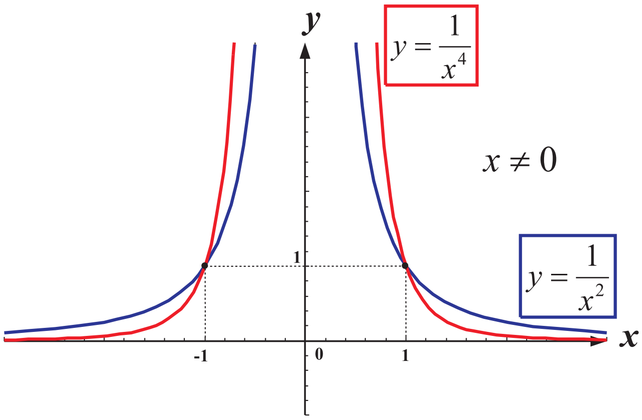
(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Ako je eksponent paran negativan ceo broj, tada je (slika 2.15):



Slika 2.15: Funkcije $y = x^a$ za $a = -2$ i $a = -4$.

A njene osobine su, za $a = -2k$, $k \in \mathbb{N}$:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{-2k} = x^{-2k} = f(x)$, pa je funkcija parna,

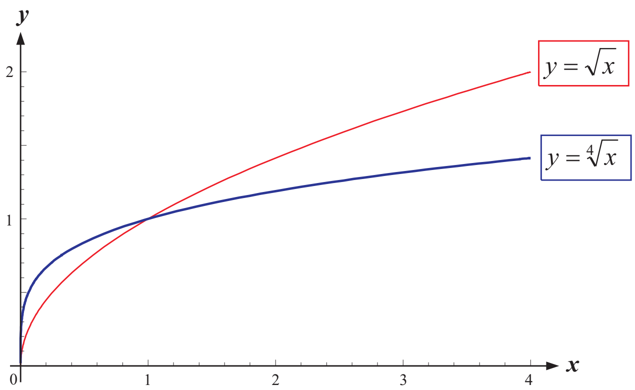
(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća za $x \in (0, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-\infty, 0)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 2.16, skicirana je funkcija $y = a^x$ za $a = 1/2$ i $a = 1/4$.



Slika 2.16: Funkcije $y = x^a$ za $a = 1/2$ i $a = 1/4$.

U slučaju kao na slici 2.16, za $a = 1/(2k)$, $k \in \mathbb{N}$ važi:

(1) Domen: $D = [0, +\infty)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: funkcija nije ni parna ni neparna (domen nije simetričan interval u odnosu na $x = 0$),

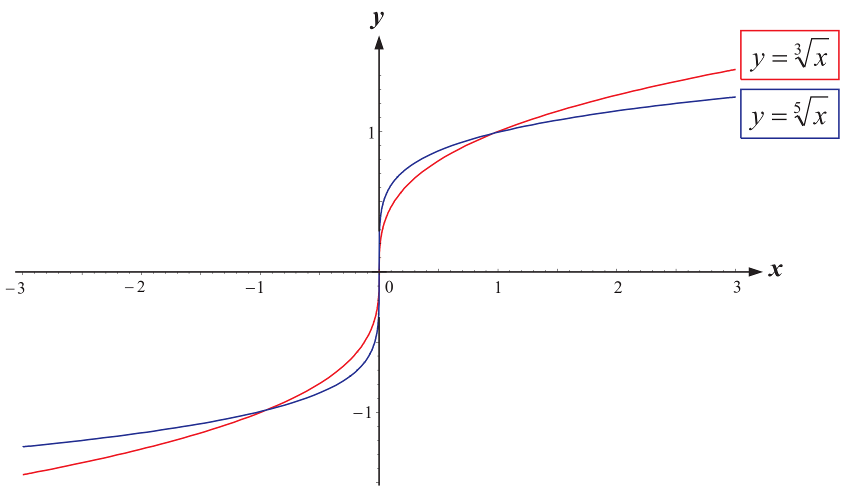
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (0, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = 0$.

Na slici 2.17, skicirana je funkcija $y = a^x$ za $a = 1/3$ i $a = 1/5$. Tada je:



Slika 2.17: Funkcije $y = x^a$ za $a = 1/3$ i $a = 1/5$.

Dakle, za $a = 1/(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{1/(2k+1)} = -x^{1/(2k+1)} = -f(x)$, pa je funkcija neparna,

(4) Nule: $x = 0$,

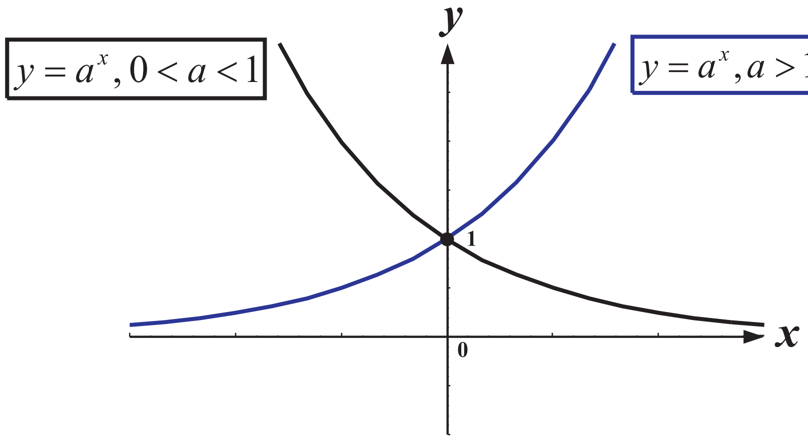
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in D$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

2.2.3 Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, gde je $a > 0$, $a \neq 1$, definisana je za svako $x \in \mathbb{R}$ (slika 2.18).



Slika 2.18: Funkcija $y = a^x$ za $a > 0$ i $a \neq 1$.

Za posmatranu esponencijalnu funkciju važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = a^{-x} \notin \{f(x), -f(x)\}$, pa nije ni parna ni neparna,

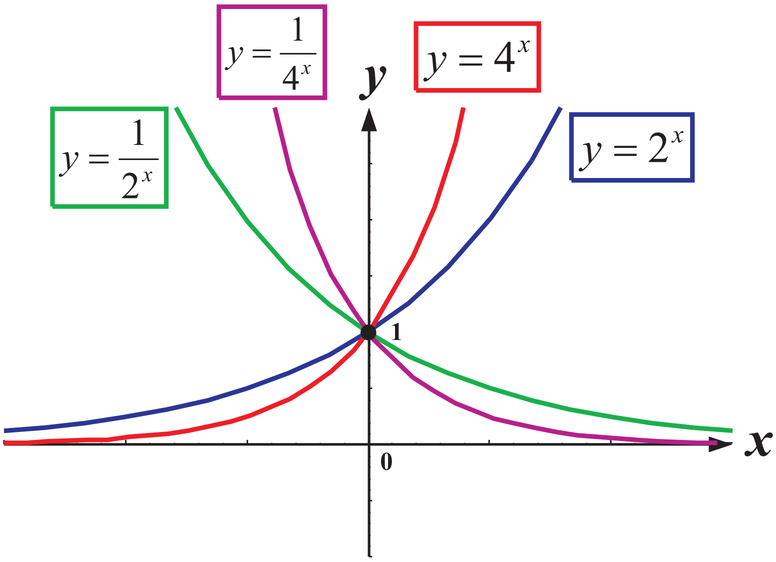
(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: za $a > 1$, $f(x)$ je rastuća za $x \in D$, za $0 < a < 1$, $f(x)$ je opadajuća za $x \in D$,

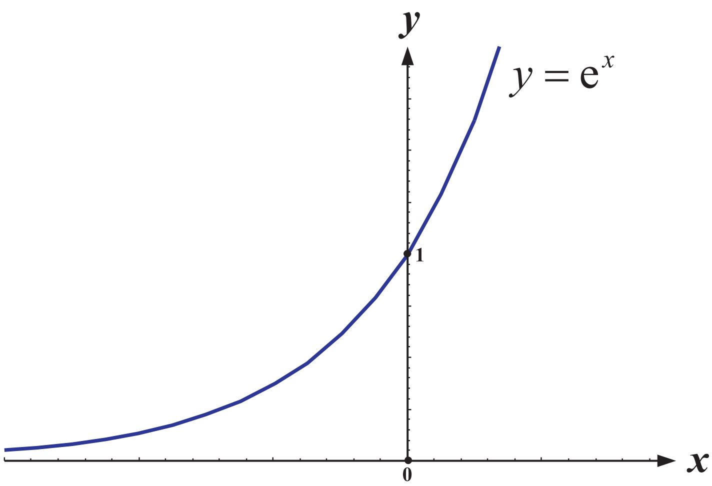
(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 2.19 vidimo kako se ponaša eksponencijalna funkcija za $a \in \{1/4, 1/2, 2, 4\}$,



Slika 2.19: Funkcije $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = (1/2)^x$ i $y = (1/4)^x$.

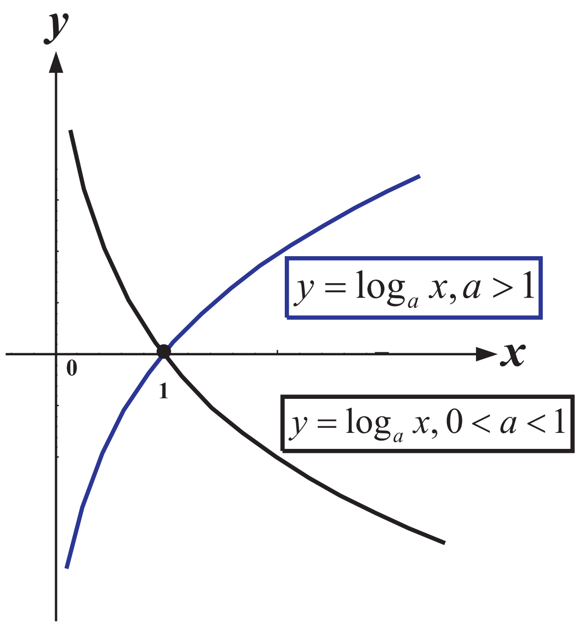
Na slici 2.20 data je funkcija $y = e^x$.



Slika 2.20: Funkcija $y = e^x$.

2.2.4 Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija $y = \log_a x$, za $a > 0$ i $a \neq 1$, definisana je samo za $x > 0$ (slika 2.21).



Slika 2.21: Funkcija $y = \log_a x$ za $a > 0$ i $a \neq 1$.

Za posmatranu logaritamsku funkciju, ako je $a > 0$ i $a \neq 1$ važiće:

(1) Domen: $D = (0, +\infty)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: nije ni parna ni neparna (domen nije simetričan interval u odnosu na $x = 0$),

(4) Nule: $x = 1$,

Ako je $a > 1$, važi:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (0, 1)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (0, +\infty)$,

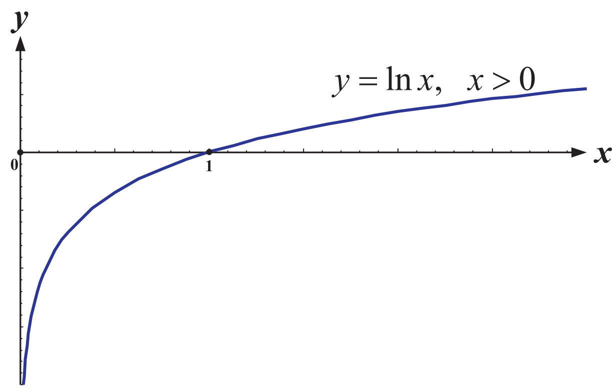
(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Ako je $0 < a < 1$, tada je:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$ za $x \in (1, +\infty)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća za $x \in (0, +\infty)$,

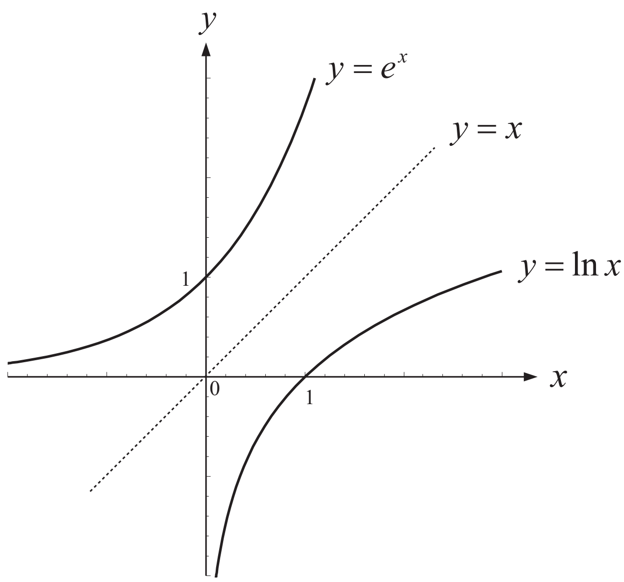
(7) Ekstremne vrednosti: nema.



Slika 2.22: Funkcija $y = \log_a x = \log_e x = \ln x$.

Na slici 2.22 data je logaritamska funkcija za osnovu $a = e$ koja se još naziva prirodni logaritam.

Logaritamska i eksponencijalna funkcija su inverzne funkcije, odnosno, njihovi grafici su simetrični u odnosu na pravu $y = x$. Naime, važi $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$ (slika 2.23 za $a = e$, pogledati primer 1.6.16).



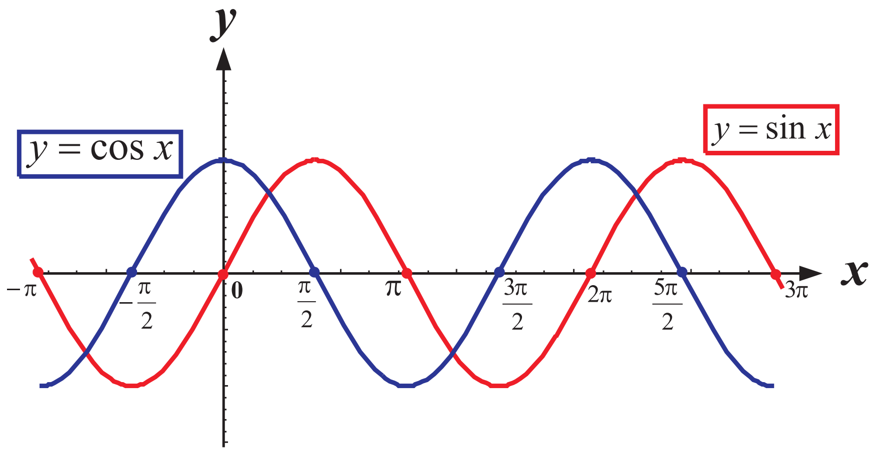
Slika 2.23: Funkcije $y = e^x$, $y = \ln x$ i $y = x$.

Sada ćemo navesti neke od osobina logaritamske funkcije:

- $\log_a x + \log_a y = \log_a (x\,y)$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$
- $\log_a x^b = b \log_a x$
- $\log_{a^b} x = \dfrac{1}{b} \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$

2.2.5 Trigonometrijske funkcije

U trigonometrijske funkcije spadaju $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$. Sinusna i kosinusna funkcija su definisane za svaki realan broj i njihovi grafici nalaze se na slici 2.24.



Slika 2.24: Funkcije $y = \sin\ x$ i $y = \cos\ x$, $-1 \leq y \leq 1$.

Ako je u pitanju funkcija $f(x) = \sin\ x$, tada je osnovni period $w_0 = 2\pi$ i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [-1, 1]$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$, pa je neparna funkcija,

(4) Nule: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, a opadajuća za $x \in (\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: za $x = \pi/2 + 2k\pi$, $f(x)$ ima maksimum, a za $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $f(x)$ ima minimum, $k \in \mathbb{Z}$.

Za funkciju $f(x) = \cos\ x$, osnovni period je takođe $w_0 = 2\pi$ i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [-1, 1]$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, pa je parna funkcija,

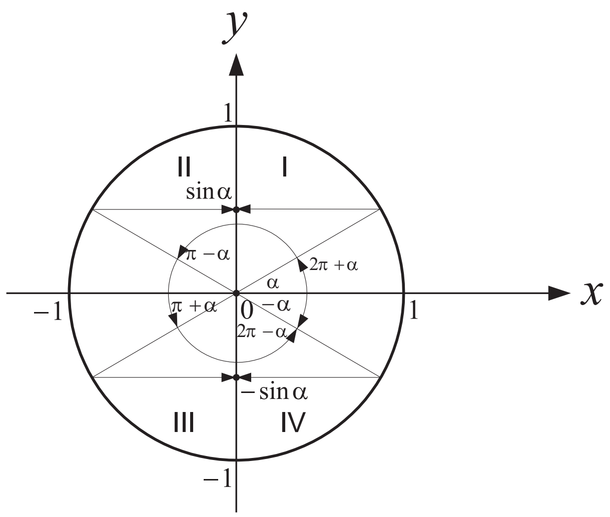
(4) Nule: $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

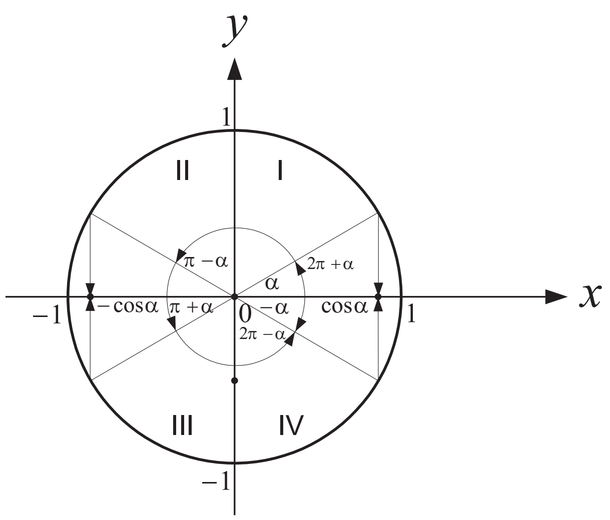
(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi)$, a opadajuća za $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: za $x = 2k\pi$, $f(x)$ ima maksimum, a za $x = \pi + 2k\pi$, $f(x)$ ima minimum, $k \in \mathbb{Z}$.

Na slikama 2.25 i 2.26 dati su trigonometrijski krugovi za sinusnu i kosinusnu funkciju, redom.



Slika 2.25: Trigonometrijski krug za $y = \sin x$ i vrednosti funkcije u sva četiri kvadranta.

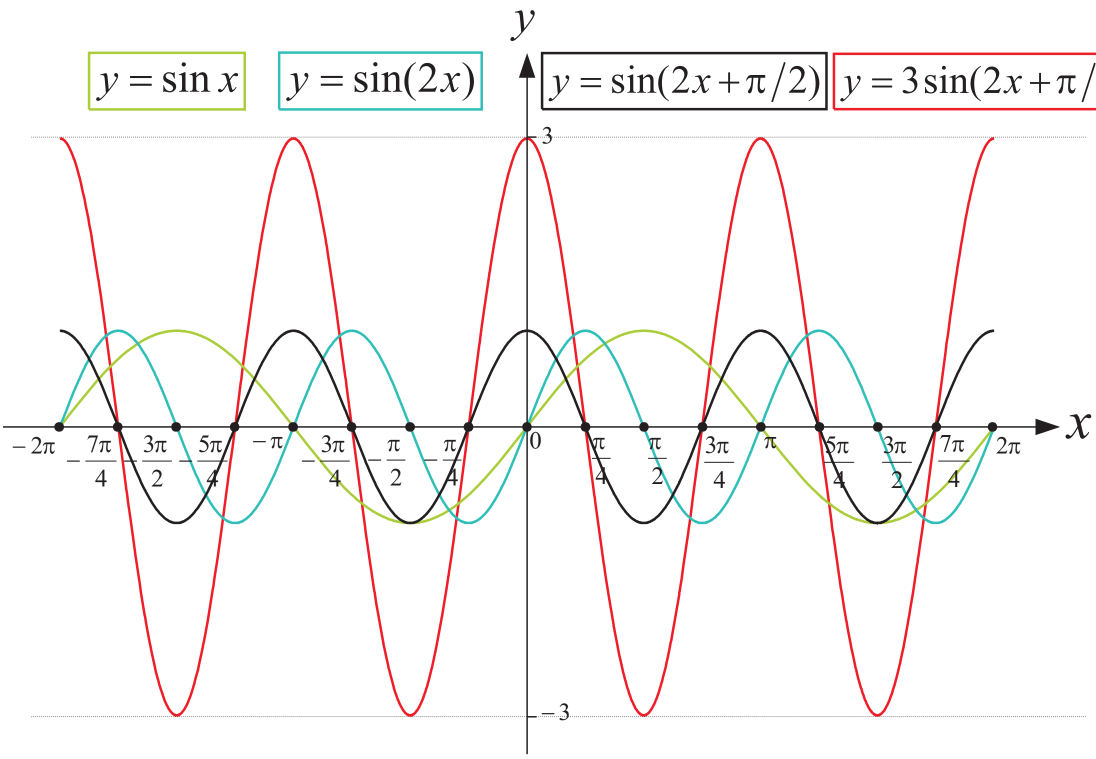


Slika 2.26: Trigonometrijski krug za $y = \cos x$ i vrednosti funkcije u sva četiri kvadranta.

Ako posmatramo funkciju, recimo, $y = a\sin(bx + c)$, $a, b \neq 0$, tada je osnovni period $\omega_0 = 2\pi/|b|$, $-|a| \leq y \leq |a|$, i nule su u $x = (k\pi - c)/b$, $k \in \mathbb{Z}$. Isto važi i za funkciju $y = a\cos(bx + c)$, samo što su nule u $x = (\pi/2 + k\pi - c)/b$, $k \in \mathbb{Z}$.

Primer 2.2.5 Skicirati funkciju $y = 3\sin(2x + \pi/2)$ za $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Rešenje. Na slici 2.27 predstavljena je funkcija $y = 3\sin(2x + \pi/2)$ za $x \in [-2\pi, 2\pi]$.



Slika 2.27: Grafici funkcija $y = \sin x$, $y = \sin(2x)$, $y = \sin(2x + \pi/2)$ i $y = 3\sin(2x + \pi/2)$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

Osnovni period date funkcije je $w_0 = 2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [-3, 3]$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = 3\sin(2(-x) + \pi/2) = 3\sin(\pi/2 - 2x) = 3\cos(2x) = 3\sin(2x + \pi/2) = f(x)$, pa je funkcija parna (pogledati tabelu 2.2),

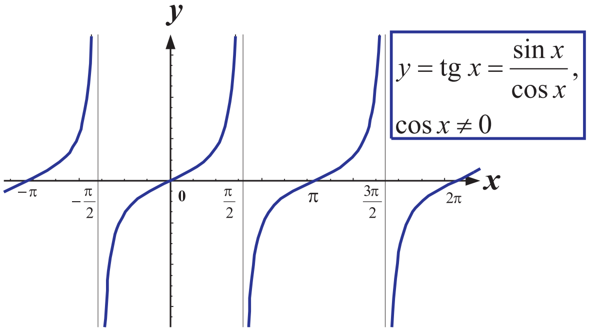
(4) Nule: $x = (k\pi - c)/b = (k\pi - \pi/2)/2 = -\pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, a opadajuća za $x \in (0 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: za $x = 0 + k\pi$, $f(x)$ ima maksimum, a za $x = \pi/2 + k\pi$, $f(x)$ ima minimum, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, odnosno $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, data je na slici 2.28.



Slika 2.28: Funkcija $y = \operatorname{tg}\, x$.

Dakle, za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$, osnovni period je $w_0 = \pi$ i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x = -f(x)$, pa je neparna funkcija,

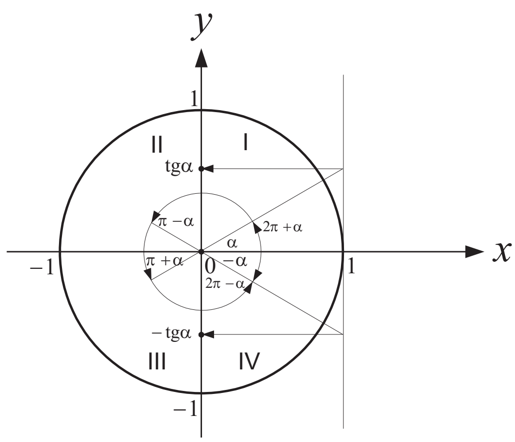
(4) Nule: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(6) Monotonost: funkcija $f(x)$ je samo rastuća i to za $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

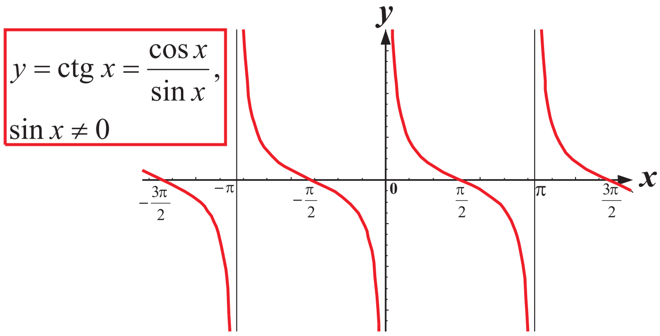
Na slici 2.29 dat je trigonometrijski krug za funkciju $y = \operatorname{tg} x$.



Slika 2.29: Trigonometrijski krug za $y = \operatorname{tg} x$ i vrednosti funkcije u sva četiri kvadranta.

Za funkciju $y = a\,\mathrm{tg}(bx + c)$, $a, b \neq 0$, osnovni period je $\omega_0 = \pi/|b|$. Definisana je za svako x koje zadovoljava $-\pi/2 + k\pi - c < b\,x < \pi/2 + k\pi - c$, i nule su u $x = (k\pi - c)/b$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija $y = \mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, sin $x \neq 0$, odnosno $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, data je na slici 2.30.



Slika 2.30: Funkcija $y = \mathrm{ctg}\ x$.

Za funkciju $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$, osnovni period je $w_0 = \pi$, nema ekstrema i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = \mathrm{ctg}(-x) = -\,\mathrm{ctg}\, x = -f(x)$, pa je neparna funkcija,

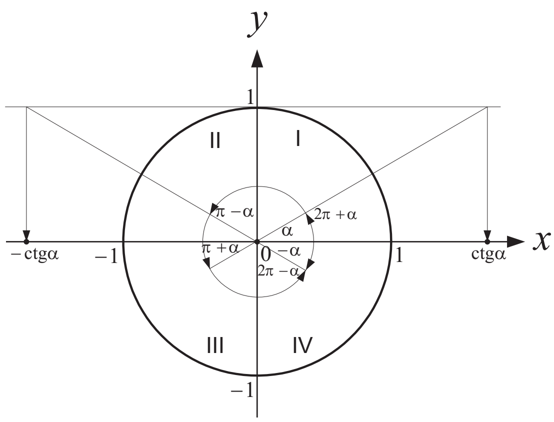
(4) Nule: $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(6) Monotonost: funkcija $f(x)$ je samo opadajuća i to za $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 2.31 dat je trigonometrijski krug za funkciju $y = \mathrm{ctg}\, x$.



Slika 2.31: Trigonometrijski krug za $y = \mathrm{ctg}\, x$ i vrednosti funkciju u sva četiri kvadranta.

Za funkciju $y = a\operatorname{ctg}(bx+c)$, $a, b \neq 0$, osnovni period je $\omega_0 = \pi/|b|$, $k\pi - c < b\,x < \pi + k\pi - c$ i nule su $x = (\pi/2 + k\pi - c)/b$, $k \in \mathbb{Z}$.

U tabeli 2.1 date su vrednosti trigonometrijskih funkcija za neke uglove.

Tabela 2.1: Osnovne vrednosti trigonometrijskih funkcija (π radijana jednako je 180°).

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-$	0	$-$

Ako je ugao α u prvom kvadrantu, tada su vrednosti trigonometrijskih funkcija u preostalim kvadrantima date u tabeli 2.2.

Tabela 2.2: Vrednosti trigonometrijskih funkcija u svim kvadrantima.

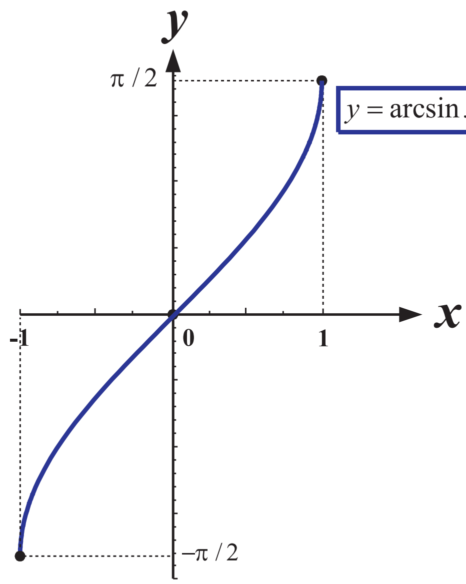
α	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Navešćemo sada neke trigonometrijske formule koje ćemo koristiti u ovom udžbeniku.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$,
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,
- $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$,
- $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$,
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$,
- $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}$.

2.2.6 Ciklometrijske funkcije

Ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija. Na primer, ako je $\sin\alpha = a$, $-1 \leq a \leq 1$, tada je arcsin $a = \alpha$ (čita se „arkus sinus”). Slično važi i za preostale ciklometrijske funkcije. Na slici 2.32 dat je grafik funkcije $y = \arcsin x$.



Slika 2.32: Funkcija $y =$ arcsin x.

Važi:

(1) Domen: $D = [-1, 1]$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [-\pi/2, \pi/2]$,

(3) Parnost i neparnost:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arcsin(-x) = \arcsin(-\sin(\arcsin x)) = \arcsin(\sin(-\arcsin x)) = -\arcsin x \\ &= -f(x)\,, \end{aligned}$$

pa je neparna funkcija,

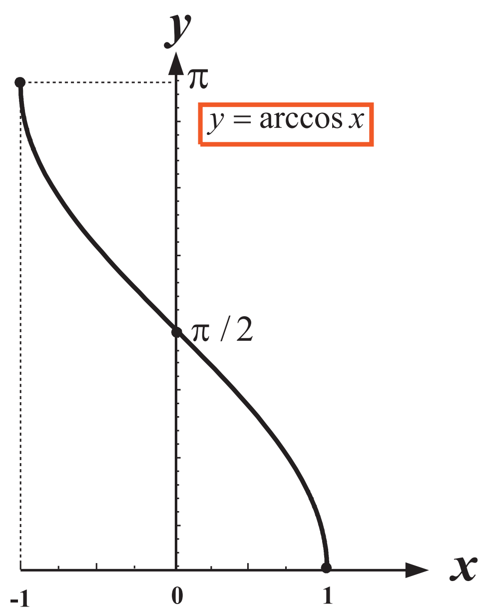
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, 1]$, $f(x) < 0$ za $x \in [-1, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-1, 1)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = -1$, a maksimum u $x = 1$.

Na slici 2.33 dat je grafik funkcije $\arccos x$.



Slika 2.33: Funkcija $y = \arccos\, x$.

Sada je:

(1) Domen: $D = [-1, 1]$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [0, \pi]$,

(3) Parnost i neparnost:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arccos(-x) = \arccos(-\cos(\arccos x)) = \arccos(\cos(\pi - \arccos x)) \\ &= \pi - \arccos x \notin \{f(x), -f(x)\}\,, \end{aligned}$$

pa nije ni parna ni neneparna,

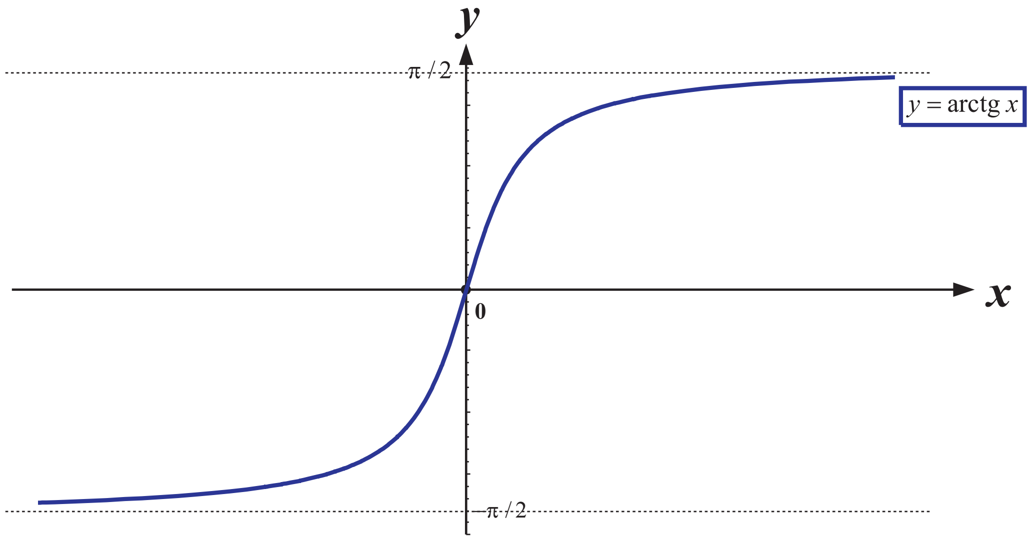
(4) Nule: $x = 1$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, \pi]$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-1, 1)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = 1$, a maksimum u $x = -1$.

Na slici 2.34 dat je grafik funkcije $\operatorname{arctg} x$.



Slika 2.34: Funkcija $y = \operatorname{arctg}\, x$.

Vidimo da je:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-\pi/2, \pi/2)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \operatorname{arctg}(-x) = \operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x)) = -\operatorname{arctg} x = -f(x)\,,$$

pa je neparna funkcija,

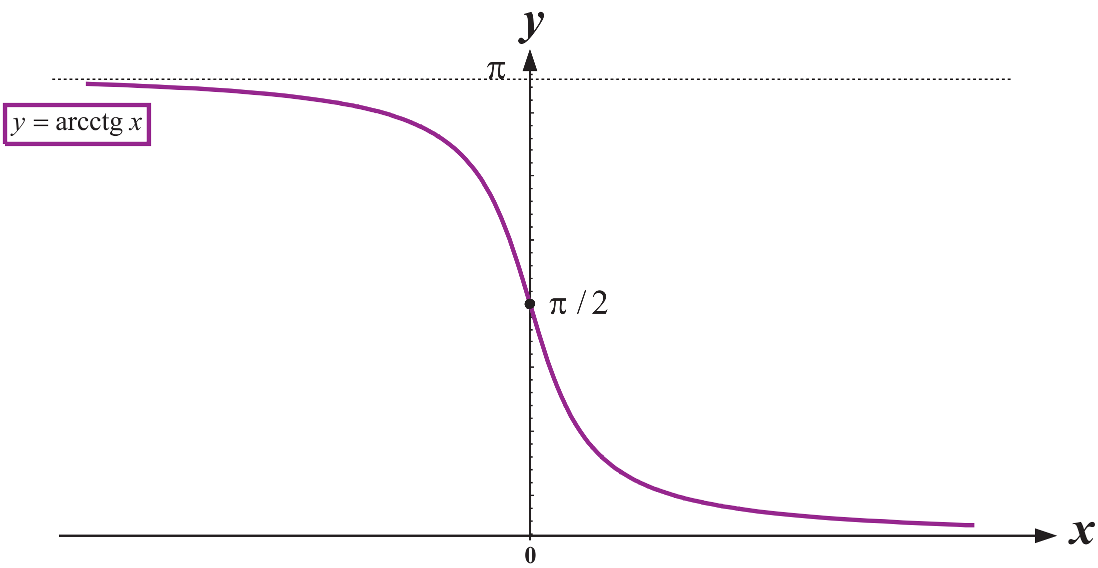
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 2.35 dat je grafik funkcije $\operatorname{arcctg} x$.



Slika 2.35: Funkcija $y = \operatorname{arcctg} x$.

Na kraju:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (0, \pi)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \operatorname{arcctg}(-x) = \operatorname{arcctg}(-\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x)) \\ &= \pi - \operatorname{arcctg} x \notin \{f(x), -f(x)\}, \end{aligned}$$

pa nije ni parna ni neneparna,

(4) Nule: nema,

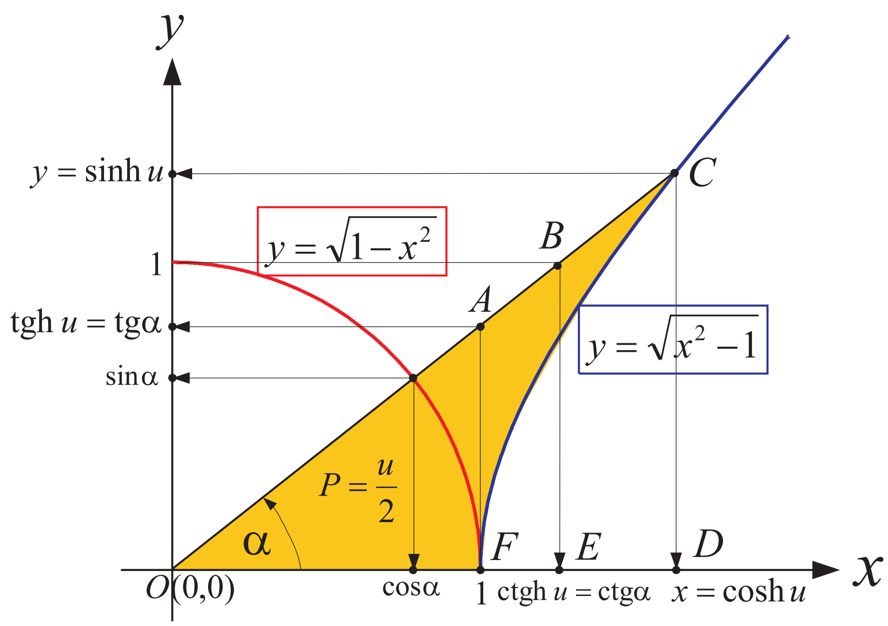
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

2.3 Hiperboličke i area funkcije

Hiperboličke funkcije (slika 2.36) koje ćemo ovde navesti su hiperbolički sinus ($\sinh x$), hiperbolički kosinus ($\cosh x$), hiperbolički tangens ($\operatorname{tgh} x$) i hiperbolički kotangens ($\operatorname{ctgh} x$).



Slika 2.36: Hiperboličke funkcije $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ i $\operatorname{ctgh} x$ u $x-y$ ravni.

Posmatrajmo sliku 2.36. Trigonometrijska kružnica ima jednačinu $x^2+y^2=1$, pa je $y=\sqrt{1-x^2}$ u prvom kvadrantu. Hiperbola ima jednačinu $x^2-y^2=1$, pa je $y=\sqrt{x^2-1}$, za $x\geq 1, y\geq 0$. Obeležićemo površinu krivolinijskog trougla OFC sa $P=u/2$ i ona je jednaka razlici površina trougla ODC ($P_{\triangle ODC}=\frac{1}{2}\,xy=\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}$) i krivolinijskog trougla FDC (primer 7.3.4 za $a=1$). Dobija se da je

$$P=P(x)=\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right),$$

odnosno

$$P(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Rightarrow\frac{u}{2}=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Rightarrow u(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Odavde, ako se izrazi $x=x(u)$, tada se hiperbolički kosinus definiše kao

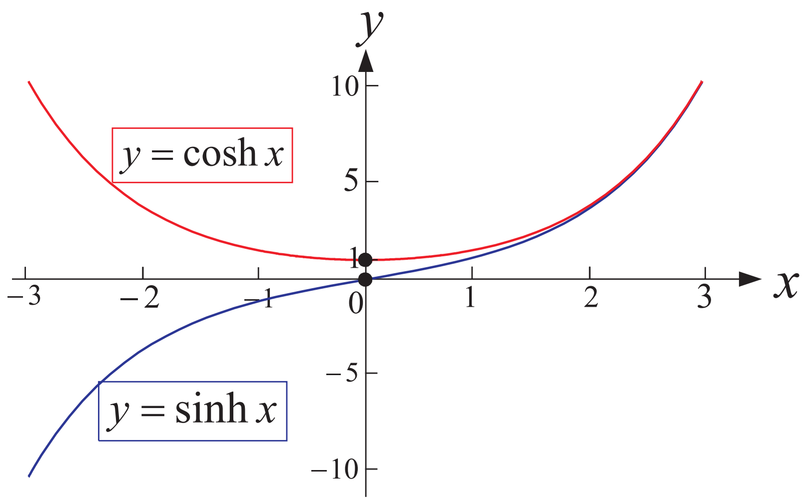
$$x=x(u)=\frac{e^u+e^{-u}}{2}=:\cosh u\,.$$

Nakon uvrštavanja $x(u)$ u jednačinu hiperbole, dobija se

$$y=y(u)=\frac{e^u-e^{-u}}{2}=:\sinh u\,.$$

Dakle, tako se definišu hiperbolički sinus i kosinus.

Na slici 2.37 dati su grafici funkcija $y = \sinh x$ i $y = \cosh x$.



Slika 2.37: Funkcije $y = \sinh\, x$ i $y = \cosh\, x$.

Za funkciju $y = \sinh x$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh\, x = -f(x)\,,$$

pa je neneparna,

(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Osobine funkcije $y = \cosh x$ su:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [1, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh\, x\,,$$

pa je parna,

(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$,

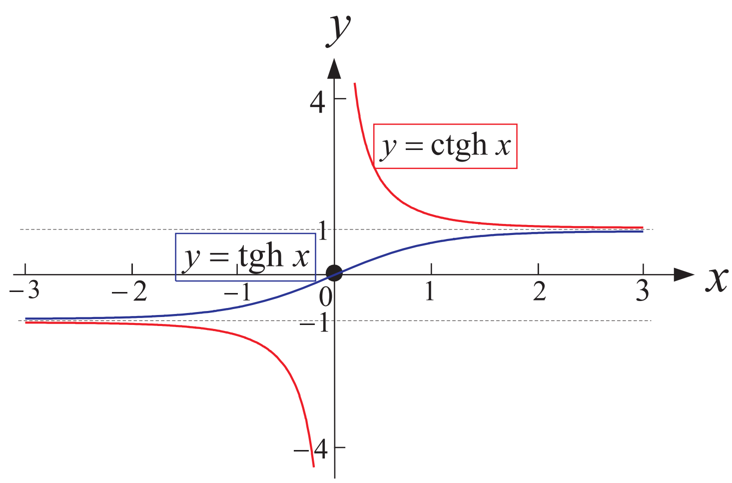
(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (0, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = 0$.

Hiperbolički tangens i kotangens definišu se kao

$$\text{tgh } u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \quad \text{ctgh } u = \frac{\cosh u}{\sinh u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}.$$

Na slici 2.38 dati su grafici funkcija $y = \text{tgh}\, x$ i $y = \text{ctgh}\, x$.



Slika 2.38: Funkcije $y = \text{tgh } x$ i $y = \text{ctgh } x$.

Za $y = \text{tgh } x$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-1, 1)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \text{tgh}\,(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\,\text{tgh } x = -f(x)\,,$$

pa je neparna,

(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

I, na kraju, funkcija $y = \text{ctgh}\ x$ ima osobine:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \text{ctgh}\,(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh x}{-\sinh x} = -\,\text{ctgh}\ x = -f(x)\,,$$

pa je neparna,

(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Neke od formula koje važe za hiperbolične funkcije su:

- $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$,
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$,
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$,
- $\text{tgh}\,(x \pm y) = \dfrac{\text{tgh}\ x \pm \text{tgh}\ y}{1 \pm \text{tgh}\ x\, \text{tgh}\ y}$,
- $\text{ctgh}\,(x \pm y) = \dfrac{1 \pm \text{ctgh}\ x\, \text{ctgh}\ y}{\text{ctgh}\ x \pm \text{ctgh}\ y}$.

Area funkcije su inverzne hiperboličke funkcije:

- area-sinus ($\text{arcsinh}\, x$),
- area-kosinus ($\text{arccosh}\, x$),
- area-tangens ($\text{arctgh}\, x$) i
- area-kotangens ($\text{arcctgh}\, x$).

One se često javljaju pri integraljenju racionalnih funkcija. Dobile su naziv jer predstavljaju površinu krivolinijskog trougla. Naime, kod $\sinh u$, u je zapravo dvostruka površina (area - površina na latinskom) krivolinijskog trougla OFC (slika 2.36).

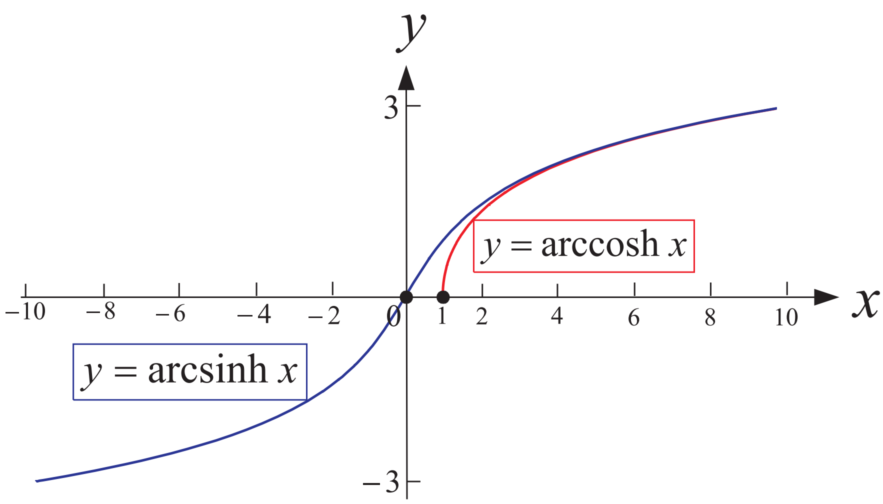
Inverzni hiperbolički sinus definiše se kao

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

a inverzni hiperbolični kosinus kao

$$\operatorname{arccosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Na slici 2.39 dati su grafici funkcija $y = \operatorname{arcsinh} x$ i $y = \operatorname{arccosh} x$.



Slika 2.39: Funkcije $y = \operatorname{arcsinh}\, x$ i $y = \operatorname{arccosh}\, x$.

Za $y = \operatorname{arcsinh} x$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \log\left(\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \log\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}} = \log\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f(x) \end{aligned}$$

pa je neneparna,

(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Ako su posmatra $y = \operatorname{arccosh} x$, onda je:

(1) Domen: $D = [1, +\infty)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: domen nije simetričan skup pa nije ni parna ni neparna funkcija,

(4) Nule: $x = 1$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$,

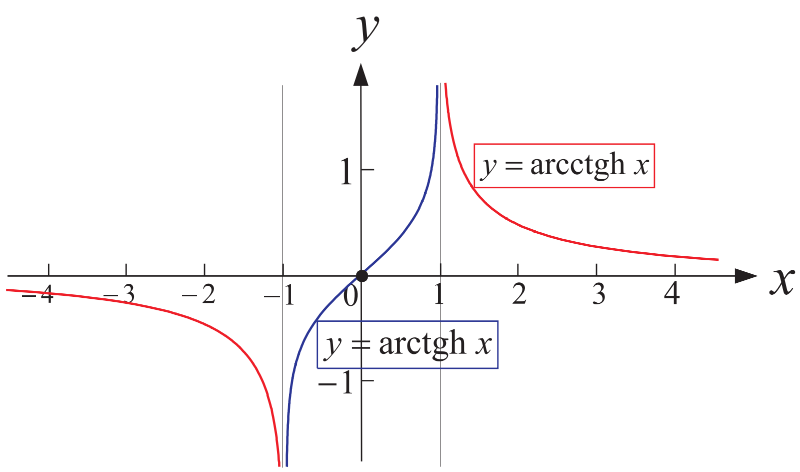
(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (1, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = 1$.

Dalje, inverzni hiperbolički tangens i kotagens su

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{arcctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Na slici 2.40 dati su grafici funkcija $y = \operatorname{arctgh} x$ i $y = \operatorname{arcctgh} x$.



Slika 2.40: Funkcije $y = \operatorname{arctgh} x$ i $y = \operatorname{arcctgh} x$.

Za $y = \operatorname{arctgh} x$ važi:

(1) Domen: $D = (-1, 1)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$$

pa je neneparna,

(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-1, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-1, 1)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema,

a za inverzni hiperbolički kotangens, $y = \operatorname{arcctgh} x$:

(1) Domen: $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{-(x-1)}{-(x+1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} = -\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = -f(x)$$

pa je neparna,

(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -1)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

2.4 Polinomi

Definicija 2.4.1 *Polinom n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}_0$, je funkcija $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,, a_n \neq 0 \,, \tag{2.1}$$

gde su a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n koeficijenti polinoma iz skupa $\mathbb{C}$.

Ipak, u ovom udžbeniku, ograničićemo se na polinome $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, tako da će njegovi koeficijenti biti realni brojevi. Koeficijent a_0 naziva se slobodan član.

Primer 2.4.2 Polinom $P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ je trećeg stepena, $a_3 = 3$, $a_2 = -4$, $a_1 = 5$ i $a_0 = -7$.

Količnik dva polinoma P_n i Q_m u oznaci $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ naziva se racionalna funkcija (ako je $m > n$, tada je R prava racionalna funkcija).

Primer 2.4.3 Polinom $R(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^3 + 2}$ je prava racionalna funkcija.

Ako racionalna funkcija nije prava (za $n \geq m$), tada se ona može predstaviti kao zbir polinoma stepena $n - m$ i prave racionalne funkcije.

Primer 2.4.4 Predstaviti racionalnu funkciju $R(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 8}{x^2 + 2}$ preko zbira polinoma i prave racionalna funkcije.

Rešenje. Podelimo polinome $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 8$ i $Q_2(x) = x^2 + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (x^4 & -\,2x^3 & +\,x^2 & -\,3x & +\,8) : (x^2 + 2) = x^2 - 2x - 1 \\
- & & & & & \\
 & x^4 & & +\,2x^2 & & \\
\hline
 & & -\,2x^3 & -\,x^2 & -\,3x & +\,8 \\
- & & & & & \\
 & & -\,2x^3 & & -\,4x & \\
\hline
 & & & -\,x^2 & +\,x & +\,8 \\
- & & & & & \\
 & & & -\,x^2 & & -\,2 \\
\hline
 & & & & x & +\,10
\end{array}
$$

pa je tada

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 8}{x^2 + 2} = x^2 - 2x - 1 + \frac{x + 10}{x^2 + 2}\,.$$

Primetimo da se polinom P_4 može zapisati kao

$$P_4(x) = (x^2 - 2x - 1)\, Q_2(x) + x + 10\,.$$

Tačka $x_0 \in \mathbb{C}$ je nula polinoma $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ako je $P_n(x_0) = 0$. *Osnovni stav algebre* je da svaki polinom n-tog stepena ima tačno n nula u skupu kompleksnih brojeva, među kojima može biti i jednakih (višestrukih) nula. Ako nule polinoma obeležimo sa x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tada je

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)\,.$$

Ako $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tada se njegova faktorizacija svodi na (biće nam potrebna kod integraljenja racionalnih funkcija)

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_l)(x^2 + b_1 x + c_1)(x^2 + b_2 x + c_2) \cdot \dots \cdot (x^2 + b_s x + c_s)\,,$$

gde je $l + 2s = n$ i za svako $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ važi $b_i^2 - 4c_i < 0$.

Primer 2.4.5 Polinom $P_3(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ se, u skupu realnih brojeva, faktorizuje kao

$$P_3(x) = x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2(x + 2) + x(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 + x + 2)\,.$$

Za polinom $x^2 + x + 2$ važi da se ne može više rastaviti na proizvod polinoma prvog stepena jer je $b^2 - 4c = 1 - 8 = -7 < 0$ (nesvodljiv je).

Kandidat za racionalnu nulu polinoma je svaki broj p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, za koji važi da p deli slobodni član a_0 polinoma P_n iz (2.1), a q deli a_n.

Primer 2.4.6 Odrediti kandidate za racionalne nule polinoma

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6\,.$$

Rešenje. Primetimo prvo da je $a_4 = 2$ i $a_0 = 6$. Broj p deli a_0 pa važi $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, dok q deli a_4 te je $q \in \{1, 2\}$. Dakle, kandidati za racionalne nule polinoma su

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 6\right\}\,.$$

Postupak kojim se proverava da li je p/q nula polinoma dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 2.4.7 *Neka je dat polinom* $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ *koji delimo polinomom prvog stepena* $x - x_0$. *Tada važi* $P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + r = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} b_i\, x^i + r$, *gde je* r *ostatak pri tom deljenju i gde su* b_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *nepoznati koeficijenti. Tada je*

$$b_{n-1} = a_n,\ \ldots,\ b_i = b_{i+1}\cdot x_0 + a_{i+1},\ \ldots,\ b_0 = b_1\cdot x_0 + a_1,\ r = b_0\cdot x_0 + a_0$$

za $i = 1, 2, \ldots, n-2$. *Važi i: 1)* $P(x_0) = r$*; 2) ako je* $P(x_0) = 0$*, tada je* $P(x)$ *je deljiv polinomom* $x - x_0$ *i tačka* $x = x_0$ *je nula polinoma.*

Kada se proveraju racionalne nule polinoma, uobičajeno je da se napravi shema, poznatija kao Hornerova[1] shema, na sledeći način:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_0	r	$x = x_0$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = b_{n-1}\cdot x_0 + a_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = b_1\cdot x_0 + a_1$	$b_0\cdot x_0 + a_0$	

Primer 2.4.8 Odrediti racionalne nule polinoma

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6$$

i rastaviti ga na činioce.

Rešenje. U primeru 2.4.6 odredili smo kandidate za racionalne nule datog polinoma i oni su

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 6\,.$$

Ako je zbir svih koeficijenata polinoma jednak nuli $(2 - 3 - 12 + 7 + 6 = 0)$, to znači da je $x_1 = 1$ sigurno jedna nula polinoma. Neka to bude početno x.

2	-3	-12	7	6	r	$x = 1$	
	2	-1	-13	-6	0		$P(x) = (x-1)(2x^3 - x^2 - 13x - 6) + 0$

Preostale kandidate biramo iz skupa kandidata i nastavljamo sa shemom i posmatramo novodobijene koeficijente i njih sada tretiramo kao poznate, tj. tražimo nule polinoma $2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

2	-3	-12	7	6	r	$x = 1$	
	2	-1	-13	-6	0	$x = -2$	$P(x) = (x-1)(2x^3 - x^2 - 13x - 6)$
		2	-5	-3	0		$P(x) = (x-1)(x+2)(2x^2 - 5x - 3)$

[1] Vilijam Džordž Horner (1786-1837) - pogledati poglavlje 9.16

Dobili smo da je druga nula $x_2 = -2$. Kako je ostalo tri koeficijenta u tablici (2,−5,3), rešićemo jednačinu

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = 3\,.$$

Sada se $P(x)$ rastavlja kao

$$P(x) = 2(x-1)(x+2)(x-3)(x+\frac{1}{2}) = (x-1)(x+2)(x-3)(2x+1)\,.$$

Hornerova shema je korisna i pri integraljenju racionalnih funkcija u slučaju kada treba imenilac rastaviti na činioce.

2.4.1 Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija je polinom drugog stepena i oblika je $y = ax^2 + bx + c$, gde je $a \neq 0$. Nule kvadratne funkcije su

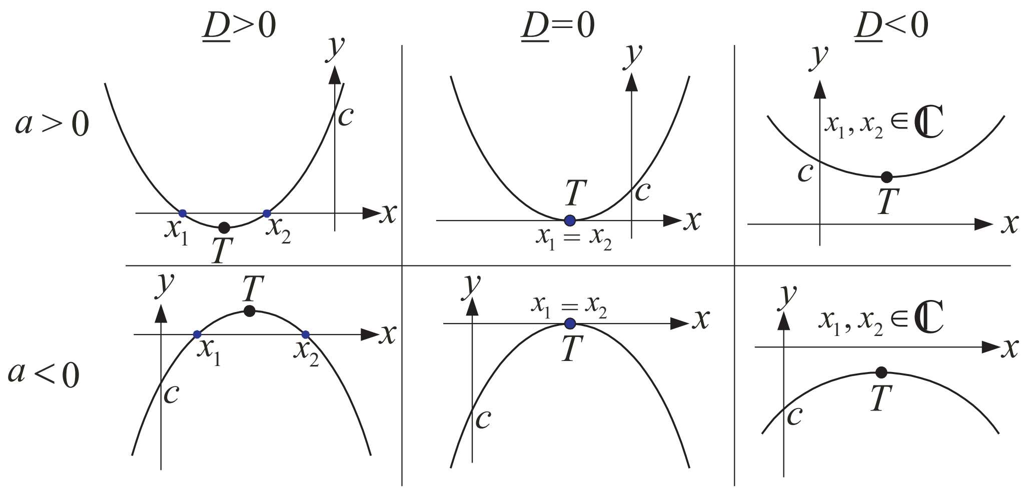
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2.2}$$

pa se kvadratna funcija može rastaviti na činioce kao $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. Kanonski oblik kvadratne funkcije je

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\,.$$

U zavisnosti od a i od diskriminante $\underline{D} = b^2 - 4ac$ imamo šest različitih tipova grafika kvadratne funkcije (slika 2.41). Teme parabole je uvek u tački

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)\,.$$



Slika 2.41: Funkcija $y = ax^2 + bx + c$ za $a \neq 0$.

Ako je $a > 0$ tada je:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c = f(x)$ samo ako je $b = 0$ i tada je parna funkcija.

Ako je $a > 0$ i $\underline{D} > 0$, tada je:

(4) Nule: x_1 i x_2 računamo iz (2.2) i neka je $x_1 < x_2$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$, a rastuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a = (x_1 + x_2)/2$ funkcija ima minimum.

Ako je $a > 0$ i $\underline{D} = 0$, tada je:

(4) Nule: $x_1 = x_2$ računamo iz (2.2),

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$, a rastuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a = x_1 = x_2$ funkcija ima minimum.

Ako je $a > 0$ i $\underline{D} < 0$, tada je:

(4) Nule: nema u skupu $\mathbb{R}$,

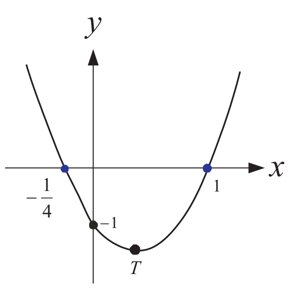
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$, a rastuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a$ funkcija ima minimum.

Primer 2.4.9 Skicirati funkciju $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$ i rastaviti je na činioce u skupu $\mathbb{R}$.

Rešenje. Nule su $x_1 = -1/4$, $x_2 = 1$, a teme parabole je $T(\frac{3}{8}, -\frac{25}{16})$ (slika 2.42).



Slika 2.42: Funkcija $y = 4x^2 - 3x - 1 = 4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$, $T(\frac{3}{8}, -\frac{25}{16})$.

Ako je sada $a < 0$, tada je:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c = f(x)$ samo ako je $b = 0$ i tada je parna funkcija.

Ako je $a < 0$ i $\underline{D} > 0$, tada je:

(4) Nule: x_1 i x_2 računamo iz (2.2) i neka je $x_1 < x_2$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a = (x_1 + x_2)/2$ funkcija ima maksimum.

Ako je $a < 0$ i $\underline{D} = 0$, tada je:

(4) Nule: $x_1 = x_2$ računamo iz (2.2),

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in \emptyset$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a = x_1 = x_2$ funkcija ima maksimum.

Ako je $a < 0$ i $\underline{D} < 0$, tada je:

(4) Nule: nema u skupu $\mathbb{R}$,

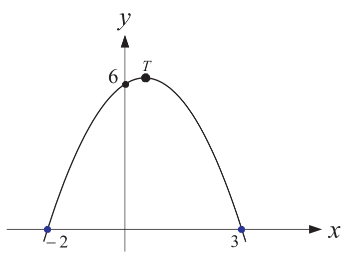
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in \emptyset$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$,

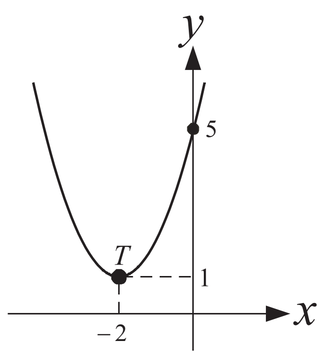
(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a$ funkcija ima maksimum.

Primer 2.4.10 Skicirati funkciju $y = -x^2 + x + 6$ i rastaviti je na činoce u skupu $\mathbb{R}$.

Rešenje. Za funkciju $y = -x^2 + x + 6$, nule su $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, a teme parabole je $T(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$ (slika 2.43).



Slika 2.43: Funkcija $y = -x^2 + x + 6 = -(x + 2)(x - 3)$, $T(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$.



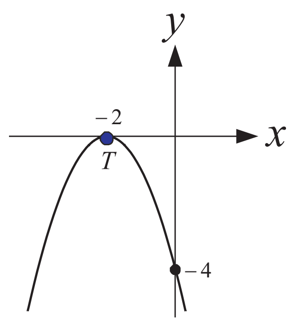
Slika 2.44: Funkcija $y = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$.

Primer 2.4.11 Skicirati funkciju $y = x^2 + 4x + 5$ i rastaviti je na činoce u skupu $\mathbb{R}$.

Rešenje. Za funkciju $y = x^2 + 4x + 5$, nule su kompleksni brojevi, a teme parabole je $T(-2, 1)$ (slika 2.44).

Primer 2.4.12 Skicirati funkciju $y = -x^2 - 4x - 4$ i rastaviti je na činoce u skupu $\mathbb{R}$.

Rešenje. Za funkciju $y = -x^2 - 4x - 4$, nule su $x_1 = x_2 = -2$, a teme parabole je $T(-2, 0)$ (slika 2.45).



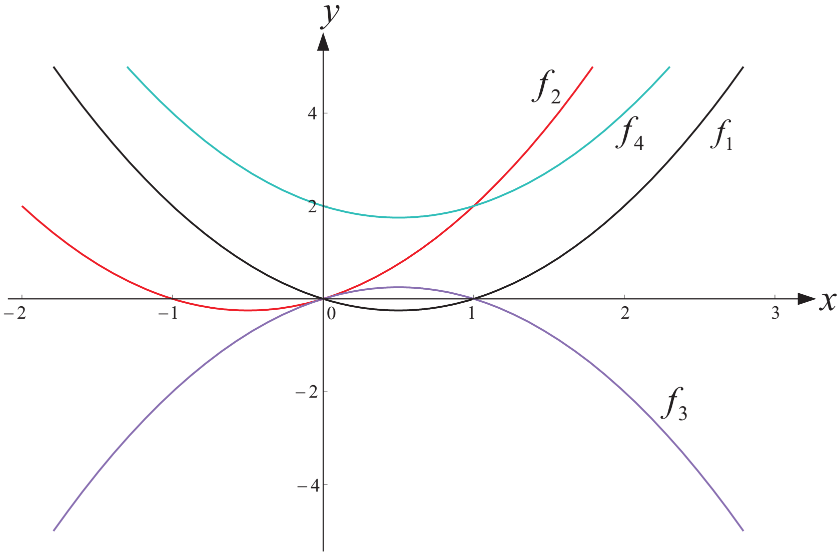
Slika 2.45: Funkcija $y = -x^2 - 4x - 4 = -(x + 2)^2$.

Napomenimo još kako se ponaša grafik funkcije $f(x)$ u sledećim slučajevima:

- grafik funkcije $f(-x)$ je osno simetričan u odnosu na y-osu u odnosu na grafik funkcije $f(x)$,
- grafik funkcije $-f(x)$ je osno simetričan u odnosu na x-osu u odnosu na grafik funkcije $f(x)$,
- grafik funkcije $f(x) + a$ se translira za a po y-osi u odnosu na grafik funkcije $f(x)$ i to ako je $a > 0$ „nagore za a”, a ako je $a < 0$ „nadole za a”,
- grafik funkcije $f(x + a)$ se translira za a po x-osi u odnosu na grafik funkcije $f(x)$ i to ako je $a > 0$ „ulevo za a”, a ako je $a < 0$ „udesno za a”.

