dr Snežana Matić-Kekić

POSLOVNA MATEMATIKA

(smerovi: "Agroekonomski" i "Agroturizam i ruralni razvoj")

2015., Novi Sad

EDICIJA OSNOVNI UDŽBENIK

Osnivač i izdavač edicije

Poljoprivredni fakultet, Novi Sad,
Trg Dositeja Obradovića 8, 21000, Novi Sad

Godina osnivanja
1954.

Roditeljima Jelici († 8.3.1946.-11.5.2008.) i Milanu Matić († 28.11.1940.-22.3.2006.)

Predgovor

Udžbenikom "**POSLOVNA MATEMATIKA** za studente ekonomskih smerova" obrađene su u okviru jedanaest glava neke od oblasti matematike koje imaju primenu u poslovnoj praksi. Naravno, mnoge oblasti koje takođe imaju veliku primenu, nisu obrađene. Na primer granični procesi ekonomskih funkcija nisu sadržaj ovog užbenika, a mogu da se nađu [7, 6]. Dodatno, geometrija nije obrađena, stoga preporučujem udžbenik *Kompjuterska geometrija i grafika* [1] onima koji su zainteresovani za aktuelnu primenu digitalne geometrije.

Osnovni pojmovi i definicije su objašnjeni u prvoj glavi. Binomni obrazac, kombinatorni principi i osnovne kombinatorne strukture - permutacije, varijacije i kombinacije su izloženi u okviru druge glave. Treća i četvrta glava sadrže elementarne metode poslovne i formule finansijske matematike, kao i njihovu inkorporaciju u agronomsku praksu. Polinomi, njihovi koreni i faktorizacija su sadržaj pete glave. Novíne su ilustrovane brojnim primerima.

Početni elementi i stavovi linearne algebre definisani u šestoj glavi su potka za modelovanje i rešavanje sistema linearnih jednačina (7. glava) i za rešavanje problema linearnog programiranja (8. glava). Opisani optimizacioni matematički modeli 9. glave su modeli celobrojnog linearnog programiranja (nepoznate su celobrojne) ili linearnog programiranja (nepoznate su realne).

U poslednje dve glave su opisane opšte i poslovne realne funkcije i diferencijalni račun. Teorija je ilustrovana primerima kojih je oko 70.

Na kraju izabranih poglavlja dati su zadaci za samostalno vežbanje. Ukupno ih ima 117. Većina od njih ima dato rešenje. U okviru svake glave data su poglavlja pod nazivom "Teorijska pitanja" sa rešenim teorijskim test rečenicama kojih ima 1256. Nadam se da će primeri, zadaci i rešena teorijska test pitanja olakšati studentima polaganje testova iz teorije i zadataka. Bogata zbirka zadataka [11] će dodatno pomoći studentima da uvežbaju složenije zadatke.

Ovaj udžbenik pokriva u potpunosti predviđeni sadržaj predmeta *Poslovna matematika* na sledeća dva smera prve godine Poljoprivrednog fakulteta: "Agroekonomski" i "Agroturizam i ruralni razvoj".

Autor se zahvaljuje recenzentima redovnom profesoru dr Ljiljani Gajić i vanrednom profesoru dr Sanji Konjik na pažljivom čitanju udžbenika i nizu korisnih primedbi.

Nadam se da će ovaj udžbenik studentima olakšati uspešnije i brže sticanje potrebnih znanja iz osnova poslovne matematike.

red. prof. dr Snežana Matić-Kekić

Sadržaj

Glava 1.

1 Uvodni pojmovi i motivacioni primeri

1.1 Primeri iz prakse i matematičke oznake

Motivaciju studentima da savladaju gradivo ovog udžbenika bi sledeći primeri iz prakse trebalo da pruže. Sa usvojenim gradivom, njihovo rešavanje je lako.

1.1.1 Motivacioni primeri iz prakse

U zagradama u okviru svakog primera je navedena oblast koju treba savladati i poglavlje ovog udžbenika u kome je potrebno gradivo izloženo.