Primer 2.4.13 Skicirati funkcije $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = f_1(-x)$, $f_3(x) = -f_1(x)$ i $f_4(x) = f_1(x) + 2$ u jednom Dekartovom koordinatnom sistemu.

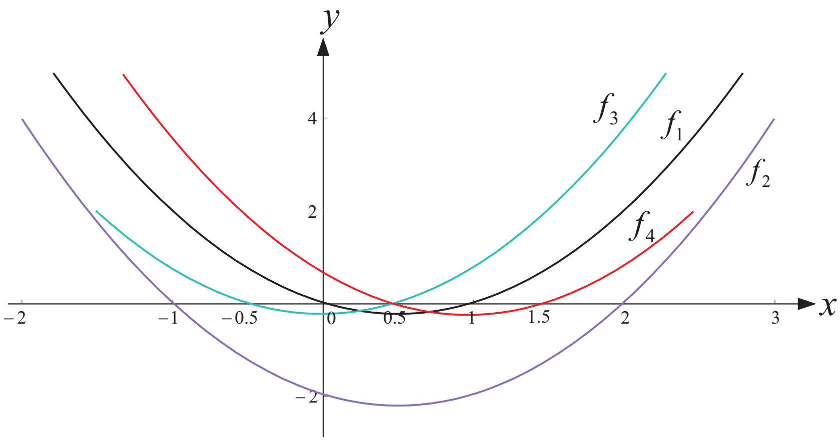
Rešenje.



Slika 2.46: Grafici funkcija $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = f_1(-x)$, $f_3(x) = -f_1(x)$ i $f_4(x) = f_1(x) + 2$

Primer 2.4.14 Skicirati funkcije $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = f_1(x) - 2$, $f_3(x) = f_1(x + 0.5)$, $f_4(x) = f_1(x - 0.5)$ u jednom koordinatnom sistemu.

Rešenje.



Slika 2.47: Grafici funkcija $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = f_1(x) - 2$, $f_3(x) = f_1(x + 0.5)$ i $f_4(x) = f_1(x - 0.5)$

2.5 Funkcija data u parametarskom obliku

Neka $y = f(x)$ dok $x \in (a, b)$. U parametarskom obliku, ova funkcija bi bila data sa

$$x = \psi(t), \quad y = \phi(t), \quad t \in (t_1, t_2), \tag{2.3}$$

gde $\psi, \phi : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$, uz to da je ψ monotona funkcija. Važi $\psi(t_1) = a$ i $\psi(t_2) = b$.

Primer 2.5.1 Zapisati u parametarskom obliku jednačinu kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Rešenje. Definisaćemo $x(t) = r\cos t$ i $y(t) = r\sin t$ za $t \in [0, 2\pi]$. U tabeli 2.3 date su vrednosti za $x(t)$ i $y(t)$ za neko t.

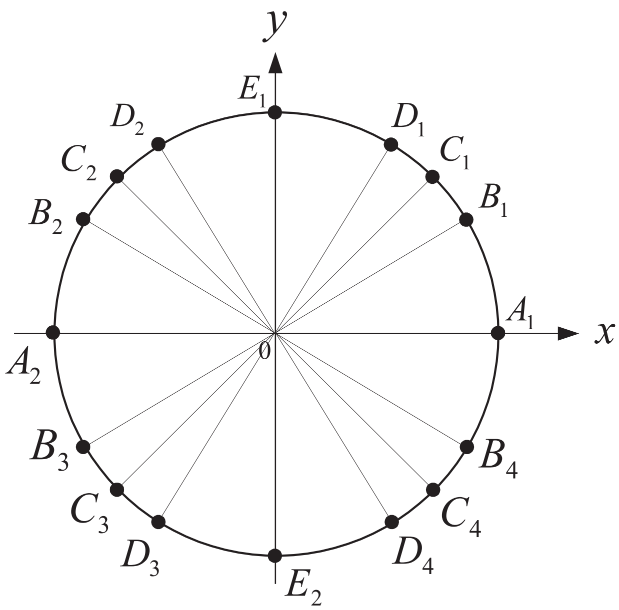
Tabela 2.3: $x(t) = r\cos t$ i $y(t) = r\sin t$ za neke vrednosti t, $0 \le t \le 2\pi$.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$x(t)$	r	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$\frac{r}{2}$	0	$-\frac{r}{2}$	$-\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$-r$
$y(t)$	0	$\frac{r}{2}$	$\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	r	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$\frac{r}{2}$	0

t	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$x(t)$	$-\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{r}{2}$	0	$\frac{r}{2}$	$\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	r
$y(t)$	$-\frac{r}{2}$	$-\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$-r$	$-\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{r}{2}$	0

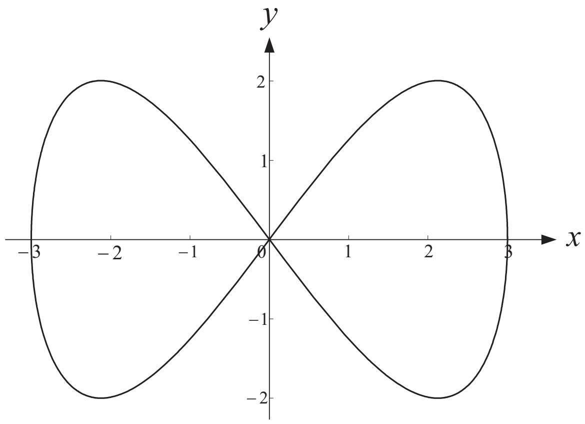
Na slici 2.48, obeležene su tačke iz tabele 2.3:

- $A_1\,(r\cos 0, r\sin 0) = A_1(r, 0)$,
- $B_1\left(r\cos\frac{\pi}{6}, r\sin\frac{\pi}{6}\right) = B_1\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$,
- $B_3\left(r\cos\frac{7\pi}{6}, r\sin\frac{7\pi}{6}\right) = B_3\left(-\frac{r\sqrt{3}}{2}, -\frac{r}{2}\right)$,
- $C_1\left(r\cos\frac{\pi}{4}, r\sin\frac{\pi}{4}\right) = C_1\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$,
- $C_3\left(r\cos\frac{5\pi}{4}, r\sin\frac{5\pi}{4}\right) = C_3\left(-\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$,
- $D_1\left(r\cos\frac{\pi}{3}, r\sin\frac{\pi}{3}\right) = D_1\left(\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $D_3\left(r\cos\frac{4\pi}{3}, r\sin\frac{4\pi}{3}\right) = D_3\left(-\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $E_1\left(r\cos\frac{\pi}{2}, r\sin\frac{\pi}{2}\right) = E_1(0, r)$,
- $A_2\,(r\cos\pi, r\sin\pi) = A_2(-r, 0)$,
- $B_2\left(r\cos\frac{5\pi}{6}, r\sin\frac{5\pi}{6}\right) = B_2\left(-\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$,
- $B_4\left(r\cos\frac{11\pi}{6}, r\sin\frac{11\pi}{6}\right) = B_4\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}, -\frac{r}{2}\right)$,
- $C_2\left(r\cos\frac{3\pi}{4}, r\sin\frac{3\pi}{4}\right) = C_2\left(-\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$,
- $C_4\left(r\cos\frac{7\pi}{4}, r\sin\frac{7\pi}{4}\right) = C_4\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$,
- $D_2\left(r\cos\frac{2\pi}{3}, r\sin\frac{2\pi}{3}\right) = D_2\left(-\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $D_4\left(r\cos\frac{5\pi}{3}, r\sin\frac{5\pi}{3}\right) = D_4\left(\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $E_2\left(r\cos\frac{3\pi}{2}, r\sin\frac{3\pi}{2}\right) = E_2(0, -r)$.



Slika 2.48: Grafik funkcije $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Primer 2.5.2 Grafik parametarski zadate funkcije $x(t) = 3\sin t$, $y(t) = 2\sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$, dat je na slici 2.49.

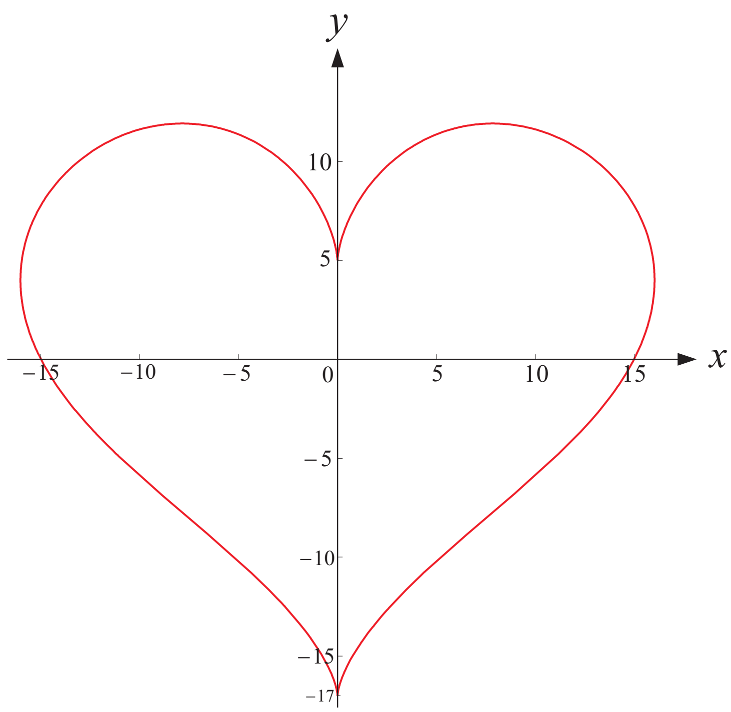


Slika 2.49: Grafik funkcije $x(t) = 3\sin t$, $y(t) = 2\sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Primer 2.5.3 Grafik parametarski zadate funkcije

$$x(t) = 16\sin^3 t\,, \quad y(t) = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

dat je na slici 2.50.



Slika 2.50: Grafik funkcije $x(t) = 16\sin^3 t$, $y(t) = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$, $t \in [0, 2\pi]$.

2.6 Zadaci za vežbu

1. Svaku od sledećih funkcija predstaviti u obliku zbira parne i neparne funkcije: *a)* $g(x) = x^2 + 3x - 2$, *b)* $h(x) = 1 - x^3 - x^4 - 2x$.

2. Dokazati da je zbir dve parne funkcije, parna funkcija, i da je zbir dve neparne funkcije, neparna funkcija.

3. Dokazati da je proizvod dve parne funkcije ili dve neparne funkcije, parna funkcija, i da je proizvod neparne i parne funkcije, neparna funkcija.

Skicirati sledeće funkcije i odrediti domen, skup vrednosti, ispitati parnost i neparnost, odrediti nule, znak, monotonost i ekstreme (ako postoje).

4. $y = -4x + 8$

5. $y = 3x + 18$

6. $y = -5x$

7. $y = 2$

8. $y = (x - 2)^3 + 1$

9. $y = \sqrt[3]{x - 1} + 1$

10. $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} - 2$

11. $y = 4^x + 1$

12. $y = \log_{1/2} x$

13. $y = -\log_3(x-2)$

14. $y = |\ln x|$

15. $y = 2\sin x + 1$

16. $y = -3\,\mathrm{tg}\,x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

17. $y = -2\arccos x + \frac{\pi}{2}$

18. $y = \cosh(x-2)$

19. $y = 2x^2 - 8x + 8$

20. $y = -3x^2 - 7x + 3$

21. $y = -2x^2 + 8x$

22. $y = x^2 - 6x + 13$

Odrediti racionalne nule sledećih polinoma i faktorisati ih nad poljem $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

23. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$. (nule su: $-4, -2, 3$)

24. $P(x) = 4x^5 + 4x^4 - 14x^3 - 14x^2 - 8x - 8$. (nule su: $-2, -1, 2, -\sqrt{2}\,i/2, \sqrt{2}\,i/2$)

25. $P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 18x^2 - 4x - 8$. (nule su: 2-trostruka nula i $-1/2$)

26. $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x$. (nule su: $0, 1, -2, -i, i$)

Skicirati sledeće parametarski zadate funkcije:

27. $x(t) = t - 1,\ y(t) = t + 1,\ t \in \mathbb{R}$. (prava $y = x + 2$)

28. $x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t,\ a, b > 0,\ a \neq b,\ t \in [0, 2\pi]$. (elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$)

29. $x(t) = a(t - \sin t),\ y(t) = a(1 - \cos t),\ a > 0,\ t \in [0, 2\pi]$. (cikloida)

30. $x(t) = a\cos^3 t,\ y(t) = a\sin^3 t,\ a > 0,\ t \in [0, 2\pi]$. (astroida)

GLAVA 3

Nizovi

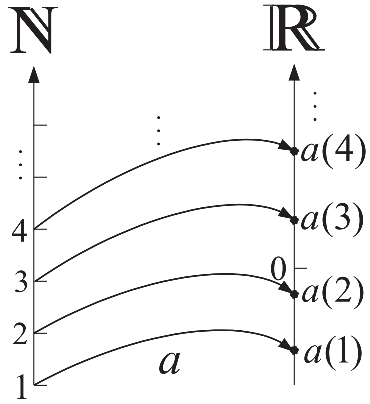
U ovoj glavi definisaćemo niz, biće date neke njegove osobine sa velikim brojem primera i sve u svrhu pripreme za narednu glavu. Određivaće se tačke nagomilavanja niza, koristiće se teorema o postojanju granične vrednosti monotonog i ograničenog niza. Pomoću poznatih graničnih vrednosti niza, biće određivane granične vrednosti zadatih nizova.

3.1 Definicija i primeri nizova

Definicija 3.1.1 *Niz a je funkcija koja preslikava skup prirodnih brojeva u skup realnih brojeva, odnosno*

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Sa $a(n)$ ili a_n obeležavamo n-ti član (opšti član) niza a, $n \in \mathbb{N}$, tako da se niz a može još zapisati i kao $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Slika 3.1: Niz $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Primer 3.1.2 Najjednostavniji primer niza je niz prirodnih brojeva

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

koji se može zapisati i kao $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Ili, recimo, niz neparnih prirodnih brojeva

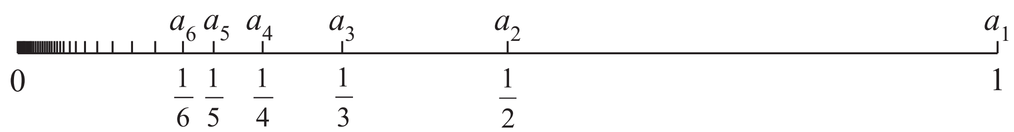
$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

sa opštim članom $b_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

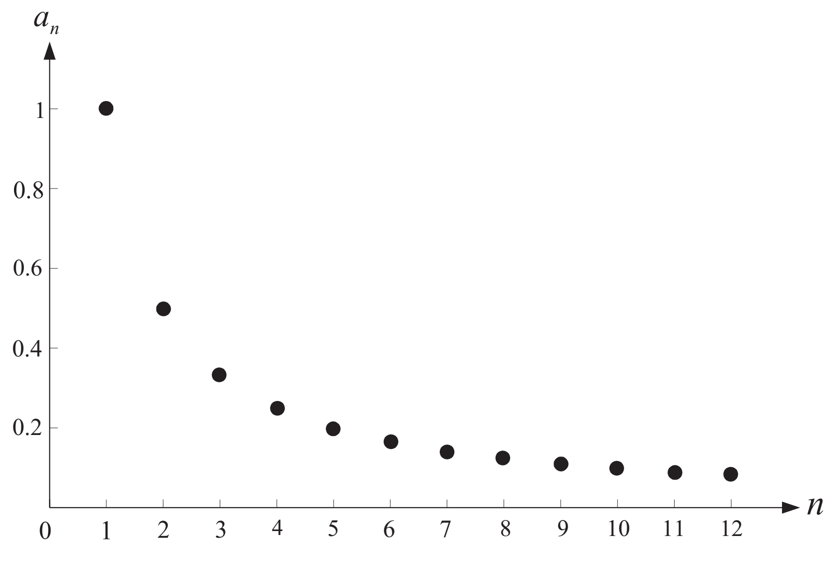
Primer 3.1.3 Ispisati nekoliko članova nizova definisanih opštim članom:

(i) ako je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (slike 3.2 i 3.3), tada je

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}, a_6 = \frac{1}{6}, \dots.$$



Slika 3.2: Niz $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

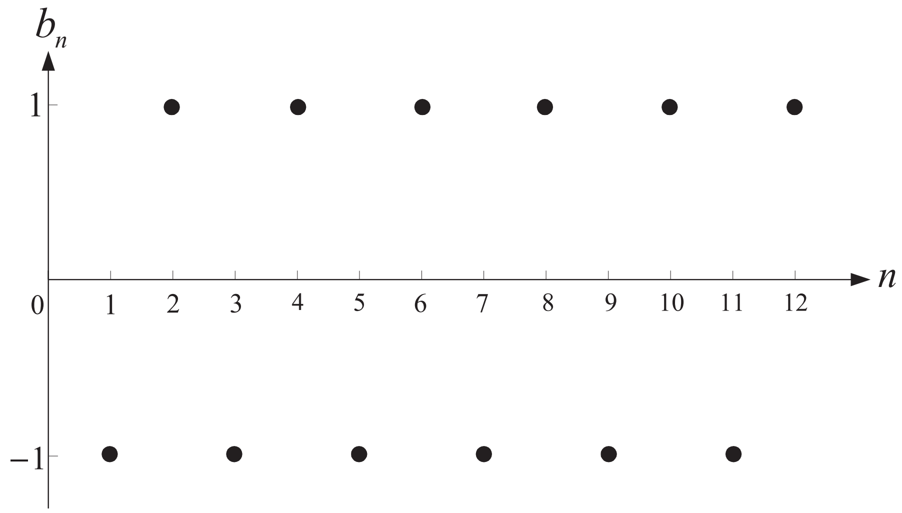


Slika 3.3: Niz $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) niz čiji je opšti član $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ (slike 3.4 i 3.5), oblika je

$$b_1 = -1, b_2 = 1, b_3 = -1, b_4 = 1, b_5 = -1, b_6 = 1, \ldots$$

Slika 3.4: Niz $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

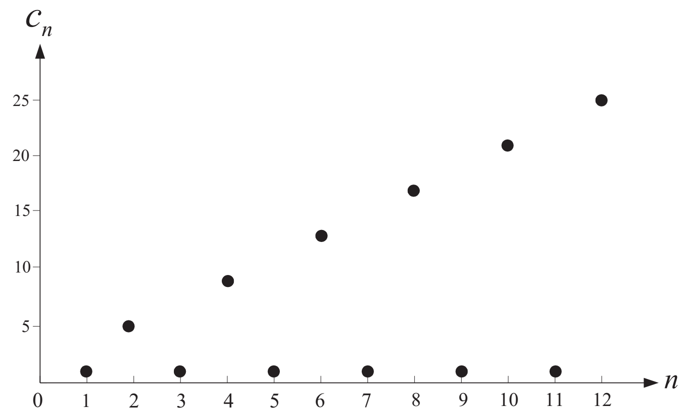


Slika 3.5: Niz $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(iii) u slučaju da je opšti član $c_n = 1 + ((-1)^n + 1)n$, $n \in \mathbb{N}$ (slike 3.6 i 3.7), tada je

$$c_1 = 1, c_2 = 5, c_3 = 1, c_4 = 9, c_5 = 1, c_6 = 13, \ldots$$

Slika 3.6: Niz $c_n = 1 + ((-1)^n + 1)n$, $n \in \mathbb{N}$.

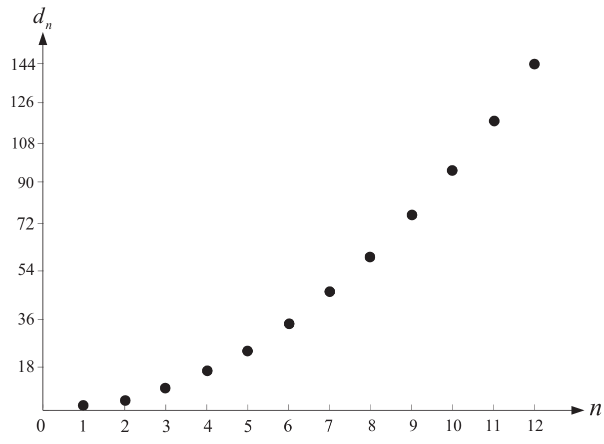


Slika 3.7: Niz $c_n = 1 + ((-1)^n + 1)n$, $n \in \mathbb{N}$.

(iv) neka je opšti član $d_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ (slike 3.8 i 3.9), onda je

$$d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 9, d_4 = 16, d_5 = 25, d_6 = 36, \ldots$$

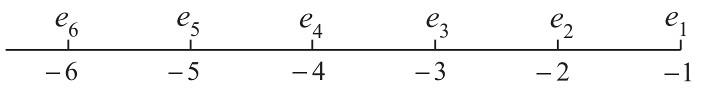
Slika 3.8: Niz $d_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.



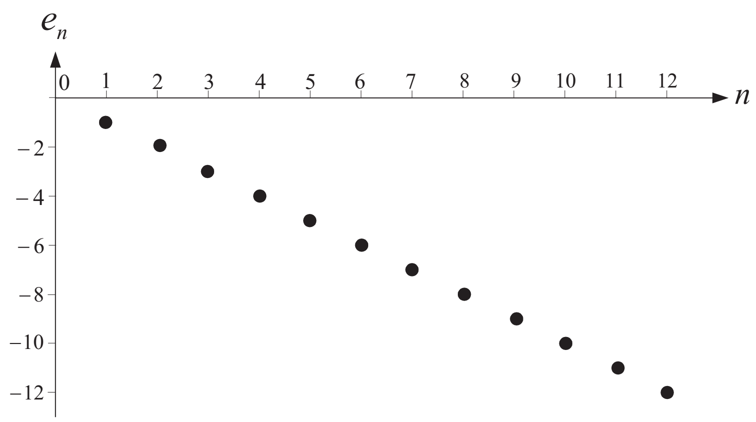
Slika 3.9: Niz $d_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

(v) ako je opšti član $e_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, onda je

$$e_1 = -1, e_2 = -2, e_3 = -3, e_4 = -4, e_5 = -5, e_6 = -6, \ldots$$



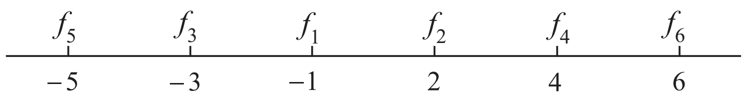
Slika 3.10: Niz $e_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.



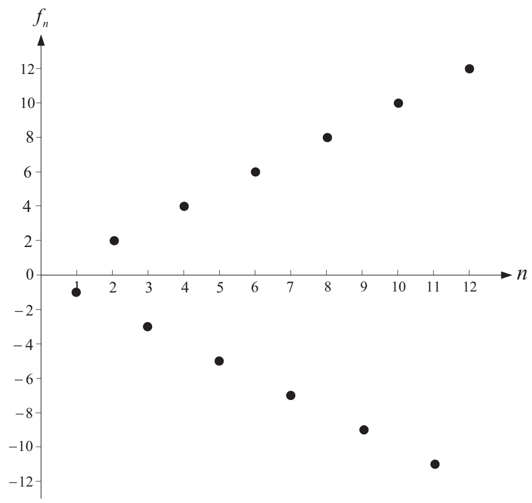
Slika 3.11: Niz $e_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

(vi) u slučaju da je opšti član $f_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$, niz je oblika

$$f_1 = -1, f_2 = 2, f_3 = -3, f_4 = 4, f_5 = -5, f_6 = 6, \ldots$$



Slika 3.12: Niz $f_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$.

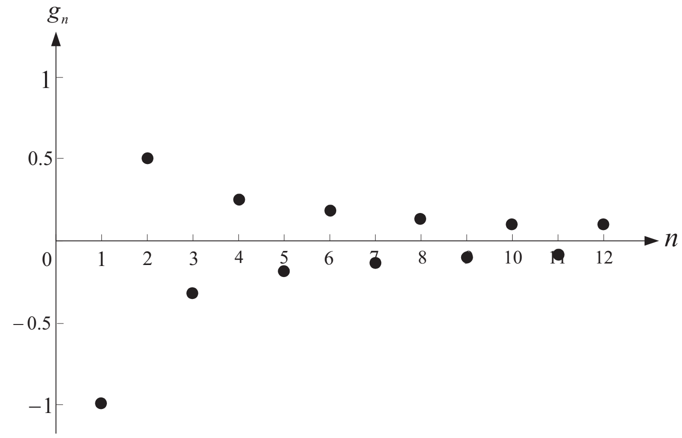


Slika 3.13: Niz $f_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$.

(vii) neka je opšti član $g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je

$$g_1 = -1, g_2 = \frac{1}{2}, g_3 = -\frac{1}{3}, g_4 = \frac{1}{4}, g_5 = -\frac{1}{5}, g_6 = \frac{1}{6}, \ldots$$

Slika 3.14: Niz $g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.



Slika 3.15: Niz $g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

U naredna dva primera, definisaćemo pojmove aritmetičkog i geometrijskog niza.

Primer 3.1.4 Niz $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je aritmetički ako je razlika svaka dva uzastopna člana niza isti broj različit od nule. Razliku obeležavamo sa

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \ldots$$

n-ti član niza računa se kao

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.1}$$

pa je $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$,...

Sumu prvih n članova niza obeležavamo sa $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ i izračunavamo kao

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \tag{3.2}$$

ili kao

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\,d)\,.$$

Broj članova niza dobija se iz formule

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1\,.$$

Na primer, niz 2, 6, 10, 14, 18,... je aritmetički jer je razlika svaka dva uzastopna člana niza $d = 4$. Opšti član niza bi bio, na osnovu (3.1), $a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$, $n \geq 1$, pa je tako, recimo, $a_6 = 4 \cdot 6 - 2 = 22$, a $S_6 = \frac{6}{2}(2 + 22) = 72$ zbog (3.2). Niz -3, -5, -7, -9,...je takođe aritmetički gde je $d = -2$.

Korišćenjem sume aritmetičkog niza, možemo izračunati zbir prvih n prirodnih brojeva. Naime, niz 1, 2,..., n,...je aritmetički gde je $d = 1$. Prvi član niza je $a_1 = 1$, n-ti član je $a_n = 1$ pa iz (3.2) sledi

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(1 + n)\,.$$

Sada je, recimo,

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5050\,.$$

Primetimo da je $a_n = a_{n-1} + d$ i da je $a_n = a_{n+1} - d$ za $n \geq 2$ i da odatle sledi da je

$$a_n = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2} \text{ za } n \geq 2\,,$$

po čemu je ovaj niz i dobio ime - aritmetički, jer je svaki član niza (osim prvi) jednak aritmetičkoj sredini susedna dva člana.

Primer 3.1.5 Niz $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je geometrijski ako je količnik svaka dva uzastopna člana niza isti broj različit od nule i jedinice. Količnik obeležavamo sa

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \cdots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \ldots$$

n-ti član niza se računa kao

$$b_n = b_1\, q^{n-1}, n \in \mathbb{N}\,,$$

pa je, $b_2 = b_1\, q$, $b_3 = b_1\, q^2$, $b_4 = b_1\, q^3$,...

Sumu prvih n članova niza obeležavamo sa $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ i izračunavamo kao

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}\,. \tag{3.3}$$

Ako izrazimo n iz (3.3), dobijamo da je broj članova niza jednak

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{S_n(q-1)}{b_1}\right)}{\ln q}\,.$$

Na primer niz 2, 4, 8, 16, 32,... je geometrijski jer je količnik svaka dva uzastopna člana niza $q = 2$. Opšti član niza bi bio $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, $n \geq 1$, pa je tako, recimo, $b_6 = 2^6 = 64$, a $S_6 = 2 \cdot \frac{2^6-1}{2-1} = 126$. Niz 27, 9, 3, 1,...je takođe aritmetički gde je $q = 1/3$.

Primetimo da je $b_n = b_{n-1}\, q$ i $b_n = b_{n+1}/q$ za $n \geq 2$, pa je

$$b_n = \sqrt{b_{n+1} \cdot b_{n-1}}$$

za $n \geq 2$, po čemu je ovaj niz i dobio ime - geometrijski, jer je svaki član niza (osim prvi) jednak geometrijskoj sredini susedna dva člana (ako su članovi niza pozitivni).

Primer 3.1.6 Niz čija su prva dva člana $h_1 = h_2 = 1$, a svaki sledeći se računa po rekurentnoj formuli $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$, $n \geq 3$, naziva se Fibonačijev niz[1] i oblika je 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

[1]Fibonačijev niz je usko povezan sa zlatnim presekom jer količnik susedna dva člana Fibonačijevog niza teži zlatnom preseku ($(1+\sqrt{5})/2$) kako se n povećava. Niz je dobio ime po italijanskom matematičaru Leonardu od Pize, kasnije poznatom kao Fibonači - pogledati poglavlje 9.3.

3.2 Konvergencija, ograničenost i monotonost

Definicija 3.2.1 *Epsilon okolina (ε-okolina) realnog broja l je otvoreni interval realnih brojeva $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, pri čemu je ε realan pozitivan broj.*

Ako je $\varepsilon = 0.1$, tada je ε-okolina broja $l = 2$ oblika $(2-0.1, 2+0.1) = (1.9, 2.1)$.

Napomena 3.2.2 *Ako $x \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, to znači da je*

$$l-\varepsilon < x < l+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-l < \varepsilon \Leftrightarrow |x-l| < \varepsilon\,.$$

Definicija 3.2.3 *Broj l je tačka nagomilavanja niza realnih brojeva $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako svaka ε-okolina broja l sadrži beskonačno mnogo članova niza $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Primer 3.2.4 Ukoliko postoje, pronaći tačke nagomilavanja nizova iz primera 3.1.3:

Rešenje.

(i) Niz čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja $l = 0$ koja nije član niza. Ako je $\varepsilon = \frac{1}{n}$, članovi niza počevši od $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ nalaze se unutar intervala $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Niz čiji je opšti član $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ima dve tačke nagomilavanja, $l_1 = -1$ i $l_2 = 1$ i obe su članovi niza.

(iii) Niz čiji je opšti član $c_n = 1 + ((-1)^n + 1)n$, $n \in \mathbb{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja, $l = 1$.

(iv), (v), (vi) Nizovi nemaju tačke nagomilavanja.

(vii) Niz čiji je opšti član $g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja, $l = 0$.

Posebno je interesantno šta se dešava sa članovima niza kako se n povećava, odnosno kada n postaje veliko što ćemo zapisivati $n \to +\infty$. Na primer, članovi niza pod (i) u primeru 3.1.3 se smanjuju i približavaju nuli kako se n povećava. Broj kome se članovi niza približavaju obeležićemo sa L, pa je u ovom slučaju $L = 0$. Napravimo sada jednu ε-okolinu oko tačke $L = 0$, recimo $(0-0.1, 0+0.1)$ gde je $\varepsilon = 0.1$. Sada vidimo da je prvih deset članova niza van tog intervala. Taj broj obeležićemo sa n_0, pa je $n_0 = 10 = \frac{1}{0.1} = \frac{1}{\varepsilon}$. Počevši od $n = 11 > 10 = n_0$, preostali članovi niza jesu u tom intervalu, odnosno $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$,... pripadaju intervalu $(0-0.1, 0+0.1)$ što se zapisuje kao $a_n \in (0-0.1, 0+0.1)$, $n \geq 11$. Ako sada izaberemo da je $\varepsilon = 0.01$, tada je $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} = 100$, pa će za sve članove niza počevši od $n = 101$ ($n > n_0$) (ima ih, opet, beskonačno mnogo) važiti $|\frac{1}{n} - L| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = 0.01 = \varepsilon$, itd. Broj L ćemo nazvati granična vrednost niza. Sada sledi precizna definicija granične vrednosti niza.

Definicija 3.2.5 *Realan broj L je granična vrednost niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tako da za svako $n > n_0$ važi da je $|a_n - L| < \varepsilon$. Kraće zapisano*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon))(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)\,.$$

Ako je broj L granična vrednost niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tada kažemo da je taj niz konvergentan, da konvergira ka broju L, što zapisujemo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

Napomena 3.2.6 *Ako je tačka nagomilavanja niza jedinstvena i konačna, nazivamo je granična vrednost (limes), odnosno $l = L$.*

Jedinstvenost granične vrednosti sledi iz definicije jer je nemoguće postojanje broja $\bar{L}$, tako da je $\bar{L} \neq L$, a da je on druga granična vrednost jer bi tada važilo

$$\bar{L} = \lim_{n \to +\infty} a_n = L.$$

što je u suprotnosti sa $\bar{L} \neq L$.

Niz je divergentan ako ne konvergira.

Definicija 3.2.7 *Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergira ka plus beskonačno ako*

$$(\forall\, M > 0)(\exists n_0 = n_0(M))(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n > M)$$

i pišemo $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergira ka minus beskonačno ako

$$(\forall\, M > 0)(\exists n_0 = n_0(M))(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n < -M)$$

i zapisujemo $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$.

Primer 3.2.8 Ukoliko postoje, pronaći konvergentne i divergentne nizove iz primera 3.1.3.

Rešenje.

(*i*) Niz $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$, $a_5 = 1/5$, $a_6 = 1/6$, $\dots$, je konvergentan i konvergira ka 0.

(*ii*) Niz $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 1$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, $\dots$, je divergentan ali ne divergira niti ka plus, niti ka minus beskonačno.

(*iii*) Niz $c_1 = 1$, $c_2 = 5$, $c_3 = 1$, $c_4 = 9$, $c_5 = 1$, $c_6 = 13$, $\dots$, divergira ka plus beskonačno.

(*iv*) Niz $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 9$, $d_4 = 16$, $d_5 = 25$, $d_6 = 36$, $\dots$, divergira ka plus beskonačno.

(*v*) Niz $e_1 = -1$, $e_2 = -2$, $e_3 = -3$, $e_4 = -4$, $e_5 = -5$, $e_6 = -6$, $\dots$, divergira ka minus beskonačno.

(*vi*) Niz $f_1 = -1$, $f_2 = 2$, $f_3 = -3$, $f_4 = 4$, $f_5 = -5$, $f_6 = 6$, $\dots$, jeste divergentan ali ne divergira niti ka plus, niti ka minus beskonačno.

(*vii*) Niz $g_1 = -1$, $g_2 = 1/2$, $g_3 = -1/3$, $g_4 = 1/4$, $g_5 = -1/5$, $g_6 = 1/6$, $\dots$, je konvergentan i konvergira ka 0.

Neke poznate granične vrednosti nizova date su u nastavku:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0,$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0,$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0,$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, a > 0,$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_s n^s + a_{s-1}n^{s-1} + \ldots + a_0}{b_t n^t + b_{t-1}n^{t-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0, & s < t, \\ \frac{a_s}{b_t}, & s = t\,, \\ +\infty, & s > t,\ a_s\, b_t > 0\,, \\ -\infty, & s > t,\ a_s\, b_t < 0\,. \end{cases}$

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty,\ a > 0,\ k \in \mathbb{R}\,.$

Uvedimo pojmove monotonog i ograničenog niza.

Definicija 3.2.9 *Za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je*

a) opadajući, ako je $a_{n+1} < a_n$ za svaki prirodan broj n,

b) rastući, ako je $a_{n+1} > a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$,

c) neopadajući, ako je $a_{n+1} \geq a_n$ za svaki prirodan broj n,

d) nerastući, ako je $a_{n+1} \leq a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$,

e) stacionaran, ako postoji $M > 0$, tako da je $a_{n+1} = a_n$ za svaki prirodan broj $n > M$.

Niz je monoton ako je opadajući ili rastući.

Primer 3.2.10 Ukoliko postoje, pronaći monotone nizove iz primera 3.1.3.

Rešenje.

(i) Niz $a_1 = 1 > a_2 = 1/2 > a_3 = 1/3 > a_4 = 1/4 > a_5 = 1/5 > a_6 = 1/6 > \cdots$, je monotono opadajući.

(ii) Niz $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 1$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, $\ldots$, nije monoton.

(iii) Niz $c_1 = 0$, $c_2 = 4$, $c_3 = 0$, $c_4 = 8$, $c_5 = 0$, $c_6 = 12$, $\ldots$, nije monoton.

(iv) Niz $d_1 = 1 < d_2 = 4 < d_3 = 9 < d_4 = 16 < d_5 = 25 < d_6 = 36 < \cdots$, je monotono rastući.

(v) Niz $e_1 = -1 > e_2 = -2 > e_3 = -3 > e_4 = -4 > e_5 = -5 > e_6 = -6 > \cdots$, je monotono opadajući.

(vi) Niz $f_1 = -1$, $f_2 = 2$, $f_3 = -3$, $f_4 = 4$, $f_5 = -5$, $f_6 = 6$, $\ldots$, nije monoton.

(vii) Niz $g_1 = -1$, $g_2 = 1/2$, $g_3 = -1/3$, $g_4 = 1/4$, $g_5 = -1/5$, $g_6 = 1/6$, $\ldots$, nije monoton.

Definicija 3.2.11 *Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen ako postoji pozitivan realan broj M tako da se svi članovi niza nalaze u intervalu $[-M, M]$, odnosno ako je $|a_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$.*

Primer 3.2.12 Ukoliko postoje, pronaći ograničene nizove iz primera 3.1.3:

Rešenje.

(*i*) Niz $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$, $a_5 = 1/5$, $a_6 = 1/6$, $\ldots$, je ograničen jer važi $|a_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Niz $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 1$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, $\ldots$, je takođe ograničen jer važi $|b_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(*iii*), (*iv*), (*v*), (*vi*) Nizovi nisu ograničeni.

(*vii*) Niz $g_1 = -1$, $g_2 = 1/2$, $g_3 = -1/3$, $g_4 = 1/4$, $g_5 = -1/5$, $g_6 = 1/6$, $\ldots$, je ograničen jer važi $|g_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.13 *Svaki konvergentan niz je i ograničen, obrnuto ne važi.*

Dokaz. Ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, tada važi $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, odnosno za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0, tako da za $n > n_0$, $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Ako sada izaberemo M, kao $M = \max\{|L| + \varepsilon, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$, za sve članove niza važiće $|a_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Da obrnuto ne važi, dokaz su nizovi (*ii*) i (*vii*) iz primera 3.1.3. □

Teorema 3.2.14 *Ako je niz monoton i ograničen, tada je konvergentan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući, tj. $a_n < a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ i neka važi $|a_n| < M$ za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je M najmanje gornje ograničenje. To znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji n_0, tako da za $n > n_0$, $|a_n - M| < \varepsilon$, što dalje implicira da je niz konvergentan. Slično se dokazuje kada je u pitanju opadajući niz. □

Napomena 3.2.15 *Treba primetiti da monotonost nije nužna za konvergenciju niza. Na primer, niz $g_n = (-1)^n/n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira ka 0, a nije monoton.*

Primer 3.2.16 Neka je dat niz sa opštim članom $a_n = \frac{2n}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}$. Pokazati da niz konvergira ka $2/3$ u smislu definicije 3.2.5.

Rešenje. Pokažimo da je niz monotono rastući, tj. da je $a_{n+1} > a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Naime,

$$\frac{2(n+1)}{3(n+1)+4} > \frac{2n}{3n+4} \Leftrightarrow (2n+2)(3n+4) > 2n(3n+7) \Leftrightarrow 6n^2 + 14n + 8 > 6n^2 + 14n\,,$$

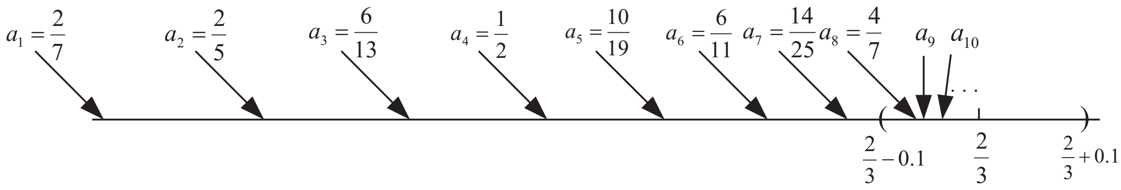
što je tačno, pa je niz monotono rastući. Kako je još

$$\left|\frac{2n}{3n+4}\right| = \frac{2n}{3n+4} < \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}\,,$$

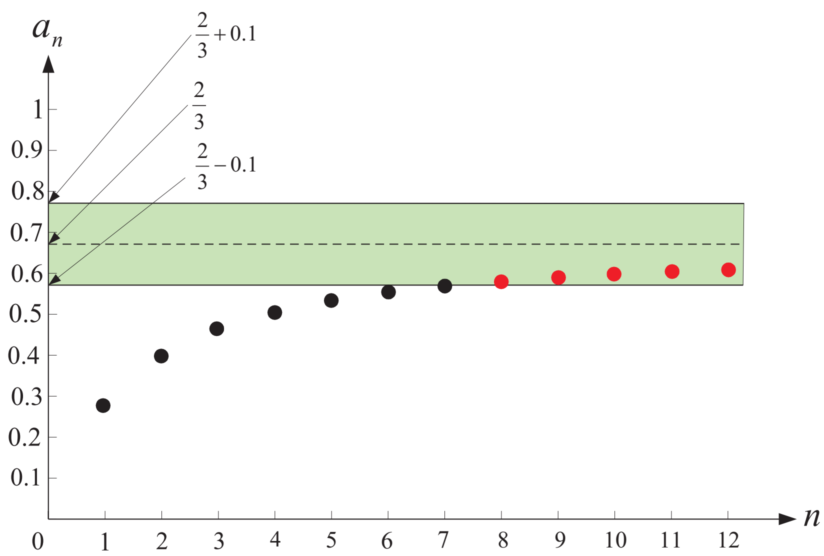
sledi da je ograničen (odozgo). Pokažimo da je $L = 2/3$ granična vrednost tog niza kada $n \to +\infty$. Sada je

$$|a_n - L| = \left|\frac{2n}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n - 2(3n+4)}{3(3n+4)}\right| = \left|\frac{-8}{3(3n+4)}\right| < \varepsilon\,,$$

odakle sledi da je $n > (8-12\varepsilon)/(9\varepsilon)$, pa se za n_0 može uzeti ceo deo od $(8-12\varepsilon)/(9\varepsilon)$. Na primer, za $\varepsilon = 0.1$ sledi da je $n_0 = 7$, a to znači je prvih 7 članova niza (sedmi član je $a_7 = \frac{14}{25} = \frac{588}{1050}$) van intervala $(2/3-0.1, 2/3+0.1) = (\frac{595}{1050}, \frac{805}{1050})$, dok su preostali članovi, počevši od osmog, $a_8 = \frac{4}{7} = \frac{600}{1050}$, unutar tog intervala (slike 3.16 i 3.17). Za $\varepsilon = 0.01$ imamo da je $n_0 = 87$, a to znači je sada prvih 87 članova niza van intervala $(2/3-0.01, 2/3+0.01)$, dok su preostali članovi, počevši od $n = 88$, unutar tog intervala.



Slika 3.16: Niz $a_n = \frac{2n}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}$ koji teži $2/3$, $\varepsilon = 0.1$.



Slika 3.17: Niz $a_n = \frac{2n}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}$, koji teži $2/3$, $\varepsilon = 0.1$. Prvih sedam članova niza (crne tačke) je van intervala $(2/3-0.1, 2/3+0.1)$, a svi preostali (crvene tačke), počevši od osmog, su u tom intervalu.

Primer 3.2.17 Dokazati konvergenciju niza $h_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, korišćenjem teoreme 3.2.14.

Resenje. Napišimo prvo nekoliko članova niza.

$$h_1 = 2, h_2 = 2.25, h_3 = 2.37037, h_4 = 2.44141, h_5 = 2.48832, h_6 = 2.52163, \ldots$$

Korak 1. Pokažimo da je niz h_n, $n \in \mathbb{N}$ monotono rastući, odnosno da važi $h_n < h_{n+1}$ ili

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Podsetimo se da je za $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\,, \tag{3.4}$$

gde je

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

i

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

binomni koeficijent. Tada je

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \tag{3.5}$$

i

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} 1^{n+1-k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \tag{3.6}$$

na osnovu (3.4). Za formulu (3.6) važi

$$h_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$> \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k .$$

Pokazaćemo da važi

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \geq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = h_n$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ tako što ćemo dokazati

$$\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \geq \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \tag{3.7}$$

za svako $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Ako uprostimo izraz (3.7) imaćemo da treba dokazati

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^k} \geq \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}\,,$$

odnosno

$$\frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^k} \geq \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}\,,$$

a nakon skraćivanja

$$\frac{n+1}{n+1-k}\cdot\frac{1}{(n+1)^k}\geq\frac{1}{n^k}\,.$$

Mi ćemo pokazati da za $k=0,1,2,\ldots,n$ važi

$$\frac{n+1}{n+1-k}\geq\frac{(n+1)^k}{n^k}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\,. \tag{3.8}$$

Prethodni izraz (3.8) može se zapisati i kao

$$\frac{n+1}{n+1-1}\cdot\frac{n+1-1}{n+1-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1-(k-1)}{n+1-k}\geq\underbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}_{k\text{-puta}}\,.$$

Dovoljno je da pokažemo da je svaki činilac sa leve strane prethodne nejednakosti, veći ili jednak $\frac{n+1}{n}$, odnosno da je

$$\frac{n+1-(i-1)}{n+1-i}\geq\frac{n+1}{n} \tag{3.9}$$

za $i=1,2,\ldots,k$, a to je tačno zbog

$$\frac{n+1-(i-1)}{n+1-i}=\frac{n+1-i+1}{n+1-i}=1+\frac{1}{n+1-i}\geq1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}\,,$$

jer je $1-i\leq0$ pa je $n+1-i\leq n\Rightarrow\frac{1}{n+1-i}\geq\frac{1}{n}$. Zaključujemo da je posmatrani niz monotono rastući.

Korak 2. Pokazaćemo sada ograničenost. Jasno je da je

$$h_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>(1+0)^n=1\,.$$

Sa gornje strane važi, na osnovu (3.5),

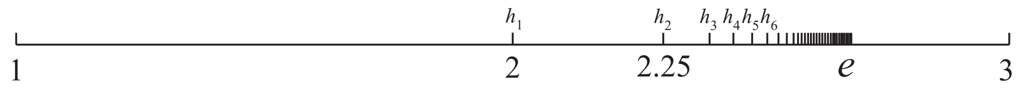
$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\
&< \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\\
&= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}<2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=2+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=2+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)\\
&= 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-0}{1-\frac{1}{2}}=2+1=3\,.
\end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ suma n članova geometrijskog niza $\frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$ i da je

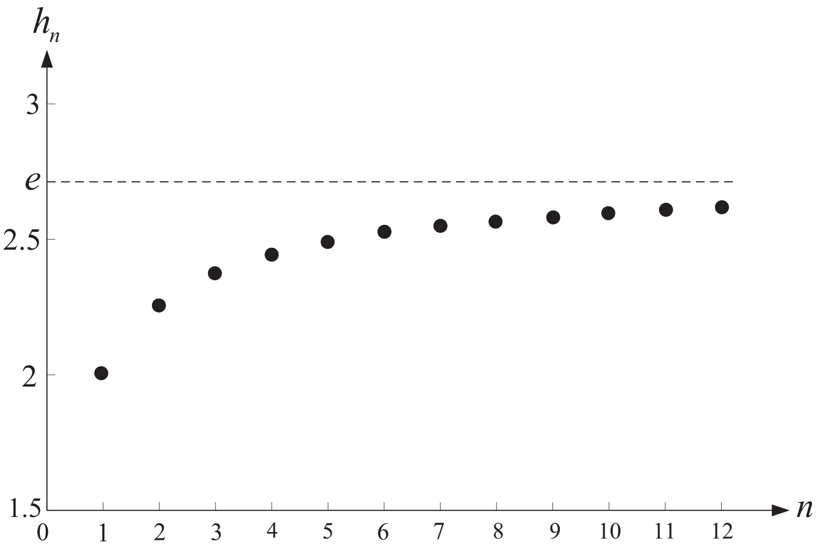
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\,.$$

Pošto smo u dva koraka pokazali da je niz h_n, $n \in \mathbb{N}$, ograničen i monoton, sledi da je konvegentan. Njegova granica[2] je broj e, odnosno važi (slike 3.18 i 3.19)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,. \tag{3.10}$$



Slika 3.18: Niz $h_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.



Slika 3.19: Niz $h_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

[2]Broj $e \approx 2.71828182845904523536$ je jedna od najznačajnijih matematičkih konstanti, poznata još i kao Ojlerov broj. Prvi put se pojavio 1618. godine u logaritamskim tablicama (nakon otkrića logaritama), ali mu tada nije pridavan naročit značaj. Njegov smisao, kako u matematici, tako i u drugim naučnim oblastima, biće otkriven znatno kasnije.

3.2.1 Košijevi nizovi

Sada ćemo navesti važan uslov za konvergenciju niza, odnosno uslov koji je i potreban i dovoljan za konvergenciju. Pre toga, uvedimo sledeću definiciju.

Definicija 3.2.18 *Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev*[3] *ako važi*

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,p\in\mathbb{N})(n>n_0\Rightarrow|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon)\,. \tag{3.11}$$

Primer 3.2.19 Pokazati da je niz

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdot+\frac{1}{2^n}\,,\quad n\in\mathbb{N}$$

Košijev.

Rešenje. Prvo treba da ocenimo sledeću razliku

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &= \left|\frac{1}{2^{n+p}}+\frac{1}{2^{n+p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right|\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left|\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{p-2}}+\cdots+\frac{1}{2^0}\right|\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\,.\end{aligned}$$

Sada, ako za ε izaberemo tako da je $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, tada je

$$\frac{1}{2^n}<\varepsilon\Rightarrow 2^n>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\log_2 2^n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}=\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}$$

nakon promene baze. Ako n_0 izaberemo tako da je

$$n_0=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]+1\,,$$

dobijamo da je posmatrani niz Košijev ($[x]$ je ceo deo od x).

Teorema 3.2.20 *Potreban i dovoljan uslov da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u skupu $\mathbb{R}$ konvergira je da je on Košijev.*

Primer 3.2.21 Ispitati da li niz

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k!}{k(k+1)}\,,\quad n\in\mathbb{N}\,,$$

[3] Ogisten Luj Koši (1789-1857) - pogledati poglavlje 9.17

konvergira.

Rešenje. Ocenimo razliku

$$\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n+p}\frac{\cos k!}{k(k+1)}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos k!}{k(k+1)}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos k!}{k(k+1)}\right| \\
&\le \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|\cos k!|}{k(k+1)} \le \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{k+1-k}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Ako za ε izaberemo tako da je $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, tada je

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}-1\,.$$

Dalje, n_0 biramo tako da je

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

što implicira da je posmatrani niz Košijev, a time i konvergentan.

Primer 3.2.22 Ispitati da li niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\,, \quad n\in\mathbb{N}\,,$$

konvergira.

Rešenje. Sada je

$$\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n+p}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\
&\le \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

te za n_0 biramo $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, tako da je posmatrani niz Košijev, a time i konvergentan.

Primer 3.2.23 Ispitati da li niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergira.

Rešenje. Pretpostavićemo da dati niz nije Košijev, a to znači da treba dokazati

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n, p \in \mathbb{N})(n > n_0 \wedge |a_{n+p} - a_n| > \varepsilon)\,.$$

Neka je $\varepsilon = 1/3$. Tada je

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p}}_{p \text{ sabiraka}} \\
&= \frac{p}{n+p}\,.
\end{aligned}$$

Ako postavimo da je $p = n$, dobijamo

$$|a_{2n} - a_n| \geq \frac{n}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon\,,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, tako da niz nije Košijev, pa nije ni konvergentan.

3.2.2 Osobine konvergentnih nizova

Ako su nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni i ako je $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n = P$, tada važi:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

  Primer 3.2.24 $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \cdot L, \alpha \in \mathbb{R}$

  Primer 3.2.25 Koristeći primer 3.2.16, imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} 3 \cdot \frac{2n}{3n+4} = 3 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n+4} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2\,.$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L \pm P$

Primer 3.2.26 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod b) i g), kao i primer 3.2.16, sledi da je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}+\frac{2n}{3n+4}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}+\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{3n+4}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(5+\frac{3}{n^2}\right)}+\frac{2}{3}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{-3+\frac{2}{n}}{5+\frac{3}{n^2}}+\frac{2}{3} = -\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L \cdot P$

Primer 3.2.27 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod g) i primer 3.2.26, sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}\cdot\frac{3n}{-3n+1}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{-3n+1} = -\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{3}\right)=\frac{3}{5}.$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n} = \dfrac{L}{P}, P \neq 0$

Primer 3.2.28 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod g) i primer 3.2.26, sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}}{\frac{4n}{5n+3}} = \frac{\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}}{\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{5n+3}} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^m = (\lim\limits_{n\to+\infty} a_n)^m = L^m, m \in \mathbb{N}$

Primer 3.2.29 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod g) i primer 3.2.28, sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{5n+3}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{5n+3}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}, m \in \mathbb{N}, a_n > 0, n \in \mathbb{N}$

Primer 3.2.30 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod b), sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{8n^3}{27n^3+2n^2-2}} = \sqrt[3]{\lim_{n\to+\infty}\frac{8n^3}{n^3\left(27+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

- Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = K$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$, i neka je postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, za koje je $n > n_0$, važi $a_n \leq b_n$, tada je i $K \leq L$.

Primer 3.2.31 Posmatrajmo nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1 + 1/n$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = 2 + 1/n$. Jasno je da je za svako $n \geq 1$ tačno $a_n = 1 + \frac{1}{n} < 2 + \frac{1}{n} = b_n$, pa je tada i

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 < 2 = \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

- Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$, i neka je postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, za koje je $n > n_0$, važi $a_n \leq c_n \leq b_n$, tada je i $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$.

Primer 3.2.32 Koristeći primer 3.2.17, pokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,. \tag{3.12}$$

Rešenje. Jasno je da je niz $i_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ograničen jer je

$$0 \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1\,.$$

Napišimo nekoliko članova niza i_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$i_1 = 0, i_2 = 0.25, i_3 = 0.296296, i_4 = 0.316406, i_5 = 0.32768, i_6 = 0.334898, \ldots$$

Da bi niz bio konvergentan, pokažimo da je još i monoton, odnosno da je monotono rastući. Naime,

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} &= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n+1}}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \\
&= \left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n}{n+1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(-\frac{1}{n^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{n^{2k}} \\
&= 1-\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^4}-\binom{n}{3}\frac{1}{n^6}+\binom{n}{4}\frac{1}{n^8}-\binom{n}{5}\frac{1}{n^{10}}+\ldots \\
&= 1-\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^4}-\left(\binom{n}{3}\frac{1}{n^6}-\binom{n}{4}\frac{1}{n^8}\right) \\
&\quad -\left(\binom{n}{5}\frac{1}{n^{10}}-\binom{n}{6}\frac{1}{n^{12}}\right)-\ldots
\end{aligned} \tag{3.14}$$

pokazaćemo da za svako $k \geq 2$, važi

$$\binom{n}{2k-1}\frac{1}{n^{2\cdot(2k-1)}} - \binom{n}{2k}\frac{1}{n^{2(2k)}} > 0\,,$$

pa će slediti da je

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1 - \frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^4}\,. \tag{3.15}$$

Naime,

$$\begin{aligned}\binom{n}{2k-1}\frac{1}{n^{4k-2}} - \binom{n}{2k}\frac{1}{n^{4k}} &= \frac{n!}{(2k-1)!(n-(2k-1))!}\cdot\frac{n^2}{n^{4k}} - \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}\cdot\frac{1}{n^{4k}}\\ &= \frac{n!}{n^{4k}(2k-1)!(n-2k)!}\left(\frac{n^2}{n-(2k-1)} - \frac{1}{2k}\right).\end{aligned}$$

Izraz u zagradi je veći od nule jer je

$$\frac{n-(2k-1)}{2k\,n^2} < \frac{n}{2k\,n^2} = \frac{1}{2k\,n} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2k} < \frac{n^2}{n-(2k-1)} \Rightarrow \frac{n^2}{n-(2k-1)} - \frac{1}{2k} > 0\,.$$

Vratimo se sada na izraz (3.13) iz kog sledi, na osnovu (3.15),

$$\begin{aligned}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} &< \left(1-\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{2n^4}\\ &= 1-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^4} < 1\end{aligned} \tag{3.16}$$

što znači da je niz i_n, $n \in \mathbb{N}$ monotono rastući. Sada ćemo pokazati da važi (3.12). Neka je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = b\,,$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = b\,e\,,$$

na osnovu primera 3.2.17. Pokažimo da je $b\,e = 1$ odakle će slediti da je $b = 1/e$.

Posmatrajmo sada niz

$$c_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Kako je

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow 0 > -\frac{1}{n^2} \geq -1 \Rightarrow 1 > 1 - \frac{1}{n^2} \geq 0 \Rightarrow 1 > \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 0$$

pa je

$$c_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 0$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Sa druge strane, koristeći (3.14),

$$\begin{aligned} c_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n &= \frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n^4} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^6} - \binom{n}{4}\frac{1}{n^8} + \binom{n}{5}\frac{1}{n^{10}} - \dots \\ &= \frac{1}{n} - \left(\binom{n}{2}\frac{1}{n^4} - \binom{n}{3}\frac{1}{n^6}\right) - \left(\binom{n}{4}\frac{1}{n^8} - \binom{n}{5}\frac{1}{n^{10}}\right) - \dots \\ &< \frac{1}{n} \end{aligned}$$

jer je za svako $k \in \mathbb{N}$, tačno

$$\binom{n}{2k}\frac{1}{n^{2\cdot 2k}} - \binom{n}{2k+1}\frac{1}{n^{2(2k+1)}} > 0$$

što ćemo sada dokazati. Naime,

$$\begin{aligned} \binom{n}{2k}\frac{1}{n^{4k}} - \binom{n}{2k+1}\frac{1}{n^{4k+2}} &= \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}\cdot\frac{1}{n^{4k}} \\ &\quad - \frac{n!}{(2k+1)!(n-(2k+1))!}\cdot\frac{1}{n^{4k}\cdot n^2} \\ &= \frac{n!}{n^{4k}(2k)!(n-(2k+1))!}\left(\frac{1}{n-2k} - \frac{1}{(2k+1)\,n^2}\right). \end{aligned}$$

Izraz u zagradi je veći od nule jer je

$$\begin{aligned} \frac{n-2k}{(2k+1)\,n^2} < \frac{n}{(2k+1)\,n^2} = \frac{1}{(2k+1)\,n} < 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{(2k+1)\,n^2} < \frac{1}{n-2k} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{n-2k} - \frac{1}{(2k+1)\,n^2} > 0\,. \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$0 < c_n < \frac{1}{n}$$

odakle sledi da kada $n \to +\infty$ mora važiti

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right) = 0$$

jer je $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, a to dalje povlači da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

što je i trebalo pokazati.

Primer 3.2.33 Odrediti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n .$$

Rešenje. Koristeći (3.12) imaćemo da je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n-3}{n+2}-1\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{5}{n+2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{5}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{5}}\right)^{\frac{n+2}{5}\cdot\frac{5}{n+2}\cdot n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{5}}\right)^{\frac{n+2}{5}}\right)^{\frac{5n}{n+2}} = \frac{1}{e^5} .
\end{aligned}$$

Primer 3.2.34 Odrediti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{2n+1}\right)^n .$$

Rešenje. Korišćenjem (3.10) dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{2n+1}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{6}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{6}}\right)^{\frac{2n+1}{6}\cdot\frac{6}{2n+1}\cdot n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{6}}\right)^{\frac{2n+1}{6}}\right)^{\frac{6n}{2n+1}} = e^{\frac{6}{2}} = e^3 .
\end{aligned}$$

3.3 Zadaci za vežbu

Odrediti tačke nagomilavanja (ako postoje), ispitati ograničenost, monotonost i konvergenciju sledećih nizova koji su dati opštim članom:

1. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $c_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cdot \cos\dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. $d_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ispitati da li su nizovi sa sledećim opštim članovima Košijevi:

5. $a_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdot + \dfrac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$. (jeste)

6. $b_n = \dfrac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \dfrac{\sin 2}{2 \cdot 3} + \cdot + \dfrac{\sin n}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. (jeste)

7. $c_n = \dfrac{\cos 1!}{1} + \dfrac{\cos 2!}{2^2} + \cdot + \dfrac{\cos n!}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. (jeste)

8. $d_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdot + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. (nije)

Odrediti sledeće granične vrednosti:

9. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^4 + 3n^2 - 1}{n^5 + n + 4}$. $(L = 1)$

10. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^5 + 2n^2 + 4}{n^3 - 2}$. $(L = +\infty)$

11. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^2 + 5n + 3}{n^3 + 9}$. $(L = 0)$

12. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n + 4}{n\sqrt[n]{2019} - n}$. $(L = +\infty)$

13. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$. $(L = 2)$

14. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$. $(L = 3)$

15. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 3n - 4}\right)$. $(L = 3)$

16. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n - 1}{2n + 3}\right)^{3n}$. $(L = 1/e^6)$

17. $L = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+n+1} \right)^{5n-1}$. $(L = e^5)$

18. Funkcija u_n, $n \in \mathbb{N}$ uzima vrednosti:

$$u_1 = \frac{1}{4},\ u_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}, \ldots, u_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}, \ldots$$

Dokazati da u_n teži nekoj graničnoj vrednosti kada $n \to \infty$.

19. Dokazati da niz

$$a_n = \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+2} + \cdots + \frac{1}{3^n+n}$$

ima graničnu vrednost kada $n \to \infty$.

20. Dokazati da niz brojeva

$$u_1 = 6,\ u_2 = \sqrt{6+u_1}, \ldots, u_n = \sqrt{6+u_{n-1}}, \ldots$$

teži određenoj vrednosti L i naći tu vrednost. $(L = 3)$

GLAVA 4

Granična vrednost funkcije

Granična vrednost funkcije je fundamentalna oblast na kojoj se zasnivaju diferencijalni i integralni račun. U ovoj glavi definisaćemo graničnu vrednost funkcije, dati njene osobine i uvesti pojam neprekidne funkcije. Činjenica da „lim" i „f" komutiraju je najsuptilnije svojstvo koje se koristi kod neprekidnih funkcija.

4.1 Definicija

Često je potrebno znati vrednost funkcije f kada se x približava nekoj tački x_0 pri čemu u toj tački funkcija ne mora biti definisana. Definišimo prvo tačku nagomilavanja skupa.

Definicija 4.1.1 *Tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sadrži bar jedan element iz skupa A različit od x_0. Tačka x_0 ne mora pripadati skupu A.*

Primer 4.1.2 Navedimo sada primere za tačke nagomilavanja nekih skupova.

- Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ nema tačku nagomilavanja jer se u intervalu $(n - 0.5, n + 0.5)$ ne nalazi ni jedan prirodni broj različit od n dok $n \in \mathbb{N}$. Slično važi i za skup celih brojeva.

- Svaka tačka skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} | \, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ je i tačka nagomilavanja skupa jer se u svakoj okolini $\left(\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon\right)$ nalazi bar još jedan racionalan broj. Do tog broja može se doći na sledeći način. Ako je $\varepsilon \geq 1$, tada racionalan broj $\frac{p}{q} + \frac{1}{2} \in \left(\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon\right)$. Ako je $0 < \varepsilon < 1$, tada sigurno postoji $n \in \mathbb{N}$ za koje važi $10^{-n} < \varepsilon$. Tada racionalan broj $\frac{p}{q} + \frac{1}{2 \cdot 10^n} \in \left(\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon\right)$.

- Svaka tačka skupa realnih brojeva je i tačka nagomilavanja toga skupa jer se u svakoj okolini realnog broja a nalazi beskonačno mnogo realnih brojeva različitih od a.

- Skup $\left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ ima jednu tačku nagomilavanja, nulu, i ona ne pripada datom skupu.

Sada sledi definicija granične vrednosti funkcije[1] u tački x_0.

Definicija 4.1.3 *Neka funkcija f preslikava svoj domen D u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, odnosno $f : D \to \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa D. Broj L je granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall\, x \in D)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

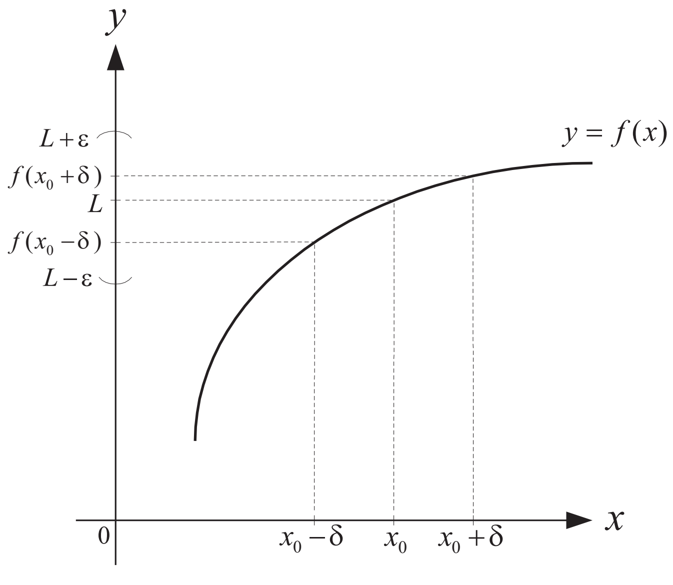
Podsetimo se $0 < |x - x_0|$ znači da je $x \neq x_0$ i

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

pa je $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Dalje,

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\,.$$

Dakle, drugim rečima, iz definicije 4.1.3 sledi da će broj L biti granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako za proizvoljni interval oko L uvek možemo izabrati interval oko x_0 tako da se ceo interval oko x_0 (bez tačke x_0) preslikava u interval oko L (slika 4.1).



Slika 4.1: Broj L je granična vrednost funkcije f kada x teži x_0.

[1] Koši je prvi koristio granične vrednosti u dokazima u svojoj knjizi iz 1821. godine, međutim kako je on dao samo verbalnu definiciju limesa, formalna definicija granične vrednosti u „epsilon-delta" formi, obično se pripisuje Vajerštrasu - pogledati poglavlje 9.21).

Primer 4.1.4 Po definiciji dokazati da je

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3\,.$$

Rešenje. Kako $x \to 1$ koristićemo da je $0 < |x-1| < \delta$, odnosno $1-\delta < x < 1+\delta$ i $x \neq 1$. Zadatak je da se odredi δ koje zavisi od unapred zadatog ε tako da važi

$$\left|(x^2 + x + 1) - 3\right| < \varepsilon\,.$$

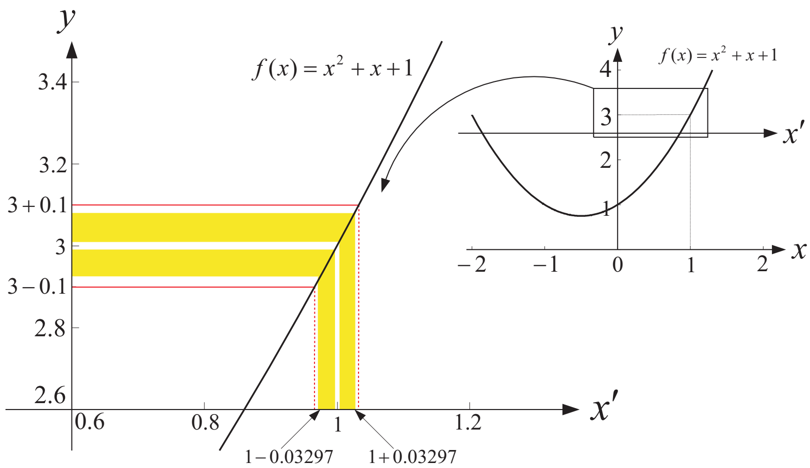
Naime,

$$\begin{aligned} \left|(x^2 + x + 1) - 3\right| &= \left|x^2 + x - 2\right| \\ &= |(x-1)(x+2)| \\ &= |x-1||x+2| \\ &< \delta(\delta + 3)\,. \end{aligned}$$

Ako sada stavimo da je $\delta(\delta+3) = \varepsilon$, tada rešavajući kvadratnu jednačinu $\delta^2 + 3\delta - \varepsilon = 0$ po $\delta > 0$, dobijamo da je

$$\delta = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\varepsilon}}{2}$$

čime je dokazana tvrdnja. Na primer, za $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.03297$ (slika 4.2), dok je za $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.00333$.



Slika 4.2: Primena definicije 4.1.3 za određivanje granične vrednosti funkcije $f(x) = x^2+x+1$ kada x teži 1 za $\varepsilon = 0.1$ i $\delta = \frac{-3+\sqrt{9+4\varepsilon}}{2} = 0.03297$.

Definišimo sada levu i desnu graničnu vrednost u tački x_0 potrebnu za ispitivanje neprekidnosti funkcije u tački, za traženje izvoda u tački, itd.

Definicija 4.1.5 *Neka funkcija f preslikava svoj domen D u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, odnosno $f : D \to \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa D. Broj L_1 je leva granična vrednost funkcije f u tački x_0 (slika 4.3 a)) ako*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall\, x \in D)(x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

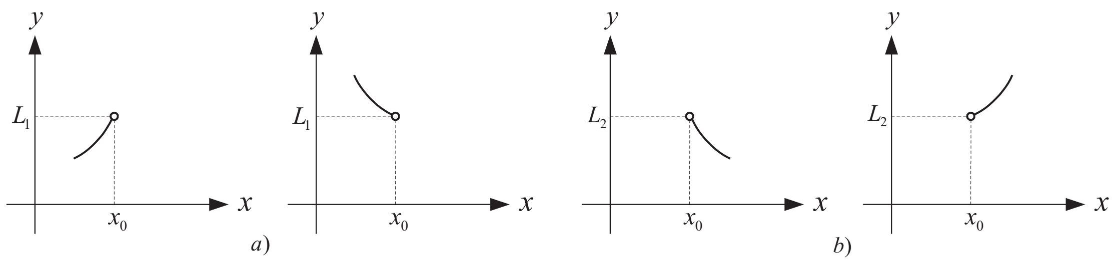
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1\,.$$

Slično, broj L_2 je desna granična vrednost funkcije f u tački x_0 (slika 4.3 b)) ako

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall\, x \in D)(x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2\,.$$



Slika 4.3: Leva i desna granična vrednost funkcije u tački x_0 u smislu definicije 4.1.5.

Ako postoje, leva i desna granična vrednost ne moraju biti jednake. U slučaju da su jednake ($L_1 = L_2$), tada kažemo da funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0 i važi

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

Definišimo sada graničnu vrednost funkcije u $+\infty$ i $-\infty$ jer ćemo ih koristiti kod ispitivanja horizontalnih asimptota.

Definicija 4.1.6 *Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i neka $(a, +\infty) \subseteq D$ za neko $a \in \mathbb{R}$. Broj L je granična vrednost funkcije f u $+\infty$ ako (slika 4.4 a))*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall\, x \in (a, +\infty))(x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

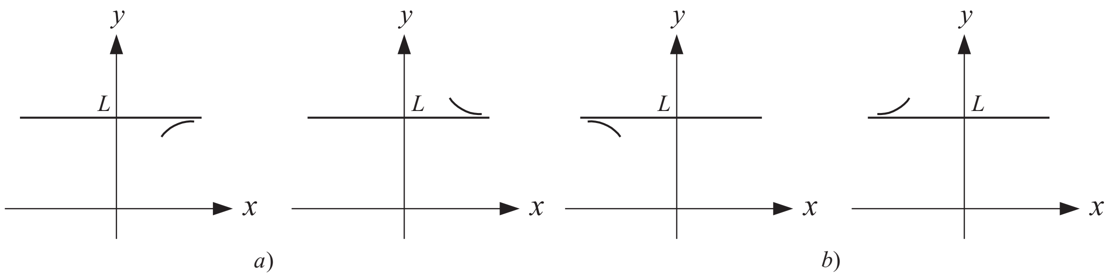
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L\,.$$

Slično, ako je $(-\infty, a) \subseteq D$, tada je broj L je granična vrednost funkcije f u $-\infty$ ako (slika 4.4 b))

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall\, x \in (-\infty, a))(x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L\,.$$



Slika 4.4: Granična vrednost funkcije kada $x \to \pm\infty$.

Za funkciju koja ima graničnu vrednost L u tački x_0 kažemo da konvergira ka L kada x teži x_0, a suprotnom, divergira. Naime,

Definicija 4.1.7 *Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i neka $(x_0, b) \subseteq D$ za neko $b > x_0$. Funkcija f teži ka $+\infty$ ako (slika 4.5 a))*

$$(\forall\, M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall\, x \in (x_0, b))(x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > M)$$

i pišemo

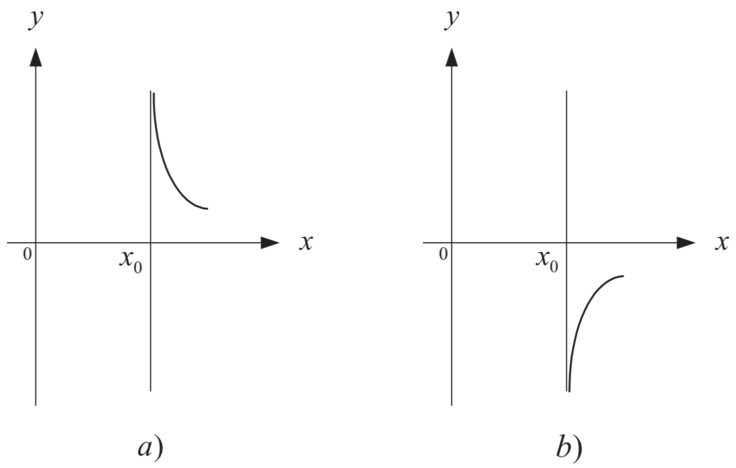
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty\,.$$

Slično, f teži ka $-\infty$ ako (slika 4.5 b))

$$(\forall\, M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall\, x \in (x_0, b))(x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < -M)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty\,.$$



Slika 4.5: Funkcija teži ka $+\infty$ (a)) i ka $-\infty$ (b)) kada x teži x_0 sa desne strane.

Definicija 4.1.8 *Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i neka $(a, x_0) \subseteq D$ za neko $a < x_0$. Funkcija f teži ka $+\infty$ ako (slika 4.6 a))*

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, x_0))(x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) > M)$$

i pišemo

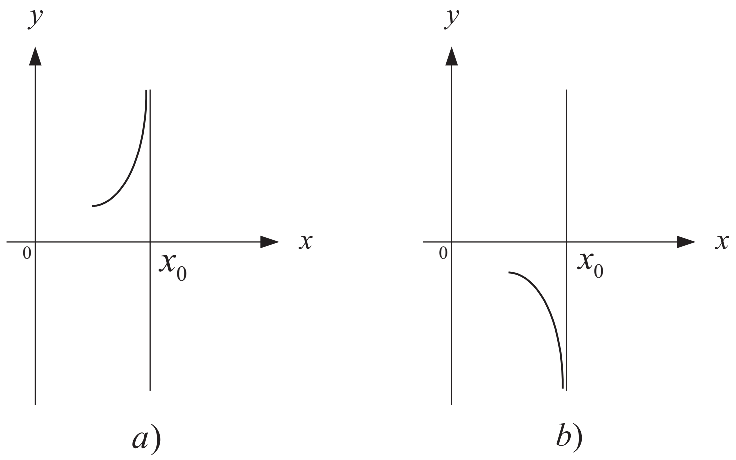
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty\,.$$

Slično, f teži ka $-\infty$ ako (slika 4.6 b))

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, x_0))(x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < -M)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty\,.$$



Slika 4.6: Funkcija teži u $+\infty$ (a)) i u $-\infty$ (b)) kada x teži x_0 sa leve strane.

Definicije 4.1.7 i 4.1.8 koristimo pri ispitivanju vertikalnih asimptota funkcije o kojima će kasnije biti reči (poglavlje 4.3).

4.2 Neke važne granične vrednosti i njene osobine

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ nad njenim domenom $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (slika 4.7). Zaključujemo sledeće

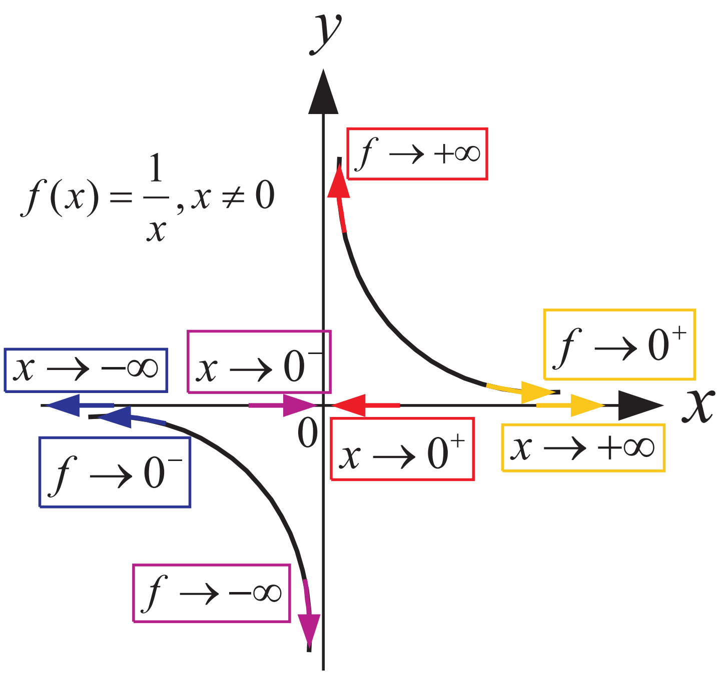
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+\,, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-\,, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,,$$

što se može uopštiti kao

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x^\alpha} = 0, \quad a \in \mathbb{R}\,, \quad \alpha > 0 \tag{4.1}$$

i

$$\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{a}{x - x_0} = \mp\infty, \quad a \in \mathbb{R}^-\,, \quad \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{a}{x - x_0} = \pm\infty, \quad a \in \mathbb{R}^+\,.$$



Slika 4.7: Funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ i njeno ponašanje kada $x\to\pm\infty$ i $x\to 0^{\pm}$.

Jasno je i da važi

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}=+\infty\,,\ \alpha>0\,. \tag{4.2}$$

Navedimo i ostale poznate granične vrednosti:

- $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\begin{cases}0 & ,\ m<n,\\ \frac{a_m}{b_n} & ,\ m=n\,,\\ +\infty \text{ ili } -\infty & ,\ m>n\,,\end{cases}$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,,$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,,$

- $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,,$ • $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}\,,$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\,,$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}\,.$

Navedimo sada osobine graničnih vrednosti. Neka f, g i h preslikavaju svoj domen D u skup realnih brojeva i neka je x_0 tačka nagomilavanja domena. Pretpostavimo da postoje sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \text{ i } \lim_{x\to x_0} g(x)=K\,.$$

Tada važi:

(o1) $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c\cdot L,\ c\in\mathbb{R}$,

(o2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L\pm K$,

(o3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L\cdot K$,

(o4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{K},\ K\neq 0$,

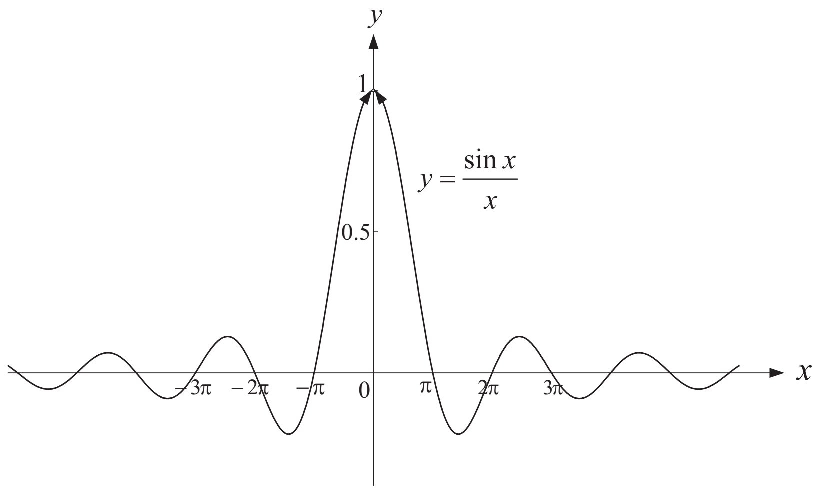
(o5) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = L^K$,

(o6) ako za svako $x\in D\setminus\{x_0\}$ važi $f(x)\le g(x)$, tada je i $L\le K$,

(o7) ako je $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ i ako za svako $x\in D\setminus\{x_0\}$ važi $f(x)\le h(x)\le g(x)$, tada je i $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$.

Analogno važi i kada je $x_0=\pm\infty$.

Dokažimo sada, geometrijski, da funkcija $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ (slika 4.8) teži jedinici kada x teži nuli.

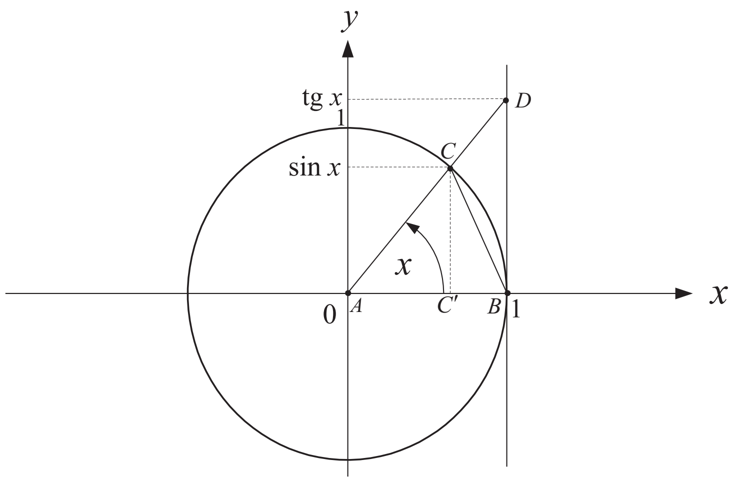


Slika 4.8: Funkcija $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ i njeno ponašanje kada $x\to 0$.

Primetimo prvo da je posmatrana funkcija parna jer važi

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)\,,$$

što implicira da je funkcija simetrična u odnosu na y-osu i da je dovoljno posmatrati slučaj kada $x\to 0^+$. Pretpostavićemo da $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ i iskoristiti to kasnije u dokazu. Sa slike (4.9) sledi da je površina trougla $\triangle ABC$ (označimo je sa $P_{\triangle ABC}$) manja od površine kružnog isečka ABC (P_{kiABC}), a ona manja od površine trougla $\triangle ABD$ ($P_{\triangle ABD}$).



Slika 4.9: Trigonometrijski krug za ugao x.

Izračunajmo sada te površine imajući u vidu da je (pogledati poglavlje 2.2.5)

$$|CC'| = \sin x\,, \quad |BD| = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad |AB| = |AC| = 1\,.$$

Dakle,

$$P_{\triangle ABC} = \frac{|AB||CC'|}{2} = \frac{1\cdot\sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}\,,$$
$$P_{kiABC} = |AC|^2\pi\cdot\frac{x}{2\pi} = 1\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

i

$$P_{\triangle ABD} = \frac{|AB||BD|}{2} = \frac{1\cdot\operatorname{tg} x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x}\,.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} < P_{kiABC} < P_{\triangle ABD} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2\cos x} \Big/ \cdot \frac{2}{\sin x} \\ &\Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ &\Rightarrow \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x\,. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je, na osnovu pretpostavke za x, $\sin x > 0$ i $\cos x > 0$. Ako pustimo sada da $x \to 0^+$ imaćemo

$$\lim_{x\to 0+} 1 \geq \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0+}\cos x \Rightarrow 1 \geq \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} \geq \cos 0 \Rightarrow 1 \geq \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} \geq 1\,,$$

pa je jasno da mora, na osnovu osobine (o7), važiti i

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

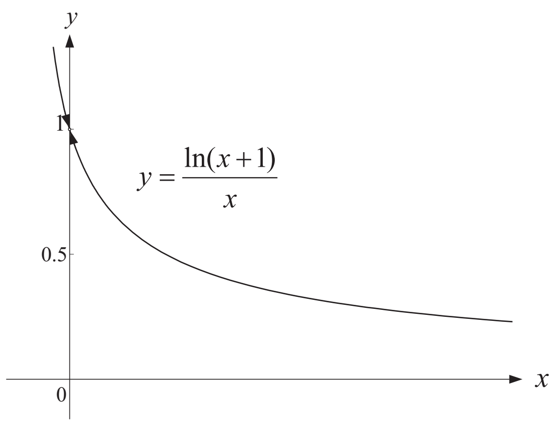
Zbog parnosti funkcije $f(x) = \sin x/x$ važiće i

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

što nas dovodi do

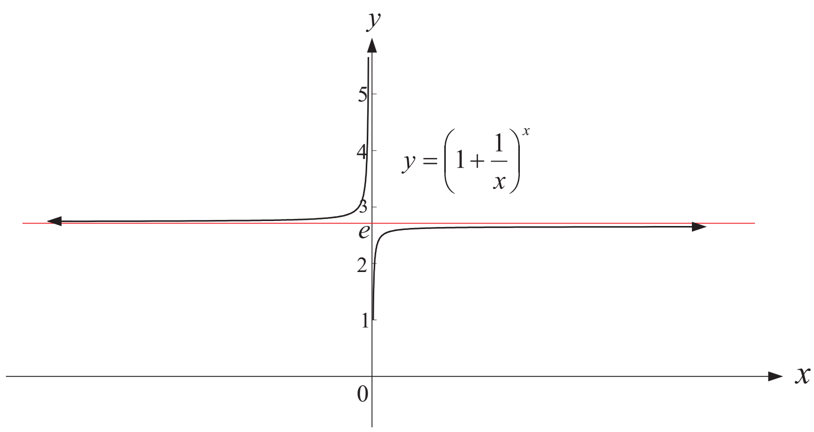
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Na slici 4.10 prikazana je funkcija $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ kada $x \to 0^-$ i $x \to 0^+$.



Slika 4.10: Funkcija $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ i njeno ponašanje kada $x \to 0$.

Dokaz da je $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ biće dat u primeru 5.3.2 (poglavlje 5.3). Na slici 4.11 prikazana je funkcija $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ i njeno ponašanje kada $x \to \pm\infty$.



Slika 4.11: Funkcija $f(x) = (1 + 1/x)^x$ i njeno ponašanje kada $x \to \pm\infty$.

Primer 4.2.1 Koristeći važne granične vrednosti i osobine odrediti:

$(i)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x}{x^2+4}$ $\quad(ii)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+4}{x^3+x-3}$ $\quad(iii)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x+2}{2x^2-5}$

$(iv)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$ $\quad(v)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+x)-\ln 2}{x^2-1}$ $\quad(vi)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

$(vii)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2x}\right)^x$ $\quad(viii)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^x$ $\quad(ix)\ \lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}$

$(x)\ \lim\limits_{x\to2}\left(1-(x^3-8)\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$

Resenje.

(i) Koristeći osobine (o4) i (o2) i formulu (4.1) imaćemo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}} = \frac{2-0}{1+0} = 2\,.$$

(ii) Korišćenjem osobina (o4) i (o2) i formulu (4.1) dobijamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+4}{x^3+x-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(x^2+1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{4}{x}}{x^2+1-\frac{3}{x}} = 0\,.$$

(iii) Koristeći osobine (o4) i (o2) i formulu (4.1) imaćemo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x+2}{2x^2-5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}} = -\infty\,.$$

(iv) Koristićemo da je $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ i osobinu (o1):

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4} = \frac{3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 1} = \frac{3}{4}\,.$$

(v) Koristićemo $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ i osobine logaritamske funkcije.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+x)-\ln 2}{x^2-1} &= \lim_{x-1\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 2}{(x-1)(x+1)}=\{t=x-1\Rightarrow x=t+1\}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+(t+1))-\ln 2}{t((t+1)+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(2+t)-\ln 2}{t(t+2)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{2+t}{2}}{t(t+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t(t+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}\cdot 2\cdot(t+2)}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2\cdot(t+2)}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\cdot(t+2)}=1\cdot\frac{1}{2\cdot(0+2)}=\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

(vi) Koristićemo da je $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ i osobinu (o1):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{2\,x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(2\,e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2\,x}\right)=2\,e^0\cdot 1=2\cdot 1\cdot 1=2\,.
\end{aligned}$$

(vii) Datu graničnu vrednost ćemo svesti na $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, a koristićemo osobine (o2), (o4) i (o5) i formulu (4.1).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+3}{x^2-2x}-1\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+3-x^2+2x}{x^2-2x}\right)^x\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x+3}{x^2-2x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^x\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}\cdot\frac{2x+3}{x^2-2x}\cdot x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{2x^2+3x}{x^2-2x}}\\
&= \left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2-2x}}=e^2\,,
\end{aligned}$$

jer je u eksponentu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=2\,.$$

$(viii)$ Datu graničnu vrednost ćemo svesti na $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$ uz korišćenje osobine (o5).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3=\frac{1}{e^3}\,.$$

(ix) Koristićemo da je $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ i $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ kao i osobine (o1) i (o5).

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{2\cdot\frac{\sin x}{x}}=e^{2\cdot 1}=e^2\,.$$

(x) Koristićemo da je $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}$ i osobinu (o5).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(1-(x^3-8)\right)^{\frac{1}{x^2-4}} &= \lim_{x-2\to 0}\left(1-(x-2)(x^2+2x+4)\right)^{\frac{1}{(x-2)(x+2)}}\\
&= \{t=x-2\Rightarrow x=t+2\}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(1-t((t+2)^2+2(t+2)+4)\right)^{\frac{1}{t((t+2)+2)}}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(1-t(t^2+6t+12)\right)^{\frac{1}{t(t+4)}}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(1-t(t^2+6t+12)\right)^{\frac{1}{t(t^2+6t+12)}\cdot\frac{t^2+6t+12}{t+4}}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\left(1-t(t^2+6t+12)\right)^{\frac{1}{t(t^2+6t+12)}}\right)^{\frac{t^2+6t+12}{t+4}}\\
&= \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{0^2+6\cdot 0+12}{0+4}}=\frac{1}{e^3}\,.
\end{aligned}$$

4.3 Asimptote grafika funkcije

Grafik funkcije može imati horizontalnu, vertikalnu i kosu asimptotu.

Definicija 4.3.1 *Grafik funkcije f ima horizontalnu asimptotu $y=n$ ako važi bar jedan od sledeća dva uslova (slika 4.4, $n=L$):*

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=n,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=n.$$

Definicija 4.3.2 *Grafik funkcije f ima vertikalnu asimptotu $x = x_0$ u tački x_0 ako važi bar jedan od sledeća četiri uslova:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \ (slika\ 4.6\ b)), \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \ (slika\ 4.6\ a)),$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \ (slika\ 4.5\ b)), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \ (slika\ 4.5\ a)).$$

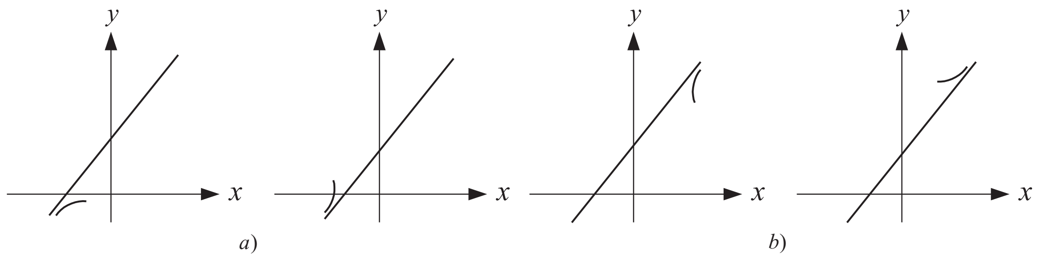
Vertikalne asimptote se traže u rubnim tačkama domena funkcije ili u tačkama prekida. Ako su u pitanju intervali (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ i $[a, b]$, rubne tačke su a i b. Ako su pitanju intervali $(-\infty, b)$ i $(-\infty, b]$, rubna tačka je b. Analogno, za intervale $(a, +\infty)$ i $[a, +\infty)$, rubna tačka je a.

Definicija 4.3.3 *Grafik funkcije f ima kosu asimptotu $y = kx + n$, ako se brojevi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{R}$ mogu odrediti na sledeći način:*

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \ n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k\,x) \ \ (slika\ 4.12\ a))$$

ili

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \ n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k\,x) \ \ (slika\ 4.12\ b)).$$



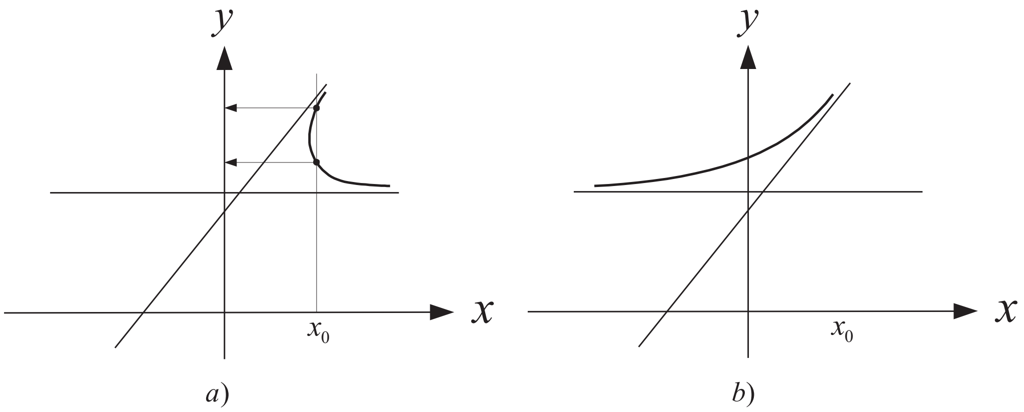
Slika 4.12: Kosa asimptota grafika funkcije.

Dakle, asimptote funkcije opisuju ponašanje funkcije u okolini neke tačke ili u $\pm\infty$.

Napomena 4.3.4 *Ako se traže asimptote racionalne funkcije $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, gde je $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_m \neq 0$ i $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $b_n \neq 0$. Tada*

- *ako je $m \le n$, onda postoji horizontalna asimptota kada $x \to \pm\infty$ i to $y = 0$ ako je $m < n$ i $y = a_m/b_n$ ako je $m = n$,*
- *ako je $m = n + 1$, onda postoji kosa asimptota kada $x \to \pm\infty$,*
- *ako je $m > n + 1$, onda ne postoje ni horizontalna ni kosa asimptota,*
- *ako postoji x_0 za koje je $Q_n(x_0) = 0$, onda treba tražiti vertikalnu asimptotu u $x = x_0$.*

Napomena 4.3.5 *Ako grafik funkcije ima horizontalnu asimptotu kada $x \to +\infty$ (ili $x \to -\infty$), tada nema kosu asimptotu kada $x \to +\infty$ (ili $x \to -\infty$) i obrnuto. U suprotnom, za jedno x_0 imali bismo dva različita $f(x_0)$ pa f ne bi bila funkcija (slika 4.13 a)). Ipak, funkcija može imati kosu asimptotu kada, recimo, $x \to +\infty$, a horizontalnu kada $x \to -\infty$ (slika 4.13 b)) i obrnuto.*



Slika 4.13: *a*) Funkcija ne može imati i kosu i horizontalnu kada $x \to +\infty$ (ili $x \to -\infty$). *b*) Funkcija može imati istovremeno i horizontalnu asimptotu kada $x \to -\infty$ ($x \to +\infty$) i kosu asimptotu kada $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Primer 4.3.6 Odrediti asimptote sledećih funkcija:

$$(i)\, f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 + 1}, \quad (ii)\, f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}, \quad (iii)\, f(x) = \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + 4}.$$

Rešenje.

(i) Odredimo prvo domen za datu funkciju: $x^3 + 1 \neq 0 \Rightarrow x^3 \neq -1 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Potražimo sada vertikalnu asimptotu u tački $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = -\infty$$

jer je brojilac jednak $(-1)^2 - (-1) = 2$, a za imenilac važi

$$x \to -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x^3 < (-1)^3 = -1 \Rightarrow x^3 + 1 < 0,$$

pa je količnik $\frac{x^2-x}{x^3+1}$ negativan što znači da ta granična vrednost mora režiti ka $-\infty$. Dalje,

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = +\infty$$

jer za imenilac važi

$$x \to -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow x^3 + 1 > 0,$$

pa je količnik $\frac{x^2-x}{x^3+1}$ pozitivan, a tada sledi da granična vrednost mora režiti ka $+\infty$. Zaključujemo da je prava $x = -1$ vertikalna asimptota grafika funkcije. Na osnovu napomene 4.3.4, potražimo još i horizontalnu asimptotu. Imamo da je

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(x + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = 0\,,$$

što znači da je prava $y = 0$ horizontalna asimptota kada $x \to \pm\infty$.

(ii) Vidimo da iz $x^2-1\neq 0$ sledi $x\neq\pm 1$, pa je domen $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Odredimo odmah vertikalne asimptote:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3+x}{x^2-1}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3+x}{x^2-1}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+x}{x^2-1}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+x}{x^2-1}=+\infty\,.$$

te su prave $x=-1$ i $x=1$ vertikalne asimptote. Sada tražimo kosu asimptotu $y=kx+n$, $k\neq 0$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3+x}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x}{x^3-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1\,.$$

Potražimo sada i n. Naime,

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\,x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0\,,$$

što znači da je $y=x$ kosa asimptota kada $x\to\pm\infty$.

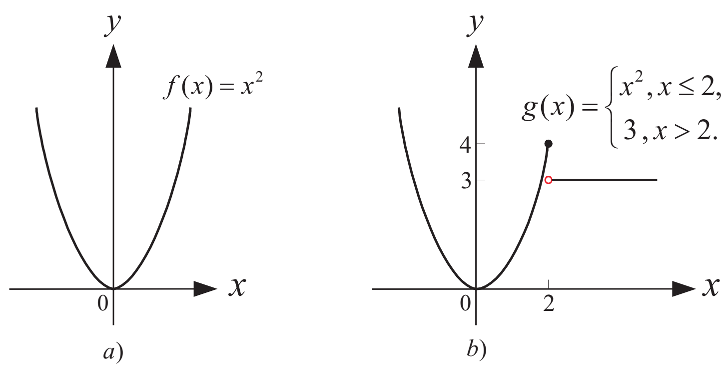
(iii) Kako je $3x^2+4>0$ za svaki realan broj x, to znači da posmatrana neprekidna funkcija nad svojim domenom nema vertikalnu asimptotu. Na osnovu napomene 4.3.4, potražimo horizontalnu asimptotu.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{4}{x^2}}=\frac{2}{3}\,.$$

Dakle, jedina asimptota je prava $y=\frac{2}{3}$ kada $x\to\pm\infty$.

4.4 Neprekidnost funkcije

Posmatrajmo funkcije $f(x)=x^2$ (slika 4.14 a)) i $g(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 2,\\ 3, & x>2,\end{cases}$ (slika 4.14 b)) kao i njihove vrednosti u okolini tačke $x=2$.



Slika 4.14: Neprekidna funkcija f i prekidna funkcija g u tački $x=2$.

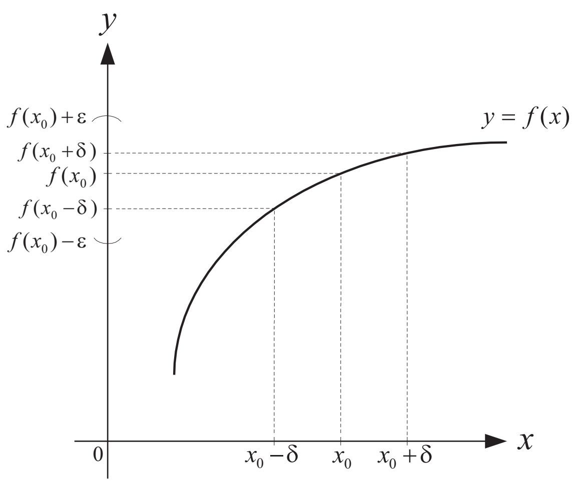
Jasno je da je $f(2) = g(2) = 4$. Tada je

	$f(x)$	$g(x)$	$\lvert x-2\rvert$	$\lvert f(x)-f(2)\rvert$	$\lvert g(x)-g(2)\rvert$
$x = 2.1$	4.41	3	0.1	0.41	1
$x = 2.01$	4.0401	3	0.01	0.0401	1
$x = 2.001$	4.004001	3	0.001	0.004001	1
$x = 2.0001$	4.00040001	3	0.0001	0.00040001	1

pa se zaključuje da „maloj" promeni promenljive x odgovara „mala" promena funkcije $f(x)$ dok za funkciju $g(x)$ to ne važi jer je $|g(x) - g(2)| = 1$ za svako $x > 2$. Intuitivno, f je neprekidna, a g prekidna u tački $x = 2$.

Definicija 4.4.1 *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna u tački $x_0 \in D$ ako (slika 4.15)*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall\, x \in D)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,. \qquad (4.3)$$



Slika 4.15: Neprekidna funkcija f u tački x_0.

Funkcija je neprekidna nad nekim skupom ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je prekidna u tački $x_0 \in D$ ako nije neprekidna u toj tački.

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b] \subseteq D$ ako je neprekidna na otvorenom intervalu (a, b) i ako važi

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ \text{ i } \ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Primer 4.4.2 Daćemo primere neprekidnih i prekidnih funkcija.

- Funkcija $s(x) = x$ je neprekidna nad celim skupom $\mathbb{R}$. Naime, uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ za koje važi $|x - x_0| < \delta$. Tada je

  $$|s(x) - s(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon\,.$$

  Dakle, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, ako je $\delta = \varepsilon$, funkcija $s(x) = x$ je neprekidna nad celim skupom $\mathbb{R}$.

- Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna nad celim skupom $\mathbb{R}$ što se dokazuje na sledeći način. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ za koje važi $|x - x_0| < \delta$. Tada je

  $$|f(x)-f(x_0)| = |x^2-x_0^2| = |x-x_0||x+x_0| < \delta|x+x_0| = \delta|x-x_0+2x_0| \leq \delta(|x-x_0|+2|x_0|)\,.$$

  Sada je jasno da je $\delta(|x - x_0| + 2|x_0|) < \delta(\delta + 2|x_0|)$, pa neka je $\delta(\delta + 2|x_0|) = \varepsilon$. Tada je

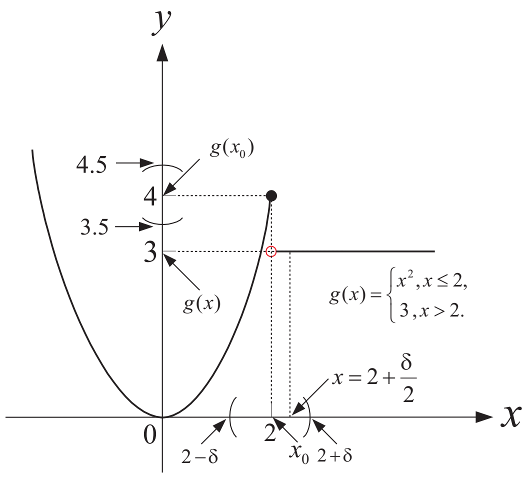
  $$\delta^2 + 2|x_0|\delta - \varepsilon = 0 \Rightarrow \delta = -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}\,. \tag{4.4}$$

  Dakle, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, ako δ izaberemo kao u (4.4), uvek će važiti (4.3), što znači da je $f(x) = x^2$ neprekidna nad celim skupom $\mathbb{R}$.

- Ispitajmo sada neprekidnost funkcije $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ 3, & x > 2, \end{cases}$ u tački $x_0 = 2$. Lako se pokazuje da je neprekidna za $x \neq 2$. Pokazaćemo da funkcija $g(x)$ ima prekid u $x_0 = 2$ tako što ćemo negirati (4.3). Naime, treba pokazati sledeće

  $$(\exists \varepsilon > 0)(\forall\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\exists x \in D)(|x - x_0| < \delta \wedge |g(x) - g(x_0)| \geq \varepsilon)\,.$$

  Za $\varepsilon = 1/2$ i $x = 2 + \delta/2$ važi $|x - x_0| = |2 + \delta/2 - 2| < \delta$ i $|g(x) - g(x_0)| = |g(2 + \delta/2) - g(2)| = |3 - 4| = 1 > 1/2$. Dakle, $g(x)$ ima prekid u $x_0 = 2$ (slika 4.16).



Slika 4.16: Funkcija $g(x)$ ima prekid u tački $x_0 = 2$.

A ako $f : D \to \mathbb{R}$ i ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa D, tada je f neprekidna u $x = x_0$ ako i samo ako važi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{4.5}$$

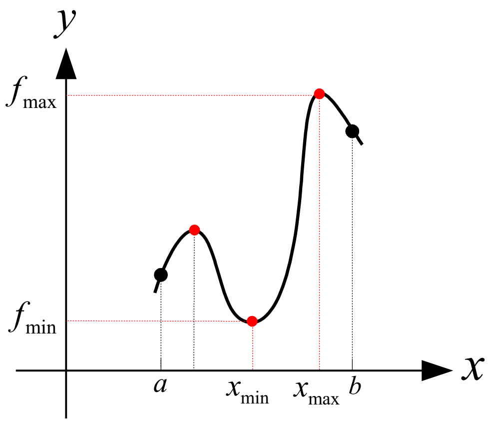
što sledi direktno iz definicije granične vrednosti 4.1.3 za $L = f(x_0)$. Važi i:

- ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne u tački $x = x_0$ tada su u tački $x = x_0$ neprekidne i funkcije $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, $g(x_0) \neq 0$, kao i kompozicija funkcija $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

- elementarne funkcije su neprekidne nad svojim domenom.

Često se koriste sledeća dva tvrđenja.

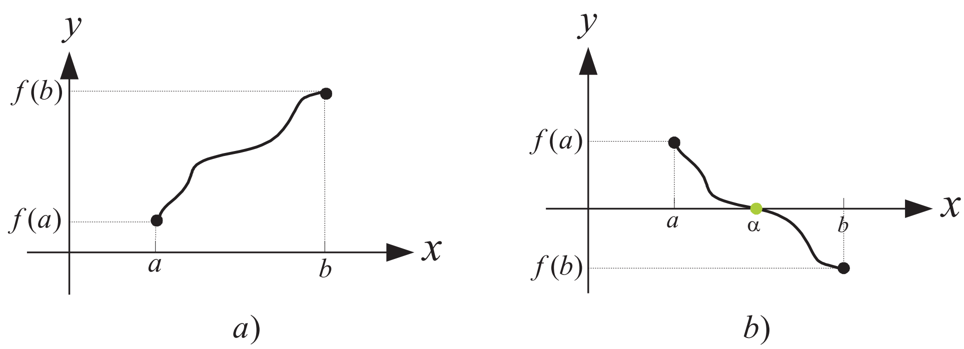
Tvrđenje 4.4.3 *Neka je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Neprekidna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ na zatvorenom intervalu $[a, b] \subseteq D$ dostiže svoj minimum i maksimum (slika 4.17).*



Slika 4.17: Ilustracija tvrđenja 4.4.3.

To znači da postoje tačke $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ u kojima funkcija $f(x)$, $x \in [a, b]$, dostiže svoj minimum $f_{\min} = f(x_{\min})$ i maksimum $f_{\max} = f(x_{\max})$. Takođe, kod diferencijalnog računa, pri dokazu Rolove teoreme koristi se tvrđenje 4.4.3.

Tvrđenje 4.4.4 *Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ i $f(a) \neq f(b)$, tada funkcija $f(x)$ uzima sve vrednosti na intervalu $[a, b]$ (slika 4.18).*



Slika 4.18: Ilustracija tvrđenja 4.4.4.

Dakle, ako je $f(a) < c < f(b)$ ili $f(b) < c < f(a)$, tada postoji $\alpha \in (a, b)$ tako da je $f(\alpha) = c$. Ako je još $f(a)\,f(b) < 0$, tvrđenje 4.4.4 nam govori u postojanju bar jedne tačke $\alpha \in (a, b)$ za koju važi da je $f(\alpha) = 0$ (slika 4.18 *b*)). Ovo tvrđenje ćemo koristiti i kod integralnog računa, a koristi se i pri približnom rešavanju jednačina $f(x) = 0$ kod metode polovljenja koja će ukratko biti objašnjena uz jedan primer.

Metoda polovljenja

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad svojim domenom i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ako je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, tada je nađena nula funkcije. Ako nije, posmatraćemo intervale $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ i $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Ako je $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, tada ćemo interval $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ obeležiti kao $[a_1, b_1]$. U suprotnom $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Primetimo da je dužina intervala $[a_1, b_1]$ jednaka polovini dužine intervala $[a, b]$, pa je $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Sada izračunamo $\frac{a_1+b_1}{2}$. Ako je $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, to je tražena nula funkcije. U suprotnom, formiramo intervale $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ i $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Ako je $f(a_1) \cdot f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, tada je $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, a ako nije, $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Opet je dužina intervala $[a_2, b_2]$ jednaka polovini dužine intervala $[a_1, b_1]$, pa je $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$. Ako nastavimo ovaj algoritam, važiće $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ i $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Ako pustimo da n teži plus beskonačnosti, tada će važiti

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0\,. \tag{4.6}$$

Jasno je da je $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots$ i $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots$, pa je niz $(a_n)_{n\in mN}$ monotono neopadajući, a niz $(b_n)_{n\in mN}$ monotono nerastući, a oba niza su ograničena. Dakle, konvergiraju, a zbog (4.6) važiće i

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to+\infty} b_n\,. \tag{4.7}$$

Pokazaćemo da je $f(\xi) = 0$. Naime, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, a to dalje znači da je

$$\lim_{n\to+\infty}(f(a_n) \cdot f(b_n)) \le 0 \Rightarrow (f(\xi) \cdot f(\xi)) \le 0 \Rightarrow (f(\xi))^2 \le 0 \Rightarrow f(\xi) = 0\,.$$

U prvom koraku, važiće $|\xi - a_1| < b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. U drugom, $|\xi - a_2| < b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$, itd. Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$, $|\xi - a_n| < \frac{b-a}{2^n}$, što nam pomaže da za neko $\varepsilon > 0$, odredimo $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je, recimo,

$$|\xi - a_n| < \varepsilon\,,\ \ n \ge n_0.$$

Primer 4.4.5 Odrediti nulu funkcije $f(x) = x^2 - 2$ na intervalu $[1, 2]$ korišćenjem metode polovljenja, ako je $\varepsilon = 0.01$.

Rešenje. Neka je $a_0 = a = 1$ i $b_0 = b = 2$. Odredićemo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \ge n_0$ važi

$$\frac{b-a}{2^n} \le \frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2^{n_0}}{b-a} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 2^{n_0} > \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 > \frac{\ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}\,.$$

Tada je

$$n_0 > \frac{\ln\frac{2-1}{0.01}}{\ln 2} = \frac{\ln 100}{\ln 2} = 6.64 \Rightarrow n_0 = 7\,.$$

n	a_n	$(a_n+b_n)/2$	b_n	$\lvert\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{2}\rvert$	$f(a_n)$	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$	$f(b_n)$
0	1	1.5	2	0.08579	−1	0.25	2
1	1	1.25	1.5	0.16421	−1	−0.4375	0.25
2	1.25	1.375	1.5	0.03921	−0.4375	−0.10938	0.25
3	1.375	1.4375	1.5	0.02329	−0.10938	0.06641	0.25
4	1.375	1.40625	1.4375	0.00796	−0.10938	−0.02246	0.06641
5	1.40625	1.42188	1.4375	0.00766	−0.02246	0.02173	0.06641
6	1.40625	1.41406	1.42188	0.00015	−0.02246	−0.00043	0.02173
7	1.41406	1.41797	1.42188	0.00376	−0.00043	0.01064	0.02173

Dakle, približno rešenje je $x = 1.41797$.

Primer 4.4.6 Rešiti jednačinu $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{x}$ ako $x \in [\pi/4, \pi/3]$, za $\varepsilon = 0.0001$.

Rešenje. Napomenimo da se tražena jednačina ne može eksplicitno rešiti, pa se mora pokušati numeričkim aparatima doći do rešenja. Odredimo $f(x) = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{x}$. Sada je

$$n_0 > \frac{\ln \frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}{0.0001}}{\ln 2} = \frac{\frac{\pi}{12}\ln 10000}{\ln 2} = 11.35 \Rightarrow n_0 = 12\,.$$

i

n	a_n	$(a_n+b_n)/2$	b_n	$f(a_n)$	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$	$f(b_n)$
0	0.78540	0.91630	1.04720	−0.27324	0.21188	0.77712
1	0.78540	0.85085	0.91630	−0.27324	−0.03501	0.21188
2	0.85085	0.88357	0.91630	−0.03502	0.08674	0.21188
3	0.85085	0.86721	0.88357	−0.03502	0.02552	0.08674
4	0.85085	0.85903	0.86721	−0.03502	−0.00483	0.02552
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11	0.86031	0.86037	0.86044	−0.00010	0.00014	0.00038
12	0.86031	0.86034	0.86037	−0.00010	0.00002	0.00014

Dakle, približno rešenje je $x = 0.86034$.

4.4.1 Vrste prekida funkcije

Ako je funkcija prekidna, tada može imati tri vrste prekida: prividan (otklonjiv) prekid, prekid prve i prekid druge vrste.

Definicija 4.4.7 *Funkcija $f(x)$ ima:*

- *otklonjiv prekid ako postoji* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *i* $L \neq f(x_0)$*,*
- *prekid prve vrste ako postoje* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$ *i* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$ *i važi* $L_1 \neq L_2$*,*
- *prekid druge vrste ako nije ni otklonjiv ni prekid prve vrste.*

Primer 4.4.8 Sada će biti dati primeri za sve tri vrste prekida.

- Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-8}{x-2}, & x \neq 2, \\ 5, & x = 2\,. \end{cases}$$

Potražimo sada graničnu vrednost u tački $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+4)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{1} = 6 \neq 5 = f(2)\,.$$

Dakle, ova funkcija ima prividan (otklonjiv) prekid. Otklonio bi se tako što bi se za $x = 2$, vrednost funkcije predefinisala na $f(2) = 6$.

- Funkcija

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ 3, & x > 2, \end{cases}$$

ima prekid prve vrste u tački $x = 2$ jer je

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \neq 3 = \lim_{x\to 2^+} f(x)\,.$$

- Funkcija

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

ima prekid druge vrste jer je $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Primetimo da ova funkcija, iako je definisana na celom skupu realnih brojeva, ima vertikalnu asimptotu $x = 0$.

4.5 Zadaci za vežbu

1. Neka je $y = x^2$. Kada $x \to 2$, tada $y \to 4$. Koliko mora biti δ da bi iz $|x-2| < \delta$ sledilo $|y-4| < \varepsilon = 0.001$? ($\delta < 0.00025$)

2. Neka je $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Kada $x \to 2$, tada $y \to \frac{3}{5}$. Koliko mora biti δ da bi iz $|x-2| < \delta$ sledilo $|y - \frac{3}{5}| < \varepsilon = 0.1$? ($\delta < 2 - \sqrt{3}$)

Odrediti sledeće granične vrednosti:

3. $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+2x+5}{2x^3-x^2+4}$. ($L = 3/2$)

4. $L = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+3}}{5x+\sqrt[4]{x^4+x^2}}$. ($L = 1/2$)

5. $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-4x^2+7}{x^3-3x+3}$. ($L = 0$)

6. $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^4+2x^2+x+1}{3x^3-3x^2+x-1}$. ($L = +\infty$)

7. $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-4x}\right)$. ($L = 2$)

8. $L = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+7x^2+11x+5}$. (ne postoji)

9. $L = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-5x^2+4x}{x^2-2x-8}$. $(L=2)$

10. $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3-3x^2+2\sin x+8x^6}{3x^5+\sin^2 x+4x-7x^8}$. $(L=1/2)$

11. $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$. $(L=1)$

12. $L = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$. $(L=-\sqrt{2}/\sqrt{5})$

13. $L = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$. $(L=4/3)$

14. $L = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt[3]{27}}{3-x}$. $(L=-1/3)$

15. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$. $(L=-1/2)$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$. $(L=0)$

17. $L = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$. $(L=+\infty)$

18. $L = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\sqrt{(-x)^5}+\ln(1+x)\right)$. $(L=0)$

19. $L = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. $(L=1)$

20. $L = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$. $(L=0)$

Odrediti asimptote sledećih funkcija:

21. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

22. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

24. Dokazati da jednačina $x^3-6x+3=0$ ima na intervalu $(1/2,1)$ jedan realan koren x_1. Izračunati približno taj koren. $(x_1 \approx 0.52)$

25. Dokazati da jednačina $x^5-3x-1=0$ ima na intervalu $(1,2)$ bar jedan realan koren x_1. Izračunati približno taj koren. $(x_1 \approx 1.39)$

26. Odrediti parametar λ tako da funkcija $y =$ bude neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$. $(\lambda = 2)$

27. Odrediti vrste prekida funkcije $y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & 1 < x \leq 2, \\ 3, & 2 < x \leq 3, \\ \frac{2x^2-18}{x^2-3x}, & x > 3. \end{cases}$

28. Pokazati da za $x \in [-2, 2]$ funkcija $y = \begin{cases} (x+1)e^{-2/x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$ uzima sve vrednosti između $f(-2)$ i $f(2)$ iako je prekidna (u kojoj tački?).

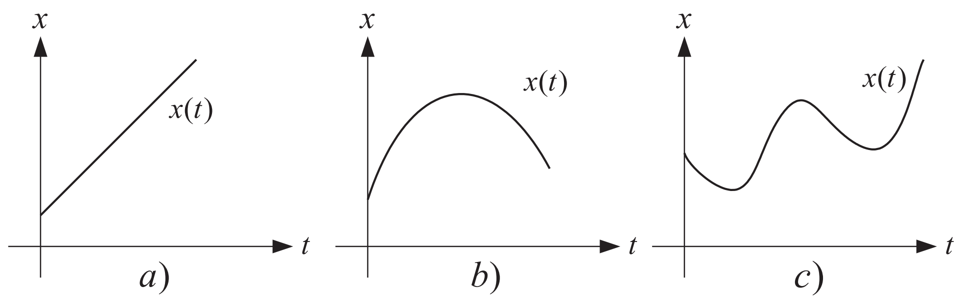
29. Data je funkcija $y = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ 1 + x, & x > 0. \end{cases}$ Kolika treba da je konstanta a da bi funkcija bila neprekidna za $x = 0$? Nacrtati grafik funkcije. $(a = 1)$

30. Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$ nije definisana za $x = 1$. Može li se odrediti $f(1)$ da bi funkcija za $x = 1$ bila neprekidna?

GLAVA 5

Izvod funkcije

Izvod funkcije je jedan od najvažnijih pojmova u matematici zbog veoma široke primene. Pojam izvoda nastao je iz problema tangente krive linije (proučavao ga je Lajbnic[1]) i problema brzine kretanja (proučavao ga je Njutn[2]). Oba problema su proučavana nezavisno gotovo u istom vremenskom periodu. Ideja je da se tangenta linija shvati kao granična linija ka kojoj teži sečica krive, kada se jedna od presečnih tačaka na krivoj približava drugoj presečnoj tački. Osnovni problem na koji su prethodnici Lajbnica nailazili, kada su pokušavali da reše problem tangente, ležao je u radu sa beskrajno malim veličinama. Lajbnicu je pošlo za rukom da reši problem tangente uvodeći pojam izvoda, odnosno diferencijala. Njutn se bavio problemom brzine koji ga je doveo do pojma izvoda funkcije. Rešavao je problem pronalaženja brzine kretanja u datom vremenskom trenutku kada je pređeni put poznat kao funkcija vremena. Kao tipičan primer, Njutn je uzeo put pokretne tačke i došao do pojma izvoda, posmatrajući problem kretanja, što je odigralo značajnu ulogu u razvoju mehanike tokom XVII i XVIII veka. Na primer, tri različite vrste kretanja date su na slici 5.1.



Slika 5.1: Tri različite vrste kretanja duž krive $x(t)$ koja je funkcija od vremena t: a) konstantna brzina (prvi izvod je konstantan), b) konstantno ubrzanje (drugi izvod je konstantan), c) promenljivi su i brzina i ubrzanje.

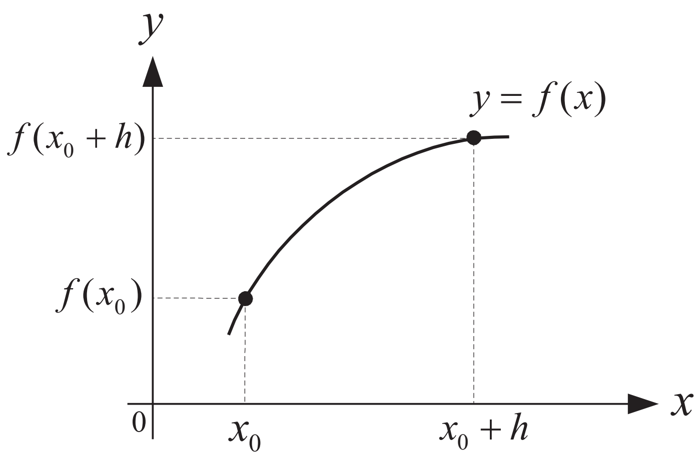
[1]Gotfrid Vilhelm Lajbnic (1646-1716) - pogledati poglavlje 9.8

[2]Isak Njutn (1642-1727) - pogledati poglavlje 9.7

5.1 Definicija prvog izvoda funkcije

Posmatrajmo funkciju kao na slici 5.2. Srednja brzina kretanja od tačke $(x_0, f(x_0))$ do tačke $(x_0+h, f(x_0+h))$, $h>0$ je

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$



Slika 5.2: Tačka $(x_0, f(x_0))$ se kreće putanjom koju opisuje funkcija $f(x)$ do tačke $(x_0 + h, f(x_0+h))$, $h>0$.

Ako pustimo da $h \to 0$ dobijamo trenutnu brzinu u tački x_0 koja je jednaka

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Tako dolazimo do pojma prvog izvoda funkcije u tački x_0.

Definicija 5.1.1 *Neka funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ i neka $x_0\in(a,b)$. Prvi izvod funkcije f u tački x_0 je*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{5.1}$$

pod uslovom da navedena granična vrednost postoji.

Ako funkcija ima prvi izvod u tački $x = x_0$, tada se kaže da je *diferencijabilna* u toj tački. Funkcija je diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) ako je diferencijabilna u svakoj tački tog intervala. Funkcija je diferencijabilna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ ako je diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) i ako postoji desni izvod u tački a, odnosno,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

i levi izvod u tački b, odnosno,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

Definisaćemo sada levi i desni izvod u proizvoljnoj tački $x = x_0$.

Definicija 5.1.2 *Levi izvod funkcije f u tački $x = x_0$ je*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Analogno, desni izvod funkcije f u tački $x = x_0$ je

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ako su levi i desni izvodi jednaki, odnosno ako je $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, tada kažemo da je to i prvi izvod funkcije u tački $x = x_0$. U suprotnom, kažemo da prvi izvod ne postoji.

Tablica izvoda elementarnih funkcija

Sada će biti dati izvodi elementarnih funkcija koji se mogu dobiti korišćenjem (5.1).

(i1) $(c)' = 0$, c je konstanta;

(i2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(i3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > 0$;

(i4) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

(i5) $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

(i6) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(i7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

(i8) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$;

(i9) $(e^x)' = e^x$;

(i10) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;

(i11) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$;

(i12) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$;

(i13) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$;

(i14) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(i15) $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pokazaćemo da je $(x^3)' = 3x^2$. Neka je $f(x) = x^3$. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{1} = 3x^2\,. \end{aligned}$$

Pokažimo da je $(\sin x)' = \cos x$. Uzmimo da je $f(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-(1-\cos h)\sin x+\sin h\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}\sin x+\sin h\cos x}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2\frac{h}{2}\sin x}{\frac{h}{2}} + \lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos x}{h} \\ &= -\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}\sin^2\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\ &= -\sin x\cdot(0\cdot 1)+\cos x\cdot 1 = \cos x\,. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$ i da je $1-\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$.

Pokazaćemo još da je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Neka je $f(x) = \ln x$, tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x\cdot\frac{h}{x}} \\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}\,. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

Važna osobina svake diferencijabilne funkcije u tački $x = x_0$ je da je ona i neprekidna u toj tački. Naime, ako je funkcija diferencijablina u $x = x_0$, tada je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,,$$

a treba da pokažemo da važi neprekidnost u $x = x_0$, odnosno

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x-x_0\to 0} f(x_0+x-x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)\,,$$

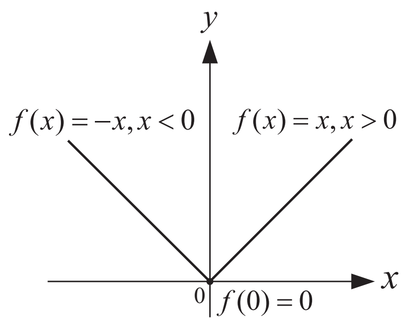
kada uvedemo smenu $x - x_0 = h$. Naime,

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h = f'(x_0)\cdot\lim_{h\to 0} h = 0\,.$$

Obrnuto ne mora da važi, odnosno pronaći ćemo funkciju koja je neprekidna u tački $x = x_0$, a nije diferencijablina u toj tački. Pokazaćemo da je funkcija

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

neprekidna u $x = 0$, a da nije diferencijabilna (slika 5.3).



Slika 5.3: Grafik funkcije $f(x) = |x|$.

Potražimo levu i desnu graničnu vrednost u tački $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0\,, \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0\,.$$

Dobijeno je da je $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ čime je pokazana neprekidnost u tački $x = 0$. Proverimo sada i diferencijabilnost u istoj tački. Važi

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1$$

i

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\,.$$

Zbog $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, jasno je da prvi izvod u tački $x = 0$ ne postoji pa posmatrana funkcija nije diferencijabilna u toj tački.

5.2 Diferencijal funkcije

Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a, b). Neka $x, x + h \in (a, b)$. Tada važi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x}\,.$$

Sa $x + h - x = h = \Delta x$ obeležićemo priraštaj argumenta, a neka je $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ priraštaj funkcije. Sada je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

Odavde sledi da je

$$\Delta y - f'(x)\Delta x = \varphi(\Delta x)\Delta x\,,$$

gde je $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x) = 0$. Dakle,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varphi(\Delta x)\Delta x \Rightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x\,,$$

kada $\Delta x \to 0$, odnosno, priraštaj funkcije $y = f(x)$ u tački x približno je jednak $f'(x)\Delta x$ (videti primer 5.2.1 i tabelu 5.1) ili

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Primer 5.2.1 Odrediti priraštaj funkcije $y = x^2$ za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$ u tački $x = 1$ i uporediti $\Delta y/\Delta x$ sa $f'(x)$.

Rešenje. Jasno je da je $f'(x) = 2x$ i da je $f'(1) = 2$. Pogledati tabelu 5.1.

Tabela 5.1: Priraštaj funkcije $y = x^2$ u tački $x = 1$ za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$, $\Delta y/\Delta x$ i $f'(x)$.

x	Δx	$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2$	$\Delta y/\Delta x$	$f'(x)$
1	0.1	0.21	2.1	2
1	0.01	0.0201	2.01	2
1	0.001	0.002001	2.001	2
1	0.0001	0.00020001	2.0001	2

Ovim dolazimo do definicije diferencijala funkcije.