1. Porodica Kajsijević peče rakiju, i želi da sazna koliko destilovane vode treba da dodaju u 15 l prepečenice od 70% alkohola da bi dobili rakiju od 40% alkohola? (prost račun mešanja - poglavlje 3.3.1)

2. Sveže šljive sadrže 80% vode, a suve 10%. Koliko kilograma suvih šljiva se može dobiti od 12 kg svežih? (procentni račun - poglavlje 3.1.2)

3. Toša T. je pozajmio od strica zelenaša 3000 eura za kupovinu polovnog automobila. Uz mesečnu kamatu od 1%, koliko mesečno treba da vraća stricu da bi dug izmirio za tri godine? (otplata kredita - poglavlje 4.1.3)

4. Želimo da se bavimo proizvodnjom mleka. Koliko krava treba nabaviti za osnovni fond da bismo nakon isteka 5 godina od osnovnog fonda dobili 100 krava ako se zna da se 95% krava oteli svake godine i da su od toga 50% ženska telad, a da se izluči 15% muznih krava godišnje iz osnovnog stada? (rekurzivna formula i procentni račun)

5. Da li za 18 godina roditelji Mile J. mogu da uštede 2 miliona dinara za kupovinu jednosobnog stana ako svakog meseca ulažu 6000 dinara uz mesečnu kamatu od 1%? Da, mogu. (kontinuirana štednja - poglavlje 4.1.2)

6. Za izgradnju manje vikendice na obroncima Fruške gore Peko D. je unajmio 7 radnika: 3 zidara 2 armirača i 3 tesara. Za izgradnju je pogođena suma od 1000 eura. Zidanje je trajalo 5 dana, betoniranje 2 dana i podizanje krova 2 dana. Na koji način Peko treba da podeli sumu od 1000 eura i isplati ove tri grupe radnika? (račun podele - poglavlje 3.3.1)

7. Neka je pčelar počeo pčelarenje sa četiri košnice, i neka se godišnje broj pčela poveća rojenjem za 35%, a smanji od varoe i ostalih bolesti za 20%. Koliko će pčelar imati košnica posle 10 godina bez dodatnog ulaganja u nova društva? (osnovna formula složenog kamatnog računa - 4. glava)

8. U toku godine prodaja šećera je u sedmomesečnom periodu novembar − maj stabilna. Međutim, u periodu jun − oktobar povećana je potražnja i prodaja šećera (obrada sezonskog voća, vinarska industrija...). Uočeno je da se potrebe za šećerom u periodu jun − oktobar redom povećavaju za 16%, 13%, 17%, 32% i 23% u odnosu na maj. Prodaja šećera u maju, u Novom Sadu, je dostigla 450 tona. Toliko su robne rezerve i obezbedile za svaki mesec u godini. Koliko dodatno treba obezbediti šećera da bismo se pokrile potrebe za šećerom u mesecima sa povećanom potražnjom? (bazni indeksi - poglavlje 3.5)

9. (model sistema linearnih jednačina - Glava 7.)

	P_1	P_2	P_3	P_4
S	1	3	2	2
G	3	3	5	8
B	2	5	5	5
M	4	4	3	5

Hladnjača ima uskladišteno 118000, 316000, 264000 i 242000 kesica zamrznutog spanaća (S), graška (G), boranije (B) i mešanog povrća (M). Kako se bliži proleće, uprava je odlučila da tržištu ponudi pakete povrća, tipa P_1, P_2, P_3 i P_4 po sniženim cenama, da bismo oslobodila hladnjaču za predstojeću sezonu. Koliko paketa treba prodati pa da se isprazni hladnjača?

10. Govedina sadrži 18% proteina, 8% lipida i 0,1% holesterola; sir (polučvrst) sadrži 28% proteina, 26% lipida i 0,1% holesterola; jaje sadrži 28% proteina, 12% lipida i 0,45% holesterola; crni pšenični hleb sadrži 10% proteina, 1,2% lipida i nema holesterola. Kilogram mesa, sira, jaja i hleba ima 1500, 3500, 1600 i 2400 kalorija. Koliko treba za jedan obrok uzeti mesa, sira, jaja i hleba a da ukupno uzmemo najviše 1200 kalorija, bar 22% proteina, i minimalno holesterola? (model problema linearnog programiranja - Glave 8. i 9.)