Definicija 5.2.2 *Neka je f diferencijabilna funkcija i neka je sa $dx = \Delta x$ obeležen priraštaj argumenta (odnosno diferencijal argumenta). Diferencijal funkcije $y = f(x)$ je $dy = f'(x)\,dx$.*

Na slici 5.4, dy jednako je rastojanju između tačaka D i C, dok je priraštaj funkcije Δy jednak rastojanju između tačaka A i C.

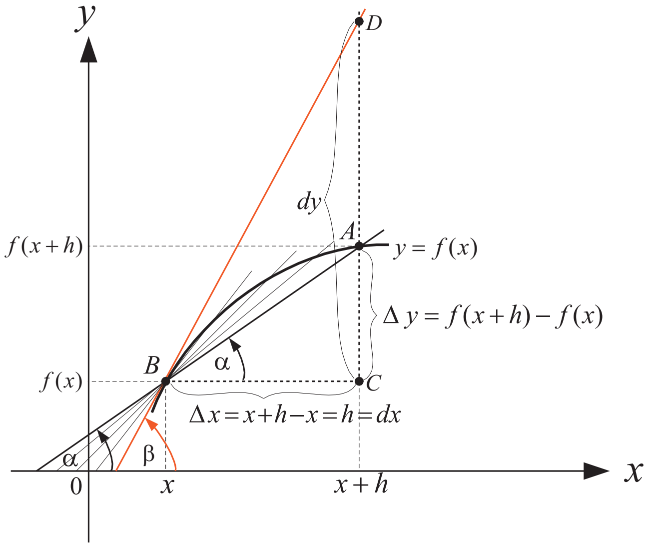
Primer 5.2.3 Odrediti diferencijal funkcije $y = \sin x + x^5$.

Rešenje. Kako je $f(x) = \sin x + x^5$ i kako je $f'(x) = \cos x + 5x^4$, tada je $dy = (\cos x + 5x^4)\,dx$.

5.3 Geometrijska interpretacija prvog izvoda

Da bismo objasnili geometrijsko tumačenje prvog izvoda, posmatrajmo funkciju f kao na slici 5.4.
Neka je $h > 0$ (analogno se tumači i za $h < 0$) i na x-osi nanesimo x i $x+h$. Time su određeni $f(x)$ i $f(x+h)$. Priraštaj argumenta obeležićemo sa $\Delta x = (x+h) - x = h$, a priraštaj funkcije sa $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Tačka A na slici 5.4 ima koordinate $A(x+h, f(x+h))$, tačka $B(x, f(x))$, a $C(x+h, f(x))$. U trouglu $\triangle ABC$ ugao $\angle ABC$ obeležićemo sa α. Tada je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

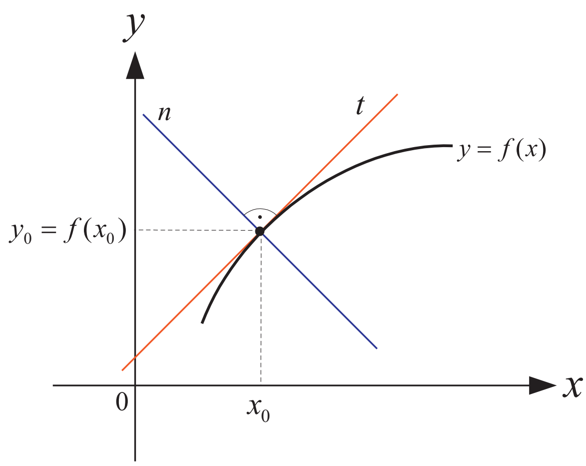


Slika 5.4: Geometrijsko tumačenje prvog izvoda.

Kada $h = \Delta x \to 0$, tada se tačka A kreće po grafiku funkcije f ka tački B, prava koja prolazi kroz tačke A i B (sečica) postaje tangenta funkcije f u tački x, a ugao α teži uglu β:

$$\operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\,.$$

Dakle, prvi izvod funkcije f u tački x jednak je tangensu ugla koji zaklapa tangenta grafika funkcije f u tački x sa pozitivnim delom x-ose. Sada je jasno da se jednačina tangente grafika funkcije f u tački (x_0, y_0) može zapisati kao $t:\ \ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, a jednačina normale u (x_0, y_0) je $n:\ \ y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ f'(x_0) \neq 0$, gde je $y_0 = f(x_0)$ (slika 5.5).



Slika 5.5: Tangenta (t) i normala (n) na grafik funkcije f u tački (x_0, y_0).

Primer 5.3.1 Odrediti jednačinu tangente i normale funkcije $f(x) = x^2$ u tački $(1, f(1))$.

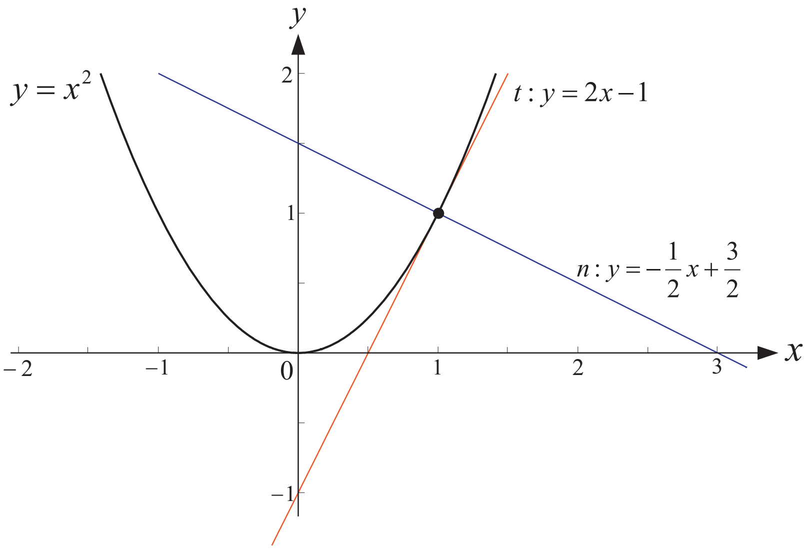
Rešenje. Kako je $f(1) = 1$, tada je tačka $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Dalje je $f'(x) = 2x$, pa je $f'(x_0) = f'(1) = 2$. Jednačina tangente je

$$t : y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1\,,$$

a normale

$$n : y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\,,$$

što je prikazano na slici 5.6.



Slika 5.6: Tangenta (t) i normala (n) na grafik funkcije $f(x) = x^2$ u tački $(1, 1)$.

Primer 5.3.2 Dokazati graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Rešenje. Potražimo po definiciji prvi izvod funkcije $f(x) = a^x$ za $a > 0$ i $a \neq 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \left(a^h - 1\right)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}\,. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je

$$f'(0) = a^0 \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \Rightarrow f'(x) = a^x\, f'(0)\,.$$

Posmatrajmo sada tabelu 5.2 u kojoj su dati količnici $(a^h-1)/h$ za $a=2$ i $a=3$ za različite vrednosti h kada $h\to 0$.

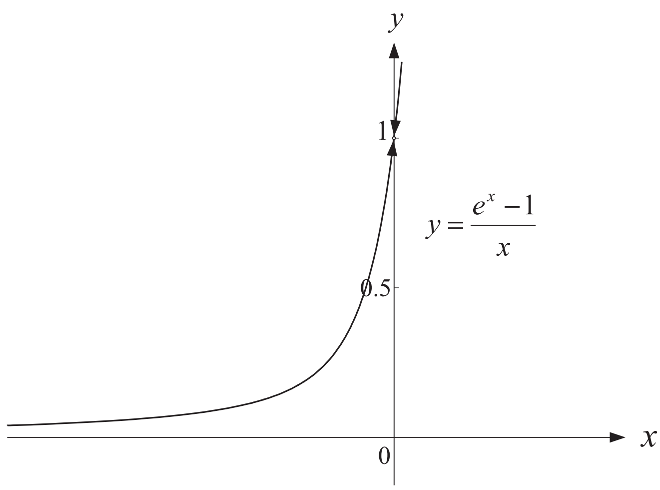
Tabela 5.2: Količnici $(a^h-1)/h$ za $a=2$ i $a=3$ za različite vrednosti h.

h	$(2^h-1)/h$	$(3^h-1)/h$
0.1	0.71774	1.16123
0.01	0.69556	1.10467
0.001	0.69339	1.09922
0.0001	0.69317	1.09867
0.00001	0.69315	1.09862
$f'(0)\approx$	0.693	1.099

Dakle, sigurno postoji neki broj a između 2 i 3 tako da je $f'(0)=1$. Taj broj je nazvan broj e što znači da je za $a=e$ (slika 5.7)

$$1=f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot f'(0)=e^x\cdot 1=e^x\,,$$

što dalje implicira da je od svih eksponencijalnih funkcija, jedino kod funkcije $f(x)=e^x$, tangenta na grafik te funkcije u tački $(0,1)$ sa x-osom zaklapa ugao od 45 stepeni ili $\pi/4$ radijana ($f'(0)=e^0=1$).



Slika 5.7: Funkcija $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ i njeno ponašanje kada $x\to 0$.

5.4 Osnovna pravila za nalaženje prvog izvoda funkcije i izvoda višeg reda

Sva osnovna pravila za izvod funcije dokazuju se pomoću definicije prvog izvoda.

- Pravilo za izvod konstanta puta funkcija: $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$, c-konstanta

$$(c\cdot f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h}=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\cdot f'(x)$$

Primer 5.4.1 Korišćenjem pravila za $(c \cdot f(x))'$ možemo izračunati da je:

(i) $(5 \sin x)' = 5 (\sin x)' = 5 \cos x$,

(ii) $(-3 \ln x)' = -3 (\ln x)' = -\dfrac{3}{x}$,

(iii) $(2 \operatorname{arctg} x)' = 2 (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{2}{1+x^2}$.

- Pravilo za izvod zbira/razlike: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$\begin{aligned}
(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \pm g'(x).
\end{aligned}$$

Primer 5.4.2 Korišćenjem pravila za izvod zbira/razlike možemo izračunati da je:

(i) $(e^x + \cos x)' = (e^x)' + (\cos x)' = e^x - \sin x$,

(ii) $(2 \operatorname{tg} x - \arcsin x + 5x^3)' = 2(\operatorname{tg} x)' - (\arcsin x)' + 5(x^3)' = \dfrac{2}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 15x^2$,

(iii) $(\sqrt[5]{x^3} + 3^x - \dfrac{5}{x} + 10)' = (x^{3/5})' + (3^x)' - 5(x^{-1})' + (10)' = \dfrac{3}{5}\, x^{-2/5} + 3^x \ln 3 + \dfrac{5}{x^2}$.

- Pravilo za izvod proizvoda: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned}
(f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Primer 5.4.3 Korišćenjem pravila za izvod proizvoda dobijamo da je:

(i) $(x^2 \cdot \log_4 x)' = (x^2)' \cdot \log_4 x + x^2 \cdot (\log_4 x)' = 2x \cdot \log_4 x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x \ln 4} = 2x \cdot \log_4 x + \dfrac{x}{\ln 4}$,

(ii) $(\operatorname{ctg} x \cdot e^x)' = (\operatorname{ctg} x)' \cdot e^x + \operatorname{ctg} x \cdot (e^x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} \cdot e^x + \operatorname{ctg} x \cdot e^x = e^x \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\sin^2 x} \right)$.

- Pravilo za izvod količnika: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{h\, g(x+h)g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}\\
&= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\,.
\end{aligned}
$$

Primer 5.4.4 Korišćenjem pravila za izvod količnika imamo da je:

(i) $\left(\dfrac{\cos x}{x^4}\right)' = \dfrac{(\cos x)'x^4 - \cos x(x^4)'}{(x^4)^2} = \dfrac{-\sin x\cdot x^4 - \cos x\cdot 4x^3}{x^8} = \dfrac{-x\,\sin x - 4\,\cos x}{x^5}\,,$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{e^x + 3\sqrt{x}}{\ln x}\right)' &= \frac{(e^x+3\sqrt{x})'\ln x - (e^x+3\sqrt{x})(\ln x)'}{(\ln x)^2}\\
&= \frac{\left(e^x + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\ln x - (e^x+3\sqrt{x})\frac{1}{x}}{\ln^2 x}\\
&= \frac{e^x\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2\sqrt{x}}\ln x - 3\frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2 x}\,.
\end{aligned}
$$

- Pravilo za izvod složene funkcije: $(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$. Ako obeležimo sa $\Delta g = g(x+h) - g(x)$, tada je

$$
\begin{aligned}
(f(g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+\Delta g) - f(g(x))}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+\Delta g) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(g(x))\cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Primer 5.4.5 Korišćenjem pravila za izvod složene funkcije dobijamo:

(i) $(\sin(5x))' = \cos(5x)\cdot(5x)' = 5\,\cos(5x)\,,$

(ii) $(e^{3x})' = e^{3x}\cdot(3x)' = 3\,e^{3x}\,,$

(iii) $(\arcsin(x^{2019}))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^{2019})^2}} \cdot (x^{2019})' = \dfrac{2019\, x^{2018}}{\sqrt{1-x^{4038}}}$,

(iv) $((\arcsin x)^{2019})' = 2019\,(\arcsin x)^{2018} \cdot (\arcsin x)' = \dfrac{2019 \arcsin^{2018} x}{\sqrt{1-x^2}}$,

(v) $(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

(vi)

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}\right)' &= \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot 2 \cdot \frac{x'(1-x^2) - x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1 \cdot (1-x^2) - x \cdot (-2\,x)}{(1-x^2)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{(1-x^2)^2}{1-2x^2+x^4+4x^2} \cdot \frac{1-x^2+2\,x^2}{(1-x^2)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{1+x^2}{1+2x^2+x^4} = 2 \cdot \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Izvod inverzne funkcije

Potražimo izvod inverzne funkcije (definicija inverzne funkcije data je u uvodu ovog udžbenika). Neka je $y = f(x)$ diferencijabilna na nekom intervalu (a, b) i neka je f^{-1} njena inverzna funkcija. Tada je i $f^{-1}(y) = x$ takođe diferencijabilna na tom intervalu i važi

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \quad &\Rightarrow \quad (f^{-1}(f(x)))' = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\
&\Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.
\end{aligned}$$

Ako sada zamenimo $y \to x$ dobijamo tražnu formulu

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{5.2}$$

Primer 5.4.6 Dokazati tablični izvod funkcije $\arcsin x$.

Rešenje. Ako je $f(x) = \sin x$, tada je $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Sada, po formuli (5.2) imaćemo

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Koristili smo da je $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Primer 5.4.7 Dokazati tablični izvod funkcije $\operatorname{arctg} x$.

Rešenje. Ako je $f(x) = \operatorname{tg} x$, tada je $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$. Sada, po formuli (5.2) imaćemo

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x))' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x)} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} + \frac{\sin^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.\end{aligned}$$

Analogno se dokazuju i tablični izvodi za funkcije $\arccos x$ i $\operatorname{arcctg} x$.

Logaritamski izvod

A sada potražimo logaritamski izvod. Neka su $h(x)$ i $g(x)$ dve diferencijabilne funkcije na intervalu (a,b). Ako se traži prvi izvod funkcije $f(x) = h(x)^{g(x)}$, tada se mogu i leva i desna strana logaritmovati i onda primeniti formulu za izvod složene funkcije.

$$\begin{aligned} f(x) = h(x)^{g(x)} \quad &\Rightarrow \quad \ln f(x) = \ln h(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln f(x) = g(x)\, \ln h(x) \\ &\Rightarrow \quad (\ln f(x))' = (g(x)\, \ln h(x))' \\ &\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)\, \ln h(x) + g(x)\, (\ln h(x))' \\ &\Rightarrow \quad f'(x) = f(x) \cdot \left(g'(x)\, \ln h(x) + g(x)\, \frac{h'(x)}{h(x)} \right)\,. \end{aligned}$$

Primer 5.4.8 Naći prvi izvod funkcije $f(x) = x^x$.

Resenje. Dakle, ponavljanjem postupka opisanog odmah pre ovog primera, imaćemo

$$f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \Rightarrow f'(x) = x^x \,(\ln x + 1)\,.$$

Primer 5.4.9 Naći prvi izvod funkcije $f(x) = (\ln x)^{\sin x}$.

Resenje. Sada je

$$\ln f(x) = \sin x\, \ln(\ln x) \Rightarrow f'(x) = (\ln x)^{\sin x} \left(\cos x\, \ln(\ln x) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right)\,.$$

Prvi izvod funkcije date u parametarskom obliku

Podsetimo se (poglavlje 2.5) da je funkcija $y = f(x)$ dok $x \in (a,b)$, u parametarskom obliku data sa $x = \psi(t)$, $y = \phi(t)$, za $t \in (t_1, t_2)$. Ako su $\psi(t)$ i $y = \phi(t)$ dve diferencijabilne funkcije na intervalu (t_1, t_2), tada je izvod funkcije f, zadate u parametarskom obliku, dat sa

$$f'_x(x(t)) = \frac{\phi'_t(t)}{\psi'_t(t)}\,, \quad \psi'_t(t) \neq 0\,, t \in (t_1, t_2)\,.$$

Naime,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}\,.$$

Primer 5.4.10 Odrediti prve izvode parametarski zadatih funkcija:

(a) $x(t) = 3\sin t$, $y = 2\sin 2t$, $t \in (0, 2\pi)$,

(b) $x(t) = 16\sin^3 t$, $y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$, $t \in (0, \pi)$,

Rešenje.

(a) Kako je $x'(t) = 3\cos t$, $y' = 4\cos 2t$, tada je

$$f'_x(x(t)) = \frac{4\cos 2t}{3\cos t}\,.$$

(b) Sada je $x'(t) = 48\sin^2 t\cos t$, $y' = -13\sin t + 10\sin 2t + 6\sin 3t + 4\sin 4t$, te je

$$f'_x(x(t)) = \frac{-13\sin t + 10\sin 2t + 6\sin 3t + 4\sin 4t}{48\sin^2 t\cos t}\,.$$

5.4.1 Izvodi višeg reda

Pretpostavimo da funkcija f ima prvi izvod f' na intervalu (a, b), odnosno, pretpostavimo da je f diferencijabilna na tom intervalu. Neka tačka $x_0 \in (a, b)$.

Definicija 5.4.11 *Drugi izvod funkcije f u tački x_0 je izvod funkcije $f'(x)$ u tački x_0, ako postoji, i obeležava se $f''(x_0)$.*

Analogno se definišu i treći, četvrti,..., n-ti izvod funkcije f u tački x_0 i označavaju se sa $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$,..., $f^{(n)}(x_0)$, redom.

Primer 5.4.12 Odrediti od prvi, drugi, treći i četvrti izvod sledećih funkcija:

- $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

  Rešenje.

$$f'(x) = (5x^3 - 2x^2 + 6x - 8)' = 15x^2 - 4x + 6$$

$$f''(x) = (15x^2 - 4x + 6)' = 30x - 4$$

$$f'''(x) = (30x - 4)' = 30$$

$$f^{(4)}(x) = (30)' = 0$$

- $f(x) = \ln(3x+2) - e^{-2x} + \dfrac{1}{x}$, $x \in (-2/3, 0) \cup (0, +\infty)$.

  Rešenje.

$$f'(x) = \left(\ln(3x+2) - e^{-2x} + \frac{1}{x}\right)' = \frac{3}{3x+2} + 2e^{-2x} - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{3}{3x+2} + 2e^{-2x} - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-9}{(3x+2)^2} - 4e^{-2x} + \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{-9}{(3x+2)^2} - 4e^{-2x} + \frac{2}{x^3}\right)' = \frac{54}{(3x+2)^3} + 8e^{-2x} - \frac{6}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{54}{(3x+2)^3} + 8e^{-2x} - \frac{6}{x^4}\right)' = \frac{-486}{(3x+2)^4} - 16e^{-2x} + \frac{24}{x^5}$$

Primer 5.4.13 Odrediti n-te izvode sledećih funkcija, $n \in \mathbb{N}$:

- $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

  Rešenje. Koristeći tablični izvod funkcije $f(x) = e^x$ jasno je da je $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$, za svaki realan broj x i svako $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

  Rešenje. Imamo da je $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x = f'(x)$,..., tako da se svaki četvrti izvod ponavlja. Neka $k \in \mathbb{N}_0$ i $x \in \mathbb{R}$, tada je

$$f^{(4k+1)}(x) = \cos x\,, \quad f^{(4k+2)}(x) = -\sin x\,, \quad f^{(4k+3)}(x) = -\cos x\,, \quad f^{(4k+4)}(x) = \sin x\,.$$

- $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

  Rešenje. Sada je $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, $f^{(5)}(x) = -\sin x = f'(x)$,..., tako da se, opet, svaki četvrti izvod ponavlja. Neka $k \in \mathbb{N}_0$ i $x \in \mathbb{R}$, tada je

$$f^{(4k+1)}(x) = -\sin x\,, \quad f^{(4k+2)}(x) = -\cos x\,, \quad f^{(4k+3)}(x) = \sin x\,, \quad f^{(4k+4)}(x) = \cos x\,.$$

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

  Rešenje. Prvi izvod je $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, drugi $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$, $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$,..., pa je $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$.

  Rešenje. Sada je $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^4}$,..., pa je $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (-1, +\infty)$.

Aproksimacija drugog izvoda funkcije

Često je u numeričkoj analizi potrebna aproksimacija izvoda funkcije. Videli smo kako se aproksimira prvi izvod funkcije, a sada objasnimo aproksimaciju drugog izvoda. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na intervalu (a,b). Neka $x, x+h \in (a,b)$. Tada važi

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}\,.
\end{aligned}$$

Ako obeležimo sa $(\Delta x)^2 = h^2$, a sa $\Delta^2 y = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$, tada je

$$\begin{aligned}
f''(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} - f''(x)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta^2 y - f''(x)(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Odavde sledi da je

$$\Delta^2 y - f''(x)(\Delta x)^2 = \varpi(\Delta x)(\Delta x)^2\,,$$

gde je $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \varpi(\Delta x) = 0$. Dakle,

$$\Delta^2 y = f''(x)(\Delta x)^2 + \varpi(\Delta x)(\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta^2 y \approx f''(x)(\Delta x)^2\,,$$

kada $\Delta x \to 0$ (videti primer 5.4.14 i tabelu 5.3), odnosno

$$f''(x) \approx \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}\,.$$

Primer 5.4.14 Za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ odrediti $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y/(\Delta x)^2$ funkcije $y = x^3$ u tački $x = 1$ i uporediti sa $f''(x)$.

Rešenje. Jasno je da je $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ i da je $f''(1) = 6$.

Tabela 5.3: $\Delta^2 y$ i $f''(x)\,\Delta^2 x$ funkcije $y = x^3$ u tački $x = 1$ za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$.

x	$(\Delta x)^2$	$\Delta^2 y = (x+2\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)^3 + x^3$	$\Delta^2 y/(\Delta x)^2$	$f''(x)$
1	10^{-2}	$6.6\cdot 10^{-2}$	6.6	6
1	10^{-4}	$6.06\cdot 10^{-4}$	6.06	6
1	10^{-6}	$6.006\cdot 10^{-6}$	6.006	6

5.5 Zadaci za vežbu

Odrediti prve izvode sledećih funkcija:

1. $y = x^{23} - 5\cos x + 6e^x$. $(y' = 23x^{22} + 5\sin x + 6e^x)$

2. $y = x - \sin x \cos x$. $(y' = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x)$

3. $y = \dfrac{\ln x}{1 - \ln x}$. $(y' = \dfrac{1}{x(1 - \ln x)^2})$

Odrediti prve izvode složenih funkcija:

4. $y = \ln\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}$. $(y' = \dfrac{\operatorname{ctg}(2x)}{(1 - \sin(2x))})$

5. $y = \ln\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right)$. $(y' = \dfrac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}})$

6. $y = x\sin(3x)\ln x$. $(y' = \sin(3x)\ln x + 3x\cos(3x)\ln x + \sin(3x))$

7. $y = \ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}\right)$. $(y' = \dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}})$

8. $y = (x^2 - 3)^x$. $(y' = (x^2 - 3)^x\left(\ln(x^2 - 3) + \dfrac{2x^2}{x^2 - 3}\right))$

9. $y = x^{x+5}$. $(y' = x^{x+5}\left(\ln x + \dfrac{x+5}{x}\right))$

Odrediti izvod inverzne funkcije ako je:

10. $y = \sqrt{x} + 3$. $((y^{-1})' = 2(x - 3))$

11. $y = x^3 + 6$. $((y^{-1})' = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x - 6})^2})$

12. $y = e^{x-5}$. $((y^{-1})' = \dfrac{1}{x})$

Odrediti izvod funkcije date u parametarskom obliku:

13. $x(t) = 3(t - \sin t)\,, y(t) = 3(1 - \cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$. $(f'_x(x(t)) = \sin t/(1 - \cos t))$

14. $x(t) = 4\cos^3 t\,, y(t) = 4\sin^3 t$, $t \in (0, \pi/2)$. $(f'_x(x(t)) = -\sin t/\cos t)$

15. $x(t) = t^3 + 3t\,, y(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - 6t$, $t \in \mathbb{R}$. $(f'_x(x(t)) = (t-2)/(t^2+1))$

Odrediti prvi, drugi i treći izvod sledećih funkcija:

16. $y = \sqrt{3 - 5x}$. $(y' = \dfrac{-5}{2\sqrt{3 - 5x}},\ y'' = \dfrac{-25}{4\sqrt{(3 - 5x)^3}},\ y''' = \dfrac{-375}{8\sqrt{(3 - 5x)^5}})$

17. $y = \dfrac{2x - 3}{3x + 1}$. $(y' = \dfrac{11}{(3x+1)^2},\ y'' = \dfrac{-66}{(3x+1)^3},\ y''' = \dfrac{594}{(3x+1)^4})$

18. Odrediti jednačine tangente i normale na grafik $f(1) = x^2 + 2x - 3$ u tački $A(1, f(1))$. $(t:\ y = 4x - 4\ ,\ n:\ y = -x/4 + 1/4)$

19. Odrediti priraštaj funkcije $y = x^3$ za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ u tački $x = 2$ i uporediti $\Delta y/\Delta x$ sa $f'(x)$.

20. Za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ odrediti $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y/(\Delta x)^2$ funkcije $y = x^2 - 1$ u tački $x = 1$ i uporediti sa $f''(x)$.

GLAVA 6

Primena izvoda funkcija

U ovoj glavi biće date osnovne teoreme diferencijalnog računa. Detaljno je ispitano pet funkcija. Da bi studenti mogli da razumeju rešenja većine zadataka, moraju najpre da se dobro upoznaju sa elementarnim funkcijama. Za određivanje definisanosti, ponašanja na krajevima intervala definisanosti i asimptota funkcija, studenti treba dobro da „vladaju” određivanjem znaka izraza i Lopitalovim pravilom. Često se koristi znak kvadratnog trinoma i činjenice da $a \cdot b$ i a/b imaju isti znak, da x i x^3 imaju isti znak, itd. Određivanje znaka izraza posebno je važno pri ispitivanju lokalnih ekstrema, prevojnih tačaka, intervala monotonosti i konveksnosti i konkavnosti funkcija.

6.1 Teoreme o srednjoj vrednosti izvoda

Naredna teorema (*Teorema Ferma*[1]) daje potreban uslov za postojanje ekstremne vrednosti funkcije u tački u kojoj postoji izvod funkcije.

Teorema 6.1.1 *Neka funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i neka postoji tačka $c \in (a, b)$ u kojoj postoji $f'(c)$ i u kojoj funkcija dostiže najmanju ili najveću vrednost na nekom intervalu unutar (a, b). Tada je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Neka funkcija f u tački c dostiže najmanju vrednost (analogno se pokazuje ako dostiže najveću vrednost). Tada je $f(x) \geq f(c)$, $x \in [a, b]$, a odatle i $f(x) - f(c) \geq 0$. Ako je $x > c$, tada je $x - c > 0$ pa je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0\,,\ x \in (c, b]\,. \tag{6.1}$$

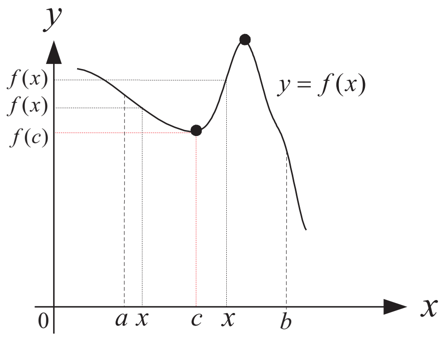
Pošto postoji $f'(c)$, to znači da je $f'_+(c) \geq 0$ zbog (6.1). Ako je $x < c$, tada je $x - c < 0$, pa je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0\,,\ x \in [a, c)\,, \tag{6.2}$$

[1]Pjer de Ferma (1601-1665) - pogledati poglavlje 9.6

a to znači da je $f'_-(c) \leq 0$ jer važi (6.2). Dakle, $f'(c) = 0$. □

Veoma je važno što tačka c pripada otvorenom intervalu (a, b) u teoremi 6.1.1. Da je u pitanju zatvoreni interval, tada, kao što se vidi na slici 6.1, najmanja vrednost funkcije je u tački b, a jasno je da je $f'(b) \neq 0$.

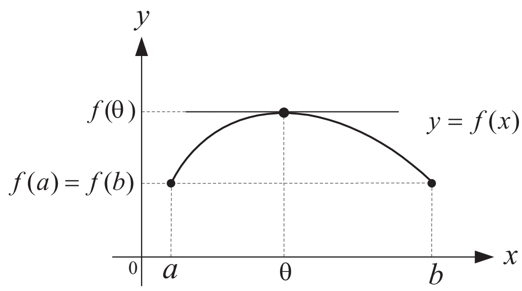


Slika 6.1: Ilustracije Fermaove teoreme 6.1.1.

Dovoljne uslove za postojanje tačke c za koju je $f'(c) = 0$ daje *Rolova*[2] *teorema*.

Teorema 6.1.2 *Neka je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b). Neka važi da je $f(a) = f(b)$. Tada postoji tačka $\theta \in (a, b)$, tako da je $f'(\theta) = 0$ (slika 6.2).*

Dokaz. Iz neprekidnosti na zatvorenom intervalu sledi da postoje dve tačke u kojima funkcija dostiže svoju minimalnu i maksimalnu vrednost (tvrdjenje 4.4.3). Neka su to tačke ν_1 i ν_2, redom. Ako se te tačke poklapaju sa krajevima intervala, tada je $f(\nu_1) = f(\nu_2)$, a to znači da je f konstantna funkcija na $[a, b]$, pa je za svako $x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$. Ako, recimo, $\nu_2 \in (a, b)$, kako je f diferencijabilna na (a, b), po teoremi 6.1.1 sledi da je $f'(\nu_2) = 0 \Rightarrow \theta = \nu_2$. □



Slika 6.2: Ilustracije Rolove teoreme 6.1.2.

[2]Mišel Rol (1652-1719) - pogledati poglavlje 9.9

Navedimo i Lagranžovu[3] teoremu.

Teorema 6.1.3 *Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Tada postoji tačka $\theta \in (a,b)$ (slika 6.3), tako da važi*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\theta)\,.$$

Dokaz. Prava koja prolazi kroz tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ ima jednačinu

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

Posmatrajmo sada funkciju

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

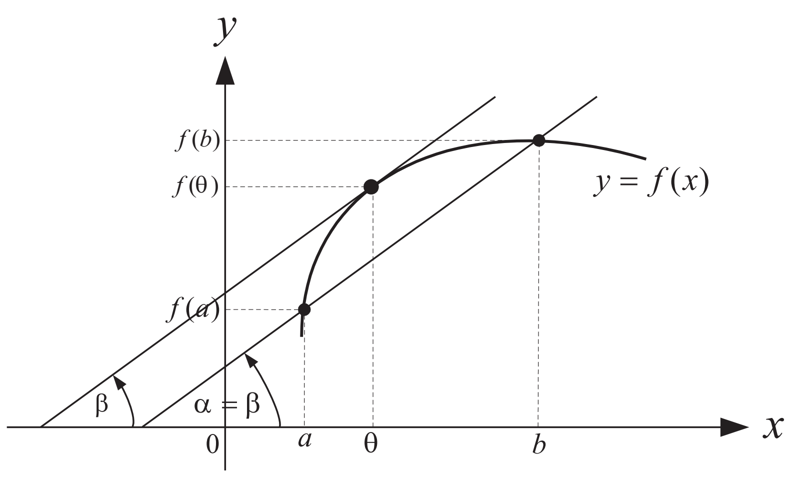
Jasno je da je neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Važi i $g(a) = g(b) = 0$ pa su zadovoljeni uslovi Rolove teoreme 6.1.2. Dakle, postoji $\theta \in (a,b)$ tako da je $g'(\theta) = 0$. Kako je

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,$$

važi

$$0 = g'(\theta) = f'(\theta) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\theta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

□



Slika 6.3: Ilustracija Lagranžove teorema 6.1.3.

Napomena 6.1.4 *Rolova teorema je specijalni slučaj Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti izvoda kada je $f(a) = f(b)$.*

[3]Žozef Luj Lagranž (1736-1813) - pogledati poglavlje 9.14

6.2 Tejlorova i Maklorenova formula

Tejlorova[4] i Maklorenova[5] formula su značajne pri aproksimaciji funkcije polinomom. Formule sadrže i grešku aproksimacije tako da se aproksimativni polinom može odrediti ako je unapred zadata tačnost.

Posmatrajmo prvo polinom

$$P_n(x) = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) + a_0\,, \tag{6.3}$$

za $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Odredimo sada $P(x_0)$, $P'(x_0)$, $P''(x_0)$,..., $P^{(n)}(x_0)$. Tada je $P(x_0) = a_0$,

$$P'(x) = n\,a_n(x-x_0)^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}(x-x_0)^{n-2} + \cdots + 2\,a_2(x-x_0)^1 + a_1\,,$$

pa je $P'(x_0) = a_1$. Dalje,

$$P''(x) = n(n-1)\,a_n(x-x_0)^{n-2} + (n-1)(n-2)\,a_{n-1}(x-x_0)^{n-3} + \cdots + 2\cdot 1\,a_2\,,$$

te je $P''(x_0) = 2!\,a_2$. Ako nastavimo postupak, dobijamo $P^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$, $k = 3,4,\ldots,n$. To znači da se svaki koeficijent polinoma (6.3) može zapisati kao $a_0 = P(x_0)$ i

$$a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,.$$

Dakle,

$$P_n(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,. \tag{6.4}$$

Izraz (6.4) naziva se Tejlorov polinom n-tog stepena polinoma $P(x)$ u tački x_0. Odredimo sada Tejlorovu formulu za proizvoljnu funkciju f.

Teorema 6.2.1 *Neka funkcija f ima neprekidne izvode sve do reda n na intervalu $[a,b]$ i neka postoji $f^{(n+1)}$ na (a,b), $n \in \mathbb{N}$. Tada za svako $x \in [a,b]$ važi Tejlorova formula*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)\,,$$

gde postoji tačka $\theta \in (a,x)$ za koju važi $\theta = a + \nu(x-a)$, $0 < \nu < 1$.

Polinom

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

naziva se Tejlorov polinom n-tog stepena za funkciju f u tački a, a

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)$$

naziva se greška aproksimacije ili ostatak.

[4]Bruk Tejlor (1685-1731) - pogledati poglavlje 9.11
[5]Kolin Makloren (1698-1746) - pogledati poglavlje 9.12

Napomena 6.2.2 *Tejlorova formula je uopštenje Lagranžove teoreme jer za $n = 0$ i $x = b$ važi*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\theta)\,, \quad a < \theta < b\,.$$

Tejlorov razvoj funkcije f u okolini tačke x_0 dobija se direktno iz Tejlorove formule, uz uslov da ostatak R_n teži nuli kako se povećava stepen Tejlorovog polinoma. Naime, ako su tačke $x, x_0 \in (a,b)$, tada važi

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \underbrace{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)}_{R_n}\,,$$

gde je $\theta = x_0 + \nu(x - x_0)$, $0 < \nu < 1$. Specijalno, ako je $x_0 = 0$, tada dobijamo Maklorenov razvoj funkcije f u okolini tačke $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)\,, \quad \theta = \nu x, \quad 0 < \nu < 1\,.$$

Primer 6.2.3 Koristeći primer 5.4.13, odrediti Maklorenove polinome za funkcije: (i) $f(x) = e^x$, (ii) $f(x) = \sin\, x$, (iii) $f(x) = \cos\, x$, (iv) $f(x) = \ln\,(x+1)$ i odrediti ostatke.

Rešenje.

(i) Kako je $f'(x) = \cdots = f^{(n+1)}(x) = e^x$ za svako $x \in \mathbb{R}$, tada je $f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ i $f^{(n+1)}(\theta) = e^\theta$, $\theta = \nu\, x$, $0 < \nu < 1$. Pošto je i $f(0) = e^0 = 1$, tada je

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\nu x}\,,$$

odnosno

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n\,,$$

gde je

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\nu x}$$

za $0 < \nu < 1$ i za svako $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Ako je $f(x) = \sin\, x$, tada je $f(0) = 0$ i

$$f^{(4k+1)}(0) = 1\,, \quad f^{(4k+2)}(0) = 0\,, \quad f^{(4k+3)}(0) = -1\,, \quad f^{(4k+4)}(0) = 0\,,$$

za $k \in \mathbb{N}_0$, pa je

$$\sin\, x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin\left(\nu x + \frac{(2n+2)\pi}{2}\right)\,,$$

odnosno

$$\sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}\,,$$

gde je

$$R_{2n+1} = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sin\left(\nu x + \frac{(2n+2)\pi}{2}\right)$$

za $0 < \nu < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(*iii*) Neka je $f(x) = \cos\, x$. Tada je $f(0) = 1$ i

$$f^{(4k+1)}(0) = 0\,,\quad f^{(4k+2)}(0) = -1\,,\quad f^{(4k+3)}(0) = 0\,,\quad f^{(4k+4)}(0) = 1\,,$$

za $k \in \mathbb{N}_0$, pa je

$$\cos\, x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(\nu x + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\,,$$

odnosno

$$\cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}\,,$$

gde je

$$R_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(\nu x + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$$

za $0 < \nu < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(*iv*) Za $f(x) = \ln(x+1)$ važi $f(0) = 0$ i

$$f'(0) = 1\,,\quad f''(0) = -1\,,\quad f'''(0) = 2\,,\quad f^{(4)}(0) = -6\,, \ldots, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,,$$

i $f^{(n+1)}(\theta) = (-1)^n\dfrac{n!}{(\nu x+1)^{n+1}}$, $0 < \nu < 1$, $x \in \mathbb{R}$. Sada je

$$\begin{aligned}\ln(x+1) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!}\,(k-1)! + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!(\nu x+1)^{n+1}}\,n! \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(\nu x+1)^{n+1}}\,,\end{aligned}$$

odnosno

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n\,,$$

gde je

$$R_n = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(\nu x+1)^{n+1}}$$

za $0 < \nu < 1$.

Primer 6.2.4 Odrediti e^x za $x = 1$ tako da je $|R_n| < 0.01$ (tačna prva cifra iza decimalne tačke) koristeći Maklorenov razvoj.

Rešenje. Posmatrajmo primer 6.2.3 pod (*i*). Primetimo da je za $x = 1$, $R_n = \frac{1}{(n+1)!}\,e^\nu$, a pošto je $0 < \nu < 1$, tada je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\,e^\nu < \frac{1}{(n+1)!}\,e^1 < \frac{3}{(n+1)!}$$

Odredićemo $n \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0.01\,,$$

a to je $n = 5$, jer je $\dfrac{3}{(5+1)!} = 0.0042 < 0.01$. Dakle,

$$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2.71667 \ \ (e \approx 2.71828)\,.$$

Primer 6.2.5 Odrediti $\ln(x+1)$ za $x = 1$ tako da je $|R_n| < 0.0001$ (tačne prve tri cifre iza decimalne tačke) koristeći Maklorenov razvoj.

Rešenje. Posmatrajmo primer 6.2.3 pod (iv). Sada je za $x = 1$,

$$|R_n| = \left|(-1)^n \frac{1}{(n+1)(\nu+1)^{n+1}}\right|\,,$$

a pošto je $0 < \nu < 1$, tada je

$$|R_n| = \frac{1}{(n+1)(\nu+1)^{n+1}} < \frac{1}{n+1}$$

Odredićemo $n \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\frac{1}{n+1} < 0.0001 \Rightarrow n+1 > 10000 \Rightarrow n > 10001\,,$$

a to je $n = 10002$. Dakle,

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{10002} \approx 0.693097 \ \ (\ln 2 \approx 0.693147)\,.$$

6.3 Lopitalovo pravilo

Lopitalovo[6] pravilo koristi se pri određivanju graničnih vrednosti oblika

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

kao i graničnih vrednosti koje se mogu svesti na prethodne dve.

Teorema 6.3.1 *1) Neka su funkcije f i g dve diferencijabilne funkcije na intervalu (a,b) osim možda u tački $c \in (a,b)$. Neka važi i*

- *obe funkcije teže ili nuli ili u beskonačno kada $x \to c$,*
- *$g'(x) \neq 0$, $x \neq c$,*
- *postoji $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

[6] Gijom de Lopital (1661-1704) - pogledati poglavlje 9.10

Tada postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i važi*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

2) Neka su funkcije f i g dve diferencijabilne funkcije na intervalu $(a,+\infty)$ (analogno za $(-\infty,b)$). Neka važi još i

- *obe funkcije teže ili nuli ili u beskonačno kada* $x\to+\infty$,
- $g'(x)\neq 0$, $x\in(b,+\infty)$, $b>a$,
- *postoji* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i važi*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Primer 6.3.2 Odrediti sledeće granične vrednosti pomoću Lopitalovog pravila:

- *Oblik* „$\dfrac{0}{0}$". Odrediti $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

  Rešenje.
  $$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{1}=6\,,$$
  pa je $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

- *Oblik* „$\dfrac{\infty}{\infty}$". Odrediti $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$, $n\in\mathbb{N}$.

  Rešenje. Kako je $(x^n)^{(n)}=n!$ i $(e^x)^{(n)}=e^x$, posle n puta primene Lopitalovog pravila imaćemo
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)''}{(e^x)''}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)^{(n)}}{(e^x)^{(n)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0\,,$$
  odakle sledi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$.

- *Oblik* „$\infty-\infty$". Odrediti $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{\ln(x-1)}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

  Rešenje.
  $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\ln(x-1)}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)-\ln(x-1)}{(x-2)\ln(x-1)}\,.$$
  Ovim je dobijen izraz „$\dfrac{0}{0}$" pa je
  $$\lim_{x\to 2}\frac{((x-2)-\ln(x-1))'}{((x-2)\ln(x-1))'}=\lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{1}{x-1}}{\ln(x-1)+\frac{x-2}{x-1}}\,.$$

Poslednji izraz je, ponovo, „$\frac{0}{0}$", pa je

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(1-\frac{1}{x-1}\right)'}{\left(\ln(x-1)+\frac{x-2}{x-1}\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{2}\,.$$

Sledi da je i početni limes jednak 1/2.

- *Oblik* „$0\cdot\infty$". Odrediti $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln(x-1)\,.$

Rešenje. Pretvorimo u oblik „$\frac{\infty}{\infty}$". Naime,

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}\,,$$

pa je sada

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}=-\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0\,.$$

Dakle, i početna granična vrednost je jednaka 0.

- *Oblik* „0^0". Odrediti $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$.

Rešenje. Koristeći ideju predloženu kod logaritamskih izvoda, imaćemo

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}\,.$$

Sada je

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\cos x}=-1\cdot 0=0\,.$$

Konačno rešenje je $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=e^0=1$.

- *Oblik* „∞^0". Odrediti $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{2}{x}}$.

Rešenje.

$$\lim_{x\to +\infty}e^{\ln x^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to +\infty}e^{\frac{2}{x}\ln x}=\lim_{x\to +\infty}e^{\frac{2\ln x}{x}}$$

Sada je

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(2\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=0\,,$$

pa je $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{2}{x}}=e^0=1$.

- *Oblik* „1^∞". Odrediti $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x+1}$.

  Rešenje.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}e^{(2x+1)\ln\frac{x+2}{x}}.$$
  Sada je
$$\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\ln\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+2}{x}}{\frac{1}{2x+1}}$$
  i ovo je oblik „$\frac{0}{0}$". Primenimo Lopitalovo pravilo.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\frac{x+2}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{2x+1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+2}\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{-\frac{2}{(2x+1)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+2}\cdot\frac{-2}{x^2}}{-\frac{2}{(2x+1)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^2}{x(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x}=4\,,$$
  pa je konačno rešenje $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x+1}=e^4$.

6.4 Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

U poglavlju 2.1 definisani su lokalni i globalni ekstremi funkcije, kao i monotonost funkcije. Sada ćemo te pojmove povezati sa prvim izvodom funkcije. Naime, neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b). Tada

- ako je $f'(x)>0$ za $x\in(a,b)$, tada je funkcija f monotono rastuća na intervalu $[a,b]$,
- ako je $f'(x)<0$ za $x\in(a,b)$, onda je funkcija f monotono opadajuća na intervalu $[a,b]$.

Primer 6.4.1 Odrediti intervale monotonosti za $f(x)=x^2$.

Resenje. Jasno je da je $f'(x)=2x$ i da je za $x<0$, $f'(x)<0$ pa je tada f monotono opadajuća (obeležavaćemo sa $f\searrow$) na intervalu $(-\infty,0)$. Ako je $x>0$, $f'(x)>0$ i tada je f monotono rastuća (obeležavaćemo sa $f\nearrow$) na intervalu $(0,+\infty)$.

Definicija 6.4.2 *Neka $f:D\to\mathbb{R}$ gde je sa D obeležen domen funkcije f. Tačka $c\in D$ naziva se kritična tačka funkcije f ako je $f'(c)=0$ ili ako funkcija f u toj tački nije direfencijabilna ($f'(c)$ ne postoji).*

Na osnovu Fermaove teoreme 6.1.1 sledi da, ako je funkcija neprekidna na intervalu (a,b) i ako ima lokalni minimum ili maksimum u tački $c\in(a,b)$, tada je c kritična tačka funkcije. Da li je u pitanju lokalni minimum ili maksimum možemo odrediti na dva načina:

1. Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b). Neka $c\in(a,b)$.
   - Ako je $f'(c)<0$ za $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$, $f'(c)>0$ za $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, tada je tačka $(c,f(c))$ lokalni minimum, za neko $\delta>0$.

– Ako je $f'(c) > 0$ za $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$, $f'(c) < 0$ za $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, tada je tačka $(c, f(c))$ lokalni maksimum, za neko $\delta > 0$.

Dakle, ako prvi izvod menja znak u okolini tačke c, imaćemo lokalni ekstrem.

2. Neka je f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) i neka $c \in (a,b)$. Ako je $f'(c) = 0$ i ako je

   – $f''(c) > 0$, tada funkcija f u tački $(c, f(c))$ ima lokalni minimum,
   – $f''(c) < 0$, tada funkcija f u tački $(c, f(c))$ ima lokalni maksimum.

   Ako je $f''(c) = 0$ tada su potrebna dodatna ispitivanja. Naime, neka je f $2n$-puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b), $n \in \mathbb{N}$, i neka $c \in (a,b)$. Ako je $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(2n-1)}(c) = 0$ i ako je

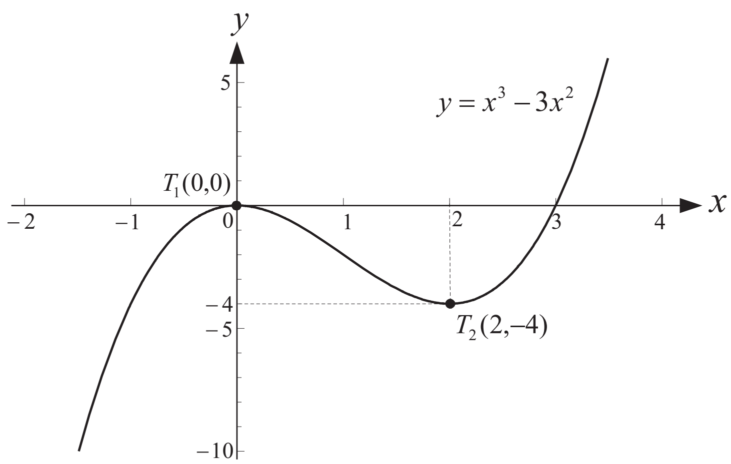
   – $f^{(2n)}(c) > 0$, tada funkcija f u tački $(c, f(c))$ ima lokalni minimum,
   – $f^{(2n)}(c) < 0$, tada funkcija f u tački $(c, f(c))$ ima lokalni maksimum.

Primer 6.4.3 Odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$ koristeći oba načina.

Rešenje. Prvi način. Rešavanjem jednačine

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0\,,$$

zaključujemo da su stacionarne tačke $x = 0$ i $x = 2$. Kako je za $x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$, za $0 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ i za $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ sledi da su tačke $T_1(0, f(0)) = T_1(0,0)$ i $T_2(2, f(2)) = T_2(2,-4)$ lokalni ekstremi funkcije f i to tačka T_1 je lokalni maksimum, a T_2 lokalni minimum (slika 6.4).



Slika 6.4: Grafik funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$ sa lokalnim maksimumom u T_1 i lokalnim minimumom u T_2.

Drugi način. Odredimo i drugi izvod funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6\,,$$

pa je $f(0) = -6 < 0$ i $T_1(0,0)$ je lokalni maksimum, a pošto je $f(2) = 6 > 0$, tada je $T_1(2,-4)$ lokalni minimum.

Primer 6.4.4 Odrediti lokalne i globalne ekstremne vrednosti (ako postoje) za funkciju $f(x) = x^3 - 3x^2$: a) na celom skupu $\mathbb{R}$, b) na intervalu $[-1, 1]$, c) na intervalu $[-0.5, 4]$.

Rešenje.

a) Urađeno je u primeru 6.4.3. Tačka $T_1(0,0)$ je lokalni maksimum, a $T_2(2,-4)$ lokalni minimum. Funkcija nema ni globalni minimum ni globalni maksimum na skupu $\mathbb{R}$.

b) Na intervalu $[-1,1]$ funkcija ima lokalni i globalni maksimum u $T_1(0,0)$ i lokalni i globalni minimum u tački $(-1, f(-1)) = (-1,-4)$.

c) Na intervalu $[-0.5, 4]$ funkcija ima lokalni maksimum u $T_1(0,0)$, globalni maksimum u tački $(4, f(4)) = (4, 16)$ i lokalni i globalni minimum u tački $T_2(2,-4)$.

6.5 Konveksnost i konkavnost grafika funkcije

U ovom poglavlju prvo ćemo da definišemo konveksnost i konkavnost grafika funkcije, a nakon toga povezati ih sa drugim izvodom funkcije.

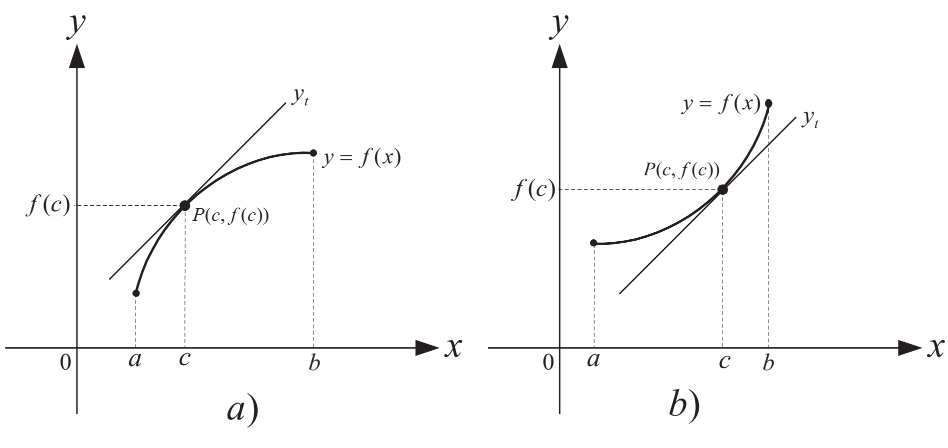
Definicija 6.5.1 *Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a,b). Grafik funkcije f je konveksan ako za svako $c \in (a,b)$ i za svako $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ važi*

$$f(x) > y_t(x)\,,$$

a konkavan ako je

$$f(x) < y_t(x)\,,$$

gde je $y_t(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $(c, f(c))$. Ako je grafik funkcije f konveksan (konkavan) na intervalu (a,b), kažemo da je funkcija konveksna (konkavna) na tom intervalu (slika 6.5).



Slika 6.5: Konkavnost (a)) i konveksnost (b)) grafika funkcije f.

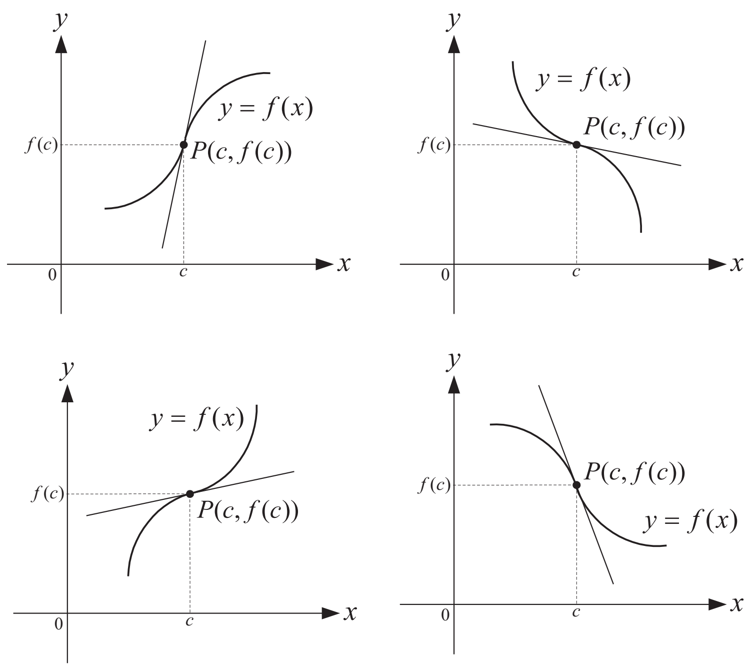
Sada ćemo povezati drugi izvod funkcije sa konveksnošću i konkavnošću funkcije. Naime, neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na intervalu (a,b).

- Ako za svako $x \in (a,b)$ važi $f''(x) > 0$, onda je funkcija f konveksna na tom intervalu.

- Ako za svako $x \in (a,b)$ važi $f''(x) < 0$, tada je funkcija f konkavna na tom intervalu.

Postavlja se pitanje šta ako je $f''(x_0) = 0$. Pre nego što damo odgovor, definišimo prevojnu tačku grafika funkcije.

Definicija 6.5.2 *Neka je funkcija f neprekidna na intervalu (a,b) i diferencijabilna u tački $c \in (a,b)$. Tačka $P(c, f(c))$ je prevojna tačka grafika funkcije f ako postoji $\delta > 0$ tako da je funkcija f na intervalu $(c-\delta, c)$ konveksna, a na $(c, c+\delta)$ konkavna ili da je na intervalu $(c-\delta, c)$ konkavna, a na $(c, c+\delta)$ konveksna (slika 6.6).*



Slika 6.6: Prevojne tačke funkcije f.

Povežimo sada prevojnu tačku sa drugim izvodom funkcije.

Teorema 6.5.3 *Neka je funkcija f diferencijabilna u tački $c \in (a,b)$ i ima drugi izvod na intervalu (a,b) osim možda u tački c. $P(c, f(c))$ je prevojna tačka grafika funkcije f ako važi:*

- *$f''(x) > 0$, $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ i $f''(x) < 0$, $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$ ili*
- *$f''(x) < 0$, $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ i $f''(x) > 0$, $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, za neko $\delta > 0$.*

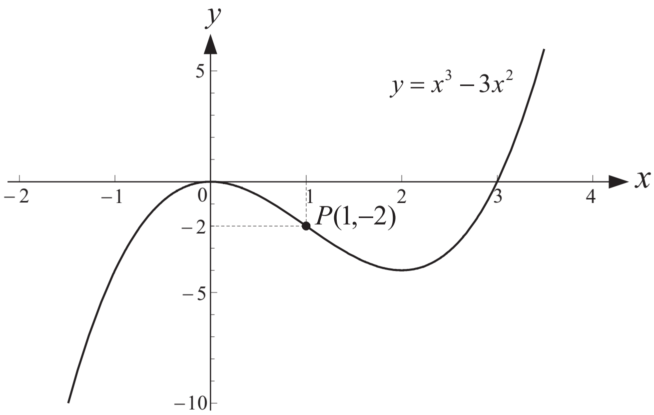
Dakle, drugi izvod u okolini tačke c menja znak. Ako funkcija f ima neprekidan drugi izvod na intervalu (a,b), tada je potreban uslov za postojanje prevojne tačke $P(c, f(c))$ da važi $f''(c) = 0$. A ako još u okolini tačke c drugi izvod menja znak, tada iz definicije prevojne tačke sledi njeno postojanje.

Primer 6.5.4 Odrediti prevojne tačke funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 3x^2 - 6x$, tada je $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$. Rešavanjem jednačine

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1\,,$$

zaključujemo da je tačka $x = 1$ kandidat za prevojnu tačku grafika funkcije. Kako je za $x < 1$, $f''(x) < 0$, a za $x > 1$, $f''(x) > 0$, sledi da je tačka $P(1, f(1)) = P(1, -2)$ prevojna tačka grafika funkcije f (slika 6.7).



Slika 6.7: Prevojna tačka $P(1, -2)$ grafika funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$.

6.6 Primeri detaljno ispitanih funkcija

Primer 6.6.1 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

Rešenje.

- *Domen.* Pošto je u imeniocu $x^2 + 4 > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, sledi da je $D = \mathbb{R}$.

- *Nule.* $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 4} = -\dfrac{x}{x^2 + 4} = -f(x)$, pa je funkcija neparna, odnosno grafik funkcije će biti simetričan u odnosu na koordinatni početak. Tada se može ispitivanje obaviti samo za $x \geq 0$, ali zbog kompletnosti, ispitivanje ćemo uraditi za svako $x \in D$.

- *Znak funkcije.* Formiraćemo tabelu u koju unosimo domen i nule funkcije.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
x	$-$	$+$
$x^2 + 4$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$

  Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$.

- *Asimptote.* Kako je domen funkcije skup realnih brojeva, sledi da neprekidna funkcija nema vertikalnih asimptota. Pošto je stepen polinoma u brojiocu manji od stepena polinoma u imeniocu, funkcija će imati samo horizontalnu asimptotu.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x\left(x + \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x + \frac{4}{x}} = 0^{\pm},$$

pa je $y = 0$ horizontalna asimptota kada $x \to \pm\infty$.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

  a) Potražimo prvi izvod funkcije.

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+4) - x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}.$$

  b) Potražimo sada nule prvog izvoda $f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ i to su kritične tačke.

  c) Odredimo sada znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i nule prvog izvoda.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$4-x^2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2+4)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

  Dakle, u tački $T_1(-2, f(-2)) = T_1(-2, -\frac{1}{4})$ funkcija će imati lokalni minimum, a u tački $T_2(2, f(2)) = T_2(2, \frac{1}{4})$ lokalni maksimum. Dalje $f(x) \nearrow$ za $x \in (-2,2)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

  a) Potražimo drugi izvod funkcije.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4-x^2)'(x^2+4)^2 - (4-x^2)((x^2+4)^2)'}{(x^2+4)^4} \\ &= \frac{-2x\,(x^2+4)^2 - (4-x^2)\cdot 2\,(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} \\ &= \frac{(x^2+4)\left(-2x\,(x^2+4) - 4x\,(4-x^2)\right)}{(x^2+4)^4} \\ &= \frac{-2x^3 - 8x - 16x + 4x^3}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3} \\ &= \frac{2x\,(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \end{aligned}$$

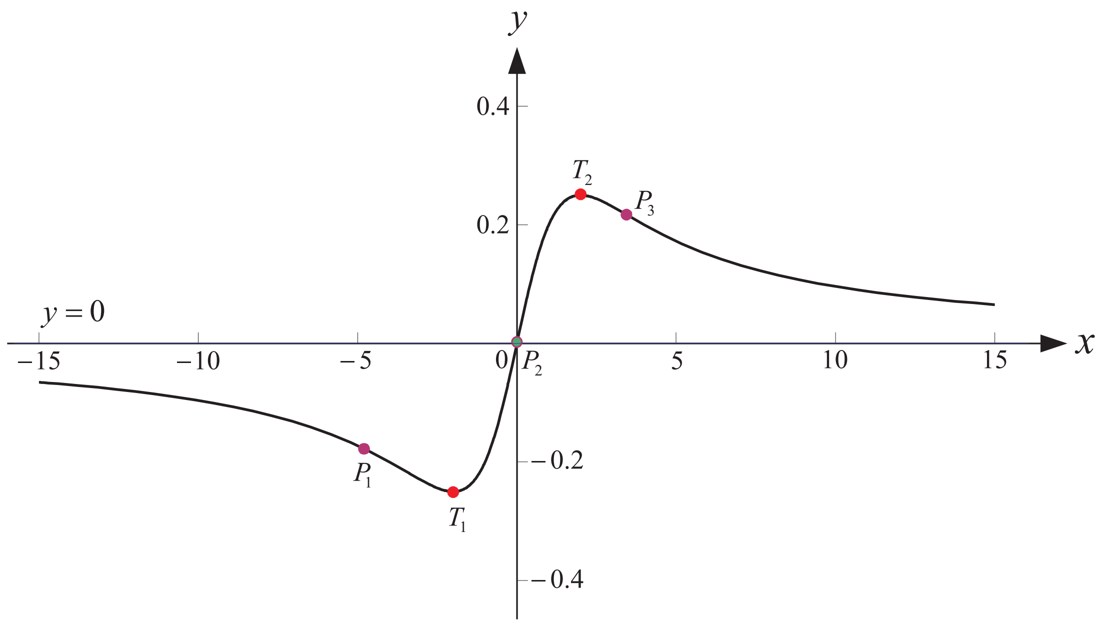
  b) Potražimo sada nule drugog izvoda $f''(x) = 0 \Rightarrow x\,(x^2-12) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{3}$ i to su kandidati za prevojne tačke funkcije.

c) Odredimo sada znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i nule drugog izvoda.

	$(-\infty,-2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3},0)$	$(0,2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3},+\infty)$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-12	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x^2+4)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Dakle, u tačkama $P_1(-2\sqrt{3}, f(-2\sqrt{3})) = P_1(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{8})$, $P_2(0, f(0)) = P_2(0,0)$ i $P_3(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3})) = P_3(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{8})$, funkcija ima prevojne tačke. Dalje, funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$, a konkavna ($\frown$) za $x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 6.8.



Slika 6.8: Grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ gde je: $x = 0$ je nula funkcije, $T_1(-2, -\frac{1}{4})$ - lokalni minimum, $T_2(2, \frac{1}{4})$ - lokalni maksimim, $P_1(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{8})$, $P_2(0,0)$ i $P_3(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{8})$ su prevojne tačke. Horizontalna asimptota je $y = 0$.

Primer 6.6.2 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Rešenje.

- *Domen.* Funkcija $\ln x$ je definisana za $x > 0$. Funkcija $f(x)$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}^+$ za koje važi $\ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ pa je $D = (0,1) \cup (1,+\infty)$.

- *Nule.* $f(x) = 0$ jedino ako je brojilac jednak nuli, ali $x = 0 \notin D$ pa funkcija nema nula.

- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = \dfrac{-x}{\ln(-x)}$, a to nije ni $f(x)$ ni $-f(x)$ pa funkcija nije ni parna ni neparna.

- *Znak funkcije.* Formiraćemo tabelu u koju sada unosimo samo domen jer funkcija nema nula.

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
x	$+$	$+$
$\ln x$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$

  Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in (1,+\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (0,1)$.

- *Asimptote.* Potražimo horizontalnu asimptotu i to samo $x \to +\infty$ jer, zbog domena, ne možemo tražiti i kada $x \to -\infty$. Podsetimo se da važi

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty .$$

  Dakle,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty ,$$

  primenom Lopitalovog pravila (u pitanju je izraz „$\frac{\infty}{\infty}$"), pa ne postoji horizontalna asimptota kada $x \to +\infty$ (potražićemo onda kosu asimptotu kada $x \to +\infty$). Kosa asimptota, ako postoji, oblika je $y = kx + n$, $k \neq 0$. Odredimo sada k.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 ,$$

  pa ne postoji ni kosa asimptota. Preostalo je da još ispitamo postojanje vertikalne asimptote. Pošto je

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to1^\pm} \ln x = 0^\pm ,$$

  tada je

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to0^+} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 0^+ \cdot 0^- = 0^- , \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty , \quad \text{i} \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty ,$$

  sledi da je prava $x = 1$ vertikalna asimptota, a $x = 0$ nije. Ponašanje funkcije kada $x \to 0^+$ vidi se na slici 6.9 - uvećani kvadrat.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

  a) Potražimo prvi izvod funkcije.

  $$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)' \ln x - x\,(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\,.$$

  b) Potražimo sada nule prvog izvoda $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$ i to je jedina kritična tačka.

  c) Odredimo znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i kritične tačke.

	$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
$\ln x - 1$	$-$	$-$	$+$
$\ln^2 x$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

  Dakle, u tački $T_1(e, f(e)) = T_1(e,e)$ je lokalni minimum. Dalje, $f(x) \nearrow$ za $x \in (e,+\infty)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (0,1) \cup (1,e)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

  a) Potražimo drugi izvod funkcije.

  $$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\right)' = \frac{(\ln x - 1)' \ln^2 x - (\ln x - 1)\,(\ln^2 x)'}{\ln^4 x} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x} \ln x\,(\ln x - 2\,(\ln x - 1))}{\ln^4 x} \\ &= \frac{\ln x - 2\ln x + 2}{x \ln^3 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \end{aligned}$$

  b) Odredimo sada nule drugog izvoda.

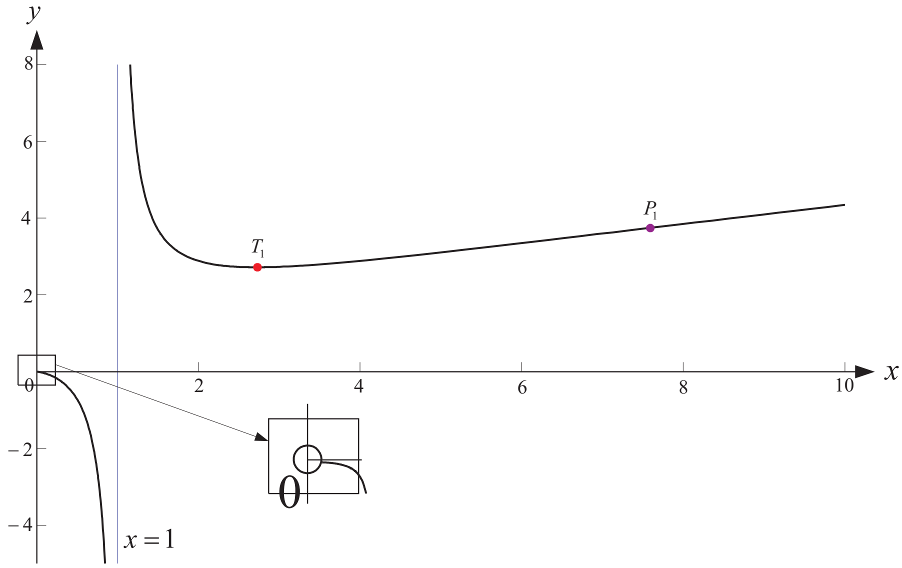
  $$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2\,.$$

  c) Odredimo i znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo samo domen i nulu drugog izvoda.

	$(0,1)$	$(1,e^2)$	$(e^2,+\infty)$
$2 - \ln x$	$+$	$+$	$-$
x	$+$	$+$	$+$
$\ln^3 x$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

  Prevojna tačka je $P_1(e^2, f(e^2)) = P_1(e^2, \frac{e^2}{2}))$. Funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (1,e^2)$, a konkavna ($\frown$) za $x \in (0,1) \cup (e^2,+\infty)$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 6.9.



Slika 6.9: Grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ gde je: $T_1(e,e)$ - lokalni minimum, $P_1(e^2, \frac{e^2}{2})$ je prevojna tačka. Prava $x = 1$ je vertikalna asimptota.

Primer 6.6.3 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje.

- *Domen.* Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jer se u $e^{\frac{1}{x}}$, x nalazi u imeniocu eksponenta.

- *Nule.* Posmatrana fukcija ima nulu u $x = -2$ što sledi iz $f(x) = 0 \Rightarrow x+2 = 0$. Funkcija $e^{\frac{1}{x}} > 0$ za svako $x \in D$.

- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = (-x+2)\, e^{\frac{1}{-x}} = -(x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} \notin \{f(x), -f(x)\}$, tako da funkcija nije ni parna ni neparna.

- *Znak funkcije.* Formiraćemo tabelu u koju unosimo domen i nulu funkcije.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in (-2,0) \cup (0,+\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty,-2)$.

- *Asimptote.* Potražimo prvo horizontalnu asimptotu. Podsetimo se da važi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0^{\pm} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1\,.$$

Dakle,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}=\pm\infty\,,$$

pa ne postoji horizontalna asimptota. Kosa asimptota, ako postoji, oblika je $y=kx+n$, $k\neq 0$. Odredimo sada k.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x}\,e^{\frac{1}{x}}=1\cdot 1=1\,.$$

Zaključujemo da je $k=1$. Odredimo i n.

$$\begin{aligned}
n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\,x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\Big((x+2)\,e^{\frac{1}{x}}-x\Big)=\lim_{x\to\pm\infty}\Big(x\,\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big)+2\,e^{\frac{1}{x}}\Big)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}x\,\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big)+2\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+2\\
&= 2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= 2+\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=2+e^0=2+1=3\,.
\end{aligned}$$

Funkcija ima kosu asimptotu $y=x+3$ kada $x\to\pm\infty$. Preostalo je da još ispitamo postojanje vertikalne asimptote kada x teži 0 sa leve i sa desne strane. Podsetimo se da važi

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\quad\text{i}\quad \lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty\,,$$

pa je

$$\lim_{x\to 0^-}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}=2\cdot 0=0\quad\text{i}\quad \lim_{x\to 0^+}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}=2\cdot(+\infty)=+\infty\,,$$

pa sledi da je prava $x=0$ vertikalna asimptota samo kada $x\to 0^+$.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

  a) Potražimo prvi izvod funkcije.

$$\begin{aligned}
f'(x)=\Big((x+2)\,e^{\frac{1}{x}}\Big)' &= (x+2)'\,e^{\frac{1}{x}}+(x+2)\,\Big(e^{\frac{1}{x}}\Big)'=e^{\frac{1}{x}}+(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2}
\end{aligned}$$

  b) Potražimo nule prvog izvoda $f'(x)=0\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=-1$, $x=2$ i to su kritične tačke.

c) Odredimo sada znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i kritične tačke.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-x-2	$+$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, u tački $T_1(-1, f(-1)) = T_1(-1, \dfrac{1}{e})$ lokalni maksimum, dok je u $T_2(2, f(2)) = T_2(2, 4\sqrt{e})$ lokalni minimum. Dalje, $f(x) \nearrow$ za $x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (-1,0) \cup (0,2)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

a) Potražimo drugi izvod funkcije. Uradimo prvo pomoćni izvod koji će nam biti potreban kasnije.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)' &= \frac{(x^2-x-2)'x^2-(x^2-x-2)(x^2)'}{x^4} \\
&= \frac{(2x-1)\,x^2-(x^2-x-2)\cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{2x^3-x^2-2x^3+2x^2+4x}{x^4} \\
&= \frac{x^2+4x}{x^4} = \frac{x\,(x+4)}{x^4} = \frac{x+4}{x^3}.
\end{aligned}
$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)' &= \left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\frac{x^2-x-2}{x^2} + e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)' \\
&= -\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2} + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x+4}{x^3} \\
&= \frac{1}{x^4}\,e^{\frac{1}{x}}\,(-x^2+x+2+x^2+4x) \\
&= \frac{1}{x^4}\,e^{\frac{1}{x}}\,(5x+2)\,.
\end{aligned}
$$

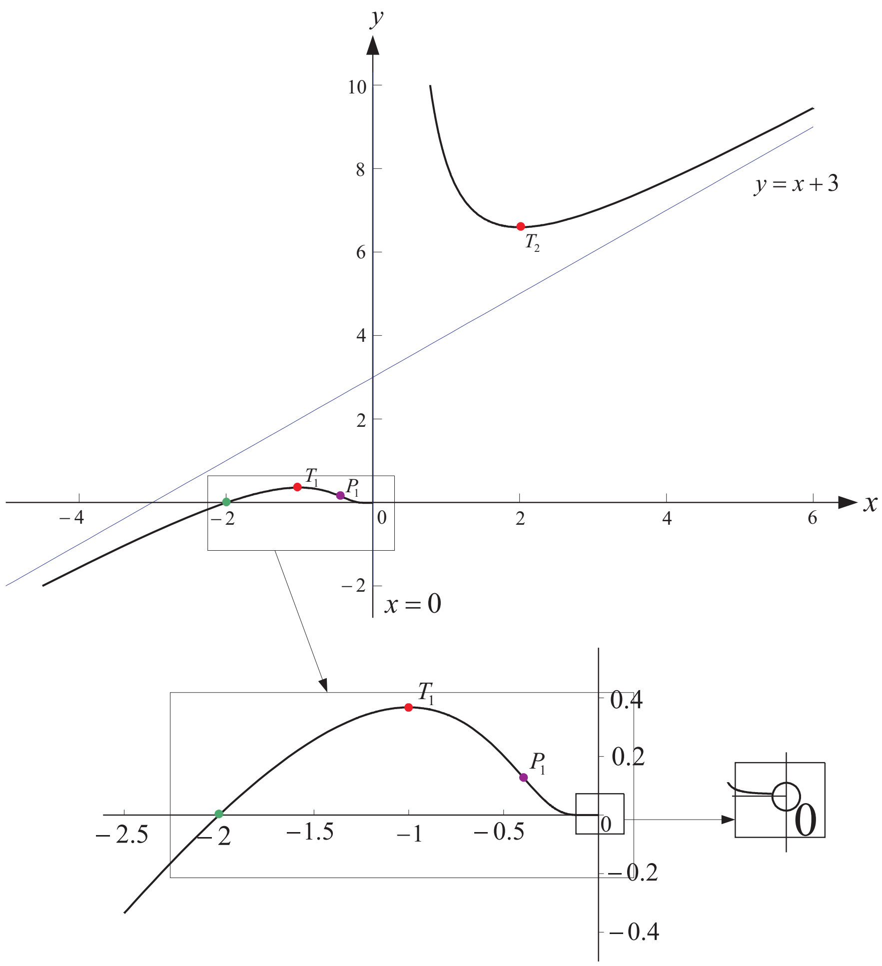
b) Nula drugog izvoda se dobija iz $5x+2=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$ i to je kandidat za prevojnu tačku.

c) Odredimo sada znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i jedinog kandidata za prevojnu tačku.

	$(-\infty,-\frac{2}{5})$	$(-\frac{2}{5},0)$	$(0,+\infty)$
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$
$5x+2$	$-$	$+$	$+$
x^4	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\smile$

Prevojna tačka je $P_1\left(-\frac{2}{5}, f\left(-\frac{2}{5}\right)\right) = P_1\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5\,e^2\sqrt{e}}\right)$. Funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (-\frac{2}{5},0)\cup(0,+\infty)$, a konkavna ($\frown$) za $x\in(-\infty,-\frac{2}{5})$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 6.10.



Slika 6.10: Grafik funkcije $f(x)=(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$ gde je: $x=-2$ nula funkcije, $T_1(-1,\frac{1}{e})$ - lokalni maksimum, $T_2(2,4\sqrt{e})$ - lokalni minimum. Prevojna tačka je $P_1\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5\,e^2\sqrt{e}}\right)$. Prava $x=0$ je vertikalna asimptota kada $x\to 0^+$, a $y=x+3$ je kosa asimptota.

Primer 6.6.4 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

Rešenje.

- *Domen.* Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$ za koje važi $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ pa je $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

- *Nule.* Posmatrana fukcija nema nula jer je $e^x > 0$ za svako $x \in D$.

- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{-x-1} = -\dfrac{1}{e^x(x+1)} \notin \{f(x), -f(x)\}$, tako da funkcija nije ni parna ni neparna.

- *Znak funkcije.* Formiraćemo tabelu u koju unosimo samo domen.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
e^x	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$

  Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 1)$.

- *Asimptote.* Potražimo horizontalnu asimptotu i to posebno kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$. Podsetimo se da važi

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

  Dakle,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty,$$

  primenom Lopitalovog pravila (izraz „$\frac{\infty}{\infty}$"), pa ne postoji horizontalna asimptota kada $x \to +\infty$ (potražićemo onda kasnije kosu asimptotu kada $x \to +\infty$). U preostalom slučaju imaćemo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{-x}(x-1)} = 0,$$

  odakle sledi da je $y = 0$ horizontalna asimptota kada $x \to -\infty$ i tada nema i kosu asimptotu kada $x \to -\infty$.

  Potražimo kosu asimptotu. Odredimo prvo k.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

  nakon dve primene Lopitalovog pravila. Sledi da ne postoji kosa asimptota kada $x \to +\infty$. Preostalo je da još ispitamo postojanje vertikalne asimptote. Pošto je

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = +\infty,$$

  sledi da je prava $x = 1$ vertikalna asimptota.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

  a) Potražimo prvi izvod funkcije.

  $$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x-1}\right)' = \frac{(e^x)'(x-1) - e^x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{e^x\,(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x\,(x-2)}{(x-1)^2}\,.$$

  b) Potražimo i nule prvog izvoda $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ i to je jedina kritična tačka.

  c) Odredimo sada znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i kritične tačke.

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
e^x	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

  Dakle, u tački $T_1(2, f(2)) = T_1(2, e^2)$ je lokalni minimum. Dalje, $f(x) \nearrow$ za $x \in (2, +\infty)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

  a) Potražimo drugi izvod funkcije. Pošto je

  $$(e^x\,(x-2))' = (e^x)'\,(x-2) + e^x\,(x-2)' = e^x\,(x-2) + e^x = e^x\,(x-1)\,,$$

  tada je

  $$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^x\,(x-2)}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(e^x\,(x-2))'(x-1)^2 - e^x\,(x-2)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} \\ &= \frac{e^x\,(x-1)(x-1)^2 - e^x\,(x-2)\cdot 2\,(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{e^x\,(x-1)\left((x-1)^2 - 2\,(x-2)\right)}{(x-1)^4} = \frac{e^x\,\left(x^2 - 2x + 1 - 2x + 4\right)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{e^x\,\left(x^2 - 4x + 5\right)}{(x-1)^3} = \frac{e^x\,\left((x-2)^2 + 1\right)}{(x-1)^3}\,. \end{aligned}$$

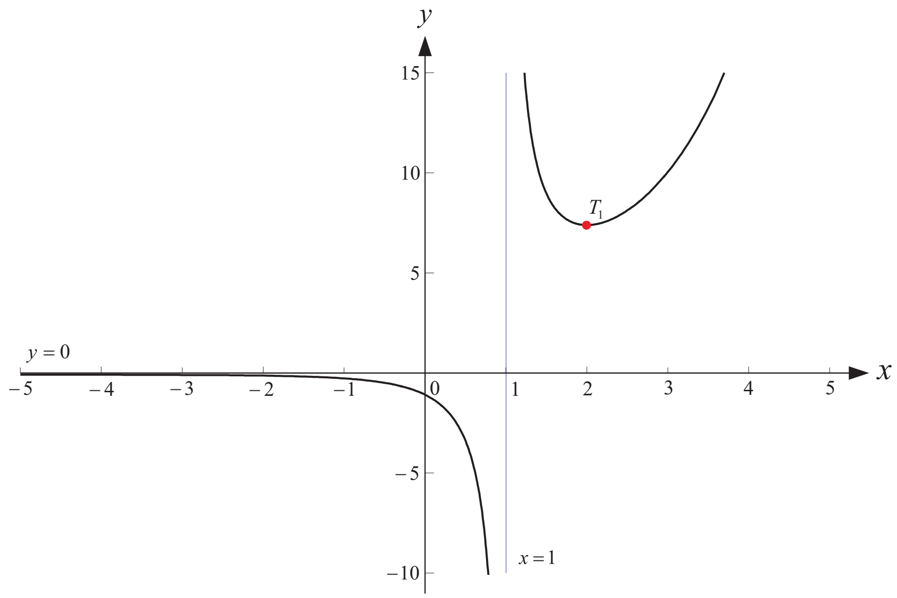
  b) Kako je brojilac drugog izvoda veći od nule za svako $x \in D$, sledi da nema kandidata za prevojne tačke ($f''(x) \neq 0\,,\ x \in D$).

  c) Odredimo sada znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo onda samo domen.

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
e^x	$+$	$+$
$(x-2)^2+1$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (1, +\infty)$, a konkavna ($\frown$) za $x \in (-\infty, 1)$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 6.11.



Slika 6.11: Grafik funkcije $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ gde je: $T_1(2, e^2)$ - lokalni minimum. Prava $y = 0$ je horizontalna asimptota kada $x \to -\infty$, a $x = 1$ je vertikalna asimptota.

Primer 6.6.5 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

Rešenje.

- *Domen.* Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, pa je $D = \mathbb{R}$.
- *Nule.* $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x)$, pa je funkcija parna, odnosno grafik funkcije je osno simetričan u odnosu na y-osu.
- *Znak funkcije.* Pošto je potkorena veličina kvadrirana, funkcija je stalno pozitivna osim u tačkama u kojima je jednaka nuli. Znači, $f(x) > 0$ za $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, a $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$.
- *Asimptote.* Pošto je domen funkcije skup realnih brojeva, neprekidna funkcija nema vertikalnih asimptota. Potražimo horizontalnu asimptotu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = +\infty
\end{aligned}$$

pa horizontalna asimptota ne postoji. Kosa asimptota je oblika $y = kx + n$, $k \neq 0$. Odredimo k.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = \pm\infty\,,$$

odakle sledi da ne postoji ni kosa asimptota.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

  a) Potražimo prvi izvod funkcije.

  $$f'(x) = \left(\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right)' = \left((x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\,(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}\,.$$

  b) Potražimo sada nule prvog izvoda $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ i to je jedna kritična tačka. Vidimo da je imenilac jednak nuli u $x = \pm 1$, pa u tim tačkama prvi izvod nije definisan, odnosno funkcija nije diferencijabilna. Odredimo ponašanje prvog izvoda u okolini tačaka $x = -1$ i $x = 1$.

  $$\lim_{x\to -1^-} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty\,,$$

  $$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty\,,$$

  pa će se u tačkama $x = \pm 1$ (druge dve kritične tačke) pojaviti „špic”.

  c) Odredimo sada znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i kritične tačke.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt[3]{x^2-1}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

  Dakle, u tačkama $T_1(-1, f(-1)) = T_1(-1,0)$ i $T_3(1, f(1)) = T_3(1,0)$ funkcija će imati lokalni minimum, a u tački $T_2(0, f(0)) = T_2(0,1)$ lokalni maksimum. Dalje $f(x) \nearrow$ za $x \in (-1,0)\cup(1,+\infty)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (-\infty,-1)\cup(0,1)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

a) Potražimo drugi izvod funkcije.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}\right)' = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}\right)' \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{x'\,(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - x\left((x^2-1)^{\frac{1}{3}}\right)'}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - x\cdot\frac{1}{3}\cdot(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2-1-\frac{2}{3}x^2\right)}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4(x^2-3)}{9(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4(x^2-3)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}.
\end{aligned}
$$

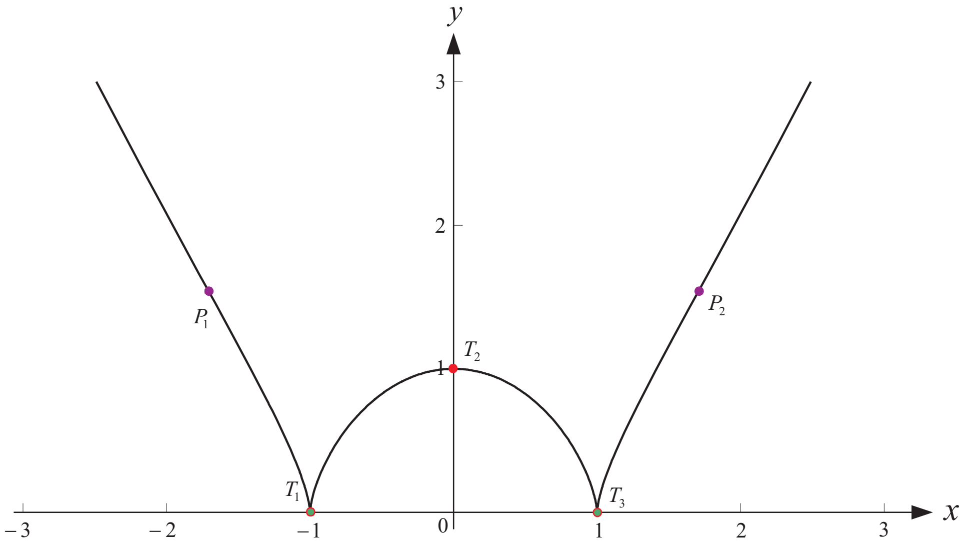
b) Nule drugog izvoda su: $f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ i to su kandidati za prevojne tačke funkcije.

c) Odredimo još i znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i nule drugog izvoda i tačke u kojima drugi izvod nije definisan.

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
x^2-3	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\sqrt[3]{(x^2-1)^4}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\smile$

Dakle, $P_1(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = P_1(-\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ i $P_2(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = P_2(\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ su prevojne tačke. Dalje, funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, a konkavna ($\frown$) za $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 6.12.



Slika 6.12: Grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ gde je: $x = -1$ i $x = 1$ su nule funkcije, $T_1(-1,0)$ i $T_3(1,0)$ - lokalni minimumi, $T_2(0,1)$ - lokalni maksimim, $P_1(-\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ i $P_2(\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ su prevojne tačke.

6.7 Zadaci za vežbu

1. Pokazati da funkcija $f(x) = x^4 - 2x^2$ zadovoljava uslove Rolove teoreme za $x \in [0, \sqrt{2}]$. Naći odgovarajuće vrednosti θ.

2. Koji od uslova Rolove teoreme nije ispunjen na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$ za funkciju $f(x) = |\sin x|$?

3. Da li funkcija $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ ispunjava uslove Rolove teoreme na intervalu $[-1, 1]$?

4. Napisati Lagranžovu formulu i naći odgovarajuće θ za $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $[0, 1]$ i za $f(x) = \ln x$ na intervalu $[1, e]$.

5. Koji od uslova Lagranžove teoreme nije ispunjen na intervalu $[1/e, e]$ za funkciju $f(x) = |\ln x|$?

6. Primenom Lagranžove teoreme dokazati da je $\sin(x+h) - \sin x = h\cos\theta$, gde je $x < \theta < x + h$.

7. Primenom Lagranžove teoreme dokazati nejednakost $\dfrac{1}{a+1} < \ln\dfrac{1+a}{a} < \dfrac{1}{a}$, $a > 0$.

8. Razviti polinom $P(x) = 5x^4 - 36x^3 + 99x^2 - 122x + 57$ po stepenima od $(x-2)$ koristeći Tejlorov polinom.
$(P(x) = 1 + 2(x-2) + 3(x-2)^2 + 4(x-2)^3 + 5(x-2)^4)$

9. Razviti polinom $P(x) = x^{10} - 3x^5 + 1$ po stepenima od $(x-1)$ koristeći Tejlorov polinom. $(P(x) = -1 - 5(x-1) + 15(x-1)^2 + 90(x-1)^3 + 195(x-1)^4 + 249(x-1)^5 + 210(x-1)^6$ $+120(x-1)^7 + 45(x-1)^8 + 10(x-1)^9 + (x-1)^{10})$

10. Naći Tejlorovu formulu n-tog stepena za funkciju $y = x^3 \ln x$ u okolini tačke $x_0 = 1$. $(y = (x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \sum_{k=4}^{n} \frac{(-1)^k\, 6\,(x-1)^k\,(k-4)!}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}\, 6\,(x-1)^{n+1}\,(n-3)!}{(1+\nu(x-1))^{n-2}(n+1)!}$, $0 < \nu < 1)$

11. Aproksimirati funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ Maklorenovim polinomom trećeg stepena i procenti grešku aproksimacije za $|x| \leq \frac{1}{10}$. $(\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + R_3,\ R_3 < 1/(3 \cdot 10^3))$

12. Izračunati približno $\sin 1$ pomoću Maklorenovog polinoma petog stepena za funkciju $\sin x$. $(\sin 1 \approx 0.84)$

13. Aproksimirati funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \geq -1$, Maklorenovim polinomom drugog stepena i oceniti grešku u intervalu $\left(0, \frac{1}{10}\right)$. $\left(R_2 < \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3\right)$

14. Izračunati graničnu vrednost $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x - 1}{x^7 - 4x + 3}$. $(L = -2/3)$

15. Izračunati graničnu vrednost $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$. $(L = 0)$

16. Izračunati graničnu vrednost $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 2^x}{x}$. $(L = +\infty)$

17. Izračunati graničnu vrednost $L = \lim\limits_{x \to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$. $(L = 1)$

18. Naći odnos između poluprečnika r i visine H cilindra, tako da njegova površina bude najmanja pri datoj zapremini V.

19. Zapremina pravilne trostrane prizme je V. Kolika treba da bude ivica osnove da bi površina prizme bila najmanja?

20. Između svih pravouglih trouglova obima $2s$, odrediti onaj čiji je poluprečnik upisanog kruga najveći.

21. Od svih pravougaonika datog obima, naći onaj čija je površina maksimalna.

22. Rastaviti broj 10 na dva sabirka tako da njihov proizvod ima najveću moguću vrednost.

23. Komad žice čija je dužina a cm, treba podeliti na dva dela, i od jednog napraviti kvadrat, a od drugog jednakostranični trougao. Kako treba podeliti žicu da bi zbir površina tako dobijenih figura bio minimalan? (Stranica trougla je $3a/(9 + 4\sqrt{3})$, a kvadrata $\sqrt{3}a/(9 + 4\sqrt{3})$.)

24. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (x-1)^3/(x+1)^2$.

25. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = x - 2 - 6/(x-1)$.

26. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$.

27. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \ln((1-x)/(x+5))$.

28. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$.

29. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x^2$.

30. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.

GLAVA 7

Neodređeni integral

U prethodnom poglavlju se za poznatu funkciju određivao prvi izvod. Postavlja se pitanje, da li se može odrediti funkcija čiji je prvi izvod poznat, odnosno, da li se može odrediti funkcija $F(x)$ tako da, za poznato $f(x)$, važi $F'(x) = f(x)$. U ovoj glavi uveden je pojam neodređenog integrala, date su osobine i načini rešavanja u zavisnosti od tipa integrala.

7.1 Pojam i osnovne osobine

Definicija 7.1.1 *Neka funkcija f preslikava otvoreni interval (a,b) u skup $\mathbb{R}$, odnosno, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Funkcija F je primitivna funkcija (ili prvobitna) za funkciju f na intervalu (a,b) ako je*

$$F'(x) = f(x),\ x \in (a,b)\,. \tag{7.1}$$

Na primer, ako je $f(x) = x$, tada je jedna primitivna funkcija $F(x) = x^2/2$ jer je

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x = f(x)\,.$$

Međutim, i funkcija $F(x) = x^2/2+1$ je takođe primitivna funkcija za $f(x) = x$. Umesto broja 1, može stajati bilo koja konstanta C, tako da je i $F(x) = x^2/2 + C$ primitivna funkcija za $f(x) = x$. Sada dolazimo do pojma neodređenog integrala.

Definicija 7.1.2 *Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) je neodređeni integral funkcije f na intervalu (a,b) i zapisuje se*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ x \in (a,b), \tag{7.2}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Veza između neodređenog integrala i izvoda funkcije data je preko sledeće dve jednakosti koje slede iz (7.2)

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

i

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C\,.$$

Formirajmo sada tablicu osnovnih neodređenih integrala.

(ni1) $\displaystyle\int dx = x + C$;

(ni2) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. U slučaju da x^α nije definisano za $x \le 0$, tada jednakost važi za $x > 0$;

(ni3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, $x \ne 0$;

(ni4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

(ni5) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

(ni5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$, $\cos x \ne 0 \Rightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

(ni6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$, $\sin x \ne 0 \Rightarrow x \ne k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

(ni7) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \ne 1$;

(ni8) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$;

(ni9) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$;

(ni10) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $a \ne 0$;

(ni11) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$, $x \ne \pm 1$;

(ni12) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $a \ne 0$, $x \ne \pm a$;

(ni13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$;

(ni14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$, $a \ne 0$;

(ni15) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$, $|x| > 1$;

(ni16) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,\ a\neq 0,\ |x|>a;$

(ni17) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,\ |x|<1;$

(ni18) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a\neq 0,\ |x|<a;$

(ni19) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C;$

(ni20) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C.$

Osobine neodređenog integrala su:

- $\displaystyle\int (\alpha f(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx,\ \alpha\in\mathbb{R};$
- $\displaystyle\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx;$

Primer 7.1.3 Izračunati integral

$$\int\left(3x^2-4\cos x+e^x-2\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx\,.$$

Rešenje. Korišćenjem osobina integrala i tablične integrale (ni2), (ni5), (ni8) i (ni18) imaćemo

$$\begin{aligned}
&\int\left(3x^2-4\cos x+e^x-2\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx\\
&\qquad= 3\int x^2\,dx-4\int\cos x\,dx+\int e^x\,dx-2\int x^{3/4}\,dx+5\int\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx\\
&\qquad= 3\cdot\frac{x^3}{3}-4\sin x+e^x-2\cdot\frac{x^{\frac34+1}}{\frac34+1}+5\arcsin\frac{x}{2}+C\\
&\qquad= x^3-4\sin x+e^x-2\cdot\frac{x^{\frac74}}{\frac74}+5\arcsin\frac{x}{2}+C\\
&\qquad= x^3-4\sin x+e^x-\frac{8}{7}\cdot\sqrt[4]{x^7}+5\arcsin\frac{x}{2}+C\,.
\end{aligned}$$

Primer 7.1.4 Izračunati integral

$$\int\frac{x^4}{x^2+1}\,dx\,.$$

Rešenje. Pokušaćemo jednom transformacijom da početni integral svedemo na integrale (ni1), (ni2) i (ni9) iz tablice integrala. Naime,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}\,dx + \operatorname{arctg} x = \int (x^2-1)\,dx + \operatorname{arctg} x \\ &= \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C\,.\end{aligned}$$

Primer 7.1.5 Izračunati integral

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx\,.$$

Rešenje. Ovde ćemo koristiti osnovnu trigonometrijsku jednakost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i integrale (ni5) i (ni6) iz tablice osnovnih integrala.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C\,.\end{aligned}$$

7.2 Metod smene kod neodređenog integrala

Smena kod neodređenog integrala koristi se da bi se početni integral sveo na jedan od tabličnih integrala. Neka je $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ jedna primitivna funkcija za funkciju f, tj, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Neka dalje funkcija $\phi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ diferencijablina na intervalu (α,β). Tada važi

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \{t = \phi(x),\ dt = \phi'(x)\,dx\} = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\phi(x)) + C\,.$$

Primer 7.2.1 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx$, $a > 0$.

Rešenje. Odgovarajuća smena je $t = x^2 + a^2$, $dt = 2x\,dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x\,dx$. Sada imamo

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

jer je $x^2 + a^2 \geq 0$.

Primer 7.2.2 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a > 0$.

Rešenje. Smena je $t = x^2 + a^2$, $\frac{dt}{2} = x\,dx$, pa je

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+a^2} + C\,.$$

Primer 7.2.3 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $|x|<a$, $a>0$.

Rešenje. Smena je $t=a^2-x^2$, $dt=-2x\,dx \Rightarrow -\frac{dt}{2}=x\,dx$. Sada je

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{a^2-x^2}+C\,.$$

Primer 7.2.4 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$, $|x|>a$, $a>0$.

Rešenje. Slično kao i u prethodnom primeru, smena je $t=x^2-a^2$, $dt=2x\,dx \Rightarrow \frac{dt}{2}=x\,dx$. Sada je

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2-a^2}+C\,.$$

Primer 7.2.5 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $|x|<a$, $a>0$.

Rešenje. Smena je $t=\sqrt{a^2-x^2}$, pa je $t^2=a^2-x^2$, $x^2=a^2-t^2$, $x=\sqrt{a^2-t^2}$, $dx=-t/\sqrt{a^2-t^2}\,dt$. Sada je

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}\cdot t}\cdot\frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt=-\int\frac{1}{a^2-t^2}\,dt=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right|+C\,,$$

na osnovi (ni12). Dakle,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right|+C\,.$$

Primer 7.2.6 Izračunati integral $\displaystyle\int \operatorname{tg}x\,dx$.

Rešenje. Koristićemo definiciju funkcije $\operatorname{tg}x=\sin x/\cos x$.

$$\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\{t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x\,dx\}=\int\frac{-dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C\,.$$

Primer 7.2.7 Izračunati integral $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$.

Rešenje.

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx=\{t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x\,dx\}=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C\,.$$

Primer 7.2.8 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,dx$, $a\neq 0$.

Rešenje.

$$\int\frac{1}{ax+b}\,dx=\{t=ax+b\Rightarrow dt=a\,dx\Rightarrow\frac{dt}{a}=dx\}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\,.$$

Primer 7.2.9 Izračunati integral $\int e^{ax+b}\,dx$, $a \neq 0$.

Rešenje.

$$\int e^{ax+b}\,dx = \{t = ax+b \Rightarrow dt = a\,dx\} = \frac{1}{a}\int e^t\,dt = \frac{1}{a}e^t + C = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C\,.$$

Primer 7.2.10 Izračunati integral $\int \cos(ax+b)\,dx$, $a \neq 0$.

Rešenje.

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \{t = ax+b \Rightarrow dt = a\,dx\} = \frac{1}{a}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a}\sin t + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C\,.$$

7.3 Metod parcijalnog integraljenja kod neodređenog integrala

Podsetimo se da je pravilo za izvod proizvoda dve diferencijabilne funkcije $u(x)$ i $v(x)$ na intervalu (a,b)

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,.$$

Ako sada integralimo prethodnu jednakost, dobijamo

$$\int (u(x)v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx\,,$$

odnosno

$$u(x)v(x) = \int v(x)\,du(x) + \int u(x)\,dv(x)\,,$$

ako izaberemo da je $C = 0$ na levoj strani jednakosti. Izrazimo sada jedan integral sa desne strane, na primer,

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x)\,.$$

ili kraće

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du\,. \tag{7.3}$$

Metod parcijalnog integraljenja koristi se tako da povoljnim odabirom u i dv, početni integral u (7.3) $\int u\,dv$ bude predstavljen preko jednostavnijeg $\int v\,du$.

Primer 7.3.1 Izračunati integral $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

Rešenje. Sada ćemo za dv izabrati $dx/\cos^2 x$ jer taj integral znamo da rešimo (tablični je), a za u biramo x. Tada je $v = \operatorname{tg} x$, a $du = dx$, pa je, korišćenjem primera 7.2.6,

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C\,.$$

Primer 7.3.2 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $a>0$.

Rešenje. Prvo ćemo x^2, koji se nalazi u brojiocu razlomka, napisati kao $x \cdot x$ pa, koristeći primer 7.2.3, imaćemo

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{x \cdot x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, & v = -\sqrt{a^2-x^2} \end{array} \right\} \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \tfrac{x}{a} - I + 2C
\end{aligned}
$$

Ako prebacimo I na desnu stranu dobijamo

$$2I = -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + 2C \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right) + C\,.$$

Primer 7.3.3 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a>0$.

Rešenje. Sada ćemo brojilac podinegralne funkcije napisati kao $(x^2+a^2-x^2)/a^2$.

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx &= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx - \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx}_{I_1}\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx - I_1\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - I_1\right)
\end{aligned}
$$

Rešimo sada integral I_1 koristeći primer 7.2.2.

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int \frac{x \cdot x}{(x^2+a^2)^2}\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, & v = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx \\
&= -\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\,.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$I = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C\,.$$

Primer 7.3.4 Izračunati integral $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$, $|x| > a$.

Rešenje. Prvo ćemo $\sqrt{x^2-a^2}$, napisati kao $\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, i tada je

$$\begin{aligned} I = \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx \\ &= \underbrace{\int \frac{x\cdot x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx}_{I_1} - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|\,. \end{aligned}$$

Sada je, korišćenjem primera 7.2.4,

$$\begin{aligned} \int \frac{x\cdot x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx, & v = \sqrt{x^2-a^2} \end{array} \right\} \\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx \\ &= x\sqrt{x^2-a^2} - I\,. \end{aligned}$$

Vratimo se na početni integral pa je

$$I = x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\,|\,.$$

Ako prebacimo I na levu stranu dobijamo

$$2I = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\,| + 2C\,,$$

odnosno

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\,|\right) + C\,.$$

Sada ćemo navesti neka pravila za odabir u i dv.

(p1) $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,dx$, $\alpha \neq -1$. Treba odabrati $u = \ln x$, $dv = x^\alpha\,dx$.

Primer 7.3.5 Izračunati integral $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} \int \ln x\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}\,dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C. \end{aligned}$$

Primer 7.3.6 Izračunati integral $\int x^2 \ln x \, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \left\{\begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}\, dx, \\ & \\ dv = x^2 dx, & v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right\} = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.\end{aligned}$$

(p2) $\int x^n e^x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Sada treba odabrati $u = x^n$, $dv = e^x \, dx$.

Primer 7.3.7 Izračunati integral $\int x e^x \, dx$.

Rešenje.

$$\int x e^x \, dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ & \\ dv = e^x \, dx, & v = e^x \end{array}\right\} = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C\,.$$

Primer 7.3.8 Izračunati integral $\int x^2 e^x \, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, dx &= \left\{\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x \, dx, \\ & \\ dv = e^x \, dx, & v = e^x \end{array}\right\} = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C\,,\end{aligned}$$

na osnovu primera 7.3.7.

(p3) $\int x^n \sin x \, dx$ ili $\int x^n \cos x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Treba izabrati $u = x^n$, $dv = \sin x \, dx$ ili $dv = \cos x \, dx$.

Primer 7.3.9 Izračunati integral $\int x \sin x \, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ & \\ dv = \sin x \, dx, & v = -\cos x \end{array}\right\} = -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C\,.\end{aligned}$$

Primer 7.3.10 Izračunati integral $\int x^2 \cos x \, dx$.

Rešenje. Koristeći primer 7.3.9 imaćemo

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= \left\{\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x \, dx, \\ & \\ dv = \cos x \, dx, & v = \sin x \end{array}\right\} = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C\,.\end{aligned}$$

(p4) $\int x^n \arcsin x \, dx$ ili $\int x^n \arccos x \, dx$ ili $\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx$ ili $\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Treba izabrati za u ciklometrijsku funkciju, pa je tada $dv = x^n \, dx$.

Primer 7.3.11 Izračunati integral $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Rešenje.

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & du = \frac{1}{1+x^2} \, dx, \\ & \\ dv = dx, & v = x \end{array}\right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx\,.$$

Integral $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$ je rešen u primeru 7.2.1 ($a = 1$), pa je

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\,.$$

Primer 7.3.12 Izračunati integral $\int x \arcsin x \, dx$.

Rešenje. Izaberimo $u = \arcsin x$ i $dv = x \, dx$, pa je tada $du = 1/\sqrt{1-x^2} \, dx$ i $v = x^2/2$. Dakle,

$$\int x \arcsin x \, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx\,.$$

Pošto je $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ rešen u primeru 7.3.2 (a=1),

$$\int x \arcsin x \, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \left(-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C\,.$$

(p5) $\int e^x \sin x \, dx$ ili $\int e^x \cos x \, dx$. Sada je $u = e^x$, a $dv = \sin x \, dx$ ili $dv = \cos x \, dx$.

Primer 7.3.13 Izračunati integral $I = \int e^x \cos x \, dx$.

Rešenje.

$$I = \int e^x \cos x \, dx = \left\{\begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x \, dx, \\ & \\ dv = \cos x \, dx, & v = \sin x \end{array}\right\} = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx\,.$$

Rešimo sada integral $\int e^x \sin x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x\,dx &= \left\{\begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x\,dx, \\ dv = \sin x\,dx, & v = -\cos x \end{array}\right\} \\ &= -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx = -e^x \cos x + I\,.\end{aligned}$$

Dakle, sada je početni integral jednak

$$I = e^x \sin x - (-e^x \cos x + I) + 2C = e^x \sin x + e^x \cos x - I + 2C\,.$$

Ako sada I prebacimo na levu stranu imaćemo

$$2I = e^x(\sin x + \cos x) + 2C \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C\,.$$

7.4 Integraljenje racionalnih funkcija

Neka su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog i m-tog stepena, redom, $m \geq 2$. Integral oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

naziva se integral racionalne funkcije. Ako je $n \geq m$, tada je potrebno podeliti date polinome. Ako je dobijen količnik $S_{n-m}(x)$ i ostatak $R_l(x)$, $l < m$, tada važi

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}$$

pa se posmatrani integral svodi na

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int S_{n-m}(x)\,dx + \int \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}\,dx\,.$$

Sada je $\displaystyle\int S_{n-m}(x)\,dx$ praktično tablični integral, a rešavanje $\displaystyle\int \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}\,dx$ biće objašnjeno u slučaju kada je $n < m$ jer je kod tog integrala $l < m$.

Primer 7.4.1 Izračunati integral

$$\int \frac{2x^2+3}{x^2+4}\,dx\,.$$

Rešenje. Jasno je da je

$$\frac{2x^2+3}{x^2+4} = \frac{2x^2+8-5}{x^2+4} = \frac{2(x^2+4)-5}{x^2+4} = 2 - \frac{5}{x^2+4}\,,$$

pa je

$$\int \frac{2x^2+3}{x^2+4}\,dx = \int 2\,dx - \int \frac{5}{x^2+4}\,dx = 2x - 5\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx = 2x - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

U slučaju kada je $n < m$, tada se $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ rastavlja na elementarne racionalne funkcije i to:

- Ako je $Q_m = (ax+b)^m$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tada važi
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m},$$
gde su A_1, A_2, $\ldots$, A_m, konstante koje treba odrediti. Dakle,
$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{ax+b}\,dx + \int \frac{A_2}{(ax+b)^2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_m}{(ax+b)^m}\,dx,$$
gde se svaki od integrala se desne strane rešava smenom $t = ax+b$.

- Ako je $Q_m = Q_{2p} = (ax^2+bx+c)^p$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ i ako se ax^2+bx+c ne može rastaviti na činioce u skupu realnih brojeva, tada važi
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_px+B_p}{(ax^2+bx+c)^p},$$
gde su A_1, A_2, $\ldots$, A_p, B_1, B_2, $\ldots$, B_p, konstante koje treba odrediti. Sada je
$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_px+B_p}{(ax^2+bx+c)^p}\,dx,$$
gde integrale sa desne strane jednakosti treba dodatno rešiti.

- Ako je $Q_m = (a_1x+b_1)^{s_1}(a_2x+b_2)^{s_2}\cdots(a_lx+b_l)^{s_l}$, gde su $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in \mathbb{N}$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$ i $s_1 + s_2 + \cdots + s_l = m$, tada je
$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \tfrac{A_{1,1}}{a_1x+b_1} + \tfrac{A_{1,2}}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \tfrac{A_{1,s_1}}{(a_1x+b_1)^{s_1}}\\ &\quad + \tfrac{A_{2,1}}{a_2x+b_2} + \tfrac{A_{2,2}}{(a_2x+b_2)^2} + \cdots + \tfrac{A_{2,s_2}}{(a_2x+b_2)^{s_2}}\\ &\quad + \cdots\\ &\quad + \tfrac{A_{l,1}}{a_lx+b_l} + \tfrac{A_{l,2}}{(a_lx+b_l)^2} + \cdots + \tfrac{A_{l,s_l}}{(a_lx+b_l)^{s_l}}\end{aligned}$$
gde su $A_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $j = 1, 2, \ldots, s_i$, konstante koje treba odrediti.

- Ako je $Q_m = Q_{2p} = (a_1x^2+b_1x+c_1)^{s_1}(a_2x^2+b_2x+c_2)^{s_2}\cdots(a_lx^2+b_lx+c_l)^{s_l}$, gde su $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in \mathbb{N}$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$ i $s_1 + s_2 + \cdots + s_l = p$ (ako se kvadratni trinomi ne mogu rastaviti na činioce u skupu $\mathbb{R}$), tada je
$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \tfrac{A_{1,1}x+B_{1,1}}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \tfrac{A_{1,2}x+B_{1,2}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} + \cdots + \tfrac{A_{1,s_1}x+B_{1,s_1}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{s_1}}\\ &\quad + \tfrac{A_{2,1}x+B_{2,1}}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \tfrac{A_{2,2}x+B_{2,2}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} + \cdots + \tfrac{A_{2,s_2}x+B_{2,s_2}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^{s_2}}\\ &\quad + \cdots\\ &\quad + \tfrac{A_{l,1}x+B_{l,1}}{a_lx^2+b_lx+c_l} + \tfrac{A_{l,2}x+B_{l,2}}{(a_lx^2+b_lx+c_l)^2} + \cdots + \tfrac{A_{l,s_l}x+B_{l,s_l}}{(a_lx^2+b_lx+c_l)^{s_l}}\end{aligned}$$
gde su $A_{i,j}$ i $B_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $j = 1, 2, \ldots, s_i$, konstante koje treba odrediti.

- Ako je, recimo, $Q_m = (ax+b)^{s_1}(cx^2+ex+f)^{s_2}$, gde su $a,b,c,e,f \in \mathbb{R}$, $a,c \neq 0$ i ako se cx^2+ex+f se ne može rastaviti na činioce u skupu $\mathbb{R}$ i $s_1+2s_2=m$, tada važi

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_{s_1}}{(ax+b)^{s_1}} \\ &\quad + \frac{B_1x+C_1}{cx^2+ex+f} + \frac{B_2x+C_2}{(cx^2+ex+f)^2} + \cdots + \frac{B_{s_2}x+C_{s_2}}{(cx^2+ex+f)^{s_2}}\end{aligned}$$

gde su A_i, B_j i C_j, $i=1,2,\ldots,s_1$, $j=1,2,\ldots,s_2$, konstante koje treba odrediti.

Pre nego što damo nekoliko primera integraljenja racionalnih funkcija, pozabavićemo se integraljenjem elementarnih racionalnih izraza:

- I tip su integrali oblika $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+b}\,dx$, $a\cdot b>0$.

Primer 7.4.2 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+8}\,dx$.

Rešenje.

$$\int \frac{1}{2x^2+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

- II tip su integrali oblika $\displaystyle\int \frac{ex+f}{ax^2+b}\,dx$, $e \neq 0$, $a\cdot b>0$

Primer 7.4.3 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{5x-9}{2x^2+8}\,dx$.

Rešenje.

$$\int \frac{5x-9}{2x^2+8}\,dx = \int \frac{5x}{2x^2+8}\,dx - \int \frac{9}{2x^2+8}\,dx = I_1 - I_2\,.$$

Integral I_1 se rešava smenom $t=2x^2+8$, pa je $dt=4xdx$, a integral I_2 je I tipa. Dakle,

$$I_1 = \int \frac{5\frac{dt}{4}}{t} = \frac{5}{4}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{5}{4}\ln|t| + C = \frac{5}{4}\ln(2x^2+8) + C$$

i

$$I_2 = 9\int \frac{1}{2x^2+8}\,dx = \frac{9}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

Konačno

$$\int \frac{5x-9}{2x^2+8}\,dx = \frac{5}{4}\ln|2x^2+8| - \frac{9}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

- III tip su integrali oblika $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$, $b^2-4ac<0$, uz transformaciju imenioca u kanonski oblik

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

gde se, nakon smene $t=x+b/2a$, dobija I tip integrala.

Primer 7.4.4 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx = \{t = x+2 \Rightarrow dt = dx\} = \int \frac{1}{t^2+9}\,dt\\ &= \int \frac{1}{t^2+3^2}\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C\,.\end{aligned}$$

- IV tip su integrali oblika $\displaystyle\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}\,dx$, $e \neq 0$, $b^2-4ac<0$. Nakon transfomacije imenioca u kanonski oblik i smene $t = x + b/2a$, dobijamo integral II tipa.

Primer 7.4.5 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx &= \int \frac{3x+15}{(x+2)^2+9}\,dx = \{t = x+2 \Rightarrow dt = dx\}\\ &= \int \frac{3(t-2)+15}{t^2+9}\,dt = \int \frac{3t+9}{t^2+9}\,dt\\ &= 3\int \frac{t}{t^2+9}\,dt + 9\int \frac{1}{t^2+9}\,dt = 3I_1 + 9I_2\,.\end{aligned}$$

Integral I_1 se rešava smenom $s = t^2+9$, $\frac{ds}{2} = t\,dt$ pa je

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{2}\ln|s| + C = \frac{1}{2}\ln|t^2+9| + C\,.$$

Integral I_2 je već rešen (primer 7.4.4), te je

$$I_2 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C\,.$$

Konačno rešenje je

$$\int \frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx = \frac{3}{2}\ln|t^2+9| + \frac{9}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln((x+2)^2+9) + 3\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C\,.$$

Sada sledi nekoliko primera integraljenja racionalnih funkcija sa određivanjem konstanti koje se budu pojavljivale.

Primer 7.4.6 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{2x+8}{x^2-x-2}\,dx$.

Rešenje. Podintegralnu funkciju treba rastaviti na elementarne racionalne izraze, te je

$$\begin{aligned}\frac{2x+8}{x^2-x-2} = \frac{2x+8}{(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}\,,\end{aligned}$$

a odatle se dobija sistem

$$\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 2 \\ -2A & + & B & = & 8 \end{array}$$

čije je rešenje $(A, B) = (-2, 4)$. Početni integral je tada

$$\int \frac{2x+8}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{-2}{x+1}\,dx + \int \frac{4}{x-2}\,dx = -2\ln|x+1| + 4\ln|x-2| + C\,.$$

Primer 7.4.7 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}\,dx$.

Rešenje.

$$\frac{4x-8}{x^4+4x^2} = \frac{4x-8}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

jer x^2+4 nema nula u skupu $\mathbb{R}$. Dalje je

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} &= \frac{Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 4Ax + 4B}{x^2(x^2+4)} \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\begin{array}{rrrrcr} A & & + \; C & & = & 0 \\ & B & & + \; D & = & 0 \\ 4A & & & & = & 4 \\ & 4B & & & = & -8 \end{array}$$

i rešenje je $(A, B, C, D) = (1, -2, -1, 2)$. Sledi da je

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{2}{x^2}\,dx + \int \frac{-x+2}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln|x| - 2\int x^{-2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx \\ &= \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} \end{aligned}$$

nakon smene $t = x^2+4 \Rightarrow dt = 2x\,dx$. Rešenje je

$$\int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

Primer 7.4.8 Izračunati integral $I = \displaystyle\int \frac{2x^2-274x-700}{(x-1)(x^2+4x+13)^2}\,dx$.

Rešenje. Prvo ćemo podintegralnu funkciju rastaviti na elementarne racionalne funkcije.

$$\frac{2x^2-274x-700}{(x-1)(x^2+4x+13)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+13} + \frac{Dx+E}{(x^2+4x+13)^2} \tag{7.4}$$

pa je desna strana jednakosti (7.4) jednaka

$$\frac{A(x^2+4x+13)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+4x+13)+(Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+4x+13)^2},$$

odnosno

$$\frac{(A+B)x^4+(8A+3B+C)x^3+(42A+9B+3C+D)x^2+(104A-13B+9C-D+E)x+(169A-13C-E)}{(x-1)(x^2+4x+13)^2}.$$

Sada sledi da je

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} A & + & B & & & & & & & = & 0 \\ 8A & + & 3B & + & C & & & & & = & 0 \\ 42A & + & 9B & + & 3C & + & D & & & = & 2 \\ 104A & - & 13B & + & 9C & - & D & + & E & = & -274 \\ 169A & - & & & 13C & & & - & E & = & -700 \end{array}$$

što je sistem linearnih jednačina sa rešenjem $(A,B,C,D,E)=(-3,3,15,56,-2)$ koje se dobije, kao i kod prethodnih sistema, korišćenjem Gausovog[1] postupka eliminacije. Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{-3}{x-1}\,dx+\int\frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx+\int\frac{56x-2}{(x^2+4x+13)^2}\,dx \\ &= I_1+I_2+I_3 \end{aligned}$$

i rešićemo svaki integral pojedinačno. Prvi integral je

$$I_1=\int\frac{-3}{x-1}\,dx=-3\ln|x-1|+C.$$

Drugi je rešen u primeru 7.4.5, pa je

$$I_2=\int\frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx=\frac{3}{2}\ln((x+2)^2+9)+3\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C.$$

Integral I_3 se transformiše smenom $t=x+2\Rightarrow dt=dx$

$$\begin{aligned} I_3=\int\frac{56x-2}{((x+2)^2+9)^2}\,dx &= \int\frac{56(t-2)-2}{(t^2+9)^2}\,dt=\int\frac{56t-114}{(t^2+9)^2}\,dt \\ &= 56\underbrace{\int\frac{t\,dt}{(t^2+9)^2}}_{I_4}-114\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}}_{I_5}. \end{aligned}$$

Integral I_4 je rešen u primeru 7.2.2 za $a=3$, pa je

$$I_4=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+3^2}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+9}+C,$$

dok je integral I_5 rešen u primeru 7.3.3 za $a=3$, te je

$$I_5=\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}=\frac{1}{2\cdot 3^2}\left(\frac{t}{t^2+3^2}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\right)+C=\frac{1}{18}\left(\frac{t}{t^2+9}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\right)+C.$$

[1] Johan Karl Fridrih Gaus (1777-1855) - pogledati poglavlje 9.15

Sada je

$$I_3 = -28 \cdot \frac{1}{t^2+9} - \frac{19}{3}\left(\frac{t}{t^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\right) + C\,,$$

odnosno,

$$I_3 = -28 \cdot \frac{1}{(x+2)^2+9} - \frac{19}{3}\left(\frac{x+2}{(x+2)^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\right) + C\,.$$

Uvrštavajući I_1, I_2 i I_3 u I i sabirajući odgovarajuće izraze, dobijamo

$$I = -3\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln((x+2)^2+9) - \frac{19x+122}{3((x+2)^2+9)} + \left(-\frac{19}{9}+3\right)\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C\,,$$

odnosno

$$I = -3\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+13) - \frac{19x+122}{3(x^2+4x+13)} + \frac{8}{9}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C\,.$$

7.5 Integraljenje trigonometrijskih funkcija

U ovom poglavlju rešavaćemo integrale oblika

$$\int (\sin(ax))^m(\cos(ax))^n\,dx,$$

gde je $m^2+n^2 \geq 0$ i $m,n \in \mathbb{N}_0$, dok je a realan broj različiti od nule.

- Neka je $n=0$, a m neparan broj. Tada je $m=2k+1$, $k\in\mathbb{N}_0$.

  $$\int (\sin(ax))^{2k+1}\,dx = \int \sin^{2k+1}(ax)\,dx = \int \sin^{2k}(ax)\sin(ax)\,dx\,.$$

  Pošto u drugom integralu imamo $\sin(ax)\,dx$, odgovarajuća smena mora biti oblika $t = \cos(ax)$ i zbog toga je potrebno da se funkcija $\cos(ax)$ nalazi u integralu kao deo podintegralne funkcije. Koristićemo da je $\sin^2(ax) = 1-\cos^2(ax)$. Dakle,

  $$\int \sin^{2k}(ax)\sin(ax)\,dx = \int (\sin^2(ax))^k\sin(ax)\,dx = \int (1-\cos^2(ax))^k\sin(ax)\,dx$$

  i nakon smene $t=\cos(ax) \Rightarrow dt = -a\sin(ax)\,dx$ imaćemo

  $$\int \sin^{2k}(ax)\sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\int (1-t^2)^k\,dt\,.$$

  Sada ćemo koristiti formulu za razvoj binoma $(x+y)^q$ u red, $q\in\mathbb{N}_0$,

  $$(x+y)^q = \sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}x^{q-p}y^p\,,\ \binom{q}{p} = \frac{q!}{p!\,(q-p)!}\,.$$

  Dakle, ako je $x=1$, $y=-t^2$ i $q=k$ imaćemo

  $$(1-t^2)^k = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}1^{k-p}(-t^2)^p = \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}t^{2p}\,.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}\int (\sin(ax))^{2k+1}\,dx &= -\frac{1}{a}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\frac{t^{2p+1}}{2p+1}\\ &= -\frac{1}{a}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\frac{\cos^{2p+1}(ax)}{2p+1}+C\,.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Ako je $m=0$, a n neparan broj, sličnim postupkom se dobija

$$\int (\cos(ax))^{2k+1}\,dx = \frac{1}{a}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\frac{\sin^{2p+1}(ax)}{2p+1}+C\,. \tag{7.6}$$

gde je $k\in\mathbb{N}_0$.

Primer 7.5.1 Izračunati integral $\int \sin^3 x\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x\sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx\\ &= \{t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x\,dx\} = -\int (1-t^2)\,dt\\ &= -\int dt+\int t^2\,dt = -t+\frac{t^3}{3}+C = -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C\,.\end{aligned}$$

Ako želimo da rešimo integral preko formule (7.5), za $a=1$ i $k=1$ imaćemo

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= -\frac{1}{1}\sum_{p=0}^{1}(-1)^p\binom{1}{p}\frac{\cos^{2p+1}x}{2p+1}+C\\ &= -\left(\underbrace{(-1)^0\binom{1}{0}\frac{\cos^{2\cdot 0+1}x}{2\cdot 0+1}}_{p=0}+\underbrace{(-1)^1\binom{1}{1}\frac{\cos^{2\cdot 1+1}x}{2\cdot 1+1}}_{p=1}\right)+C\\ &= -\left(1\cdot 1\cdot\frac{\cos x}{1}-1\cdot 1\cdot\frac{\cos^3 x}{3}\right)+C = -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C\,.\end{aligned}$$

Primer 7.5.2 Izračunati integral $\int \cos^5(2x)\,dx$.

Rešenje. Nakon smene $t=2x\Rightarrow dt=2\,dx$, imaćemo

$$\begin{aligned}\int \cos^5(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \cos^5 t\,dt = \frac{1}{2}\int \cos^4 t\cos t\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int (\cos^2 t)^2\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 t)^2\cos t\,dt\,.\end{aligned}$$

Sada uvedimo smenu $s = \sin t \Rightarrow ds = \cos t\, dt$, pa je

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(2x)\, dx &= \frac{1}{2}\int (1-s^2)^2\, ds = \frac{1}{2}\int (1-2s^2+s^4)\, ds \\
&= \frac{1}{2}\int ds - \int s^2\, ds + \frac{1}{2}\int s^4\, ds = \frac{s}{2} - \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{10} + C \\
&= \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{10} + C = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{3} + \frac{\sin^5(2x)}{10} + C\,.
\end{aligned}$$

Ako opet rešimo integral na drugi način, preko formule (7.6), za $a = 2$ i $k = 2$, imaćemo

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(2x)\, dx &= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{2}(-1)^p \binom{2}{p} \frac{\sin^{2p+1}(2x)}{2p+1} + C \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{(-1)^0\binom{2}{0}\frac{\sin^{2\cdot 0+1}(2x)}{2\cdot 0+1}}_{p=0} + \underbrace{(-1)^1\binom{2}{1}\frac{\sin^{2\cdot 1+1}(2x)}{2\cdot 1+1}}_{p=1} \\
&\qquad + \underbrace{(-1)^2\binom{2}{2}\frac{\sin^{2\cdot 2+1}(2x)}{2\cdot 2+1}}_{p=2} \Bigg) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(1\cdot 1\cdot \frac{\sin(2x)}{1} - 1\cdot 2\cdot \frac{\sin^3(2x)}{3} + 1\cdot 1\cdot \frac{\sin^5(2x)}{5}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{1} - 2\cdot \frac{\sin^3(2x)}{3} + \frac{\sin^5(2x)}{5}\right) + C \\
&= \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{3} + \frac{\sin^5(2x)}{10} + C\,.
\end{aligned}$$

- Neka je $n = 0$, a m paran broj. Tada je $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Korišćenjem formule

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

imamo

$$\int (\sin(ax))^{2k}\, dx = \int (\sin^2(ax))^k\, dx = \int \left(\frac{1-\cos(2ax)}{2}\right)^k dx\,.$$

Slično, ako je $m = 0$, a $n = 2k$ paran broj, $k \in \mathbb{N}$, važi

$$\int (\cos(ax))^{2k}\, dx = \int (\cos^2(ax))^k\, dx = \int \left(\frac{1+\cos(2ax)}{2}\right)^k dx\,.$$

Primer 7.5.3 Izračunati integral $\int \cos^2 x\,dx$.

Rešenje. Koristićemo formulu

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\,.$$

Sada je, koristeći primer 7.2.10 ($a=2$, $b=0$),

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\,.$$

Primer 7.5.4 Izračunati integral $\int \cos^2(2x)\,dx$.

Rešenje. Traženi integral se svodi na integral u primeru 7.5.3 smenom $t = 2x \Rightarrow dt = 2\,dx$.

$$\int \cos^2(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\sin(2t) + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin(4x) + C\,.$$

Primer 7.5.5 Izračunati integral $\int \cos^4 x\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\,dx &= \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin(4x) + C \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C\,.
\end{aligned}$$

korišćenjem primera 7.5.3 i 7.5.4.

- Ako je bar jedan od brojeva m i n neparan, tada se funkcija koja je stepenovana na neparni stepen rastavi na činioce od kojih je jedan činilac stepenovan na prvi stepen, a drugi na paran broj.

Primer 7.5.6 Izračunati integral $\int \sin^2 x\,\cos x\,dx$.

Rešenje. Ovaj integral se rešava smenom $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$ pa je

$$\int \sin^2 x\,\cos x\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C\,.$$

Primer 7.5.7 Izračunati integral $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Rešenje. Sada ćemo $\cos^3 x$ napisati kao $\cos^2 x \cos x$. Dakle,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \,(1-\sin^2 x) \cos x \, dx \\ &= \{t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx\} = \int t^2(1-t^2)\, dt \\ &= \int t^2 \, dt - \int t^4 \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C\,.\end{aligned}$$

Primer 7.5.8 Izračunati integral $\int \sin^2(2x) \cos^3(2x)\, dx$.

Rešenje. Nakon smene $t = 2x \Rightarrow dt = 2\, dx$, dolazimo do primera 7.5.7.

$$\begin{aligned}\int \sin^2(2x) \cos^3(2x)\, dx &= \frac{1}{2}\int \sin^2 t \cos^3 t \, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{\sin^5 t}{5}\right) + C \\ &= \frac{\sin^3(2x)}{6} - \frac{\sin^5(2x)}{10} + C\,.\end{aligned}$$

- Ako su m i n istovremeno parni brojevi

Primer 7.5.9 Izračunati integral $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

Rešenje. Funkciju $\sin^2 x$ ćemo napisati kao $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ da bismo iskoristili već rešene integrale u primerima 7.5.3 i 7.5.5.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int (1-\cos^2 x) \cos^2 x \, dx = \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{32}\sin(4x) + C \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C\,.\end{aligned}$$

7.6 Metoda Ostrogradskog

Metoda Ostrogradskog[2] koristi se za rešavanje integrala oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\,,$$

gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, $n>1$. Rešenje se traži u obliku

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\,, \tag{7.7}$$

gde se, nakon diferenciranja (7.7), koeficijenti nepoznatog polinoma $Q_{n-1}(x)$ $(n-1)$-og stepena i λ određuju takozvanom *Metodom neodređenih koeficijenata.* Nju ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 7.6.1 Izračunati integral

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx\,.$$

Rešenje. Koristeći (7.7) imaćemo

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{1+x-x^2}+\lambda\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx\,, \tag{7.8}$$

a nakon diferenciranja (7.8) i korišćenja pravila za izvod proizvoda dve funkcije, izvoda složene funkcije i da je $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ važiće

$$\frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}} = A\sqrt{1+x-x^2}+(Ax+B)\frac{1-2x}{2\sqrt{1+x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+x-x^2}}\,.$$

Nakon množenja cele jednakosti sa $\sqrt{1+x-x^2}$, dobijamo

$$x^2-x+1 = A(1+x-x^2)+\frac{1}{2}(Ax+B)(1-2x)+\lambda\,,$$

odnosno

$$x^2-x+1 = (-2A)x^2+\left(\frac{3}{2}A-B\right)x+\left(A+\frac{1}{2}B+\lambda\right)\,.$$

Odavde sledi da je $-2A=1$, $\frac{3}{2}A-B=-1$ i $A+\frac{1}{2}B+\lambda=1$. Rešenje ovog sistema je $(A,B,\lambda)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8}\right)$. Vratimo se sada na (7.8).

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{1+x-x^2}+\frac{11}{8}\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx}_{I_1}\,.$$

[2]Mihail Vasiljevič Ostrogradski (1801-1862) - pogledati poglavlje 9.18

Preostalo je još da rešimo integral I_1.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}}\,dx \\
&= \{t = 1/2 - x \Rightarrow dt = -dx\} = \int \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - t^2}}\,dt \\
&= -\arcsin \frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = -\arcsin \frac{2\left(\frac{1}{2} - x\right)}{\sqrt{5}} + C = -\arcsin \frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C\,.
\end{aligned}$$

na osnovu (ni18). Konačno,

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{1 + x - x^2}}\,dx = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{1 + x - x^2} - \frac{11}{8}\arcsin \frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C\,.$$

7.7 Zadaci za vežbu

Izračunati integrale:

1. $I = \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} - \sqrt[2020]{x^{2019}}\right) dx.$ $\left(I = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + 5\sqrt[5]{x} - \frac{2020}{4039}\sqrt[2020]{x^{4039}} + C\right)$

2. $I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx.$ $(I = -\ln|\sin x + \cos x| + C)$

3. $I = \int \sqrt{x}\sqrt{2\sqrt{x} + 5}\,dx.$ $\left(I = \frac{(2\sqrt{x}+5)^{7/2}}{14} - (2\sqrt{x}+5)^{5/2} + \frac{25(2\sqrt{x}+5)^{3/2}}{6} + C\right)$

4. $I = \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$ $(I = \ln|\ln(\ln x)| + C)$

5. $I = \int \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx,\ a > 0.$ $\left(I = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2} - a}{\sqrt{a^2+x^2} + a}\right| + C\right)$

6. $I = \int e^{3x}\sin 4x\,dx.$ $\left(I = \frac{1}{25}e^{3x}(3\sin 4t - 4\cos 4t) + C\right)$

7. $I = \int (3x^2 - 5x + 6)e^{4x-1}\,dx.$ $\left(I = \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{13x}{8} + \frac{61}{32}\right)e^{4x-1} + C\right)$

8. $I = \int x^3 \operatorname{arctg} x\,dx.$ $\left(I = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{12} - \frac{\operatorname{arctg} x}{4} + \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{4} + C\right)$

9. $I = \int \frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}\,dx.$ $\left(I = -\frac{1}{x-2}\ \operatorname{arctg}(x-2) + C\right)$

10. $I = \int \frac{x^3 + 1}{x(x^3 - 8)}\,dx.$ $\left(I = \frac{3}{8}\ln|x^2 - 8| - \frac{1}{8}\ln|x| + C\right)$

11. $I=\displaystyle\int \frac{9x+19}{x^3+9x^2+28x+40}\,dx.$

$\left(I=-2\ln|x+5|+\ln(x^2+4x+8)+\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+2}{2}\right)+C\right)$

12. $I=\displaystyle\int \frac{x^5+4x^4+9x^3+8x^2+3x-1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}\,dx.$

$\left(I=\dfrac{x^2}{2}+x+\ln|x+1|+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C\right)$

13. $I=\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx.$ $\left(I=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|\right)+C\right)$

14. $I=\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx.$ $\left(I=\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{x}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\right|+C\right)$

15. $I=\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$ $\left(I=\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}+C\right)$

16. $I=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}\,dx.$ $\left(I=-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+\tfrac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C\right)$

17. $I=\displaystyle\int \sin^6 x\,dx.$ $\left(I=\dfrac{5}{16}\,x-\dfrac{15}{64}\sin(2x)+\dfrac{3}{64}\sin(4x)-\dfrac{1}{192}\sin(6x)+C\right)$

18. $I=\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$ $\left(I=\dfrac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right)$

19. $I=\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}\,dx.$ $\left(I=\dfrac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3}\right)$

20. $I=\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$ $\left(I=\dfrac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

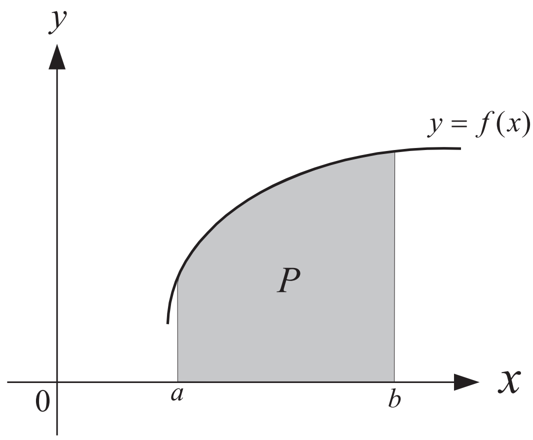
GLAVA 8

Određeni integral

U ovoj glavi biće definisan pojam određenog integrala (Rimanov integral), a cilj je da studenti savladaju smenu promenljivih i parcijalno integraljenje kod određenih intagrala. Da uvide široku primenu pri izračunavanju površine ravnog lika nepravilnog oblika, dužine krive koja nije prava linija, površine i zapremine obrtnog tela nepravilnog oblika.

8.1 Pojam određenog integrala

Neka je data neprekidna i pozitivna funkcija $y = f(x)$ na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Problem definisanja određenog integrala povezan je sa određivanjem površine krivolinijskog trapeza koji je ograničen funkcijom $f(x)$, x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$ (slika 8.1).



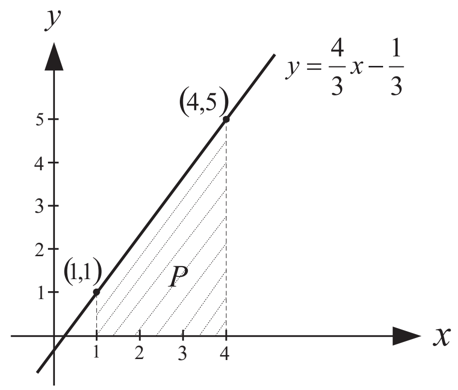
Slika 8.1: Krivolinijski trapez.

Da bi se odredila vrednost površine P, potrebno je da se ona dovoljno dobro aproksimira nekom površinom ili sumom površina koje znamo lako da izračunamo. Ideja je da se površina P podeli na $n \in \mathbb{N}$ manjih krivolinijskih trapeza čija će površina biti aprosimirana površinom odgovarajućih pravougaonika, pa da se, kako se n povećava, dobija preciznija aproksimacija tražene površine. U tu svrhu, pogledajmo sledeći primer.

Primer 8.1.1 Neka je data funkcija $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$. Odrediti površinu P koja je ograničena datom funkcijom, x-osom i pravama $x = 1$ i $x = 4$ (slika 8.2).

Rešenje. Koristeći formulu za površinu trapeza $P = \frac{a+b}{2}\,h$, gde su a i b osnovice, a h visina trapeza, dobijamo da je

$$P = \frac{f(4) + f(1)}{2}\,(4 - 1) = \frac{5 + 1}{2} \cdot 3 = 9\,.$$



Slika 8.2: Površina ravnog lika ograničenog funkcijom $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ i pravama $x = 1$, $x = 4$ i $y = 0$.

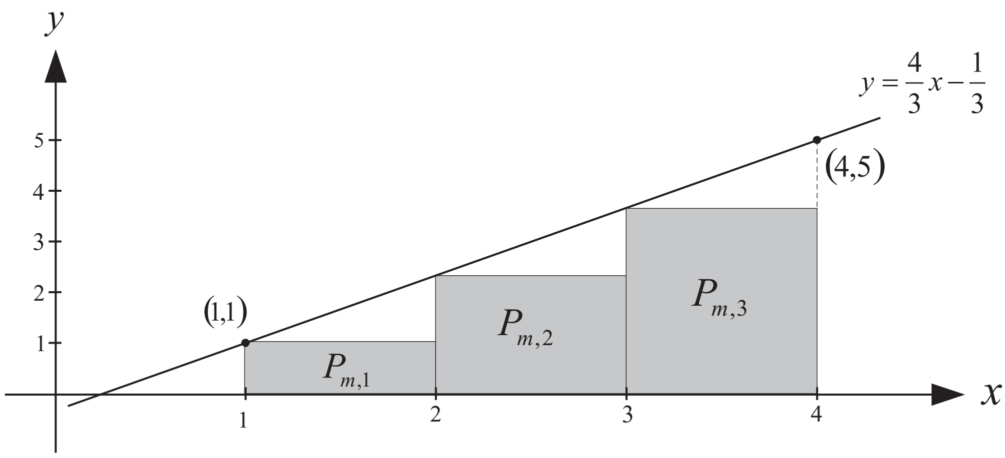
Cilj ovog primera je da se ukaže na to kako će se aproksimirati površina trepeza i uvođenje pojmova potrebih za definiciju određenog integrala. Podelimo interval $[1, 4]$ na tri ($n = 3$) podintervala iste dužine. Tada je njihova dužina $\Delta x = (b - a)/n = (4 - 1)/3 = 1$. Obeležimo sa $x_0 = 1$ i $x_1 = x_0 + \Delta x = 2$, $x_2 = x_1 + \Delta x = 3$ i $x_3 = x_2 + \Delta x = b = 4$. Time smo podelili interval $[1, 4]$ na tri jednaka podintervala dužine 1. Kraće se može zapisati

$$x_0 = 1,\; x_i = x_{i-1} + \Delta x,\; i = 1, 2, 3\,.$$

Formirajmo sada *donje* pravougaonike na sledeći način: neka je $P_{m,i}$ površina pravougaonika čija je jedna stranica $[x_{i-1}, x_i]$, a druga stranica neka je dužine koja odgovara minimalnoj vrednosti funkcije $f(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ i nju ćemo obeležiti m_i, $i = 1, 2, 3$ (slika 8.3).

Dakle, jedna aproksimacija koju ćemo obeležiti sa P_m (suma donjih prvougaonika) je

$$\begin{aligned} P_m = P_{m,1} + P_{m,2} + P_{m,3} &= m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x \\ &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x \\ &= f(1)\Delta x + f(2)\Delta x + f(3)\Delta x \\ &= 1 \cdot 1 + \frac{7}{3} \cdot 1 + \frac{11}{3} \cdot 1 = 7\,. \end{aligned}$$

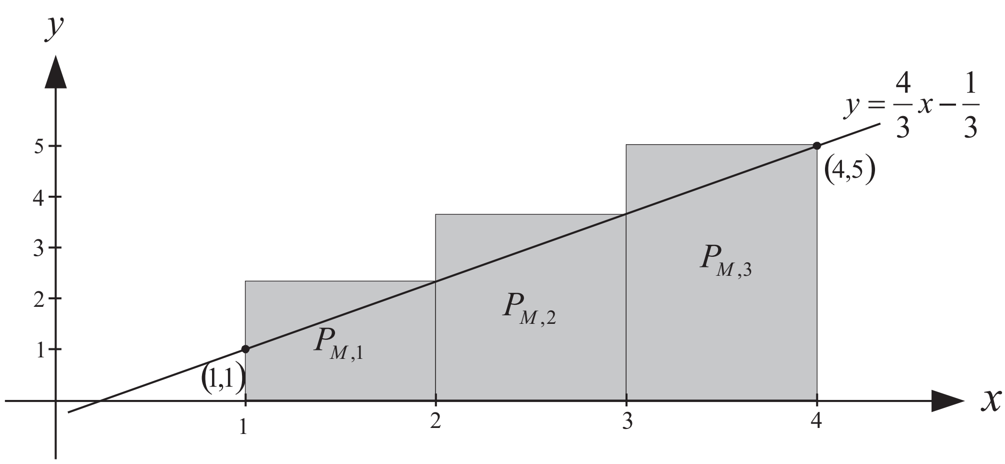


Slika 8.3: Aproksimacija površine donjim pravougaonicima za $n = 3$.

Primetimo da se P_m može kraće zapisati i kao

$$P_m = \sum_{i=1}^{3} P_{m,i} = \sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x\,.$$

Još jednu aproksimaciju dobijamo ako formiramo *gornje* pravougaonike. Označićemo sa $P_{M,i}$ pravougaonik sa jednom stranicom $[x_{i-1}, x_i]$, i drugom dužine koja odgovara maksimalnoj vrednosti funkcije $f(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ i nju ćemo obeležiti M_i, $i = 1, 2, 3$ (slika 8.4).



Slika 8.4: Aproksimacija površine gornjim pravougaonicima za $n = 3$.

Druga aproksimacija, koju ćemo obeležiti sa P_M, (suma gornjih prvougaonika) je

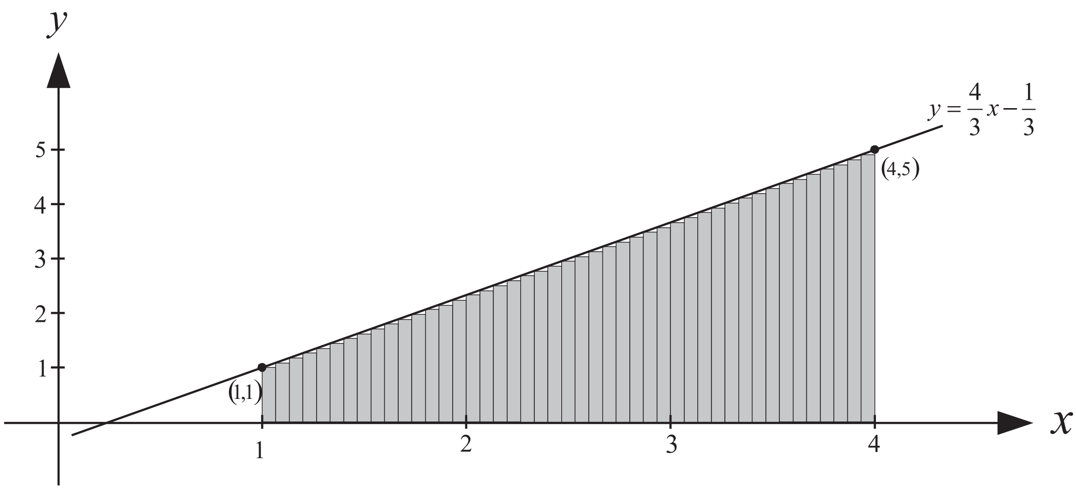
$$\begin{aligned}P_M = P_{M,1} + P_{M,2} + P_{M,3} &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x \\ &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x \\ &= \frac{7}{3}\cdot 1 + \frac{11}{3}\cdot + 5\cdot 1 = 11\,.\end{aligned}$$

Primetimo, opet, da se P_M može kraće zapisati i kao

$$P_M = \sum_{i=1}^{3} P_{M,i} = \sum_{i=1}^{3} M_i\Delta x\,.$$

Pokušajmo sada da poboljšamo aproksimaciju. Podelimo interval $[1,4]$ na $n = 30$ jednakih delova. Tada je dužina svakog intervala $\Delta x = (4-1)/30 = 0.1$ i važi $x_i = x_{i-1} + \Delta x$, $i = 1, 2, \ldots, 30$. Ako površinu aproksimiramo donjim pravougaonicima (slika 8.5), tada je

$$P_m = \sum_{i=1}^{30} P_{m,i} = \sum_{i=1}^{30} m_i\Delta x = \sum_{i=1}^{30} f(x_{i-1})\Delta x = 8.8\,,$$

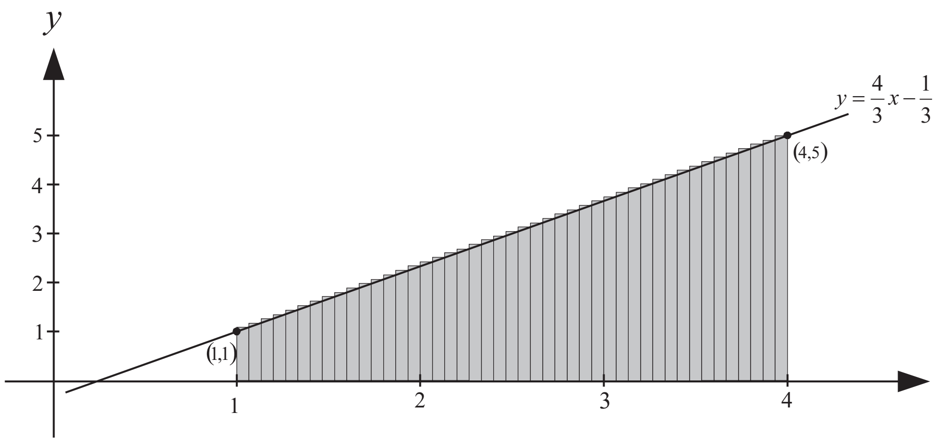


Slika 8.5: Aproksimacija površine donjim pravougaonicima za $n = 30$.

dok aproksimacija gornjim pravougaonicima daje (slika 8.6)

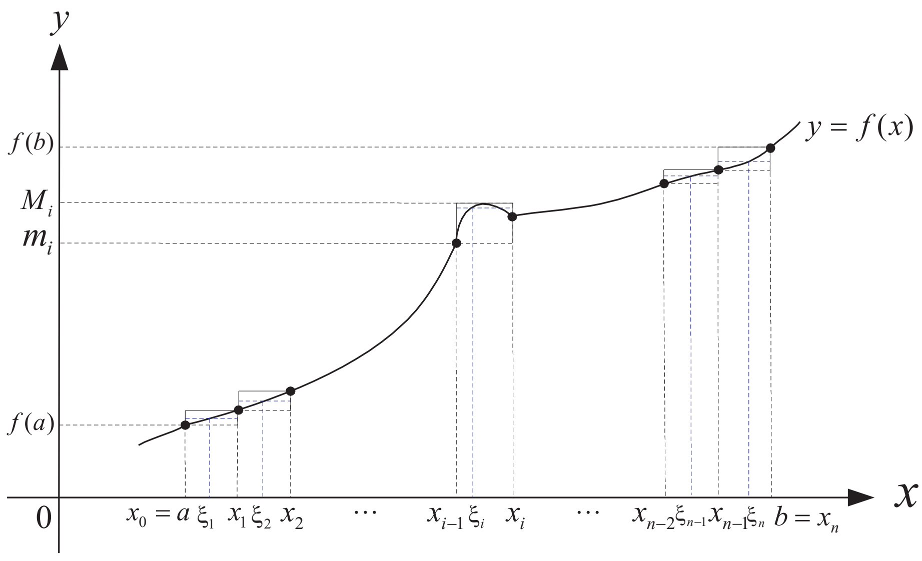
$$P_M = \sum_{i=1}^{30} P_{M,i} = \sum_{i=1}^{30} M_i\Delta x = \sum_{i=1}^{30} f(x_i)\Delta x = 9.2\,.$$

Za $n = 300$, $\Delta x = 0.01$ i dobija se $P_m = 8.98$ i $P_M = 9.02$, dok je za $n = 3000$, $\Delta x = 0.001$, $P_m = 8.998$ i $P_M = 9.002$. Primećujemo da kako se n povećava da se tako P_m i P_M približavaju stvarnoj površini $P = 9$.



Slika 8.6: Aproksimacija površine gornjim pravougaonicima za $n = 30$.

U opštem slučaju, podelićemo interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala dužine $\Delta x = (b - a)/n$, gde je $x_0 = a$, $x_i = x_{i-1} + \Delta x$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_n = b$. Sa m_i obeležićemo minimalnu, a sa M_i maksimalnu vrednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, redom, $i = 1, 2, \ldots, n$ (slika 8.7).



Slika 8.7: Aproksimacija površine donjim i gornjim pravougaonicima za funkciju $f(x)$, $x \in [a, b]$.

Formiraćemo sume donjih i gornjih pravougaonika kao

$$P_m = \sum_{i=1}^{n} P_{m,i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x, \;\; P_M = \sum_{i=1}^{n} P_{M,i} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x \,.$$

Ako je ξ_i proizvoljna tačka na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, tada je

$$m_i \Delta x \leq f(\xi_i)\Delta x \leq M_i \Delta x \,,$$

pa je i

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x \,,$$

odnosno

$$P_m \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \leq P_M \,.$$

Ako je f ograničena na intervalu $[a, b]$ i ako su podintervali jednake dužine, tada važi

$$\lim_{n\to+\infty} P_m = \lim_{n\to+\infty} P_M = P,$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = P \,. \tag{8.1}$$

za bilo koje $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$,. Broj dobijen u formuli (8.1) se naziva određeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ i označava se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \,, \tag{8.2}$$

dok se suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ naziva Rimanova[1] suma, a za funkciju f se kaže da je *Riman-integrabilna* ili samo *integrabilna* na intervalu $[a, b]$.

8.2 Teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala

Ako je funkcija $y = f(x)$ linearna, tada je njena srednja vrednost na zatvorenom intervalu $[a, b]$, $a < b$, jednaka $(f(a)+f(b))/2$ i ona se dostiže u tački $x = (a+b)/2$. Ako je funkcija neka druga kriva, tada se za određivanje njene srednje vrednosti koristi određeni integral. Naime, neka je funkcija $y = f(x)$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Tada ona dostiže svoj minimum m i maksimum M, odnosno važi $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b]$ (tvrđenje 4.4.3). Tada je

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \,,$$

odnosno

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M \,.$$

Kako neprekidna funkcija nad zatvorenim i ograničenim intervalom uzima sve vrednosti (tvrđenje 4.4.4), to znači da postoji tačka $x_m \in (a, b)$ tako da je

$$f(x_m) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{8.3}$$

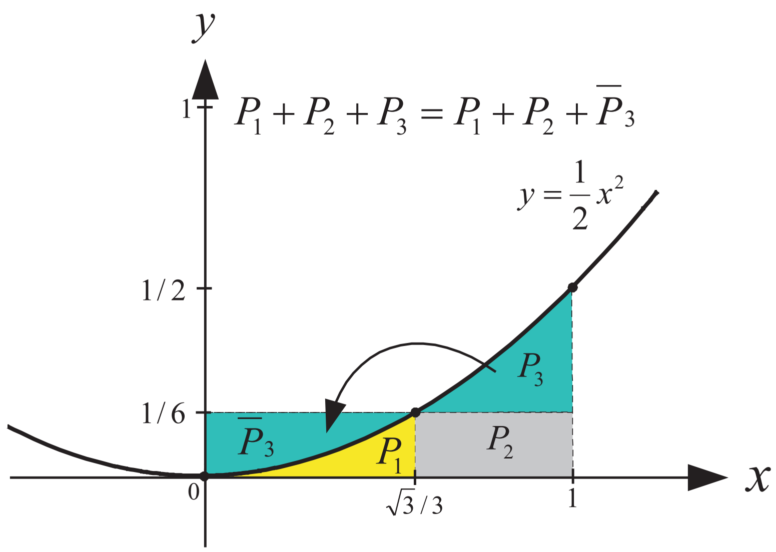
[1]Bernard Riman (1826-1866) - pogledati poglavlje 9.22

i to je srednja vrednost funkcije $f(x)$ dok $x \in [a, b]$. Ako je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, tada je površina ravnog lika omeđenog sa $x = a$, $x = b$, x-osom i $y = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(x_m)\,. \tag{8.4}$$

To znači da je $\int_a^b f(x)\, dx$ jednak površini pravougaonika čije su stranice dužine $b - a$ i $f(x_m)$.

Primer 8.2.1 Odrediti srednju vrednost funkcije $y = x^2/2$ na intervalu $[0, 1]$ (slika 8.8).



Slika 8.8: Srednja vrednost funkcije $y = \dfrac{1}{2}x^2$ na intervalu $x \in [0, 1]$ je $y = \dfrac{1}{6}$.

Rešenje. Srednja vrednost dobija se izračunavanjem

$$f(x_m) = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{2}\, dx}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - 0} = \frac{1}{6}\,.$$

Ako rešimo sada jednačinu $x^2/2 = 1/6$ po $x > 0$, dobijamo da je $x = x_m = \sqrt{3}/3$. Pokazaćemo da su dve zelene oblasti sa slike 8.8 istih površina ($P_3 = \overline{P}_3$) kada uvedemo Njutn-Lajbnicovu formulu.

8.3 Osnovne osobine određenog integrala

Sada ćemo navesti neke od osnovnih osobina određenog integrala. Pretpostavimo da su funkcije $y = f(x)$ i $y = g(x)$ dve integrabilne funkcije na intervalu $[a, b]$. Tada važi:

(i)

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx\,.$$

Ova osobina sledi iz (8.4). Naime, postoji $x_m \in (a,b)$ tako da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_m) = -(a-b)f(x_m) = -\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

čime je dokazana prva osobina.

(*ii*)

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Sledi iz definicije određenog integrala za $a = b$. Naime,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$

jer je $\Delta x = (a-a)/n = 0$.

(*iii*)

$$\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\,, \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Sada je za proizvoljno $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i))\Delta x = \alpha \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(*iv*)

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Za proizvoljno $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \pm \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x \\
&= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

(*v*) Ako je $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Sledi iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \geq 0\,,$$

jer je izraz čija se granična vrednost traži, zapravo proizvod nenegativnih činilaca.

(vi) Ako je $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Pošto je $f(x) \geq g(x)$, tada je $f(x) - g(x) \geq 0$ pa je

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(vii)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Naime, korišćenjem nejednakost trougla (1.3) sledi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x\right| \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x = \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

$(viii)$ Ako $c \in (a,b)$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Naime, neka je interval $[a,b]$ podeljen na n delova, interval $[a,c]$ na n_1 delova, a interval $[c,b]$ na n_2 delova tako da je $n_1 + n_2 = n$. Tada za $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$ i $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{n_1+1, n_1+2, \ldots, n_1+n_2\}$ važi

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{n_1,n_2\to+\infty}\sum_{i=1}^{n_1+n_2} f(\xi_i)\Delta x \\
&= \lim_{n_1\to+\infty}\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i)\Delta x + \lim_{n_2\to+\infty}\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} f(\xi_i)\Delta x \\
&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

8.4 Njutn-Lajbnicova formula

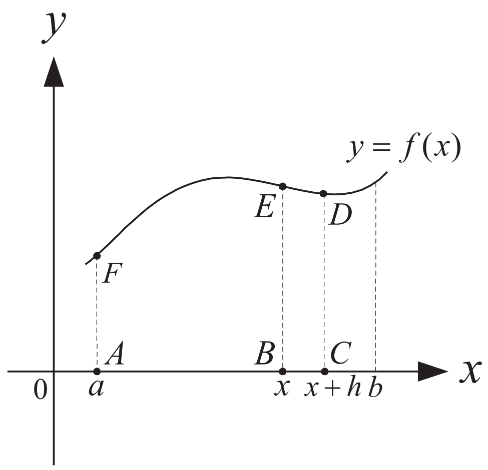
Važna posledica teoreme o srednjoj vrednosti je i Njutn-Lajbnicova formula. Da bismo je izveli, prvo ćemo pokazati da je za neprekidnu funkciju $f(x)$, $x \in [a,b]$,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]\,, \tag{8.5}$$

jedna primitivna funkcija za funkciju $f(x)$, odnosno, da za svako $x \in (a,b)$ važi $G'(x) = f(x)$. Po definiciji prvog izvoda i (8.5) imamo da je

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}\,,$$

gde su i x i $x+h$ iz intervala (a,b) (slika 8.9, $f(x) \geq 0$, $h > 0$).



Slika 8.9: $\int_a^x f(t)\,dt$ - krivolinijski trapez $ABEF$, $\int_a^{x+h} f(t)\,dt$ - krivolinijski trapez $ACDF$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti, postoji tačka $\xi \in (x, x+h)$ tako da važi

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)(x+h-x) = f(\xi)h\,.$$

Kada $h \to 0$, tada i $\xi \in (x, x+h)$ teži x. Tada je

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)h}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(\lim_{h\to 0} \xi) = f(x)\,,$$

gde je korišćena neprekidnost funkcije f u tački x.

Sada, kako se primitivne funkcije razlikuju do na konstantu, neka je $G(x) = F(x) + C$, gde je $F(x)$ još jedna primitivna funkcija za $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, odnosno, $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$. Pokazaćemo da važi Njutn-Lajbnicova formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_a^b\,. \tag{8.6}$$

Na osnovu osobine (ii) određenog integrala važi

$$G(a) = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

i

$$G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)\,.$$

Kako je, na osnovu (8.5),

$$G(b) = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

dobijena je tražena formula.

Primer 8.4.1 Izračunati date integrale.

- $\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}\,.$
- $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2\,.$
- $\int_0^\pi \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0\,.$
- $\int_0^1 (e^x - \sqrt{x})\,dx = \left(e^x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^1 = \left(e - \frac{2}{3}\right) - (1-0) = e - \frac{5}{3}\,.$

Primer 8.4.2 Pokazati da je $P_3 = \overline{P}_3$ sa slike 8.8.

Rešenje. Naime,

$$P_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{54},\ P_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\,,$$

dok je

$$P_3 = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx - P_2 - P_1 = \frac{1}{6} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{54} = \frac{\sqrt{3}}{27}\,.$$

Sada je

$$\overline{P}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{6} - P_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{54} = \frac{\sqrt{3}}{27}\,.$$

8.5 Metod smene i metod parcijalnog integraljenja

8.5.1 Metod smene

Neka je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, odnosno neka važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Na osnovu poglavlja 7.2, znamo da se sledeći integral rešava smenom $t = \phi(x)$, $dt = \phi'(x)\,dx$

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\phi(x)) + C$$

Ako je $x = a$, tada je $t = \phi(a)$, a ako je $x = b$, tada je $t = \phi(b)$. Dakle,

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{\phi(a)}^{\phi(b)} = F(\phi(b)) - F(\phi(a))\,.$$

Primer 8.5.1 Izračunati integral

$$\int_1^4 (x+2)^{2019}\, dx\,.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $t = x+2$, $dt = dx$ i promenimo granice integraljenja $x = 1 \Rightarrow t = 3$ i $x = 4 \Rightarrow t = 6$, pa je

$$\int_1^4 (x+2)^{2019}\, dx = \int_3^6 t^{2019}\, dt = \frac{1}{2020} t^{2020}\big|_3^6 = \frac{6^{2020} - 3^{2020}}{2020} = \frac{3^{2020}(2^{2020}-1)}{2020}\,.$$

Primer 8.5.2 Izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx\,.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $t = 1+x^2$, $dt = 2xdx$ pa je $\frac{dt}{2} = xdx$. Promenimo sada i granice integraljenja $x = 0 \Rightarrow t = 1$ i $x = 1 \Rightarrow t = 2$, pa je

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Primer 8.5.3 Izračunati integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx\,.$$

Rešenje. Napomenimo da je integral neodređen ili da granice nisu simetrične, ne bismo ga mogli izračunati. Početni integral ćemo rastaviti kao

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx\,. \tag{8.7}$$

Kod prvog integrala sa desne strane jednakosti u (8.7) ćemo uvesti smenu $t = -x$, $dt = -dx$. Promenimo sada i granice integraljenja $x = -1 \Rightarrow t = 1$ i $x = 0 \Rightarrow t = 0$, pa je

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx &= -\int_1^0 \frac{1}{(1+t^2)(1+e^{-t})}\, dt = -\int_1^0 \frac{1}{(1+t^2)(1+\frac{1}{e^t})}\, dt \\
&= -\int_1^0 \frac{e^t}{(1+t^2)(e^t+1)}\, dt = \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t^2)(1+e^t)}\, dt\,.
\end{aligned}$$

Kod drugog integrala da desne strane jednakosti u (8.7), samo ćemo umesto x napisati t (zapravo smena bi bila trivijalna $x = t$), pa je tada početni integral jednak

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx &= \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t^2)(1+e^t)}\, dt + \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(1+e^t)}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{e^t+1}{(1+t^2)(1+e^t)}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \operatorname{arctg} t\big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Primer 8.5.4 Izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx\,.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $x = \operatorname{tg} t$ pa je tada

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}\, dt = \left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)\, dt\,.$$

Ako sada zamenimo granice integraljenja $x = 0 \Rightarrow t = 0$ i $x = 1 \Rightarrow t = \pi/4$, imaćemo

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}\left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)\, dt = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} t)\, dt =: I\,.$$

Uvedimo sada još jednu smenu $s = \pi/4 - t$, pa je $ds = -dt$, $t = 0 \Rightarrow s = \pi/4$ i $t = \pi/4 \Rightarrow s = 0$. Dakle,

$$I = -\int_{\pi/4}^0 \ln\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - s\right)\right)\, ds = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - s\right)\right)\, ds\,.$$

Koristeći formulu za $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ datu u poglavlju 2.2.5, imamo da je

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} s}\right)\, ds = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg} s}\right)\, ds.$$

Sada je,

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg} s + 1 - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg} s}\right)\, ds = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} s}\right)\, ds\,.$$

Koristeći osobinu logaritma da je logaritam količnika jednak razlici logaritama, važiće

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln 2\, ds - \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \operatorname{tg} s\right)\, ds = \frac{\pi}{4}\, \ln 2 - I$$

i onda je

$$I = \frac{\pi}{8}\, \ln 2\,.$$

Primer 8.5.5 Izračunati integral

$$\int_0^8 \frac{1}{x - 2\sqrt[3]{x} + 4}\, dx\,.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $t = \sqrt[3]{x}$, tada je $t^3 = x \Rightarrow 3t^2\, dt = dx$ i $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 8 \Rightarrow t = 2$. Sada integral postaje

$$\int_0^2 \frac{3t^2}{t^3 - 2t + 4}\, dt$$

što je integral racionalne funkcije. Sada ćemo imenilac podintegralne funkcije rastaviti na činioce korišćenjem Hornerove sheme. Kandidati za racionalne nule su ± 1, ± 2 i ± 4. Krenućemo od $t = -1$.

1	0	-2	4	r	$t = -1$	
	1	-1	-1	5	$t = -2$	$t = -1$ nije nula polinoma, zanemarujemo dobijene koeficijente
	1	-2	2	0		$P(z) = (t+2)(t^2 - 2t + 2)$

Kako je $t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 > 0$, kvadratna funkcija se ne može rastaviti na činioce u skupu $\mathbb{R}$. Preostalo je da se reši integral (prvo kao neodređeni)

$$\begin{aligned}\int \frac{3t^2}{(t+2)(t^2-2t+2)}\,dt &= \int \left(\frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2-2t+2}\right) dt \\ &= \int \frac{t^2(A+B) + t(-2A+2B+C) + 2A + 2C}{(t+2)(t^2-2t+2)}\,dt\,,\end{aligned}$$

odakle sledi da je $A + B = 3$, $-2A + 2B + C = 0$ i $2A + 2C = 0$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo $(A, B, C) = (6/5, 9/5, -6/5)$. Znači

$$\begin{aligned}\int \frac{3t^2}{(t+2)(t^2-2t+2)}\,dt &= \frac{6}{5}\int \frac{1}{t+2}\,dt + \frac{3}{5}\int \frac{3t-2}{t^2-2t+2}\,dt \\ &= \frac{6}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{5}\,I_1\end{aligned}$$

Integral I_1 rešavamo na sledeći način.

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{3t-2}{(t-1)^2+1}\,dt = \{s = t-1 \Rightarrow ds = dt\} = \int \frac{3s+1}{s^2+1}\,ds \\ &= \int \frac{3s}{s^2+1}\,ds + \int \frac{1}{s^2+1}\,ds = \frac{3}{2}\ln|s^2+1| + \operatorname{arctg} s + C \\ &= \frac{3}{2}\ln|t^2-2t+2| + \operatorname{arctg}(t-1) + C\,.\end{aligned}$$

Dakle

$$\int \frac{3t^2}{(t+2)(t^2-2t+2)}\,dt = \frac{6}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\ln|t^2-2t+2| + \operatorname{arctg}(t-1)\right) + C = F(t)\,,$$

a onda je i

$$\int_0^2 \frac{3t^2}{(t+2)(t^2-2t+2)}\,dt = F(2) - F(0) = \frac{3}{10}(\pi + \ln 16)\,.$$

8.5.2 Metod parcijalnog integraljenja

Formula za parcijalno integraljenje kod određenog integrala je

$$\int_a^b u(x)dv(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)\,dx\,.$$

Primer 8.5.6 Izračunati integral

$$3\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx\,.$$

Rešenje. Biramo $u = \operatorname{arctg} x$ i $dv = x^2\,dx$, pa je $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $v = \frac{x^3}{3}$. Sada je

$$3\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx\right) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx\,.$$

Ovde smo koristili da je $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$. Rešimo sada preostali integral koristeći primer 8.5.2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x\,dx - \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\,.\end{aligned}$$

Dakle, konačno rešenje je

$$3\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Primer 8.5.7 Izračunati integral

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx\,.$$

Rešenje. Kako je $\ln x < 0$ za $0 < x < 1$ i $\ln x > 0$ za $x > 1$, tada je (vidi primer 7.3.5),

$$\begin{aligned}\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx &= -\int_{1/e}^{1} \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = -(x\ln x - x)\big|_{1/e}^{1} + (x\ln x - x)\big|_1^e \\ &= -\left((0-1) - \left(\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right)\right) + (e\ln e - e) - (0-1) = 2 - \frac{2}{e}\,.\end{aligned}$$

Primer 8.5.8 Izračunati integral

$$\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx\,.$$

Rešenje. U granicama integracije, podintegralna funkcija je negativna, tako da očekujemo i negativno rešenje integrala. Rešimo ga kao da je neodređeni integral uvođenjem smene $t = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow dt = x/\sqrt{x^2-1}\,dx$.

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{x}{x^4\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}\,,$$

jer je $t^2 = x^2 - 1$, pa je $x^2 = t^2 + 1$ i $x^4 = (t^2+1)^2$. Poslednji integral je rešen u primeru 7.3.3 za $a = 1$, te je

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t\right) + C\,.$$

Ako vratimo smenu, tada je

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} + \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right) + C = F(x)\,.$$

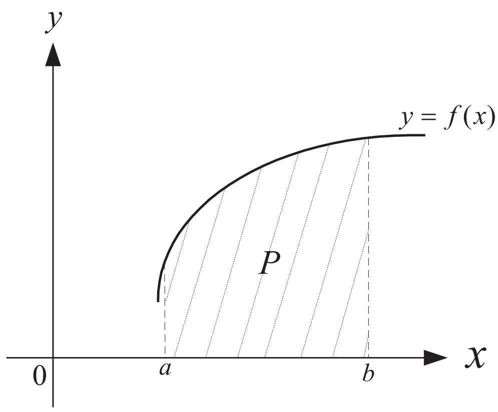
Dakle,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx &= F\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - F(-2)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\frac{4}{3}-1}}{\frac{4}{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4}{3}-1} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{12}\,.\end{aligned}$$

8.6 Izračunavanje površine ravnog lika

I slučaj. Iz prethodnog poglavlja jasno je da je površina ravnog lika koji je ograničen funkcijom $f(x) \geq 0$ sa gornje strane, x-osom sa donje i pravama $x = a$ i $x = b$ (slika 8.10) jednaka

$$P = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

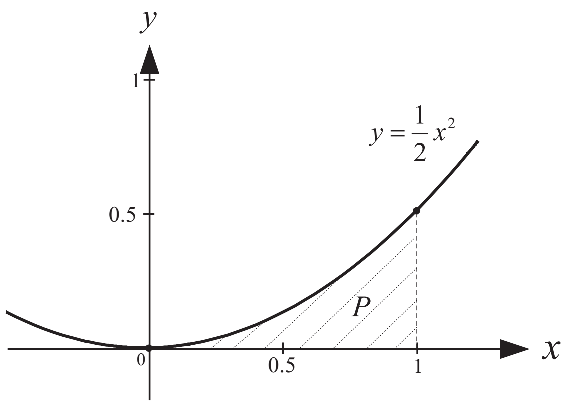


Slika 8.10: Površina ravnog lika ako je grafik funkcije iznad x-ose.

Primer 8.6.1 Korišćenjem Njutn-Lajbnicove formule (8.6), površina ravnog lika sa slike 8.2 je

$$P = \int_1^4 \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)\,dx = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4^2}{2} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 9\,.$$

Primer 8.6.2 Odrediti površinu ravnog lika koji je ograničen funkcijom $f(x) = x^2/2$, pravom $x = 1$ i x-osom (slika 8.11).

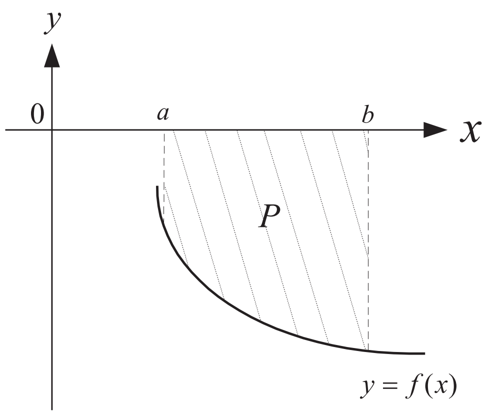


Slika 8.11: Površina ograničena funkcijom $f(x) = x^2/2$, pravom $x = 1$ i x-osom.

Rešenje. Površina se računa kao

$$P = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(1-0) = \frac{1}{6}\,.$$

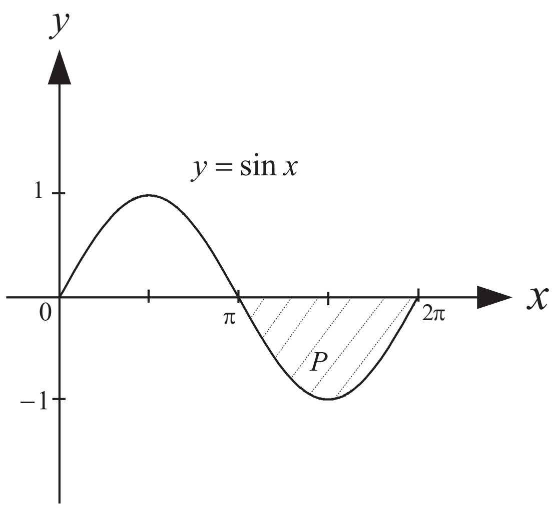
II slučaj. Kada je $f(x) \leq 0$ (slika 8.12), tada je



Slika 8.12: Površina ravnog lika ako je grafik funkcije ispod x-ose.

$$P = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\,.$$

Primer 8.6.3 Izračunati površinu ravnog lika ograničenog funkcijom $f(x) = \sin x$, x-osom, $x \in [\pi, 2\pi]$ (slika 8.13).

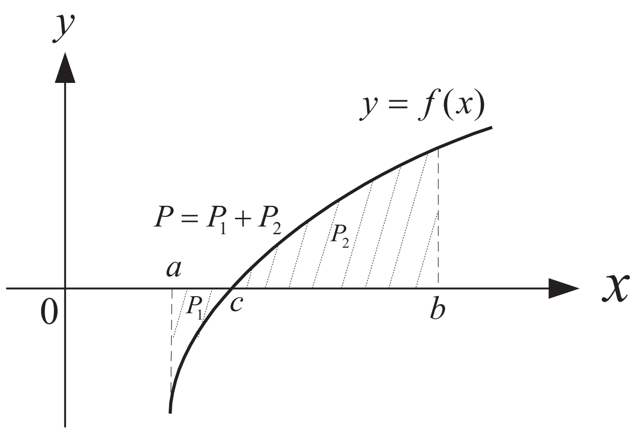


Slika 8.13: Površina ograničena funcijom $f(x) = \sin x$, $x \in [\pi, 2\pi]$ i x-osom.

Rešenje. Površina je

$$P = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = |-(\cos 2\pi - \cos \pi)| = |-(1-(-1))| = |-2| = 2.$$

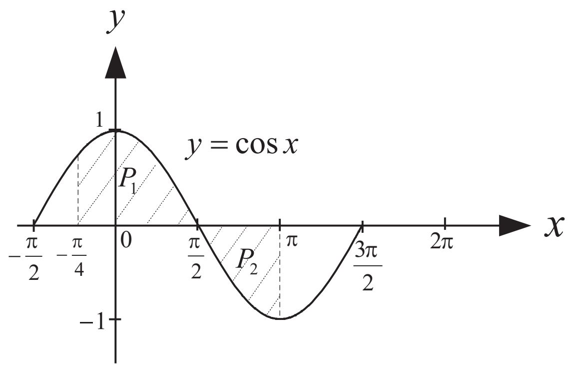
III slučaj. Ako se traži površina kao na slici (slika 8.14), tada je



Slika 8.14: Površina ravnog lika koji se nalazi ispod i iznad x-ose.

$$P = \left| \int_{a}^{c} f(x) \, dx \right| + \int_{c}^{b} f(x) \, dx \,.$$

Primer 8.6.4 Izračunati površinu ravnog lika koja je ograničena funkcijom $f(x) = \cos x$, $x \in [-\pi/4, \pi]$ i x-osom (slika 8.15).

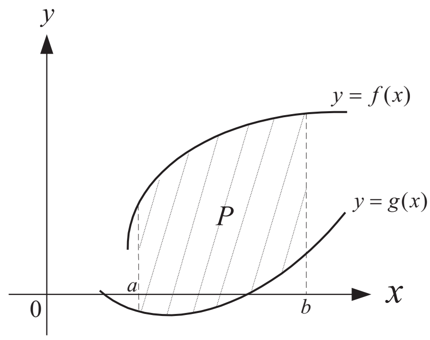


Slika 8.15: Površina ravnog lika funkcije $f(x) = \cos x$ koja je ograničena x-osom dok $x \in [-\pi/4, \pi]$.

Rešenje. Površina je $P = P_1 + P_2$, odnosno

$$P = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos x\,dx + \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx \right| = \sin x\big|_{-\pi/4}^{\pi/2} + \left|\sin x|_{\pi/2}^{\pi}\right| = (1-(-\sqrt{2}/2)) + |0-1| = 2+\sqrt{2}/2\,.$$

IV slučaj. U situaciji kao na slici (slika 8.16), površina je



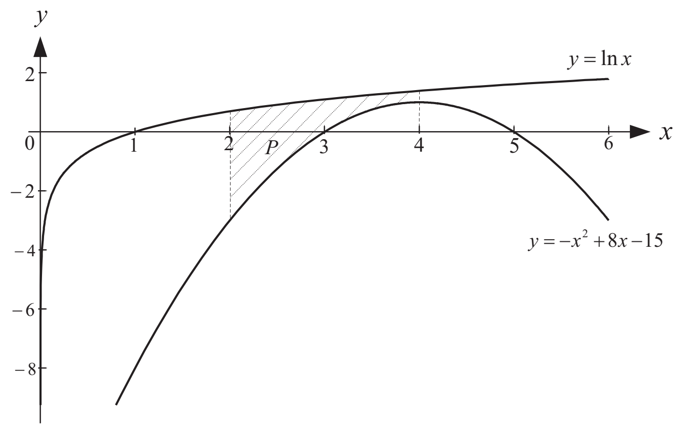
Slika 8.16: Površina ravnog lika između dve funkcije.

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,.$$

Primer 8.6.5 Izračunati površinu ravnog lika ograničenog pravama $x = 2$, $x = 4$ i funkcijama $y = \ln x$ i $y = -x^2 + 8x - 15$ (slika 8.17).

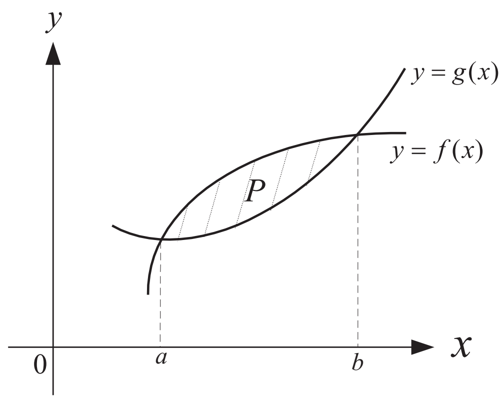
Rešenje. Pre računanja ove površine, podsetimo se da je $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$. Sada je

$$P = \int_2^4 (\ln x - (-x^2 + 8x - 15))\,dx = \left(x\ln x - x + \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x \right)\Big|_2^4 = 6\ln 2 - \frac{4}{3}\,.$$



Slika 8.17: Površina ravnog lika ograničenog funkcijama $y = \ln x$ i $y = -x^2 + 8x - 15$ dok $x \in [2, 4]$.

V slučaj. Površina ravnog lika sa slike 8.18, računa se kao



Slika 8.18: Površina ravnog lika između dve funkcije koje se seku.

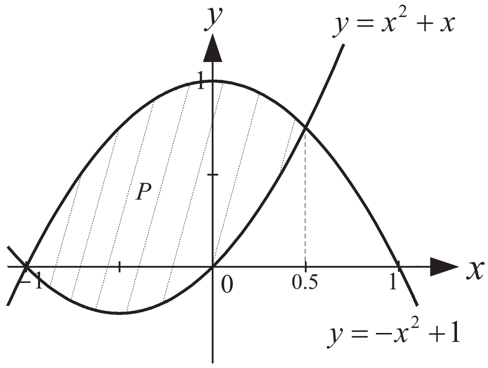
$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\,,$$

gde se a i b dobijaju rešavanjem jednačine $f(x) = g(x)$ po x.

Primer 8.6.6 Izračunati površinu ravnog lika omeđenog funkcijama $y = -x^2 + 1$ i $y = x^2 + x$ (slika 8.19).

Rešenje. Prvo moramo naći granice integraljenja rešavajući jednačinu $-x^2 + 1 = x^2 + x$. Dakle,

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}\,.$$

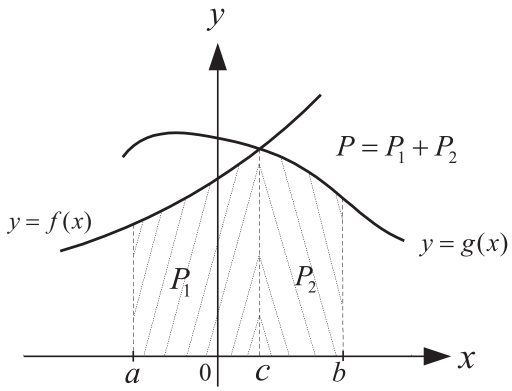


Slika 8.19: Površina ravnog lika između funkcija $y = -x^2 + 1$ i $y = x^2 + x$.

Tada je tražena površina

$$P = \int_{-1}^{1/2} ((-x^2+1) - (x^2+x))\,dx = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)\,dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8}.$$

VI slučaj. Ako je situacija kao na slici (slika 8.20), tada je



Slika 8.20: Površina ravnog lika ograničenog dvema funkcijama i x-osom.

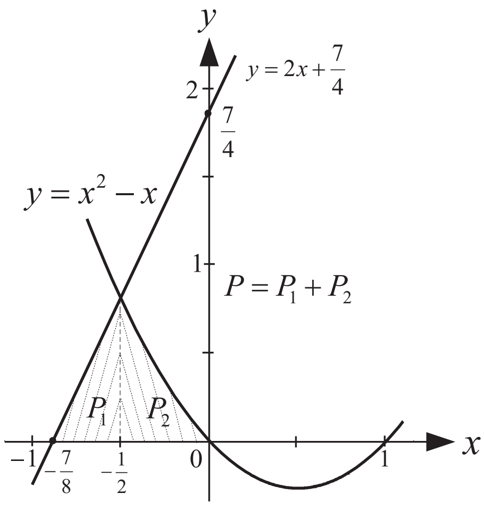
$$P = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx\,,$$

gde se c dobija rešavanjem jednačine $f(x) = g(x)$ po x.

Primer 8.6.7 Odrediti površinu ravnog lika ograničenog x-osom i funkcijama $y = x^2 - x$ i $y = 2x + 7/4$ za $x \leq 0$. (slika 8.21).

Rešenje. Vidimo sa slike 8.21 da se tražena površina mora podeliti na dve površine P_1 i P_2. Odredimo prvo granice integraljenja. Rešavanjem jednačine $x^2 - x = 2x + 7/4$ za $x \leq 0$, dobijamo da je $x = -1/2$. Tada je

$$P_1 = \int_{-7/8}^{-1/2} \left(2x + \frac{7}{4}\right)\,dx = \left(x^2 + \frac{7}{4}x\right)\Big|_{-7/8}^{-1/2} = \frac{9}{64}\,,$$



Slika 8.21: Površina ravnog lika ograničenog funkcijama $y = x^2 - x$ i $y = 2x + 7/4$ i x-osom.

i

$$P_2 = \int_{-1/2}^{0} \left(x^2 - x\right)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1/2}^{0} = \frac{1}{6}\,,$$

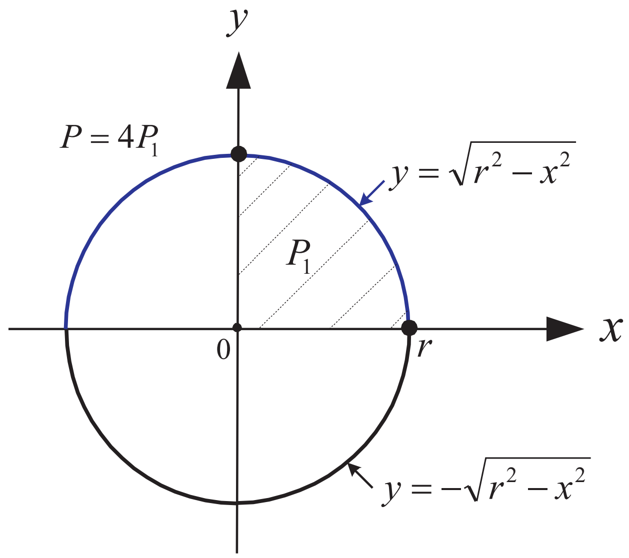
pa je $P = P_1 + P_2 = \frac{59}{192}$.

Primer 8.6.8 Izračunati površinu kruga poluprečnika r koristeći određeni integral ($P = r^2\pi$).

Rešenje. Kako je jednačina centralne kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, tada je tražena funkcija koja ograničava traženu površinu $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Površina kruga je (slika 8.22) $P = 4P_1$, gde je

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r\sin t, \\ dx = r\cos t\, dt \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)} \cdot r\cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2 t} \cdot r\cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\, dt \\
&= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{r^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\right) dt = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{r^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right) = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{r^2}{4}\pi\,.
\end{aligned}$$

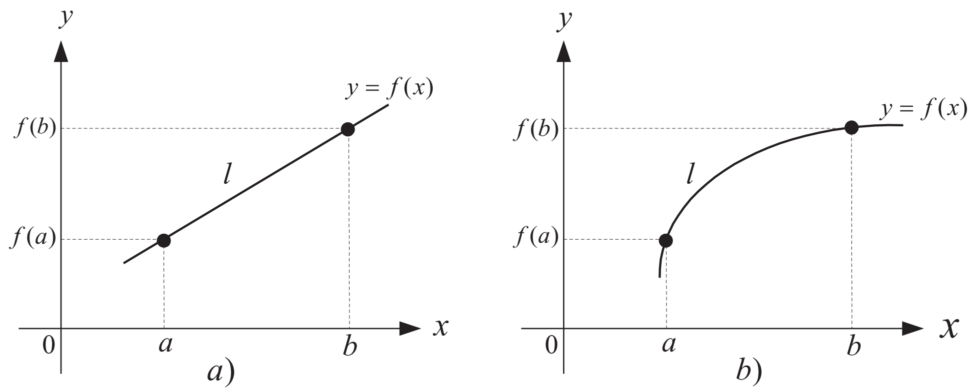
Pri promeni granice integracije koristili smo da je $t = \arcsin\frac{x}{r}$, te je za $x = 0$, $t = \arcsin 0 = 0$ i za $x = r$, $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.



Slika 8.22: Površina četvrtine kruga ograničena funkcijom $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$ i x-osom.

8.7 Izračunavanje dužine luka krive

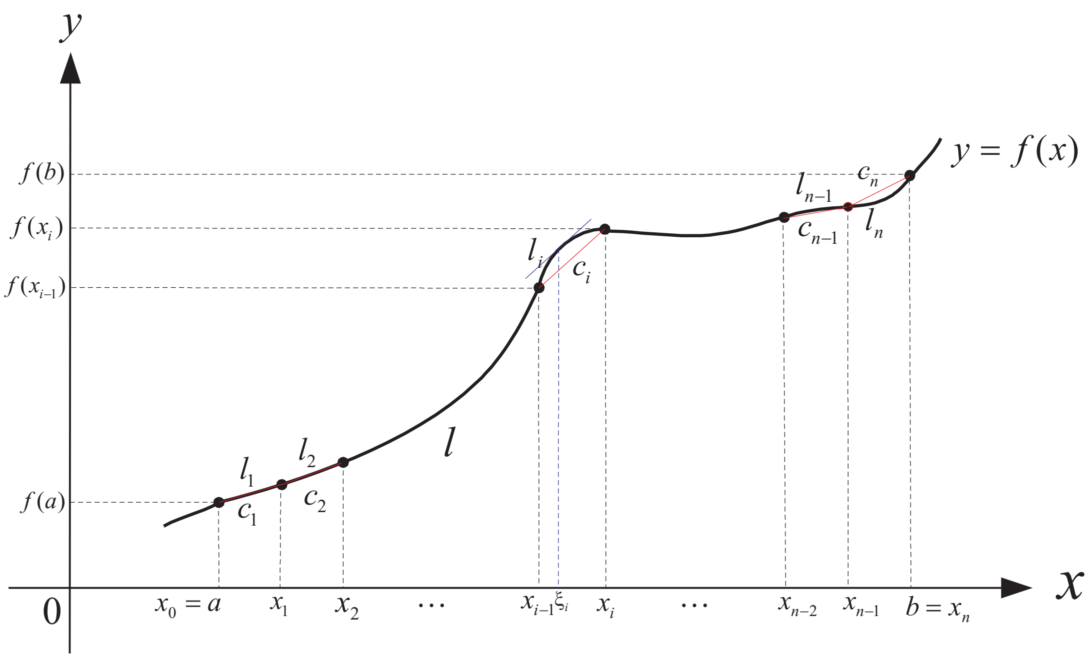
Ako treba da se izračuna dužina putanje od tačke $(a, f(a))$ do $(b, f(b))$ kao na slici 8.23 *a*), tada se lako, korišćenjem Pitagorine[2] teoreme, dolazi do $l = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$. U slučaju kao na slici 8.23 *b*), kada je u pitanju dužina luka neke krive linije, ovakav pristup, naravno, nije tačan.



Slika 8.23: a) Dužina luka prave linije, b) dužina luka krive linije.

Neka funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod na intervalu $[a, b]$. Da bismo izračunali dužinu luka krive određena grafikom funkcije $f(x)$, $x \in [a, b]$, odnosno od tačke $(a, f(a))$ do $(b, f(b))$, potrebno je podeliti interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala koji su dužine $\Delta x = (b - a)/n$, gde je $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\Delta x$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ i $x_n = b$ kao na slici 8.24.

[2]Pitagora (oko 582-481 p.n.e.) - pogledati poglavlje 9.1



Slika 8.24: Dužina luka krive koju čini grafik funkcije $f(x)$, $x \in [a, b]$.

Obeležićemo sa $\Delta x_i = \Delta x = x_i - x_{i-1}$, a sa $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Tada je (slika 8.24)

$$l \approx c_1 + c_2 + \cdots + c_n, \text{ gde je } c_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti (teorema 6.1.3), postoji tačka $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tako da je $f'(\xi_i) = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x}$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \approx l\,.$$

Dužina luka krive je tada

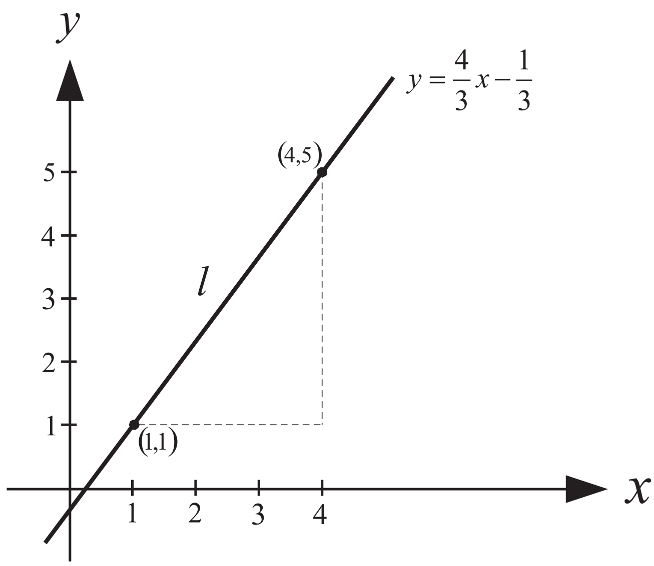
$$l = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \tag{8.8}$$

Poslednji izraz u (8.8) je zapravo Rimanova suma, pa je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,,$$

ako je $dx = \Delta x$.

Primer 8.7.1 Izračunati dužinu ravne putanje od tačke $(1,1)$ do tačke $(4,5)$ (slika 8.25) koristeći određeni integral.



Slika 8.25: Dužina duži od tačke $(1,1)$ do tačke $(4,5)$.

Resenje. Korišćenjem Pitagorine teoreme dobijamo da je dužina $l=5$ (l je hipotenuza trougla čija su temena $(1,1)$, $(4,1)$ i $(4,5)$). Proverimo to pomoću određenog integrala. Prava koja prolazi kroz date tačke je $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$, pa je $f'(x)=4/3$, a $\sqrt{1+(f'(x))^2}=5/3$. Tada je

$$l=\int_1^4 \frac{5}{3}\,dx=\frac{5}{3}x\Big|_1^4=\frac{5}{3}(4-1)=5.$$

Primer 8.7.2 Odrediti dužinu luka krive $y=x^2/2$ za $x\in[0,1]$ (slika 8.26).

Resenje. Jasno je da je $f'(x)=x$, a $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+x^2}$. Izračunajmo sada $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$.

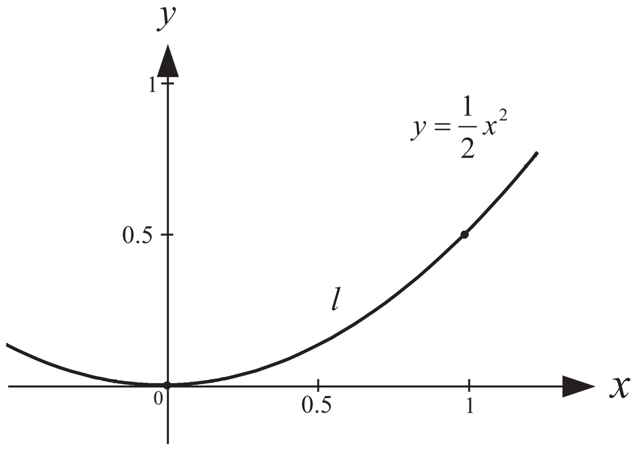
$$I=\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx+\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=I_1+I_2.$$

Sada je $I_1=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$, dok je

$$\begin{aligned}I_2 &= \int\frac{x\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\left\{\begin{array}{ll}u=x, & du=dx\\ dv=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, & v=\sqrt{1+x^2}\end{array}\right\}\\ &= x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}\,dx\\ &= x\sqrt{1+x^2}-I\,.\end{aligned}$$

Znači,

$$I=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+x\sqrt{1+x^2}-I+2C,$$



Slika 8.26: Luk grafika funkcije $y = x^2/2$, $x \in [0, 1]$.

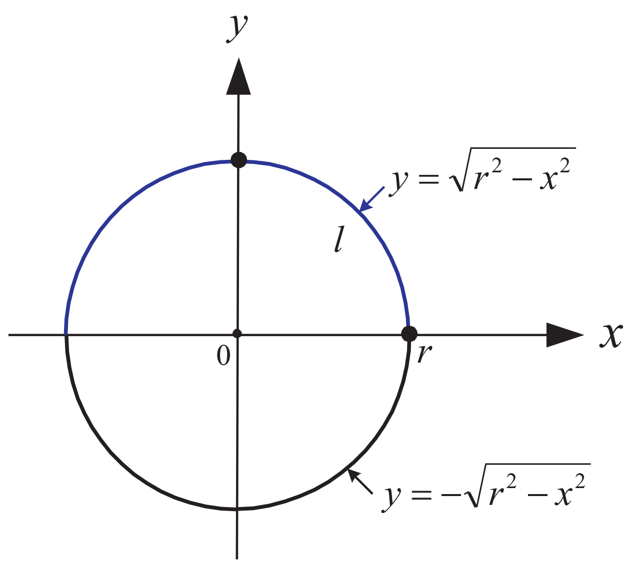
pa je

$$I = \frac{1}{2}\left(\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}\right) + C\,.$$

Tada je tražena dužina luka

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln|1+\sqrt{2}| + \sqrt{2}\right).$$

Primer 8.7.3 Izračunati obim O kružnice poluprečnika r (slika 8.27) koristeći određeni integral ($O = 2r\pi$).



Slika 8.27: Kružnica poluprečnika r, posmatran je grafik funkcije za $x \in [0, r]$.

Resenje. Ponovo, kako je jednačina centralne kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, tada je tražena funkcija čiji ćemo luk meriti $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Možemo obeležiti sa l deo kružnice kada je $x \in [0, r]$ i $f(x) \geq 0$ pa je tada $O = 4l$. Lako se dobija da je $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $(f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2-x^2}$, $1 + (f'(x))^2 = \frac{r^2}{r^2-x^2}$ i $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Tada je

$$l = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = r\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Odavde dobijamo da je $O = 4l = 2r\pi$.

Neka je data kriva $y = f(x)$ jednačinama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, gde su x i y neprekidno diferencijabilne na segmentu $[\alpha, \beta]$. Neka se eliminacijom parametra t iz datih jednakosti dobija jednačina krive u obliku $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Tada se dužina l krive linije od tačke $(a, f(a))$ do tačke $(b, f(b))$ izračunava po formuli

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,.$$

Primer 8.7.4 Zadatak iz prethodnog primera možemo uraditi ako zapišemo jednačinu kružnice u parametarskom obliku

$$x(t) = r\cos t,\ y(t) = r\sin t,\ t \in [0, \pi/2]\,.$$

Tada je $x'(t) = -r\sin t$, $y'(t) = r\cos t$ i $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = r^2$, pa je $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = r$. Dakle,

$$l = \int_0^{\pi/2} r\, dt = r\Big|_0^{\pi/2} = r\,\frac{\pi}{2}\,,$$

što je dobijeno i u prethodnom primeru.

Primer 8.7.5 Izraǔnati dužinu luka krive $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$ ako $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ (slika 8.28).

Rešenje. Pošto je $x'(t) = 2(1 - \cos t)$ i $y'(t) = 2\sin t$, tada je $(x'(t))^2 = 4(1 - \cos t)^2$ i $(x'(t))^2 = 4\sin^2 t$. Znači da je

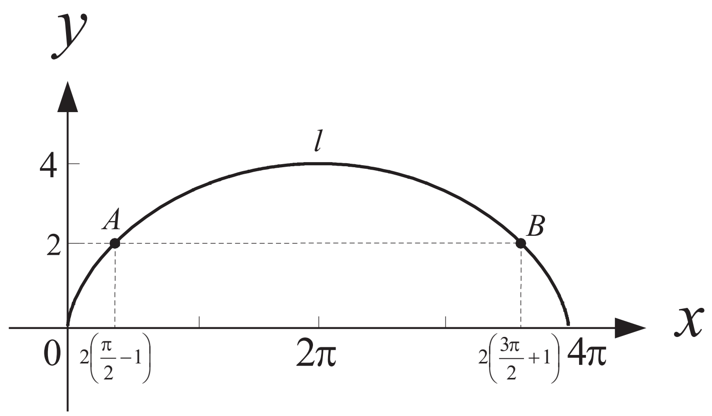
$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{4 - 8\cos t + 4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \sqrt{8 - 8\cos t} = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,.$$

Kako je

$$\int \sqrt{1 - \cos t}\, dt = \int \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = \sqrt{2}\int \sin\frac{t}{2}\, dt = -2\sqrt{2}\cos\frac{t}{2} + C,,$$

onda je

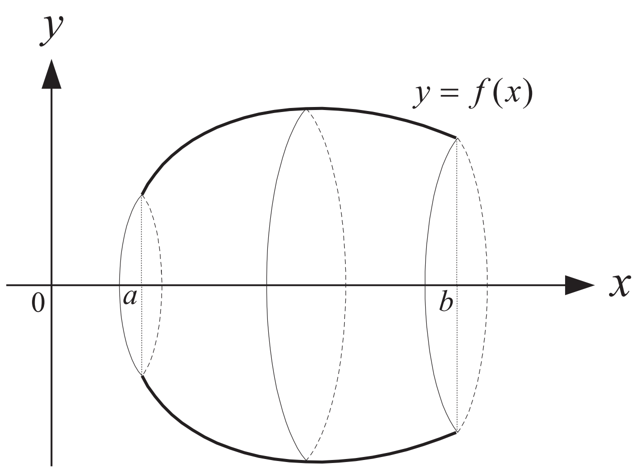
$$l = 2\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2}\cos\frac{t}{2})\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -8\left(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\,.$$



Slika 8.28: Cikloida $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$ za $t \in [0, 2\pi]$ ($0 \le x \le 4\pi$, $0 \le y \le 4$). Dužina luka od tačke A do tačke B je $l = 8\sqrt{2}$.

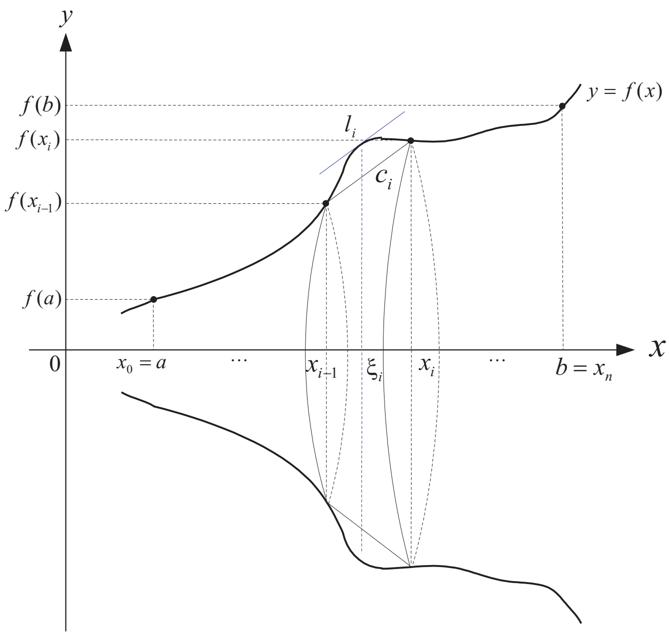
8.8 Izračunavanje površine obrtnog tela

Neka je $f(x)$ pozitivna funkcija na intervalu $[a, b]$ sa neprekidnim prvim izvodom na tom intervalu. Neka se grafik funkcije f rotira oko x-ose dok $x \in [a, b]$ (slika 8.29).



Slika 8.29: Funkcija $f(x)$ rotira oko x-ose formirajući obrtno telo.

Da bi se odredila površina obrtnog tela (bez baza), potrebno je, kao i pri određivanju dužine luka krive iz prethodnog poglavlja, interval $[a, b]$ podeliti na n jednakih podintervala dužine $\Delta x = (b - a)/n = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na svakom od tih intervala uoči se trapez sa osnovicama dužine $f(x_{i-1})$ i $f(x_i)$, i kracima Δx i c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (slika 8.30).



Slika 8.30: i-ta zarubljena kupa nastala rotacijom funkcije $f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ oko x-ose.

Prilikom rotacije oko x-ose, formira se zarubljena kupa. Poznato je da je površina omotača M zarubljene kupe jednaka

$$M = (r_1 + r_2)\pi\, s, \tag{8.9}$$

gde su r_1 i r_2 poluprečnici osnova kupe, a s izvodnica. Dakle, površina omotača zarubljene kupe sa slike 8.30 biće jednaka

$$M_i = (f(x_{i-1}) + f(x_i))\pi\, c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Opet, postoji tačka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tako da je $c_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x$, te je

$$M_i = (f(x_{i-1}) + f(x_i))\pi\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

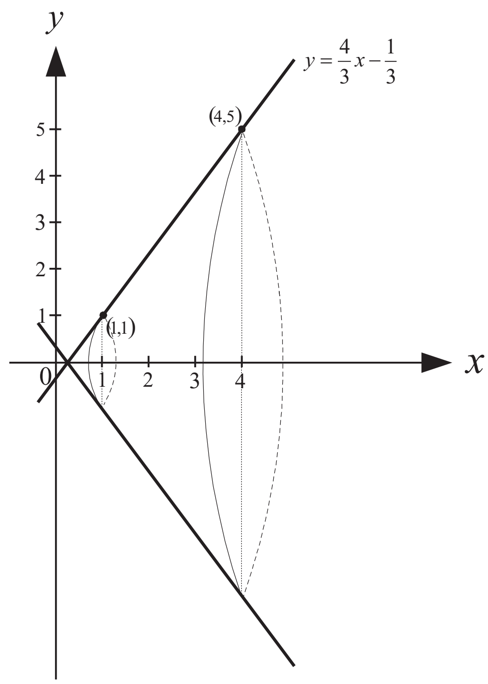
Zaključujemo da bi $\sum_{i=1}^{n} M_i$ bila jedna aproksimacija površine obrtnog tela koja bi postajala sve preciznija kako bi se n povećavalo. Ako pustimo da n teži beskonačnosti, tada dobijamo površinu obrtnog tela nastalog rotacijom funkcije f oko x-ose, odnosno

$$M = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\pi\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x\,.$$

Poslednji izraz u prethodnoj jednakosti je Rimanova suma za funkciju $2f(x)\pi\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Dakle, površina obrnog tela je

$$M = \int_a^b 2f(x)\pi\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,. \tag{8.10}$$

Primer 8.8.1 Izračunajmo sada površinu zarubljene kupe nastale rotacijom funkcije $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ oko x-ose, ako je $x \in [1,4]$ (slika 8.31).



Slika 8.31: Zarubljena kupa nastala rotacijom prave $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$, $x \in [1,4]$, oko x-ose.

Resenje. Jasno je da je, na osnovu formule (8.9), površina tako dobijene zarubljene kupe

$$M = (f(1) + f(4))\pi \cdot 5 = (1+5)\pi \cdot 5 = 30\pi\,.$$

Koristeći određeni integral i da je $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ i $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = 5/3$, imamo da je

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_1^4 \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{3}\,dx = \frac{10}{3}\pi \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3}\right)\Big|_1^4 \\ &= \frac{10}{3}\pi \left(\left(\frac{2\cdot 16}{3} - \frac{1\cdot 4}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) = 30\pi\,. \end{aligned}$$

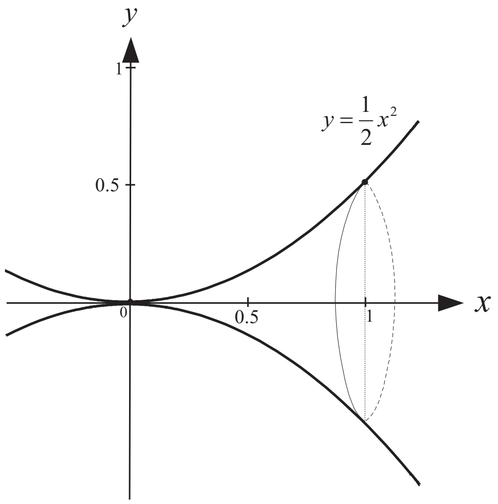
Primer 8.8.2 Odrediti površinu obrtnog tela koje nastaje rotacijom grafika funkcije $y = x^2/2$ ograničene pravama $x = 0$ i $x = 1$ i x-osom (slika 8.32).

Resenje. Posmatramo funkciju $f(x) = x^2/2$, gde je $x \in [0,1]$ i $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + x^2}$. Tada je površina obrtnog tela

$$M = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{2}\sqrt{1 + x^2}\,dx = \pi \int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^2}\,dx\,.$$

Rešimo sada neodređeni integral $I = \int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$.

$$I = \int \frac{x^2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^2 + x^4}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = I_1 + I_2\,.$$



Slika 8.32: Funkcija $y = \frac{1}{2}\,x^2$, $x \in [0,1]$, rotira oko x-ose.

Sada je

$$I_1 = \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,.$$

Prvi integral je rešen u primeru 8.7.2, a drugi je tablični, pa je tada

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C\,. \end{aligned}$$

Rešimo sada I_2.

$$I_2 = \int \frac{x^3\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = x^3, & du = 3x^2dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, & v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\} = x^3\sqrt{1+x^2} - 3\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx,$$

pa je $I_2 = x^3\sqrt{1+x^2} - 3I$. Sada je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + x^3\sqrt{1+x^2} - 3I + 4C\,.$$

Konačno

$$4I = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + x^3\sqrt{1+x^2} + 4C,$$

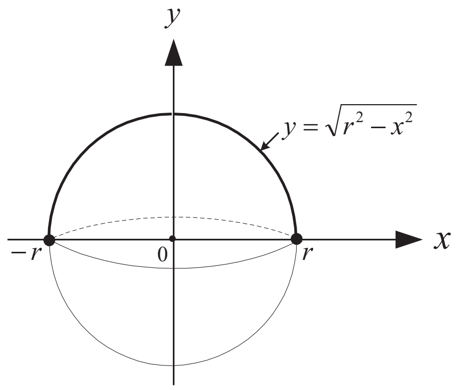
pa je

$$I = \frac{1}{8}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{4}x^3\sqrt{1+x^2} + C\,.$$

Površina omotača posmatranog obrtnog tela je

$$\begin{aligned} M &= \pi\left(\frac{1}{8}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{4}x^3\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\ln(1+\sqrt{2})\right)\pi\,. \end{aligned}$$

Primer 8.8.3 Izračunajmo sada površinu M lopte poluprečnika r koristeći određeni integral ($M = 4r^2\pi$, slika 8.33).



Slika 8.33: Sfera nastala rotacijom funkcije $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, oko x-ose.

Resenje. Kao i u primeru 8.7.3, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ i $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Površina lopte je tada $M = 2M_1$, gde je

$$M_1 = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_0^r r\, dx = 2\pi r x\big|_0^r = 2\pi r(r - 0) = 2\pi r^2 .$$

8.9 Izračunavanje zapremine obrtnog tela

Ako posmatramo sliku 8.30 i ako želimo da odredimo zapreminu tela koje nastaje rotacijom funkcije $f(x) \geq 0$ oko x-ose dok $x \in [a, b]$, tada je potrebno izračunati zapreminu zarubljene kupe sa slike 8.30 koristeći oznake iz poglavlja 8.8. Poznato je da je zapremina zarubljene kupe $V = \pi H(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3$ gde je H visina kupe, a r_1 i r_2 poluprečnici baza. Dakle, zapremina zarubljene kupe sa slike 8.30, čija je visina $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, a poluprečnici baza $f(x_i)$ i $f(x_{i-1})$, je

$$V_i = \pi \Delta x((f(x_{i-1}))^2 + f(x_{i-1})f(x_i) + (f(x_i))^2)/3,\ i = 1, 2, \ldots, n .$$

Zaključujemo da je jedna aproksimacija zapremine obrtnog tela

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{n} ((f(x_{i-1}))^2 + f(x_{i-1})f(x_i) + (f(x_i))^2)\Delta x ,$$

pa je tražena zapremina

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{n} ((f(x_{i-1}))^2 + f(x_{i-1})f(x_i) + (f(x_i))^2)\Delta x .$$

Izraz na desnoj strani prethodne jednakosti je Rimanova suma za funkciju $f^2(x)\pi$, pa je tražena zapremina

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx . \tag{8.11}$$

Primer 8.9.1 Izračunajmo sada zapreminu tela nastalog rotacijom grafika funkcije sa slike 8.31.

Resenje. Jasno je da je

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot (4-1)(f(4)^2 + f(4)f(1) + f(1)^2) = \pi(5^2 + 5 \cdot 1 + 1^2) = 31\pi\,,$$

po formuli za zapreminu zarubljene kupe

$$V = \frac{\pi}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) H\,,$$

gde su r_1 i r_2 poluprečnici osnova, a H visina zarubljene kupe.

Ako želimo da izračunamo zapreminu preko određenog integrala, tada je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{\pi}{9}\int_1^4 (4x-1)^2\,dx = \frac{\pi}{9}\int_1^4 (16x^2 - 8x + 1)\,dx \\ &= \frac{\pi}{9}\left(\frac{16}{3}x^3 - 4x^2 + x\right)\Big|_1^4 dx = \frac{\pi}{9}\left(\frac{844}{3} - \frac{7}{3}\right) = 31\pi\,. \end{aligned}$$

Primer 8.9.2 Zapremina obtrnog tela sa slike 8.32 je

$$V = \pi\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{20}\,.$$

Primer 8.9.3 Zapremina lopte sa slike 8.33 ($V = 4r^3\pi/3$) koristeći određeni integral je

$$V = \pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = \frac{4}{3}r^3\pi\,.$$

8.10 Zadaci za vežbu

1. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x\,dx$. ($I = (e-1)^5/5$)

2. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_1^2 x(\ln x + 1)\,dx$. ($I = 3/4 + \ln 4$)

3. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$. ($I = 1 - \cos 1$)

4. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^6 + 2x^3 + 1}\,dx$. ($I = (-9 + 2\sqrt{3}\,\pi + \ln 64)/54$)

5. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\,dx$. ($I = \left(\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1\right)/2$)

6. Izračunati površinu ograničenu pravama $y = x$, $y = -4x + 20$, $x = 2$ i $y = 0$. ($P = 8$)

7. Izračunati površinu četvorougla $ABCD$ ako je $A(1,1)$, $B(6,2)$, $C(8,6)$ i $D(2,6)$. ($P = 24$)

8. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y = -x^2 + 4x - 3$ i njenim tangentama u tačkama $(0, 3)$ i $(3, 0)$. $(P = 9/4)$

9. Izračunati površinu figure ograničenu parabolama $y = -x^2 + 9$ i $y = x^2 - 10x + 9$. $(P = 125/3)$

10. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y = x^2 - 12x + 36$, $y = x^2$ i pravama $y = 4$ i $y = 0$. $(P = 40/3)$

11. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$. $(P = 1/3)$

12. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y^2 + 8x = 16$ i $y^2 - 24x = 48$. $(P = 32\sqrt{6}/3)$

13. Izračunati površinu ograničenu krivom $y^2 = 2x + 1$ i pravom $y = x - 1$. $(P = 16/3)$

14. Izračunati površinu ograničenu krivama $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i $x = 1$. $(P = e + 1/e - 2)$

15. Izračunati površinu ograničenu krivama $y = e^{3x}$, $y = e^{2x}$ i pravama $y = e^3$ i $y = e^2$. $(P = e^3/3 - e^2/6)$

16. Izračunati površinu ograničenu krivama $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$. $(P = 3 - e)$

17. Izračunati površinu figure koja je ograničenu krivama $y = \cos x$ i pravama $y = 1/2$ i $y = 0$ za $x \in [0, \pi/2]$. $(P = \pi/6 + 1 - \sqrt{3}/2)$

18. Izračunati površinu figure koja je ograničenu krivama $y = \operatorname{tg} x$ i pravama $x = 0$, $y = \sqrt{3}$ i $y = 1$ za $x \in [0, \pi/2]$. $(P = \sqrt{3}\pi/3 - \pi/4 + \ln(1/2) - \ln(\sqrt{2}/2))$

19. Naći površinu koja leži između krive $y = xe^{-x^2/2}$ i njene asimptote ako $x \in [0, 2]$. $(P = 1 - 1/e^2)$

20. Izračunati površinu ograničenu x-osom i krivama $y = \arcsin x$ i $y = \arccos x$. $(P = \sqrt{2} - 1)$

21. Izračunati dužinu luka prave $y = x$ za $x \in [0, 6]$. $(l = 6\sqrt{2})$

22. Izračunati dužinu luka krive $y = x^2$ za $x \in [0, 1]$. $(l = \ln(2 + \sqrt{5}/4) + \sqrt{5}/2)$

23. Izračunati dužinu luka krive $y = \sqrt{x^3}$ za $x \in [0, 5]$. $(l = 335/27)$

24. Izračunati dužinu luka krive $y = (1 - x/3)\sqrt{x}$ između njenih nula. $(l = 2\sqrt{3})$

25. Izračunati dužinu luka krive $y = \ln x$ za $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$. $(l = 1 + 0.5\ln(3/2))$

26. Izračunati dužinu luka krive $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$. $(l = 2)$

27. Izračunati dužinu luka krive $y = \ln\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ za $\ln 2 \le x \le \ln 3$. $(l = \ln(16/9))$

28. Izračunati dužinu luka krive $x(t) = (1 + \sin t)\cos t$, $y(t) = (1 + \sin t)\sin t + 1/4$ ako $t \in [0, 2\pi]$. $(l = 8)$

29. Izračunati dužinu luka krive $x(t) = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y(t) = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$, ako $t \in [0, \pi]$. $(l = \pi^3/3)$

30. Naći dužinu petlje krive $x(t) = t^2$, $y(t) = t - t^3/3$. ($l = 4\sqrt{3}$)

31. Prava $y = x$ rotira oko x-ose za $x \in [1, 3]$. Izračunati površinu obrtnog tela. ($M = 8\sqrt{2}\pi$)

32. Kriva $y = \cos x$ rotira oko x-ose za $x \in [0, \pi/2]$. Odrediti površinu tela koje tako nastaje. ($M = \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$)

33. Izračunati površinu površi nastale rotacijom luka krive $y = x^3/3$ oko x-ose za $x \in [-2, 2]$. ($M = (34\sqrt{17} - 2)\pi/9$)

34. Luk krive $y = e^{-x}$ od $x = 0$ do $x = \ln 2$ rotira oko x-ose. Odrediti tako nastalu površinu. ($M = \pi\left(4\sqrt{2} - \sqrt{5} + \ln\left(68 + 48\sqrt{2}\right) - 2\ln\left(3 + \sqrt{5}\right)\right)/4$)

35. Izračunati površinu koja nastaje rotacijom krive $x^2 + y^2 = 2y$ oko x-ose. ($M = 4\pi^2$)

36. Figura koju obrazuju luci parabola $y = x^2$ i $y^2 = x$ obrće se oko x-ose. Izračunati zapreminu tako dobijenog tela. ($V = 3\pi/10$)

37. Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom oko x-ose krive $y = e^x$ na intervalu $[\ln 2, \ln 7]$. ($V = 45\pi/2$)

38. Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom oko x-ose zatvorene oblasti koju obrazuju krive $y = x^2 + 4$ i prave $x = -1$, $x = 1$ i $y = (x + 5)/2$. ($V = 376\pi/15$)

39. Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom oko x-ose krive $y = \operatorname{ctg} x$ na intervalu $[\pi/4, \pi/2]$. ($V = (4\pi - \pi^2)/4$)

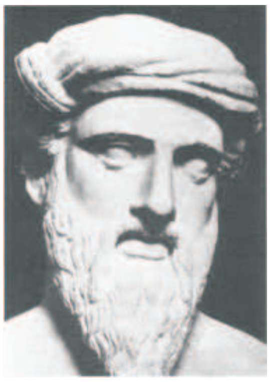
40. Odrediti zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi ograničene pravom $y = 0$ i krivom $y = x^2(1 - x^2)$, oko x-ose. ($V = 16\pi/135$)

GLAVA 9

Veliki matematičari

Naredni sadržaj predstavljaju kratki izvodi iz knjiga Bela ([2]), Agarvala i Sena ([1]), Morisa ([7]) i Petkovića ([12]) koje autor ovog udžbenika toplo preporučuje svima koji žele da zavire u živote ljudi koji su, svako na svoj način, obeležili period u kom su živeli i koji su ostavili svoja dela narednim generacijama. Posebno je zanimljiva prva navedena knjiga u kojoj su opisane „tajne” većine matematičara iz ovog udžbenika.

9.1 Pitagora



Slika 9.1: Pitagora (oko 582-481 p.n.e.)

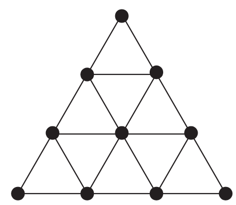
„Iznad svakog oblaka koji pravi senu
je zvezda koja daje svetlo.”
Pitagora

Pitagora, antički matematičar, naučnik, astrononom i filozof, osnivač filozofskog, matematičkog, mističkog i naučnog društva ili zajednice, koja je poznata pod imenom Pitagorejska škola, rođen je oko 582. godine p.n.e. na ostrvu Samos u Grčkoj, jednom od najposećenijih severoistočnih Egejskih ostrva. U to vreme ljudi su bili sujeverni, verovali su u duhove i natprirodne pojave. Religijski kultovi behu popularni u to doba. Njegovi otac (bogati trgovac) i majka hteli su da im sin dobije najbolje moguće obrazovanje. Tokom detinjstva, oboje su imali ogroman uticaj na Pitagorin visoko receptivan um. Uspeli su da mu izgrade karakter koji je zadivljuje ljude više od dve hiljade godina. Danas je najpoznatiji kao tvorac *Pitagorine teoreme* koja je nazvana po njemu. Pitagora je snažno uticao na filozofsku misao i religijska razmatranja u drugoj polovini šestog veka pre nove ere.

Pitagorin prvi učitelj bio je Ferekid sa Sirosa od koga je učio o nauci i filozofiji. Sa njim je ostao u kontaktu sve do Ferekidove smrti. Ubrzo nakon smrti oca, Pitagora je, u dobi od 18 godina, otišao na grčko ostrvo Lezbos gde je učio od Anaksimandra i Talesa. Obojica su imala uticaj na razvoj misli mladog Pitagore. Kada je napunio 23 godine, po preporuci Talesa, odlazi u Memfis (Egipat) da uči sa sveštenicima i tamo ostaje do svoje 44. godine. Tokom boravka, između ostalog, naučio je geometriju. Nakon što je napustio Egipat, odlazi u Malu Aziju obilazeći svako mesto gde je mogao nešto da nauči i susretao se sa svim važnim ličnostima. Vratio se na Samos kada je imao 55 godina i tamo je osnovao školu. Ipak, zbog manjka učenika, preselio su u grad Krotone u južnoj Italiji i tamo osnovao školu u kojoj se, uglavnom, učila matematika, filozofija, astronomija, muzika i njihov odnos sa religijom. Imao je oko 600 učenika (veliki broj iz viših klasa društva), a bilo je čak i žena koje su time kršile zakon koji im zabranjuje odlaske na javne skupove. Među učenicima bila je i njegova buduća žena Teona Krotonska sa kojom se venčao kada je imao 60 godina. Izrodila mu je troje dece. Za Pitagoru, podizanje i vaspitavanje dece bila je velika i sveta odgovornost. Roditelji su tu da obezbede nove naraštaje koji će obožavati Bogove, tvrdio je Pitagora.

Teona je napisala biografiju svoga muža, ali je ona, nažalost, izgubljena. U Pitagorinu školu je došla oko 490. godine p.n.e. kada je škola bila na svom naučnom vrhuncu. Verovalo se da se do mentalnog razvitka dolazi kroz učenje. Sledbenici Pitagore (*Pitagorejci*) bili su poznati po međusobnom poštovanju i odanosti. Pitagora je bio na čelu kulta (specifičnog sistema obožavanja) poznatog kao *tajno bratstvo* koje je obožavalo brojeve, numeričke odnose, jednakosti i nejednakosti. Članovi ovog kulta bili su vezani zakletvom da ne otkrivaju učenja ili tajne škole. Takođe, podelili su matematičke oblasti kojima su se bavili u četiri discipline: apsolutni brojevi (aritmetika), brojevi primenjeni (muzika), magnitude u mirovanju (geometrija) i magnitude u pokretu (astronomija). Karakteristična značka bratstva bila je zvezda pentagram.

Pitagorejci su davali „božanski značaj" većini brojeva do 50. Parni brojevi su smatrani ženskim brojevima i povezivali su ih sa nesrećom. Neparni brojevi bili su muški brojevi, predstavljali su dobrotu i sreću. Svaki broj je identifikovan sa nečim što okružuje čoveka. Broj jedan, *monada*, je osnova nematerijalnog sveta i prosta, poslednja čestica celog svemira. To je i muški i ženski broj, neparan i paran. Predstavljao je početak i kraj svega. *Monada* je isto što i priroda. Broj dva, *dijada*, je isto što i par primarnih suprotnosti (toplo-hladno, razređeno-zgusnuto). Broj tri, *trijada*, bio je prvi pravi broj, predstavljao je sve što je potpuno i savršeno, predstavljao je početak, sredinu i kraj. Takođe je predstavljao prošlost, sadašnjost i budućnost. Broj četiri, *tetrada*, brojni je simbol za osnovne manifestacije prirode, za tzv. četiri osnovna elementa: vodu, vazduh, vatru i zemlju. Broj pet, *pentada*, je jedan od svetih brojeva. Predstavljao je brak jer je zbir prvog ženskog i prvog muškog broja ($2 + 3 = 5$). To je za Grke broj ljubavi, Afroditin broj. Broj šest, *heksada*, bio je prvi savršen broj jer se može dobiti kao $1 + 2 + 3 = 6$ i kao $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, pa predstavlja zdravlje i ravnotežu. Nastaje množenjem prvog ženskog i prvog muškog broja ($2 \cdot 3 = 6$). Broj sedam, *heptada*, donosi red u prirodi. Sedam je Mesečevih faza, sedam je delova tela (glava, vrat, dve ruke, torzo, dve noge). Glava ima sedam „šupljina”, sedam je broj dana u nedelji. Broj osam, *oktada*, bio je značajan jer je to prvi broj koji se može napisati kao kub nekog prirodnog broja ($8 = 2^3$) i povezuje se sa sigurnošću, postojanošću i sa tim da je sve u svemiru izbalansirano i regulisano. On je izvor svega. Simbol je trajnog prijateljstva. Broj devet, *nonada*, zvao se „*onaj što donosi plodove*” jer je to broj muze plesa i pokreta Terpsihore, a i zbog devet meseci trajanja trudnoće. Broj deset, *dekada*, bio je najveći od svih brojeva. Sam sadrži prva četiri broja ($10 = 1 + 2 + 3 + 4$). Pomoću njega se može formirati *tetraktis*, posebna figura na kojoj je zasnivana kosmička simbolika brojeva u pitagorejskom učenju (slika 9.2).

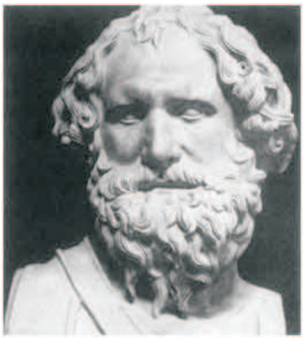


Slika 9.2: Tetraktis.

Teme tog trougla je *monada*, iz koje se rađa *dijada* (dve tačke u drugom redu), treći red čini *trijadu*, a četvrti red i sve stranice, *tetradu*. Zbir tačaka po redovima je $1+2+3+4 = 10$. Figura se može nadole neograničeno nastaviti i, kad god se zaustavimo, broj tačaka u poslednjem redu pokazivaće na kojem smo se broju zaustavili, a ukupan broj tačaka tako sastavljene figure davaće zbir prirodnih brojeva koji su njome obuhvaćeni. Pitagorejci su smatrali da *tetraktis* predstavlja veru, univerzum, nebo, pa čak i samog Boga.

Politički gledano, Pitagorejci su bili aristokratsko-konzervativni, bili su više puta progonjeni, domovi su im bili spaljivani. Tada već vremešni Pitagora, bio je primoran da se preseli u Metapontiju gde je bio duboko poštovan. Tu i umire oko 481. godine p.n.e.

9.2 Arhimed



Slika 9.3: Arhimed (287-212 p.n.e.)

... slava to beše Grčka
A veličina to beše Rim.
E.A. Po

Arhimed je bio starogrčki matematičar, fizičar i astronom iz Sirakuze, na Siciliji. Iako se ne zna mnogo podataka o njegovom životu, on se smatra najvećim matematičarem antike i jednim od najvećih naučnika do danas. Postavio je temelje infinitezimalnog računa i analize primenjujući koncept infinitezimalnosti i metodu iscrpljivanja. Bavio se preciznim dokazivanjem teorema u geometriji, uključujući određivanje površine kruga, površine i zapremine sfere, kao i površine određene parabolom. Takođe, otkrio je opšte metode za izračunavanje površina nepravilnih ravnih tela i zapremina tela koja su ograničena nepravilnom površinom. Dao je metod za izračunavanje broja π i utvrdio da se broj π nalazi između brojeva $3\frac{1}{7}$ i $3\frac{7}{71}$. U mehanici je otkrio zakone poluga i to primenio za izračunavanje površina i centara gravitacije kod nekoliko ravnih površina i čvrstih tela raznih vrsta.

Kada je otkrio da plivajuće telo gubi na težini onoliko koliko je teška istisnuta tečnost, Arhimed je istrčao nag iz kupatila na ulicu vičući „Eureka! Eureka!" („Otkrio sam, otkrio sam!"). Tako je on pronašao prvi zakon hidrostatike. U pitanju je bilo rešenje problema specifične težine krune za kralja Hijerona. Arhimed je dobio zadatak da otkrije da li su zlatari prevarili kralja i zamenili deo zlata srebrom. Prema priči, Arhimed je dugo razmišljao, ali bez rezultata, sve dok slučajno nije primetio da su, kada uđe u kadu punu vode, istisnuta količina vode i umanjenje njegove težine usko povezani.

Arhimeda je mačem ubio rimski vojnik koji je nakon osvajanja Sirakuze, po jednoj priči, stao na Arhimedove crteže po pesku nakon čega mu je stari geometar rekao: „Ne gazi moje krugove!". Prema drugoj priči, Arhimed je odbio da pođe sa rimskim vojnikom dok ne reši problem koji ga je mučio.

9.3 Leonardo Pisano (Fibonacci)

Slika 9.4: Leonardo Pisano (Fibonači) (1170-1250)

Kakav bi to život bio bez aritmetike
nego potpuni, pravi horor.
S. Smit

Fibonači je rođen oko 1170. godine u Pizi, Italija. Živeo je u Bugiji, luci na severu Afrike smeštenoj istočno od Alžira, gde je stekao osnovno obrazovanje. To mu je omogućilo da se upo-zna sa arapskom aritmetikom i algebrom. U Bugiji se, praveći društvo svome ocu, poslovnom čoveku, susretao sa carinicima i trgovcima od kojih je imao prilike da vidi kako rade sa različitim numeričkim sistemima i aritmetičkim operacijama, kao i da ih međusobno upoređuje. Tokom života imao je priliku da poseti mediteranske zemlje, uključujući Grčku, Egipat i Siriju. Posmatrao je cene ispisane arapskim brojevima kao i način na koji ih trgovci sabiraju koristeći abakus.

Vrativši se u Pizu, Fibonači je 1202. godine objavio „*Knjigu o računanju*" u kojoj je predstavio novi brojevni sistem tj. arapske brojeve umesto rimskih koji su se još koristili u Evropi. U knjizi je postavio i rešio problem u vezi sa rastom broja zečeva na farmi. Tako i nastaje niz 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... kojeg, sredinom XIX veka, francuski matematičar Edvard Lukas (1843-1891) naziva *Fibonačijev niz.*

Naime, Fibonači je želeo da izračuna kako će se uvećavati populacija zečeva koji žive na jednom polju. Zamislio je da je u polje pušten par novorođenih zečeva - jedan mužjak i jedna ženka. Kada dostignu uzrast od mesec dana, oni se pare, i na kraju drugog meseca se razmnože tako da izrode još jedan par zečeva, mužjaka i ženku. Fibonači je pretpostavio da zečevi nikad ne uginu i da ženka svakog meseca okoti dva mladunca, mužjaka i ženku. Pitanje je koliko će parova zečeva biti na ovom polju po isteku prve godine? Po isteku prvog meseca, naš par zečeva taman je stasao za parenje, ali se ženka još nije okotila i na polju su i dalje samo dva zeca, odnosno jedan par. Na kraju drugog meseca, ženka je okotila mužjaka i ženku, pa sada imamo dva para zečeva. Na kraju trećeg meseca, mama zečica ponovo je okotila par zečeva, a njena ćerka ima mesec dana i spremna je za parenje. Sada imamo tri para zečeva. Na kraju četvrtog meseca, najstarija ženka ponovo je okotila par zečeva. Njena najstarija ćerka takođe je okotila par zečeva. Mlađa ćerka je napunila mesec dana i tek je statsala za parenje. Imamo ukupno pet parova zečeva. Populacija zečeva na polju raste ovim tempom: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... a svaki sledeći član niza jednak je zbiru prethodna dva. Dakle, na kraju jedne godine biće 233 para zečeva. Članovi Fibonačijevog niza zadovoljavaju rekurentnu formulu

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,, \quad n \geq 3 \quad F_1 = F_2 = 1\,,$$

pa je eksplicitna formula za n-ti član niza, $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) .$$

Za količnik dva susedna člana niza važi da teži zlatnom preseku kada $n \to +\infty$, odnosno

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Matematički časopis „*The Fibonacci Quarterly*" osnovan je 1963. godine i njegov fokus je na radovima koji imaju oslonac na Fibonačijev niz. Niz se pojavljuje u mnogim sferama matematike kao što su teorija optimizacije i analiza algoritama, a takođe se pojavljuje i u fizici, hemiji, biologiji, arhitekturi, pa čak i u poeziji i muzici.

9.4 Ludolph van Ceulen

Slika 9.5: Ludolf van Cojlen (1540-1610)

„Ako je prečnik kruga 1
tada je obim veći od
$3\frac{14159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000}$
a manji od
$3\frac{14159265358979323846264338327950289}{100000000000000000000000000000000}$.”

Sa nadgrobne ploče...

Ludolf van Cojlen bio je holandski matematičar nemačkog porekla. Iako rođen u Nemačkoj (28. januara 1540. godine), tokom rimokatoličke inkvizicije emigrirao je u Holandiju, kao i mnogi njegovi sunarodnici. Prešao je u Delft, gde je predavao mačevanje i matematiku. U Inženjerskoj školi Univerziteta u Lajdenu 1600. godine postavljen je za prvog profesora matematike.

Proveo je skoro trećinu svog života računajući broj π na što veći broj decimala. Koristio je metod koji se nije mnogo razlikovao od onog koji je opisao i primenio Arhimed 1800 godina ranije. U knjizi „*Van den Cirkel*” („*O krugu*”) objavio je vrednost broja π sa 20 decimala, do tada najveći broj decimala koji je bio određen. Nešto kasnije proširuje na 35 decimala. Zbog takve upornosti i doprinosu akumulaciji znanja o ovom broju, broj π je nazvan *Ludolfov broj*. Ideja je bila da se obim pravilnog n-tougla oko kojeg je opisan krug prečnika 1 približava broju π kako se n povećava, jer je obim takvog kruga baš π. Za račun je koristio mnogougao sa 2^{62} stranice.

Broj π se danas široko primenjuje u matematici i fizici. Oznaka za broj π potiče od grčke reči *perimetar* što znači: *meriti okolo*. U matematiku ga je uveo Vilijam Džouns, a popularizovao ga je Leonard Ojler. Broj π ima beskonačno mnogo decimala i iracionalan je broj. Definiše se kao odnos obima i prečnika kruga.

9.5 René Descartes

Slika 9.6: Rene Dekart (1596-1650)

Analitička geometrija je Dekarta učinila
besmrtnim i ona predstavlja najveći korak
koji je ikada učinjen u razvitku nauke.
Dž.S. Mil

Rene Dekart, francuski matematičar, naučnik i filozof, smatra se osnivačem savremene filozofije. Za njega se može reći da je bio džentlmen, vojnik i matematičar. Kroz ceo život su se provlačile njegove reči „*Ja želim samo mir i odmor.*". Često je taj mir nalazio i u vojničkim logorima, čeznuo je za odmorom i razmišljanjem u samoći, daleko od znatiželjnih i nametljivih prijatelja. Rodio se 31. marta 1596. godine u dovoljno imućnoj i uglednoj porodici. Otac mu je bio advokat i sudija, pa nije imao mnogo vremena za porodicu. Majka mu je umrla godinu dana posle njegovog rođenja, pa su njega, brata i sestru podizali baka i deda. Zahvaljujući upravo dedi, Dekart se od malih nogu upoznavao sa osnovama nauke i filozofije. Godine u kojima je živeo Dekart bile su, bez sumnje, veliki intelektualni periodi u istoriji čovečanstva. Ferma i Paskal bili su njegovi savremenici u matematici; Šekspir je umro kada je Dekartu bilo dvadeset godina; Dekart je za osam godina nadživeo Galileja, a Njutn je imao osam godina kada je Dekart umro.

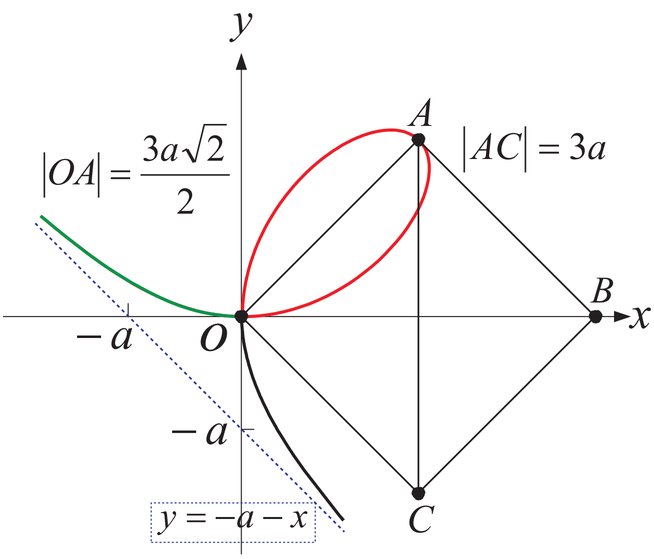
Zbog Dekartvog krhkog zdravlja, otac ga nije terao da uči, ali je Dekart sam učio, i kada je napunio osam godina, otac ga upisuje u školu, gde upravnik, uvidevši da je dečak zaista slabog zdravlja, dozvoljava Dekartu da ostane ujutru u krevetu dokle god hoće. Koristio je to za razmišljanje iz kog su nastale filozofske i matematičke misli. Poznata je Dekartova izreka „*Cogito ergo sum.*" („*Mislim, dakle jesam (postojim).*").

U jednom periodu života, nakon osamnaeste godine, kada je bio razočaran slabim napretkom na studijama, iako je uložio mnogo truda, odlučio je da vidi svet. Kada bi mu to dosadilo, odlazio bi u rat, a kada bi mu i to dosadilo, opet bi odlazio u samoću. Sve što je sakupio, zajedno sa svojim pronalascima, uvrstio je u veliku raspravu „*Le Monde*" („*Svet*") 1634. godine, ali se bojao da je objavi zbog osude crkve jer je, kao i Galilej, bio pobornik Kopernikovog heliocentričnog sistema. Zbog toga je odlučio da rasprava bude objavljena nakon njegove smrti.

Dana 8. juna 1637. godine objavio je delo „*Discours de la Méthode*" („*Rasprava o metodi*") na francuskom jeziku, želeći da dopre do što većeg broja ljudi, i veoma brzo postaje slavan. To je dan kada je na svet došla *Analitička geometrija*. Od jeseni 1641. boravi u malom selu blizu Haga u Holandiji. Tu je boravila i veoma učena, prognana češka princeza Elizabeta sa svojom majkom. Znala je šest jezika, pročitala je mnogo literature i počela da proučava matematiku. Ona je postala omiljena Dekartova učenica, a posle i prijateljica.

U septembru 1649. Dekart je nerado napustio Amsterdam da bi radio kao učitelj kraljici Švedske, Kristini. U trenutku kada je Dekart došao na njen dvor ona je imala 23 godine, a već 17 godina nalazila se na prestolu. Spavala je samo pet sati dnevno i živela u hladnim prostorijama poput Snežne kraljice. U pismima svojoj prijateljici Elizabeti, Dekart se žalio na svoj život koji nikako nije uspevao da sredi. Želeo je da ga kraljica otera sa dvora, ali to njoj nije padalo na pamet. Zima 1649-50 bila je izuzetno jaka, a kraljica, iz njoj poznatih razloga, nije dozvoljavala da se naloži vatra u biblioteci, gde ju je Dekart podučavao. Nakon što je jednog svog prijatelja izlečio od upale pluća, Rene Dekart se ubrzo i sam razboleo i umro usled komplikacija uzrokovanih zapaljenjem pluća.

Dekartovi doprinosi u matematici su: upotreba pravougaonog koordinatnog sistema (Dekartov koordinatni sistem), uvođenje pojma promenljive veličine (varijable), svođenje geometrijskih problema na algebarske i osnivanje analitičke geometrije, prave i krive dobijaju algebarske izraze i tako se ispituju. Među prvima je uočio da važi osnovna teorema algebre, znao je za Ojlerovu formulu, a algebarska kriva trećeg reda ($x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $3a$ je dužina dijagonale kvadrata čija je stranica jednaka najvećoj dužini petlje - slika 9.7) nosi ime *Dekartov list*.



Slika 9.7: Dekartov list, parametarski oblik: $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$. Levo krilo (zelena boja) $t \in (-1, 0)$, petlja (crvena boja) $t \in [0, +\infty)$, desno krilo (crna boja) $t \in (-\infty, -1)$.

9.6 Pierre de Fermat

Slika 9.8: Pjer de Ferma (1601-1665)

„Otkrio sam veoma veliki broj izvanredno lepih teorema."
P. de Ferma

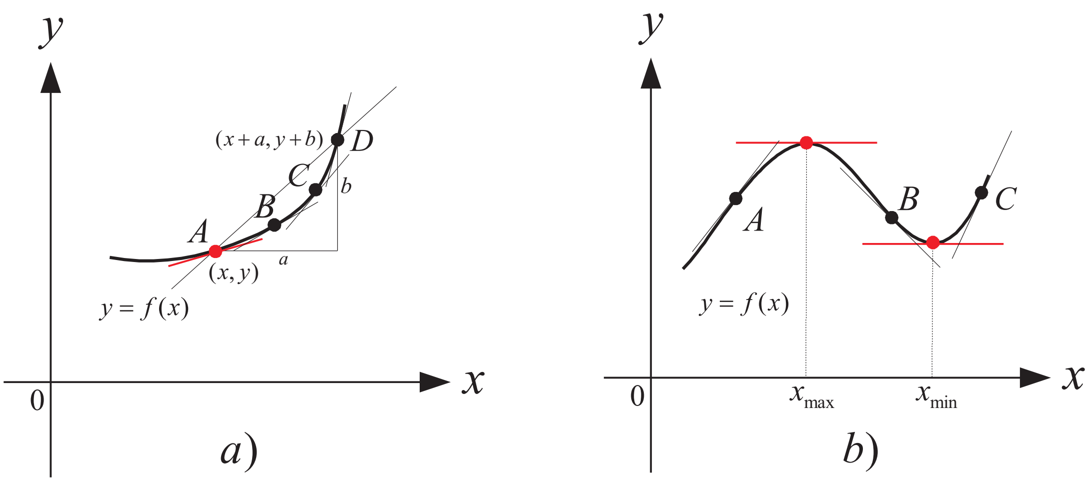
Ako izuzmemo Njutna, koji je trećinu života proveo u osamnaestom veku, malo je onih koji bi negirali tvrdnju da je Pjer de Ferma bio najveći matematičar sedamnaestog veka. Njega je više privlačila čista matematika, mada je dao značajne radove u primeni matematike u nauci, naročito u optici. I Dekart i Ferma su, potputno nezavisno jedan od drugog, pronašli analitičku geometriju, a potpuno sam je utemeljio teoriju brojeva.

Život mu je bio miran i bez uzbuđenja što mu je veoma pogodovalo. Rođen je 17. avgusta 1601. godine u Bomon de Lomanju u Francuskoj, od oca trgovca kožom i majke iz porodice pravnika. Sa školovanjem je počeo kod kuće, a kasnije obrazovanje stekao je u Tuluzu gde je pripremao magistraturu.

Udeo Ferma u razvijanju diferencijalnog računa prikazan je na slici 9.9. Ako uočimo dve tačke na neprekidnoj funkciji kao na slici 9.9 a), i ako pomeramo tačku D ka tački A, tada će tangente u tim tačkama na grafiku funkcije f da teže graničnoj tangenti u tački A. Ugao koji će zaklapati tangenta grafika funkcije u tački A biće granična vrednost od b/a kada se D približava A. Sa druge strane (slika 9.9 b)), ako posmatramo nagibe tangenti grafika funkcije od tačke A do tačke B, vidimo da će u jednom momentu taj nagib biti jednak nuli (tangenta je paralelna sa x-osom), a isto važi ako posmatramo nagibe tangenti od B do C. U tačkama kada je tangenta paralelna sa x-osom, funkcija će imati minimum ili maksimum.

Najveći Fermaov doprinos bio je u takozvanoj „*teoriji brojeva*" ili „*aritmetici*". Uvodi termin prost pozitivan broj i kaže da je to svaki broj koji je deljiv samo sa brojem 1 i sa samim sobom bez ostatka. Na primer 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 i tako dalje. Kod niza $2^{2^n}+1$ za $n = 0,1,2,3,4,5,6,\ldots$ čiji su članovi $3,5,17,257,65537,4294967297,18446744073709551617,\ldots$ Ferma je pogrešno zaključio da su svi članovi tog niza prosti brojevi (prvih 5 jesu), ali šesti i sedmi nisu jer su deljivi sa 641 i 274177, redom. Članovi ovog niza nazivaju se *Fermaovi brojevi.*

Naredno Fermaovo otkriće glasi ako je n ceo broj i p bilo koji prost broj, tada je broj $n^p - n$ deljiv sa p. Ferma ovo nije dokazao, već je to prvi uradio Lajbnic 1683. godine, tvrdeći da je dokaz znao i ranije.



Slika 9.9: a) Granična tangenta u tački A kada $a, b \to 0$, b) Tangenta je paralelna sa x-osom u slučaju ekstremnih vrednosti.

Dalje, Ferma je otkrio da se svaki prost broj oblika $4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ može zapisati kao zbir kvadrata dva prirodna broja. Recimo, za $n = 1$ broj $5 = 1^2 + 2^2$ ili za $n = 3$ broj $13 = 2^2 + 3^2$, itd. Ni za ovu teoremu Ferma nije ostavio dokaz, već je to Ojler dokazao 1749. godine, nakon sedam godina napornog rada.

Sledeći korak bilo je tvrđenje da jednačina $y^3 = x^2+2$ ima samo jedno rešenje $(x, y) = (5, 3)$ u skupu celih brojeva i niti jedno više. Dokaz nije objavio, ali je on ipak pronađen mnogo godina nakon njegove smrti (u pitanju je bio Fermaov dokaz). Ferma je dokazao i da je nemoguće rešiti jednačinu $x^4+y^4 = z^4$ u skupu racionalnih brojeva. Ferma je tvrdio da je imao dokaz da se jednačina $x^n+y^n = z^n$ ne može rešiti u skupu $\mathbb{Z}$ ako je n prirodan broj veći od dva, ali ga nije naveo jer nije bilo mesta (margine papira su mu bile preuske). Ipak, bez obzira na to, u narednih 357. godina dokaz nije pronađen. Priča o dokazu je veoma zanimljiva. Endru Vajls sa Univerziteta u Pristonu (Engleska) proveo je sedam godina razrađujući sve detalje dokaza samostalno i to u apsolutnoj tajnosti. U junu 1993. godine objavio je dokaz na tri predavanja u Kembridžu zapanjivši slušaoce brojem ideja i konstrukcija koje je koristio. Ipak, detaljnijom proverom, pronađena je ozbiljna greška koja je oborila prvobitan dokaz. Zajedno sa svojim studentom Ričardom Tejlorom, godinu dana je potrošio na korekciju dokaza. Konačno, 1995. godine dokaz je objavljen u časopisu „*Annals of Mathematics*".

Veliki aritmetičar Gaus nije se slagao sa mišljenjem da je Ferma bio najveći aritmetičar u istoriji, ali drugi jesu.

9.7 Isaac Newton

Slika 9.10: Isak Njutn (1642-1727)

„Ne znam kako ja izgledam ljudima,
ali sam sebi izgledam kao dečak
koji se igra na obali mora,
i zabavljam se sam sa sobom,
pronašavši s vremena na vreme
manji oblutak ili lepu školjku,
dok se veliki okean istine
čitav pruža neotkriven preda mnom."

I. Njutn

Rođen je na Božić 1642. godine, u godini kada je umro Galilej, u siromašnoj porodici u okrugu Linkoln u Engleskoj. Njutnov otac umro je pre prevremenog Isakovog rođenja. Njutn je zbog toga je bio slab i mršav i nije bilo sigurno da li će preživeti. Majka mu je bila marljiva i sposobna i nakon njene udaje za drugog čoveka, Njutn je odveden kod bake da ona brine o njemu. Izbegavao je grube igre svojih vršnjaka i imao je vremena za vlastitu razonodu koja se sastojala u pronalascima (mehanička lutka sa fenjerima koja je po noći plašila seljake sa lošim namerama, mlin sa gladnim mišem koji je bio i mlinar i pogonska snaga, čarobne lutke i kutije, sunčani sat i drveni sat koji se sam navijao,...).

Osnovnu školu pohađao je u svom okruženju, a srednju u Grantamu. Tamo je jednog dana dobio batina od lokalnog siledžije pretrpevši i fizičku i duševnu bol. Bio je dosta povučen dok jednog dana tog istog dečaka nije izazvao na novu borbu u kojoj je pobedio. To je bilo novo iskušenje za njega, a nakon toga, poželeo je da i svoj um stavi u iskušenje. Tokom srednjoškolskih dana Njutn je stanovao u kući kod seoskog apotekara na čijem tavanu je našao mnoštvo starih knjiga koje je čitao kad god je stizao.

Godine 1661. upisao se na Trinitski koledž u Kembridžu gde 1669. godine zamenjuje svog profesora matematike koji je dao ostavku i to mesto prepustio Njutnu. U maju 1665. godine Njutn je u svom radu pokazao da je ovladao principima diferencijalnog računa i da je mogao pronaći tangentu i nagib tangente u svakoj tački neprekidne krive. Tu svoju metodu nazvao je „*fluks*" što znači *protok*. Pre toga postavio je binomnu teoremu

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}\,a^{n-1}\,b + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\,a^{n-3}\,b^3 + \dots$$

gde je tačno $n+1$ sabirak u datoj formuli, ako je n pozitivan broj.

Reč *funkcija* u matematiku je uveo Lajbnic 1694. godine (biće o njemu reči u poglavlju 9.8). Naime, ako su y i x dve promenljive i ako je za svaku vrednost promenljive x određena i promenljiva y, tada se y zove funkcija od x i zapisuje se $y = f(x)$. Priraštaj promenljive x obeležava se sa Δx, a priraštaj promenljive y sa $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Količnik $\Delta y/\Delta x$ označava srednju promenu ili prosečnu promenu promenljive y u odnosu na x. Ako želimo da znamo odnos promene u svakoj tački, tada treba pustiti da $\Delta x \to 0$. Tada i $\Delta y \to 0$, i dobijamo odnos oblika „0/0" koji može biti jednak različitim vrednostima. Dato je ime graničnoj vrednosti odnosa promene promenljivih y i x - *prvi izvod* u oznaci dy/dx, i za taj simbol zaslužan je Lajbnic. Njutn je upotrebljavao (y), koji manje odgovara. Na primer, ako sa s označimo put koji treba da pređe neka čestica, brzina u vremenu t bila bi ds/dt, a ubrzanje dv/dt, gde je v brzina čestice. Ubrzanje je i d^2s/dt^2, što je zapravo drugi izvod. Na sličan način dobijaju se i treći i četvrti izvod itd.

Postavilo se i pitanje: kako odrediti funkciju, ako se zna da je njen prvi izvod $f(x)$? Takva funkcija, ako postoji, obeležena je sa $\displaystyle\int f(x)\,dx$. Simbol $\displaystyle\int$ je starinsko slovo s, prvo slovo reči suma. Pri izračunavanju površine ispod grafika neprekidne krive f na intervalu $[a, b]$, bilo je potrebno koristiti graničnu vrednost sume površina pravougaonika na koje je podeljena tražena površina. Tako je utvrđena osnovna teorema integralnog računa koju su dali Njutn i Lajbnic, nezavisno jedan od drugoga, a ona glasi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,,$$

gde je $dF(x)/dx = f(x)$.

Drugi veliki iskorak Njutna bio je 1666. godine u obliku *Zakona o gravitaciji*. Period od 1684. do 1686. godine predstavja jednu od bitnih i velikih epoha u nauci. Njutn je uspeo da obelodani svoja astronomska i dinamička otkrića u „*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*" („*Matematički principi prirodne filozofije*"). U toj knjizi je primena zakona o gravitaciji i Njutnove dinamike na Sunčev sistem. Do rezultata i otkrića dolazio je pomoću diferencijalnog računa. Izveo je Keplerov zakon na osnovu svog zakona o gravitaciji i pokazao kako se može izračunati Sunčeva masa ili masa bilo koje planete koja ima satelite. Takođe, inicirao je teoriju o poremećajima koja se danas primenjuje kod putanje elektrona. Ideja je da je putanja Meseca poremećena, jer pored privlačenja od strane Zemlje, i Sunce privlači Mesec. Krajem sedamnaestog i početkom osamnaestog veka ova otkrića počela su da se izučavaju na Kembridžu i Oksfordu.

Nakon 1712. godine došlo je do rasprave ko je prvi došao do diferencijalnog računa, Njutn ili Lajnbic. Engleska je insistirala na tome da je Lajbnic kradljivac i lažljivac. Zbog toga su ceo vek nakon Njutnove smrti samo ponavljali Njutnovu matematiku, dok su Švajcarci i Francuzi usavršili Lajbnicov put kroz diferencijalni račun koristeći njegov jednostavniji način pisanja diferencijalnog računa i tako stvorili lakše primenljivu metodu istaživanja u odnosu na Njutnove sledbenike.

Krajem sedamnaestog veka Njutn je postao direktor kovnice sa zadatkom da unapredi i reformiše kovanje novca. Bio je jedan od najkreativnijih radnika kovnice i za to dobio titulu umetnika. U čitavoj istoriji matematike, Njutn nije imao superiornijeg protivnika što se tiče sposobnosti koncentracije za rešavanje problema u jednom trenutku. Umro je mirno, u snu, 20. marta 1727. godine u 85. godini.

9.8 Gottfried Wilhelm Leibniz

Slika 9.11: Gotfrid Vilhelm Lajbnic (1646-1716)

„Imam tako mnogo ideja da one
s vremenom mogu biti korisne, ako drugi,
jednog dana, dublje uđu u njih
i pridruže lepotu svojih misli mojem delu."
G.V. Lajbnic

Gotfrid Vilhelm Lajbnic rođen je 1. jula 1646. godine u Lajpcigu u Nemačkoj. Otac mu je bio profesor moralne filozofije. Poticao je iz ugledne porodice koja je kroz tri generacije služila saksonskoj vladi, tako da su Lajbnicove najranije godine bile prožete školom i politikom. Uglavnom je bio samouk. Voleo je da čita knjige u knjižari svoga oca. Sa dvanaest godina znao je latinski tako da je mogao da piše stihove, a potom je počeo da izučava grčki.

U petnaestoj godini upisuje se na studije prava u Lajpcigu, a dve godine kasnije na Jenski univerzitet gde je slušao matematička predavanja. To je uradio nakon što je shvatio da najnoviju filozofiju može razumeti samo onaj ko poznaje matematiku. Godine 1666. vraća se na studije prava ali mu odbijaju doktorat zbog njegove mladosti (službena formulacija). Razočaran odlazi u Nirnberg gde je ubrzo i doktorirao. Ponuđeno mu je mesto profesora, ali to njega nije zanimalo.

Lajbnic je imao sposobnost da svugde i u svako doba radi, pod bilo kakvim uslovima. Matematika je bila samo jedna od mnogih oblasti u kojoj je pokazao genijalnost: pravo, teologija, politika, istorija, književnost, logika, metafizika i filozofija - u svakoj grani imao je značajan doprinos. Lajbnic je u matematici bio sveobuhvatan, u odnosu na Njutna koji je matematičko rezonovanje primenio za probleme u fizici.

Kod Lajbnica je lakomost za novcem, koji je dobijao od svojih aristokratskih poslodavaca, prouzrokovala gubljenje vremena i traćenje intelektualnih sposobnosti. Sve do 1672. godine Lajbnic je veoma malo znao šta znači moderna matematika u njegovo vreme. Dobijao je časove matematike od Kristijana Hajgensa (1629-1695), holandskog matematičara, astronoma i fizičara, koji je prepozano Lajnicov talenat. Jedan od Lajbnicovih pronalazaka je i

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

gde se primećuje povezanost broja π sa neparnim brojevima. U Hanoveru je 1675. godine otkrio osnovnu teoremu integralnog računa zbog koje je došao u sukob sa Njutnom. U periodu od između 1677. i 1704. godine Lajbnicov diferencijalni i integralni račun bio je primenjivan širom Evrope.

Narednih godina Lajbnic je proveo služeći u jednoj porodici kao bibliotekar. Umire u Hanoveru 14. novembra 1716. godine. Danas, Lajbnicov ugled je sve veći i veći.

9.9 Michel Rolle

Slika 9.12: Mišel Rol (1652-1719)

„$\cdots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < \cdots$"
M. Rol

Mišel Rol bio je francuski matematičar i sin trgovca. Rođen je u Ambertu 21. aprila 1652. godine. Rano se oženio i još kao mladić teško se borio da obezbedi osnovne potrebe za svoju porodicu koja je bila pod velikim nametima. Uprkos finansijskim problemima i samo osnovnom obrazovanju, Rol je sam učio algebru i Diofantovu analizu (granu teorije brojeva). U Pariz se preselio sa dvadeset i tri godine.

Rolovo materijalno stanje dramatično se promenilo 1682. godine kada je objavio elegantno rešenje teškog problema iz Diofantove analize. Javno priznanje njegovog postignuća dovelo je do toga da bude finansiran od strane ministra u vladi (dobio je penziju) i da se zaposli kao nastavnik. Bio je, doduše u kratkom periodu, i administrativni radnik u ministarstvu odbrane. Godine 1685. pristupio je Francuskoj akademiji gde, sve do 1699. godine, nije redovno dobijao platu. Tu je radio do 1719. godine kada je preminuo usled otkazivanja vitalnih organa.

Najvažnije Rolovo delo bila je knjiga pod nazivom „*Traité d'algébre*" („*Ugovor o algebri - teorija jednačina*") koja je objavljena 1690. godine. Tu je uvedena notacija n-tog korena iz x kao $\sqrt[n]{x}$. Knjiga sadrži i detaljan opis Gausovog postupka eliminacije pri rešavanju sistema linearnih jednačina što je bilo prvi put u Evropi (Rol je taj metod nazvao *Metod zamene*). Njutn je, ipak, pre Rola koristio Gausov algoritam u svojim naučnim radovima, ali su oni objavljeni tek 1707. godine.

Rol je bio jedan od ranih kritičara matematičke analize (granična vrednost, diferencijani i integralni račun, redovi) i tvrdio je da je on netačan i da je zasnovan na pogrešnom rezonovanju. Čak je i Akademija morala nekoliko puta da interveniše usled žestokih rasprava na tu temu. Naime, Rol je u Akademiji prezentovao nekoliko slučajeva kod kojih korišćenje diferencijalnog računa dovodi do greške. Predstavio je algebarske krive kod kojih se ne mogu otkriti lokalni ekstremi korišćenjem priznatog aparata, tj. diferencijalnog računa. Ipak, to su bile tačke u kojima prvi izvod ne postoji, jer su tangente bile normalne na x-osu. Kasnije je promenio mišljenje. Mada ovo zvuči ironično, Rol je dao teoremu iz te oblasti koja je i nazvanu po njemu (tek 1846. godine od strane italijanskog matematičara Guista Belavitisa). Rol je samo naveo teoremu, ali je nije i dokazao. Među njegovim dostignućima je i promena pri upoređivanju negativnih celih brojeva, jer je Dekart smatrao da je -2 manje od -5. Sadašnji stav $\cdots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < \dots$ usvojen je konvencijom iz 1691. godine.

9.10 Guillaume François Antoine de L'Hôpital

Slika 9.13: Gijom de Lopital (1661-1704)

„Limesi oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ mogu se rešiti
i primenom diferencijalnog računa
na koji se naslanja moje pravilo."
G. de Lopital

Gijom de Lopital bio je francuski matematičar. Rodio se u Parizu 1661. godine. Roditelji su mu bili visoki plemići i zaposleni u vojsci. Pokazao talenat za matematiku prilično rano, a sa 15 godina rešio je težak problem cikloide koji je postavio Paskal. Kao mladić kratko je bio konjički oficir, ali podnosi ostavku zbog kratkovidosti.

Godine 1694. sklopljen je dogovor sa Johanom Bernulijem da mu Lopital plaća 300 franaka godišnje, a da mu zauzvrat, Bernuli priča o svojim otkrićima. Slavu je stekao 1696. godine kao autor prvog udžbenika ikada objavljenog o diferencijalnom računu „*L'Analyse des Infiniment Petites pour l'Intelligence des Lignes Courbes*" („*Analiza beskonačno malih veličina u svrhu razumevanja krivih*"). Lopitalovo pravilo se prvi put pojavilo u toj knjizi. Kada je čuo od Lajbnica da će on napisati svoj tekst o integralnom računu, Lopital je taj deo izostavio iz knjige. Bio je očigledno velikodušan i privlačan za druge matematičare, jer je lako stupao u kontakt sa njima širom Evrope.

Nakon Lopitalove smrti, 2. februara 1704. godine, Bernuli je otkrio šta se dogovorio sa Lopitalom i da je većina rezultata iz te knjige zapravo tu zahvaljujući njemu. Tek 1922. godine nađeni su tekstovi koji potvrđuju ove tvrdnje. Ipak, sam Lopital nikada nije rekao da je on zaslužan za to pravilo i u uvodu knjige je napomenuo da mu je pomagao Bernuli.

9.11 Brook Taylor

Slika 9.14: Bruk Tejlor (1685-1731)

$$„f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)"$$

B. Tejlor

Bruk Tejlor rođen je u Edmontonu u Engleskoj 18. avgusta 1685. godine i bio je vodeći engleski matematičar. Najpoznatiji je po *Tejlorovoj teoremi* i *Tejlorovom redu*. Rođen je u dobrostojećoj porodici, čiji su dom veoma često posećivali muzičari i umetnici koji su, bez sumnje, imali veliki uticaj na mladog Bruka.

Godine 1701. Tejlor upisuje univerzitet Svetog Jovana u Kembridžu kao redovan student, gde je i diplomirao 1709. godine kao student prava. Doktor pravnih nauka postaje 1714. godine. Ipak, u tom periodu, bavio se i matematikom. Tako je 1708. godine našao rešenje problema *centra oscilacije*, ali je ono objavljeno tek u maju 1714. godine. Rad „*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*" („*Diskretna i inverzna metoda priraštaja*") iz 1715. godine utro je put još jednoj grani matematike - *Analizi konačnih elemenata*. Veliki rezultat bio je određivanje oblika kretanja vibrirajuće žice koju je on sveo na mehaničke principe. U tom delu nalazila se i čuvena *Tejlorova teorema*. Ipak, Tejlorov red bio je poznat Džejmsu Gregoriju (Tejlor je bio tada dečak), ali se veruje da Tejlor toga nije bio svestan kada je objavio svoje delo. Takođe, prvi je ispitao postojanje singularnog rešenja kod diferencijalnih jednačina.

Tejlorov najproduktivniji period bio je od 1714. do 1719. godine kada je pisao o širokom spektru tema: magnetizmu, protoku tečnosti kroz usku cev, termometrima, perspektivi i analizi. Pred kraj života bio je posvećen pisanju o religiji i filozofiji. Rezultati po kojima je Tejlor poznat, bili su motivisani Njutnovim delima o kretanjima planeta i radovima Haleja o korenima polinoma. Tejlorov stil pisanja bio je kratak i teško razumljiv, tako da nikada nije dobio priznanja za mnoge svoje inovacije.

Tejlorov život bio je, velikim delom, nesrećan i tragičan. Pošto njegova prva žena, po mišljenju njegovog oca, nije bila dovoljno bogata, došlo je do velike svađe između njih dvojice i otuđenja. Prilikom porođaja, Tejlorova žena je umrla kao tek rođeni sin. Naredne dve godine proveo je sa porodicom u Bifronsu. Nakon što se ponovo oženio (ovaj put uz odobrenje oca), pet godina nakon venčanja i njegova druga žena umire na porođaju, ali mu je kćerka Elizabeta preživela. Nakon smrti oca 1729. godine, Tejlor nasleđuje imanje u Bifronsu, krhkog zdravlja.

Umro je 29. decembra 1731. godine, a sahranjen je u crkvi Svete Ane u Sohou. Posthumni rad pod nazivom „*Contemplatio Philosophica*" („*Filozofska istraživanja*") odštampao je Tejlorov unuk 1793. godine.

9.12 Colin Maclaurin

Slika 9.15: Kolin Makloren (1698-1746)

„$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$”

K. Makloren

Kolin Makloren bio je istaknuti škotski matematičar i fizičar. Rođen je februara 1698. godine u Kilmadanu u Argajlu (Škotska). Njegov otac, sveštenik, umro je kada je Kolinu bilo 6 meseci, a majka mu umire sa njegovih nepunih devet godina. Podizao ga je i obrazovao ujak, koji je takođe bio sveštenik.

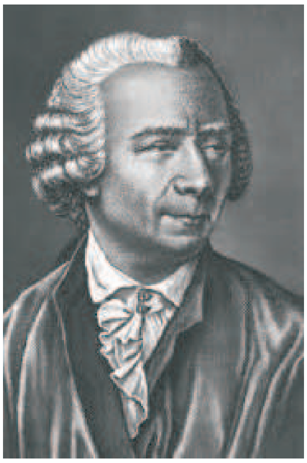
Sa 11 godina upisuje Univerzitet u Glazgovu, što tada nije bilo neuobičajeno. Jednu godinu je proveo kao student teologije, a nakon toga se prebacio na matematiku. Sa 14 godina diplomirao je na temi: „*The Power of Gravity*” („*Moć gravitacije*”). Master diplomu stekao je sa svojih 17 godina i, uprkos svojim godinama, počeo je da predaje na Mariskal koledžu u Aberdinu u Škotskoj. Tokom boravka u Londonu 1719. godine, Makloren sreće Isaka Njutna i od tada postaje njegov učenik, a biva primljen i u Kraljevsko društvo. U tom periodu, neki Njutnovi analitički metodi bili su žestoko napadnuti od strane glavnih matematičara, a Makloren se trudio da odbrani Njutnove ideje.

Makloren je uveo metod generisanja konusa i bio je prvi koji daje ispravnu teoriju za razlikovanje maksimuma i minimuma. U analizi, *Maklorenova formula*, koja je specijalan slučaj *Tejlorove formule*, pojavila se 25 godina ranije u radu Sterlinga. Kolin ju je koristio u radu „*Treatise on fluxions*” („*Rasprava o fluksu*”) koji je objavljen 1742. godine. To je bila prva, pažljivo napisana sistematizacija Njutnovog rada, sa matematičkom strogošću. Makloren je otkrio pravilo za rešavanje linearnih sistema jednačina koje sada nazivamo *Kramerovim pravilom.*

Bio je izuzetan u osmišljavanju eksperimenata. Razvio je brojne genijalne mehaničke uređaje koji su postali važni kod astronomskih ogleda, radio je aktuarske proračune za osiguravajuća društva i pomogao je u poboljšanju geografskih karti škotskih ostrva.

Aktivno je učestvovao u odbrani Edinburga tokom pobune 1745. godine, ali je, nakon pada Edinburga, pobegao je u Jork. Na tom putu je pao sa konja, a umor i hladnoća prouzrokovali su da dobije bolest bubrega. Vratio se u Edinburg nakon što su pobunjenici otišli južnije, ali ubrzo umire 14. juna 1746. godine. Dve godine nakon smrti objavljena je Maklorenova „*Treatise of Algebra*” („*Rasprava o algebri*”).

9.13 Leonhard Euler



Slika 9.16: Leonard Ojler (1707-1783)

Ojler je računao bez vidljivog napora,
slično kao što čovek diše,
ili kako se orao održava na vetru.

Arago

Leonard Ojler rođen je u Bazelu (Švajcarska) 15. aprila 1707. godine i on je verovatno najveći naučnik kojeg je Švajcarska iznedrila. Otac mu je bio verski službenik i odličan matematičar (učitelj mu je bio Jakob Bernuli). Želeo je da mu i sin ide stopama teologije, ali ga je ipak učio i matematiku.

Kasnije, Ojler upisuje fakultet gde studira teologiju i hebrejski jezik. Na polju matematike, privukao je pažnju Johana Bernilija, Jakobovog brata, koji mu je jednom nedeljno davao časove, a ostalim danima Ojler je pripremao pitanja za svog učitelja. Prvi samostalni rad napisao je kada je imao devetnaest godina i za taj rad dobio je posebno priznanje od Pariske akademije (kasnije je dvanaest puta dobio glavnu nagradu). U Bazelu upisuje filozofiju i sluša predavanja iz medicine gde nalazi vezu sa matematikom pri ispitivanju širenja zvuka u uhu. Dobija službeni poziv 1727. godine iz Petrograda (danas Sankt Peterburg) i tamo odlazi kao medicinski saradnik pri Akademiji. U to vreme Akademija i nije bila u milosti vladara, medicinsko mesto bilo je pod znakom pitanja, pa se prebacio na matematičku sekciju. Sa dvadeset i šest godina zauzeo je mesto vodećeg matematičara na Akademiji. Političke prilike bile su nestabilne, ali je Ojler uvek pronalazio načina da vredno radi. Sa velikom lakoćom sastavljao je najteže matematičke probleme. Kada je želeo da osvoji parisku nagradu za problem u vezi sa astronomijom, radio je dugotrajno i naporno, razboleo se i oslepeo na desno oko.

Dok je boravio u Rusiji, pisao je matematičke udžbenike za ruske škole, kontrolisao je vladin odsek za geografiju, izmislio je praktični način za ispitivanje vaga. Godine 1736. izdaje jedan od najvažnijih radova - „*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*" („*Rasprava o mehanici*"), gde je prvi put primenjen diferencijalni i integralni račun u mehanici. Kasnije je to Lagranž nadogradio.

Shvatio je da beskonačni redovi mogu biti nepodesni za primenu iako konvergiraju, mada u svojim radovima o beskonačnim procesima nije mnogo govorio. Treba reći da nije bio uskogrudan matematičar. Dobro je plivao i u književnosti, biologiji, astrologiji, mehanici, astronimiji,...

Njegove velike studije u periodu od 1748-1770. godine o diferencijalnom i integralnom računu odmah su postale klasične i skoro ceo vek služile mladim matematičarima. U svom radu o računu varijacija „*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*" („*Metode za nalaženje krivih linija koje poseduju osobine maksimuma ili minimuma*") iz 1744. godine, Ojler se prvi put pokazao kao prvorazredni matematičar. Bio je nenadmašan u otkrivanju algoritama za rešavanje problema specijalne vrste. U njegovo doba bavljenja matematikom, na univerzitetima se samo učilo ono poznato iz matematike. Za proučavanje i otkrivanje novih stvari nije bilo ni vremena ni odobrenja. Zbog toga se to radilo na kraljevskim akademijama. Tako je i Berlinska akademija bila na izdisaju dok joj nije pristupio Ojler, posle jednog od mnogobrojnih odlazaka iz Petrograda. Kada je imao pedeset i devet godina počeo je da gubi vid i na drugom oku i ubrzo je oslepeo. Nije pomogla ni kasnija operacija levog oka.

Ojler je bio snažan i bistrog uma sve do smrti 18. septembra 1783. godine dok se igrao sa unukom. Poslednje proučavanje bilo je *Zakon o dizanju balona*.

Korišćenjem Ojlerovog identiteta $e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, uzimajući da je $x = \pi$, dolazimo do formule $e^{i\,\pi} = -1$ ili
$$e^{i\,\pi} + 1 = 0\,,$$
što je, često se tako naziva, *najdivnija formula matematike* koja povezuje fundamentalne brojeve e, π, i, 1 i 0 i osnovne matematičke operacije sabiranje i stepenovanje sa relacijom $=$.

9.14 Joseph-Louis Lagrange

Slika 9.17: Žozef Luj Lagranž (1736-1813)

Lagranž je veličanstvena piramida
matematičke nauke.
N. Bonaparta

Žozef Luj Lagranž rođen je 25. januara 1736. godine u Torinu u Italiji. Imao je i francuske i italijanske krvi. Deda mu je bio francuski konjički kapetan u Torinu, a otac je jedno vreme radio kao ratni blagajnik na Sardiniji gde je oženio je kćerku bogatog lekara. Nakon smrti Lagranžovog oca nije bilo bogatstva koje se moglo naslediti, tako da je to bila i izvesna sreća za čovečanstvo i za samog Žozefa.

Prve radove iz matematike Lagranž je spoznao preko geometrije Euklida i Arhimeda i nije bio baš impresioniran. Tada mu u ruke dolazi esej u kojem se iznosi prednost diferencijalnog računa u odnosu na geometrijsku metodu Grka. U veoma kratkom vremenu sam je savladao sve što je do tada moderna matematika dala. U šesnaestoj godini Lagranž postaje profesor na Kraljevskoj artiljerijskoj školi u Torinu i tada počinje jedna blistava karijera i jedna od najvažnijih u istoriji matematike.

U početku je Lagranž bio analitičar, a naklonost ka analizi došla je do izražaja u delu „*Mécanique Analytique*" („*Analitička mehanika*") koju je napisao sa šesnaest godina, a objavljena je u Parizu tek 1788. godine. Primetio je da se mehanika može posmatrati kroz prostor od tri dimenzije, plus četvrta dimenzija koja predstavlja vreme.

U Torinu, kao mladi profesor, predavao je studentima starijim od sebe, a sa najsposobnijim je osnovao istraživačko društvo, preteču Torinske akademije nauka. Prvi radovi sa akademije objavljeni su 1759. godine, a Lagranž je zaslužan za veći deo dobre matematike u tim radovima. Primenio je diferencijalni račun u teoriji verovatnoće i to je drugi veliki korak napred. Dao je i tačnu formulaciju problema vibrirajuće žice, što je bio veliki problem za tadašnje matematičare. Već u dvadeset i trećoj godini smatran je i priznat kao jednak najvećim matematičarima - Ojleru i Bernuliju.

Poznato je da je Lagranž poslao Ojleru pravi metod pomoću kojeg je Ojler rešio dugo ispitivan i proučavan izoperimetrijski problem (određivanje najveće moguće površine figure u ravni ako je unapred dat obim te figure). Ojler nije odmah objavljivao dostignuće već je čekao da to prvo uradi Lagranž. Ojler je ohrabrivao Lagranža da marljivo nastavi sa svojim radom. Lagranž je 1759. godine postao spoljni član Berlinske akademije nauka. Plan Ojlera i D'Alambera (velikog i odanog prijatelja Lagranža) bio je da se Žozef vrati u Berlin i da bude dvorski matematičar. Na kraju su u tome i uspeli 1766. godine, a kralj Pruske, Fridrih Veliki bio je oduševljen. Lagranž je postao direktor fizičko-matematičke sekcije Berlinske akademije. Nije morao da drži predavanja i bio je veoma produktivan po broju napisanih radova.

Tokom svog boravka u Berlinu, Lagranž nije radio samo na *nebeskoj mehanici*, već je doterivao i svoju *Analitičku mehaniku.* Imao je i jedan izlet u Fermaovu oblast - aritmetički problemi, i tu je naišao na mnogo više poteškoća nego što je očekivao.

Za razvitak moderne algebre od najveće važnosti je Lagranžov rad iz 1767. godine „*A propos de la résolution de nombreuses équations*" („*O rešavanju brojčanih jednačina*") što je kasnije i uopšteno. Lagranž je dao zamajac određivanju potrebnih i dovoljnih uslova da se zadata jednačina može algebarski rešiti.

Nakon smrti Pruskog kralja prihvata poziv Luja XVI da nastavi sa svojom matematikom u Parizu. Ipak, umoran od nje, okrenuo se metafizici, razvitku ljudske misli, istoriji religije, opštoj teoriji jezika, medicini i botanici. U to vreme je i hemija postajala nauka, odvajanjem od alhemije.

Kroz ceo svoj život Lagranž je odlazio i vraćao se matematici. Često su ga burni politički događaji budili iz melanholije i uzrokovali da se ponovo lati matematike i nauke. Tako je 1764. godine dobio nagradu Francuske akademije nauka za rešenje problema kruženja Meseca i zbog čega je ka Zemlji uvek okrenuta ista strana Meseca. Tražilo se da se koristi Njutnov zakon o gravitaciji, odnosno saznanje da se Zemlja, Sunce i Mesec međusobno privlače u skladu sa zakonom obrnutog kvadrata rastojanja njihovih centara gravitacije.

Godine 1795. Lagranž je imenovan za profesora matematike u Politehničkoj školi u Parizu. Vodio je studente kroz aritmetiku i algebru do analize. Njegovi učenici imali su problem sa beskonačno malim i beskonačno velikim veličinama. Da bi to prevladao, Lagranž je pokušao da razvije račun bez primene Lajbnicove tehnike i bez Njutnove koncepcije granične vrednosti. Svoju novu teoriju objavio je u dva rada „*Théorie des fonctions analytiques*" („*Teorija o analitičkim funkcijama*") i „*Cours sur les fonctions de calcul*" („*Predavanja o kalkulusu funkcija*") krajem XVIII i početkom XIX veka. Ovi radovi su dalje pomogli Košiju i drugima da konstruišu infinitezimalni račun. Tokom Francuske buržoaske revolucije, Lagranž je doterivao metrički sistem težina i mera. Kao baza je uzet broj 10 umesto broja 12.

Poslednji Lagranžov upliv u naučne vode bila je revizija i proširenje prvog izdanja svoje Analitičke mehanike. Vratila mu se stara snaga iako je imao više od sedamdeset godina. Ipak, naporan rad ga je sve više umarao, osećao je da se mora odmarati, i mada je bio teško bolestan, spokoj i pribranost ga je krasila, jer je oduvek bio ravnodušan za svoju sudbinu. Rekao je da želi da umre, da u tome nalazi veselje, da nikoga nije mrzeo i da je imao lepu karijeru postigavši slavu u matematici. „Za nekoliko trenutaka više nigde neće biti funkcije, smrt će biti svuda, smrt je samo apsolutni odmor tela", rekao je Lagranž. Umro je u zoru 10. aprila 1813. godine.

Lagranž je bio najskromniji i najveći matematičar u osamnaestom veku i za svog života je bio senator, grof Carstva i oficir Legije časti. To je sve dobio od Napoleona, a takođe je bio odlikovan od strane kralja Sardinije i Fridriha Velikog, trećeg kralja Pruske.

9.15 Johann Carl Friedrich Gauß

Slika 9.18: Johan Karl Fridrih Gaus (1777-1855)

Sve što je matematika devetnaestog veka
dala u smislu originalnih naučnih ideja
povezano je sa Gausom.
L. Kroneker

Johan Karl Fridrih Gaus (svoja remek-dela potpisivao je sa Karl Fridrih Gaus) rođen je u siromašnoj porodici u Braunšvajgu u Nemačkoj, 30. aprila 1777. godine. Gausov otac bio je zidar, čistač i vrtlar koji je celog života teško radio. Bio je pošten i čestit ali veoma sirov i gotovo okrutan prema svojoj deci. Svoju genijalnost Gaus je nasledio s majčine strane koja mu je celog života bila podrška. Bila je čvrtog karaktera, oštroumna, čestita i vesela. Mnogo je očekivala od svog sina, jer su joj govorili da će biti najveći matematičar u Evropi. Njegov ujak mu je od malena razvijao logičko razmišljanje (i sam je bio inteligentan), bavio se tkanjem koje je sam naučio i bio je izvanredan.

Gaus je prvi put pokazao svoj talenat pre nego što je napunio tri godine kada je korigovao nedeljni obračun plata radnika njegovog oca. U prve dve godine školovanja bio je običan dečak, ali kada se u njegovoj desetoj godini pojavila aritmetika, tada je, znajući formulu za zbir prvih 100 prirodnih brojeva, rešio profesorov zadatak za nekoliko sekundi. Njegov profesor je posle toga od svog novca kupio najbolje knjige iz aritmetike i poklonio ih Gausu. Ubrzo je priznao da Gausa više ničemu ne može da nauči i da je dečak već iznad njega. Profesorov pomoćnik Martin Bartels, koji je imao sedamnaest godina i koji je voleo matematiku, postaje doživotni Gausov prijatelj. Zajedno su učili algebru i analizu.

U oktobru 1795. godine Gaus je završio Karolinski fakultet. Tu je proučavao radove Njutna, Ojlera i Lagranža. Napomenimo i to da je sa petnaest godina otkrio da prosti brojevi teže beskonačnosti istom brzinom kao i $n/\ln n$ kada $n \to \infty$. To je dokazano tek 1896. godine od strane francuskog matematičara Adamara. Gaus je otkrio *Metod najmanjih kvadrata* da bi se minimizirala greška prilikom obrade podataka. Primenjuje se kod linearne i nelinearne regresije, fitovanja krivih, u obradi signala, u statistici... U teoriji verovatnoće otkrio je *zakon raspodele* (normalna raspodela) koja je jedna od najvažnijih neprekidnih raspodela verovatnoće. Dalje, Gaus je dokazao da se pomoću lenjira i šestara može konstruisati pravilni n-tougao sa neparnim brojem stranica samo ako je broj stranica prost Fermaov broj ili ako je broj stranica dobijen množenjem Fermaovih prostih brojeva.

Zanimljivo je i to da je Gaus od 1796. godine vodio dnevnik u koji je zapisivao svoja otkrića koja nije objavljivao dokle god nisu bila savršeno jasna i potpuno dokazana. Tek 1898. godine taj dnevnik dospeo je u ruke učenih ljudi. Sastojao se od devetnaest stranica i sadržao je 146 sažetih beleški o otkrićima ili rezultatima računanja.

Od 1795. do 1798. godine boravio je na Univerzitetu u Getingenu i te godine su bile najplodonosnije u Gausovom životu. Plemeniti vojvoda od Braunšvajga Karl Ferdinand je finansijski pomagao Gausa, tako da se on nije oko toga brinuo i mogao je potpuno da se posveti matematici. Konačno, 1798. godine, završeno je Gausovo remek-delo „*Disquisitiones Arithmeticae*" („*Aritmetička ispitivanja*"). Ono obuhvata elementarnu teoriju brojeva i podeljeno je na sedam glava. To je bila jedna od poslednjih matematičkih knjiga napisanih na latinskom jeziku.

U Helmštetu 1799. godine dobio je naziv doktora nauka nakon odbranjene disertacije „*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*" („*Prikaz nove teoreme da se svaka racionalna funkcija jedne promenljive može rastaviti na faktore prvog i drugog stepena*"). Deo disertacije bila je i fundamentalna teorema algebre (svaki polinom stepena većeg od jedan ima bar jednu nulu u skupu kompleksnih brojeva) koju je prvi dokazao Gaus. Na dokazu se radilo bar 200 godina od strane najboljih matematičara kao što su D'Alamber, Ojler, Lagranž i Laplas. Gaus je precizirao i da su koreni svake algebarske jednačine sa jednom promenljivom oblika $a + b\,i$, gde su a i b realni broejvi i $i^2 = -1$. Nakon disertacije, on je svoje interesovanje proširio i na astronomiju, geodeziju i elektromagnetizam.

U poslednjoj deceniji osamnaestog veka, mnogi astronomi tražili su novu planetu između Marsa i Jupitera, jer su bili sigurni da postoji. U tom regionu su otkrivene brojne manje planete, poznate kao asteroidi, nazvani Cerera (1801. godina - otkrio ih je Đuzepe Pjaci). Ipak, Cerera se nije mogla videti ni pod najboljim okolnostima i nestala je u blizini Sunca. Mnogo meseci je prošlo, a da najbolji astronomi nisu mogli da odrede gde bi se mogla nalaziti Cerera. Konačno, Gaus je pomoću svoje metode najmanjih kvadrata i numeričkim procedurama uspeo da nađe orbitu. Rekao je astornomima gde i kada da gledaju i tako su je pronašli. To mu je donelo novu slavu, penziju i imenovanje za profesora astronomije i prvog direktora observatorije u Getingenu. Takođe, ovo otkriće dovelo je do rada o asteroidima i njihovom kretanju pod uticajem velikih planeta 1809. godine.

Dvadesetih godina XIX veka, Gaus se zainteresovao za geodeziju. U svom radu iz oblasti diferencijalne geometrije, „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*" („*Opšta istraživanja zakrivljenih površi*") iz 1827. godine, Gaus uvodi sistematsku upotrebu parametarskog predstavljanja površi, dve osnovne kvadratne forme, sferno preslikavanje i pojam zakrivljenosti u tački površi.

Od 1830. godine Gaus je preokupiran matematičkom fizikom i svaku granu koju je dotakao, obogatio ju je. Posebno se bavio elektromagnetizmom, magnetizmom Zemlje i teorijom privlačenja na osnovu Njutnovog zakona. Tu je radio zajedno sa svojim prijateljem Veberom. Godine 1835. Gaus dolazi do zakona koji se odnosi na raspodelu naelektrisanja do postignuća električnog polja.

Umro je 23. februara 1855. godine. Poslednje pismo napisao je o otkriću električnog telegrafa.

9.16 William George Horner

Slika 9.19: Vilijam Džordž Horner (1786-1837)

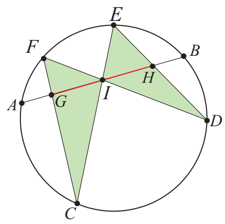
„$P_n(x) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + \cdots + x\left(a_{n-1} + xa_n\right)\cdots\right)\right)$"

V.Dž. Horner

Vilijam Džordž Horner, britanski matematičar, rođen je 9. juna 1786. godine u Bristolu u Engleskoj. Sin sveštenika, školovao se Kraljevskoj školi u okolini Bristola, gde je sa šesnaest godina postao učitelj, a za četiri godine i direktor. Ipak, 1809. godine napušta to mesto i osniva svoju školu koju je vodio do svoje smrti. Sa suprugom Sarom imao je šest kćeri i dva sina, a jedan od sinova je preuzeo školu nakon očeve smrti.

Bio je stručnjak i za klasične nauke i za matematiku. Hornerovo ime prvi put se pojavljuje na listi osoba koje su rešile neke od problema u časopisu „*The Ladies' Diary*" („*Dnevnik za dame*") za 1811. godinu, koji se najvećim delom sastojao od logičkih matematičkih problema. Sve do izdanja iz 1816. godine, godišnje je rešavao do petnaestak problema. Neka njegova rešenja su štampana, kao i dva problema koja je sam postavio. Doprinosio je i na drugi način ovom *Dnevniku*, pažljivim proučavanjem članaka i sugerisanjem čitaocima gde bi mogli da nađu rešenja za određene matematičke probleme.

Hornerov dokaz *problema leptira* je 1815. godine objavljen u „*The Gentleman's Diary*" („*Dnevnik za gospodu*"). *Leptirov problem* (slika 9.20) glasi: Neka je AB jedna tetiva kružnice i neka je tačka I sredina te tetive. Iz tačke C povučemo dve tetive, jednu kroz tačku I i sa E obeležimo presek sa kružnicom, a drugu kao na slici 9.20 i sa F obeležimo presek sa kružnicom. Presek tetive FC i tetive AB obeležićemo sa G. Iz tačke F kroz tačku I povučemo novu tetivu FD i na kraju nacrtamo tetivu DE. Presek tetiva AB i DE obeležićemo sa H. Dokazati da je I sredina duži GH.



Slika 9.20: Problem leptira

Pisao je o funkcionalnim jednačinama, teoriji brojeva, teoriji aproksimacija, ali i o optici. Njegov doprinos teoriji aproksimacija poštovan je jer je shema za rešavanje algebarskih jednačina dobila ime *Hornerova metoda (shema)*.

Podstaknut od strane belgijskog fizičara Džozefa Platea (prvi je demonstrirao optičku iluziju pokretnih slika koristeći rotirajuće diskove, odnosno uređaj koji je 1832. nazvao fenakistoskop), Vilijam Horner osmislio je cilindričnu varijaciju pomenutog uređaja i to objavio 1834. godine. Uređaj je nazvao *Daedaleum*. Njegov rotirajući cilindar je imao proreze između slika.

Horner umire 22. septembera 1837. godine u Batu u Engleskoj. Rad o Hornerovoj shemi je, sa značajnim uredničkim napomenama Tomasa Stefensa Dejvisa, preštampan u Hornerovu slavu u časopisu „*Dnevnik za dame*" za 1838. godinu. Izdanje „*Dnevnika za gospođu*" za tu godinu sadržalo je kratku umrlicu.

9.17 Augustin Louis Cauchy

Slika 9.21: Ogisten Luj Koši (1789-1857)

„Ljudi odlaze, ali njihova dela ostaju."
O.L. Koši

Ogisten Luj Koši, istaknuti francuski matematičar, profesor univerziteta u Parizu, jedan od tvoraca teorije funkcija komleksne promenljive, rođen je u Parizu 21. avgusta 1789. godine, kao prvenac, manje od dva meseca nakon pada Bastilje. Otac, skupštinski pravnik, bio je pun vrlina i milosrđa što je prešlo i na sina. U to vreme škole su bile zatvarane, nije bilo potrebe za ljudima iz kulture i nauke, pa je pravo čudo kako je Košijev otac izbego giljotinu. Učeni ljudi su često ostavljeni i da gladuju. Porodica Koši skrivala se i gladovala u selu Arkej, pokraj Pariza, gde je Koši senior sam uzgajao voće i povrće. Tek u dvadesetoj godini Koši se počeo oporavljati od neuhranjenosti. Skrivanje je trajalo jedanest godina i za to vreme Košijev otac je sam školovao svoju decu. Sam je pisao udžbenike, neke i u stihovima, što je njegovoj deci bilo posebno zanimljivo.

Selo Arkej graničilo se sa velikim imanjem markiza Laplasa, matematičara koji je bio društveniji od ostalog komšiluka, pa je tako često dolazio u dom Košijevih. Veoma brzo je otkrio da Koši poseduje dar za matematiku. U toku narednih nekoliko godina Laplas je slušao Košijeva predavanja o beskonačnim redovima i primenjivao prikazanu konvergenciju na svoje redove.

Početkom januara 1800. godine Košijev otac dobija mesto sekretara Senata i kancelariju, pa je iz jednog njenog ugla, mlađani Koši često viđao Lagranža, profesora na Politehnici. I Lagranž se odmah zainteresovao za dečaka i jednom prilikom je rekao da će taj dečak biti bolji od tadašnjih matematičara. Dao je i nekoliko saveta dečakovom ocu, koji su bili veoma korisni. Prvi je da mu do sedamnaeste godine ne daje knjige iz više matematike, a drugi je da mora poznavati jezička pravila (gramatiku), jer će pisati na maternjem jeziku.

Sa trinaest godina upisuje se u srednju školu i odmah postaje zvezda, jer je dobijao prve nagrade iz grčkog i latinskog jezika. Bio je i jednu godinu na Politehnici i intenzivno studirao matematiku uz dobrog mentora. Odlazi 1807. godine u školu za civilne inženjere i istakao se kao mladić koji poštuje propise. Bio je originalan i sposoban.

Sa dvadeset i četiri godine, zbog svojih sjajnih istraživanja o poliedrima i simetričnim funkcijama, bio je zapažen od strane vodećih matematičara u Francuskoj. Sa dvadeset i sedam godina ušao je u red najvećih živih matematičara. Jedini ozbiljni suparnik bio je mu dvadeset godina stariji Gaus. Izazvao je senzaciju 1815. godine kada je dokazao *Fermaovu teoremu o poligonalnim brojevima* (da se svaki prirodan broj može predstaviti kao zbir tri trougaona broja, četiri kvadratna broja, pet pentagonalnih brojeva, itd.) Naredne godine dobija nagradu od Akademije za *teoriju o širenju talasa na površini guste tečnosti neograničene dubine.* Postao je i profesor na Sorboni. Evropski matematičari su ga bolje poznavali nego Gausa.

Objavio radove iz raznih oblasti matematike i njenih primena, postavljajući i rešavajući nove probleme i uvodeći nove pojmove i nove metode. Takođe je razvijao teoriju talasa u optici i radio je na teoriji elastičnosti. Uveo je sledeće termine u matematici: modul i argument komleksnog broja, konjugovani kompleksni brojevi. Njegova glavna dela su: „*Cours d'Analyse*" („*Kurs analize*") i „*Leçons sur les applications de calcul infinitésimal; La géométrie*" („*Primena analize u geometriji*").

Posle 1830. godine bio je učitelj i muška dadilja trinaestogodišnjem sinu poslednjeg francuskog kralja Šarla desetog. Dečak je bio razmažen i po ceo dan je imao posla oko njega. Retko je nalazio vremena za matematiku. Pobegao je od svog učenika 1833. godine. U tom periodu mu je najvažniji rad bio pokušaj objašnjenja disperzije svetlosti. Četrdesetih godina devetnaestog veka dao je najvežniji doprinos matematičkoj astronimiji.

Umro je iznenada, 23. maja 1857. godine od groznice, nakon preležane upale pluća. Nekoliko sati pre smrti veselo je razgovarao sa pariskim nadbiskupom o dobrotvornom radu koji je predložio.

9.18 Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky

Slika 9.22: Mihail Vasiljevič Ostrogradski (1801-1862)

$$„\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx"$$

M.V. Ostrogradski

Mihail Vasiljevič Ostrogradski, ukrajinski matematičar, rođen je 24. septembra 1801. godine u Pašeni u Ukrajini. Dolazi iz prosperitetne, aristokratske i konzervativne porodice. Srednju školu pohađao je u Poltavskoj gimnaziji, a 1816. godine upisao je Univerzitet u Harkovu da studira fiziku i matematiku. Nakon četiri godine položio je sve neophodne ispite, ali mu je, iz religijskih razloga, zatraženo da ponovo polaže ispite, što je on odbio, tako da nikada nije dobio diplomu.

Od 1822. pa naredne četiri godine, studirao je na Sorboni i na francuskom Koledžu u Parizu. Tu se susreo sa Laplasom, Ležandrom, Furijeom, Poasonom i Košijem. U tom periodu Ostrogradski je objavio neke radove u Pariskoj akademiji, koje je kasnije 1832. godine uključio u rad o hidrodinamici. Godine 1828. vratio se u Sankt Peterburg i predstavio tri važna elaborata iz teorije toplote, dvostrukih integrala i teorije potencijala za Rusku akademiju nauka. Na osnovu radova u ovim elaboratima, Ostrogradski je izabran za člana Akademije nauka.

Bio je prvi matematičar koji je objavio dokaz *teoreme divergencije*. Ipak, Gaus je već dokazao tu teoremu radeći na teoriji gravitacije, ali njegove beležnice su objavljene mnogo godina kasnije. Zbog toga, teorema divergencije se ponekad naziva *Gausova teorema*. Naime, 1828. godine Ostrogradski je postavio jednakost za pretvaranje zapreminskog u površinski integral (poznatu kao *Teorema o divergenciji*)

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$$

gde je V - zatvorena oblast u $\mathbb{R}^3$ ograničena sa po delovima glatkom zatvorenom površi S, koja sebe ne preseca ($\partial V = S$), a P, Q, R, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ i $\partial R/\partial z$ su neprekidne funkcije nad V. Godine 1834. tu jednakost je uopštio na slučaj n-tostrukih integrala (kao i Džordž Grin) te se ona i u tom obliku pokazala vrlo značajnom u modernoj diferencijalnoj geometriji (*Ostrogradski-Grin-Gausova teorema*).

Od 1830. godine Ostrogradski je držao predavanja na Institutu za komunikacije, a od 1832. i na Pedagoškom institutu. Od 1847. godine postaje profesor matematičkih nauka u vojnim školama. Imao je doprinos u izučavanju običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina, računa varijacije, integracije racionalnih funkcija, teorije brojeva, geometrije, teorije verovatnoće, algebre i na polju matematičke fizike i klasične mehanike. Na primer, ako su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi gde $Q(x)$ ima višetruke korene, tada se integral racionalne funkcije P/Q rešava na sledeći način

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx\,,$$

gde je $Q_1(x)$ najveći zajednički delilac od $Q(x)$ i $Q'(x)$, dok je $Q_2(x) = Q(x)/Q_1(x)$. Polinomi koji treba da se odrede su $P_1(x)$ i $P_2(x)$ koji su za stepen manji od stepena polinoma $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$, redom.

Napisao je preko 80 istraživačkih publikacija, ali i mnoge odlične udžbenike. Umro je u Poltavi (Ukrajina) 1. januara 1862. godine.

9.19 Niels Henrik Abel

Slika 9.23: Nils Henrik Abel (1802-1829)

Abel je ostavio matematičarima toliko posla
da imaju šta da rade narednih petsto godina.
Š. Ermit

Nils Henrik Abel, norveški matematičar, rođen je 5. avgusta 1802. godine u Nedstrandu u Norveškoj. I otac i deda bili su mu sveštenici. Otac mu je diplomirao teologiju i filozofiju. Sa trinaest godina, Abel upisuje Katoličku školu, a godinu dana kasnije pridružuje mu se stariji brat Hans, koji je imao bolje ocene od Nilsa. Novi nastavnik matematike Bernt Holombo dolazi 1818. godine u školu i zadaje zadatke da ih učenici rešavaju kod kuće (prethodni nastavnik je strogo kažnjavao učenike, a jednog je toliko išibao, da je dečak umro). Holombo je video veliki Abelov potencijal i predložio mu da pređe na proučavanje više matematike. Čak mu je davao privatne časove posle škole. Sa šesnaest godina Abel daje kompletan dokaz binomne teoreme koja sada važi za sve realne brojeve. Time je proširio Ojlerov rezultat koji se odnosio samo na racionalne brojeve. Sam je usvajao velika dela Njutna, Ojlera, Lagranža i Gausa.

Nilsov otac umire 1820. godine, pošto se nakon propasti njegove političke karijere odaje piću. Abel je tada imao osamnaest godina i briga za majku i šestoro braće pala je na njegova pleća. Nije se žalio. Bio je optimistična duša. Imao je i nekoliko učenika i, da je bio sam, lepo bi živeo. Verujući da ima u rukama jednog od najvećih matematičara svih vremena, profesor Holombo je svom bliskom prijatelju, Abelu, finansijski pomagao omogućivši mu da se upiše na Univerzitet kralja Frederika u Oslu 1821. godine. Već tada je bio najpoznatiji matematičar u Norveškoj. Sve što je znao, Holombo je već preneo Abelu, tako da je Nils, tragajući za novim znanjem, počeo da proučava najnoviju matematičku literaturu. Tada dolazi i do najpoznatijeg rezultata, da je nemoguće naći algebarsko rešenje opšte jednačine petog stepena, odnosno nemoguće je preko formule izraziti kako izgledaju koreni opšteg polinoma petog stepena (za manje stepene, takvo rešenje postoji). Taj problem je bio star više od 350 godina. Abel je isprva mislio da je uspeo da nađe traženo rešenje i kada je svoje rešenje predočio glavnim matematičarima u Norveškoj i Danskoj, oni su utvdili da nema greške u računu. Ipak, Abel je sam uvideo da dobijeno rešenje, zapravo nije rešenje posmatrane jednačine i posumnjao je da li algebarsko rešenje uopšte postoji. Tada je dokazao da ne postoji. To otkriće desilo se 1823. godine, godinu dana nakon njegovog diplomiranja. Koristio je aparat teorije grupa koji je osmislio nezavisno od Galoa. Galoa je kasnije upoznao Abelovo delo i divio mu se. Postoji verovatnoća da Abel nikada nije čuo za Galoa.

I dalje su profesori sa univerziteta novčano pomagali Abelu i pružali mu smeštaj. Početkom 1823. godine objavio je svoj prvi rad u norveškom časopisu „*Magazin for Naturvidenskaberne*". Iste godine piše rad na francuskom jeziku „*En alminnelig Fremstilling af Muligheten at integrere alle mulige Differential-Formler*" („*Mogućnosti integraljenja svih diferencijalnih formula*"), ali mu se gubi trag nakon odlaska na recenziju. Jedno vreme je boravio u Kopenhagenu gde je posećivao poznate matematičare, a nakon povratka zatražio je stipendiju za odlazak u Nemačku i Francusku radi posete matematičarima. To mu nije odobreno. Dobio je novčana sredstva da ostane u Oslu i da uči francuski i nemački. Tokom tog perioda, zapravo 1824. godine, izdao je „*Mémoire sur les équations algébriques*" („*Memoare o algebarskim jednačinama*").

Dobivši dozvolu od norveškog kralja, septembra 1825. godine napušta Oslo sa još četiri svoja druga. Želeo je da sa njima putuje do Kopenhagena, a posle sam do Getingena. Uslovi stipendije bili su da poseti Gausa u Getingenu i da nakon toga ode u Pariz. Ipak, predomislio se, i nakon Kopernhagena, odlazi sa drugovima u Berlin gde je imao sreću da naiđe na Avgusta Krelea, osnivača velikog časopisa za čistu i primenjenu matematiku. Žurnal je izlazio periodično, i bio je prvi koji je posvećen samo matematici. Krele je Abela, svog saradnika na žurnalu, vodio svuda sa sobom, razmećući se kao da poseduje nešto što je najvrednije. Abelov dokaz o nepostojanju algebarskog rešenja za opšti polinom petog stepena, objavio je Krele u svom časopisu.

Nakon Berlina i Lajpciga posećuje i Frajburg gde je proučavao eliptičke i hiperboličke funkcije. Tu je uobličio i svoje remek delo - *Abelovu teoremu.* Posle Frajburga posećuje Drezden, Prag, Italiju, Austriju i Švajcarsku. Radove koje je u međuvremenu napisao, slao je u Berlin, dok najznačajniji čuva za Francusku akademiju nauka. Nalazi apartman u Parizu i nastavlja da radi na teoremi. Oktobra 1826. godine završava „*Mémoire sur une Propriété Générale d'une Classe Trés Étendue des Fonctions Transcendantes*" („*Raspravu o glavnoj karakteristici vrlo velike skupine transcendentalnih funkcija*") i ostavlja je Košiju da je preda akademiji. Koši je bio zauzet oko svojih radova, tako da je to učinio Hečet (francuski izdavač). Koši je bio jedan od recezenata. Ipak, Abelova dela jedva da su bila poznata u Parizu, a njegova skromnost ga je sprečavala da promoviše svoja istraživanja. Rad je ostavljen sa strane i zaboravljen sve do Abelove smrti. *Rasprava* je sadržala otkrića o integralima algebarskih funkcija, koja su sada poznata kao *Abelova teorema*, i osnova je za kasniju teoriju *Abelovih integrala*, *Abelovih funkcija* i mnogo algebarske geometrije.

Zbog nedostatka novčanih sredstava, u januaru 1827. godine, vraća se u Berlin gde mu je nuđeno mesto urednika časopisa. To odbija i u maju iste godine dolazi u Norvešku. Kako nije uspeo da ispuni uslove školarine, ona mu više nije bila dodeljivana, tako da je počeo da daje časove. Sredinom 1828. godine objavljuje rad u časopisu „*Astronomische Nachrichten*" iz Altone u Nemačkoj.

Umro je 6. aprila 1829. godine u Frolandu u Norveškoj, od tuberkoloze koju je dobio tokom boravka u Parizu. Holombo je 1839. godine izdao Abelova sabrana dela. Oformljena je Abelova nagrada 1899. godine za poduhvate u matematici i ona je, na neki način, zamena za Nobelovu nagradu.

9.20 Augustus De Morgan

Slika 9.24: Ogastas De Morgan (1806-1871)

„Imao sam x godina kada je bila godina x^2.
Koje godine sam rođen?"
A. De Morgan

Ogastas De Morgan rođen je 27. juna 1806. godine u gradu Maduraj u Indiji. Njegov otac je bio zaposlen u engleskoj kompaniji u Indiji. Nakon sedam meseci, cela porodica seli se u Englesku. Ubrzo nakon rođenja izgubio je vid na desnom oku zbog čega je bio stidljiv i usamljen, i često izložen šalama u školi. Pohađao je privatnu školu u svojim ranim tinejdžerskim godinama, gde je i razvio veliki interes za matematiku. Njegovi matematički talenti ostali su nezapaženi sve dok nije napunio četrnaest godina, kada ga je porodični prijatelj otkrio da crta na papiru pomoću lenjira i uglomera.

Upisao je Trinitski koledž u Kembridžu 1823, a diplomirao je 1827. godine. Iako je razmatrao mogućnosti da upiše medicinu ili pravo, ipak se odlučio da bude matematičar. Godine 1828. dao je ostavku na mesto profesora na Univerzitetu, jer je njegov prijatelj dobio otkaz bez navođenja razloga za to. Ipak, 1836. godine vraća se na mesto profesora i tu ostaje do 1866.

Bio je veoma produktivan naučnik. Napisao je više od 1000 radova za više od 15 časopisa. Takođe, pisao je i knjige u kojima su teme bile logika, verovatnoća, analiza i algebra. Dosta se bavio i popularizacijom matematike. Njegova knjiga „*A Budget of Paradoxes*" („*Zanimljivi paradoksi*") zabavnog je karaktera. U njoj se nalaze pisma koje je De Morgan objavio u londonskom periodičnom časopisu „*Athenaeum*" u periodu 1863-1866. Revidirao je i proširio ovu zbirku pisama u knjigu, ali je umro pre objavljivanja. Njegova supruga Sofija izvršila je ovaj zadatak. Knjiga je duhovita i zabavna i fokusirana je na dostignuća osoba koje koriste drugačiji pristup različitim zadacima koje uspevaju da reše.

Godine 1838. prikazao je, veruje se prvi put, tehniku dokazivanja poznatu kao *Matematička indukcija*, a kum nazivu dokazivanja bio je lično De Morgan. Četrdesete godine XIX veka bile su fundamentalne u razvoju simboličke logike. Tada je De Morgan osmislio notaciju koja mu je pomogla da dokaže ekvivalencije iskaza, kao što je i zakon koji nosi njegovo ime. Tokom 1842. godine predstavio je prvu preciznu definiciju konvergencije i granice beskonačnih redova. Bio je zainteresovan i za istoriju matematike (napisao je biografije Njutna i Haleja).

Venčao se 1837. godine sa Sofijom Frend (napisala je njegovu biografiju 1882. godine).

Godine 1866. bio je suosnivač Londonskog matematičkog društva i postao njen prvi predsednik. Iste godine izabran je za člana Kraljevskog astronomskog društva. Ipak, on je zabranio da to društvo uopšte koristi njegovo ime i nije želeo da bude njegov član. Takođe, odbio je počasnu diplomu Edinburškog univerziteta.

Njegovo istraživanje, pisanje i učenje nije mu ostavilo mnogo vremena za porodični i društveni život. Bio je poznat po svojoj ljubaznosti, humoru i sposobnosti da svira flautu. Bio je znalac širokog spektra. Jednom je primetio da je lakše napraviti kvadrat od kruga (konstruisati kvadrat iste površine kao dati krug), nego šarmirati matematičara. Po njemu, sila koja stvara inovacije u matematici nije rasuđivanje, već mašta. Bio je originalan čovek čak i među matematičarima.

De Morgan je govorio da nije ni Englez, ni Škot, ni Irac, već „nevezan" Britanac, koristeći tehnički izraz, koji se primenjuje na dodiplomskim studijama u Oksfordu i Kembridžu, za ljude koji nisu članovi nijedne od te dve škole. Umro je 18. marta 1871. godine nakon nervnog rastrojstva.

9.21 Karl Weierstraß

Slika 9.25: Karl Vajerštras (1815-1897)

„Istina je da matematičar koji nije pomalo i pesnik, nikada neće biti savršen matematičar."

K. Vajerštras

Karl Vajerštras, nemački matematičar, rođen je u Ostenfeldu u Nemačkoj 31. oktobra 1815. godine kao najstariji sin. Otac mu je bio carinski službenik u službi Francuza, imao je vladalački autoritet i prusku tvrdoglavost kojoj se Karl uspeo suprotstaviti za razliku od njegovog mlađeg brata. U selu gde im je otac radio nije bilo škole, pa je Vajerštras upisao Katoličku školu u Paderbornu. U školi je uživao i sprijateljio se sa iskusnim učiteljima. Sa devetnaest godina završava školu u znatno kraćem roku od predviđenog i zasluženo je dobio veliki broj nagrada iz raznih oblasti od kojih je jedna, naravno, matematika.

Na Univerzitetu u Bonu izučava trgovačke zakone, ali osim mačevanja, u kojem je bio nenadmašan, i dosta druženja uz pivo, od studiranja nije bilo ništa. Nakon četiri godine vraća se kući bez diplome. Da ne bude sve tako crno, između mačevanja i pića, obraćao se velikim učiteljima od kojih je upijao Laplasovu *Nebesku mehaniku.* Kao izlaz iz neprijatne situacije za celu porodicu, odlučio je da upiše Akademiju u Minsteru da bi se osposobio za srednjoškolskog profesora (1839. godine). To je, pokazaće se, bila odskočna daska za kasniji matematički rad.

Prisutnost profesora matematike Kristofa Gudermana, koji se u to vreme bavio eliptičkim funkcijama i stepenim redovima, donelo je Vajerštrasu dosta koristi. Na Gudermanovom uvodnom predavanju bilo je trinaest studenata, a na drugom času samo Vajerštras. Njih dvojica dobro su se razumevala. Pored eliptičnih funkcija, Guderman je svom jedinom studentu davao privatne časove iz *Analitičke sferne geometrije.* Diplomirao je 1841. godine i počinje da radi kao srednjoškolski nastavnik i time se bavio narednih petnaest godina.

Rad na matematici bio je moguć samo noću. Godine 1842. samostalno je došao do Košijeve fundamentalne teoreme iz analize. Iste godine postaje pomoćnik nastavnika matematike i fizike na Progimnaziji u Dojč-Kroneu u zapadnoj Pruskoj, a predavao je i nemački, geografiju i književnost. Ubrzo je unapređen u redovnog nastavnika. Tu je štampao i prve radove.

Od 1848. godine boravio je u Braunsbergu i bio nastavnik u Kraljevskoj katoličkoj gimnaziji. U školskom programu bio je Vajerštrasov rad „*Beiträgt Theorie der Abel-Integrale*" („*Do-*

prinosi teoriji Abelovih integrala") koji je ostao neprimećen od strane matematičara. Ipak, 1853. godine poslao je jedan rad „*Zur Theorie der Abelschen Funktionen*" („*O Abelovim funkcijama*") u Kreleov slavni časopis i rad biva prihvaćen. To je izazvalo senzaciju, remek-delo nepoznatog učitelja za kog niko nije čuo. Prvog jula 1856. godine imenovan je za profesora matematike na Kraljevskoj politehničkoj školi u Berlinu, u jesen iste godine postaje i pomoćni profesor na Univerzitetu u Berlinu, a kasnije i redovni profesor. Često ga je pratila nesvestica, pa je na predavanjima uvek neko od studenata zapisivao na tabli ono što je Vajerštras sedeći govorio. Vremenom je njegova nastava bila sve posećenija. Osnovna ideja na kojoj je temeljio svoj dalji rad na matematici je da se iracionalni brojevi mogu prikazati preko konvergentnih redova racionalnih brojeva.

Njegov najmiliji đak bila je Ruskinja Sonja Kovalevska (1850-1891). Od petnaeste godine je počela da studira matematiku, a sa devetnaest godina je bila učenica profesora Lea Kenigsbergera u Hajdelbergu (koji je bio Vaještrasov đak). Tu je učila o eliptičnim funkcijama. Želeći da upozna Vajerštrasa, skupila je hrabrost i otišla za Berlin. Bila joj je odbijena molba da sluša njegova predavanja, pa joj je Karl posvetio svako nedeljno popodne i podučavao ju je. To je trajalo 4 godine, do 1874. godine. Ako se nisu sastajali, dopisivali su se.

Diplomirala je u Getingenu 1874. godine i vratila se u Rusiju radi odmora. Sledeće godine joj je umro otac i od tada se nije javljala Vajerštrasu uprkos njegovim pismima. Nakon što je postala majka, vraća joj se želja za matematikom, ali joj je bila potrebna pomoć bivšeg učitelja. Tri meseca 1880. godine provela je u Berlinu i nakon povratka u Moskvu vredno je radila. Uoči Božića 1888. godine, Sonja je primila Bordinovu nagradu Francuske akademije nauka i umetnosti za rad „*Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe*" („*O rotaciji krutog tela oko čvrste tačke*"). Vajerštras je bio oduševljen. Tri godine kasnije Sonja umire od gripa. Sva pisma dobijena od Sonje, Vajerštras je tada spalio kao i ostalu prepisku, tako da su stradali i matematički radovi.

Vajerštras je umro u februaru 1897. godine u Berlinu, u svojoj osamdeset drugoj godini, posle duge bolesti.

9.22 Georg Friedrich Bernhard Riemann

Slika 9.26: Bernard Riman (1826-1866)

Geometar poput Rimana uvek je predvideo
najvažnije pojave današnjeg doba.
A.S. Edington

Georg Fridrih Bernard Riman bio je nemački matematičar koji je dao značajan doprinos razvoju matematičke analize i diferencijalne geometrije, čime je ujedno utro put i za kasniji razvoj *Opšte teorije relativiteta*. Rođen je 17. septembra 1826. godine u malom selu u kraljevini Hanover (sada deo Nemačke). Otac mu je bio siromašni protestantski sveštenik. Od najranije mladosti Riman je bio plašljiva i nesigurna osoba, strahovao je od javnih nastupa i to mu je kasnije bio veliki teret. Za svaki javni nastup uvek pripremao se marljivo i studiozno, što mu je oduzimalo mnogo vremena. Osnovno obrazovanje dobio je od svog oca koji je bio izvrstan učitelj. Veoma rano je pokazao briljantnost u aritmetici koju je učio od šeste godine. Kada mu je bilo deset godina, imao je učitelja koji ga je podučavao aritmetiku i geometriju, i veoma brzo je nalazio bolja rešenja u zadatim problemima od svog mentora.

Sa četrnaest godina prelazi kod bake u Hanover gde upisuje treći razred gimanzije. Iako su mu školski radovi bili sjajni, to ga nije činilo srećnim. Bio je dosta usamljen, jedino zadovoljstvo mu je bilo da, od svog džeparca, šalje poklone svojoj porodici. Jedan od tih poklona bio je jedinstveni večni kalendar koji je sam izradio. Treba napomenuti da je kao srednjoškolac čitao Ojlerove naučne radove. Nakon bakine smrti, prelazi u novu gimnaziju u Lineburgu i tu ostaje do svoje devetnaeste godine. Taj period mu je bio najsretniji u životu. Bio je na veoma maloj udaljenosti od kuće i stalno je odlazio do roditelja. Težio je savršenstvu što ga je kasnije usporavalo u objavljivanju naučnih rezultata. Imao je problem sa pismenim vežbama, ali su se stvari popravile kada je dobio novog učitelja hebrejskog jezika. Direktor gimanzije mu je dozvolio da vodi njegovu biblioteku, preporučio mu je da bude samouk i da čita one knjige iz matematike koje ga budu interesovale. On je to poslušao, pa je Ležandrovu „*Essai sur la théorie des nombres*" („*Teoriju brojeva*") od skoro 900 strana prešao za sedam dana.

Upisuje Univerzitet u Getingenu 1846. godine gde studira teologiju i psihologiju, ali se ubrzo prebacuje na matematiku (profesor mu je bio Gaus) i fiziku (predavao mu je Veber).

Nakon dve godine se prebacuje u Berlin gde sluša od Jakobija (naprednu mehaniku i višu algebru), Dirihlea (teoriju brojeva i analizu), Štajnera (modernu geometriju) i Eizenštejna (eliptične funkcije) - uvod u novu i vitalnu matematiku. Riman je, 1847. godine, u parcijanim diferencijalnim jednačinama video polaznu tačku za teoriju funkcije kompleksne promenljive. Dve godine su prošle do povratka u Getingen gde je odbranio doktorat „*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe.*" („*Osnove za opštu teoriju funkcija kompleksne promenljive*") pod Gausovim mentorstvom 1851. godine. Nakon tri godine, tu počinje da radi kao asistent. U međuvremenu se bavio matematičkom fizikom i prvim predavanjem koje je morao da održi da bi dobio dozvolu za rad kao profesor. Predavanje je bilo više nego uspešno.

Posle 1856. godine Riman kreće svojim oružjem u osvajanje Abelovih funkcija i diferencijalnih jednačina koje su od velike važnosti u matematičkoj fizici. Preveliki rad ga je često koštao zdravlja, ali i doveo do uspeha, jer je 1857. godine izabran za pomoćnog profesora. Dirihle je nasledio Gausa 1855, a Riman Dirihlea 1859. godine. Često je, zbog zdravstvenog oporavka, odlazio u Italiju gde sreće kolege iz njegove naučne oblasti.

Kada je pročitao Ležandrovu „*Teoriju brojeva*", još tada je počeo da se interesuje za tajne prostih brojeva. Ipak, tek 1859. godine Riman izdaje rad „*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*" („*O broju prostih brojeva manjih od unapred zadate veličine*"). To je bio rad na manje od deset strana. Rešavajući taj problem, naišao je na beskonačni red (kasnije nazvan *Rimanova zeta-funkcija*)

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots\,, \quad s = u + v\,i\,, \ \ i^2 = -1\,,$$

gde su $u \neq 1$ i v realni brojevi izabrani tako da red konvergira. U tom radu dao je i nekoliko osobina ove funkcije. Pitanje je: za koje vrednosti s će $\zeta(s)$ postati nula? Postavio je hipotezu da su netrivijalne nule na pravcu kada je $u = \frac{1}{2}$. Do danas taj problem nije rešen, a rešenje ove hipoteze rešilo bi mnoge probleme vezane za distribuciju prostih brojeva. Veza funkcije $\zeta(s)$ i prostih brojeva ostvaruje se preko *Ojlerovog identiteta*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\,,$$

gde se proizvod vrši po svim prostim brojevima p ako je realni deo od s veći od 1.

Jedva mesec dana nakon ženidbe, razboleo se od upale plućne maramice, a pošto se nije potpuno izlečio, dobio je tuberkulozu. Od tada je bio sve lošijeg zdravlja. Umro je 20. juna 1866. godine u mestu Selaska (Italija), na vrhuncu naučne zrelosti. Na nadgrobnoj ploči su ispisani redovi od strane italijanskih prijatelja „*Oni koji vole Boga, čine sebi sve najbolje.*". Rimanova rana smrt bila je veliki gubitak za matematiku, jer je njegov naučni rad bio briljantan i od fundamentalne važnosti.

Literatura

[1] Agarwal P. Ravi, Sen K. Suman, *Creators of Mathematical and Computational Sciences*, Springer International Publishing, Switzerland, 2014.

[2] Bell T. Eric, *Veliki matematičari*, Nakladni zavod Znanje, Zagreb, Hrvatska, 1972.

[3] Berman N. G, *Zbirka zadataka iz matematičke analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[4] Došenović Tatjana, Takači Aleksandar, *Matematika I za studente Tehnološkog fakulteta*, Univerzitet u Novom Sadu, Tehnološki fakultet, Novi Sad, Srbija, 2013.

[5] Došenović Tatjana, Takači Aleksandar, Rakić Dušan, Brdar Mirjana, *Zbirka zadataka iz Matematike 1 za studente Tehnološkog fakulteta*, Univerzitet u Novom Sadu, Tehnološki fakultet, Novi Sad, Srbija, 2008.

[6] Hadžić Olga, Takači Đurđica, *Matematika: za studente prirodnih nauka*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, Srbija, 1998.

[7] Kline Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times - Volume 1*, Oxford University Press, Inc. 198 Madison Avenue, New York, New York, USA, 1990.

[8] Konjik Sanja, Dedović Nebojša, *Matematika - zbirka zadataka za studente Poljoprivrednog fakulteta*, Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad, Srbija, 2011.

[9] Matić Kekić Snežana, *Matematika 1 za studente tehničkih smerova Poljoprivrednog fakulteta*, Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad, Srbija, 2011.

[10] Miličić M. Pavle, Uščumlić P. Momčilo, *Zbirka zadataka iz više matematike 1*, IP Nauka, Beograd, Srbija, 1994.

[11] Milić Svetozar, *Elementi algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, Novi Sad, Srbija, 1984.

[12] Petković S. Miodrag, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 2009.

[13] Snieder Roel, *A Guide Tour of Mathematical Physics*, Samizdat Press, Utrecht University, Utrecht, Netherands, 1994.

[14] Stewart James, *Calculus: Concepts and Contexts*, Fourth Edition, Brooks/Cole, Cengage learning, 2010.

[15] William F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Pearson Education, San Antonio, Texax, USA, 2009.

Indeks