11. Jedna kokoška ima za tri nedelje dve mogućnosti: ili da položi 12 jaja ili da izleže 10 pilića. Posmatra se proizvodni period od 12 nedelja (4 ciklusa od po 3 nedelje). Nakon toga se sva živina prodaje: pilići iz prvog ciklusa i kokoške po ceni od K dinara, pilići iz drugog i trećeg ciklusa po ceni od P dinara po komadu, a jaja po ceni od J dinara po komadu (K>P>J). Treba optimizovati zaradu. U proizvodnju ulazimo sa 100 kokošaka i 100 jaja. (model problema celobrojnog linearnog programiranja - poglavje 9.2)

12. Data je funkcija prosečnih troškova za neki proizvod $\overline{C} = 20 + \dfrac{100000}{x}$, i funkcija tražnje tog proizvoda $x = 80000 - 1000p$, gde je x količina robe u komadima, a p cena u dinarima. Odrediti:
a) cenu p pri kojoj će se ostvariti maksimalna dobit i odrediti je;
b) ukupan prihod u uslovima maksimalne dobiti;
c) interval rentabilnosti (proizvodnju za koju je dobit pozitivna).
(poslovne funkcije - 11. Glava)

13. Poznato je da tražnja čokolade $x(d, p_c, p_s)$ zavisi od nacionalnog dohotka d, cene čokolade p_c, ali i od cene sećera p_s na sledeći način:

$$x(d, p_c, p_s) = 0,4d + 3203 - 10500p_c^2 + 92p_s$$

a) Odrediti funkciju uzajamne elastičnosti tražnje čokolade u zavisnosti od cene

šećera.
b) Koliko iznosi elastičnost tražnje čokolade, ako čokolada košta 110 dinara, šećer 130 dinara, a nacionalni dohodak je 25000 dinara?
(elastičnost poslovnih funkcija - 11. Glava)

1.1.2 Osnovne matematičke oznake

U narednim poglavljima ove glave će biti definisane oznake koje su ovde samo izlistane bez detalja:

logika	skupovi	brojevi
$\top$ tačno	$\emptyset = \{\}$ prazan skup	$<$ je manje
$\perp$ netačno	$\mathcal{N}$ prirodni brojevi	$\leq$ $<$ ili jednako
$\vee$ konjunkcija	$\mathcal{N}_0$ 0 i prirodni br.	$>$ je veće
$\wedge$ disjunkcija	$\mathcal{Q}$ racionalni brojevi	$\geq$ $>$ ili jednako
$\veebar$ ekskluzivna dis.	$\mathcal{I}$ iracionalni brojevi	$\mid$ deli
$\Rightarrow$ implikacija	$\mathcal{R}$ realni brojevi	$\mid\ \mid$ apsolutna vred.
$\Leftrightarrow$ ekvivalencija	$\mathcal{Z}$ celi brojevi	$=$ je jednako
$\neg$ negacija	$\in$ se sadrži u	$\neq$ je različito
$\forall$ svaki	$\ni$ sarži element	$\approx$ je približno
$\exists$ postoji	$\subset$ je podskup	$\cong$ je kongruentno
$\vee$ i	$\supset$ je nadskup	$\sim$ je slično
$\wedge$ ili	$\cap$ presek	$\sum$ suma
$\veebar$ ili ili	$\cup$ unija	$\prod$ proizvod
$\Rightarrow$ sledi	$\setminus$ razlika	$\sqrt{x}$ koren iz x
$\Leftrightarrow$ ekvivalentno	$\times$ proizod	∞ beskonačno
	$\mid\ \mid$ kardinalnost	π broj pi
	$\triangle$ simetrična razlika	(a, b) otvoren interval
	$C_U(A)$ komplement skupa A	$[a, b]$ zatvoren interval
	$P(A)$ partitivni skup skupa A	$a!$ a faktorijel
	$\notin$ ne sadrži se u	$\binom{a}{b}$ a nad b
	$\not\ni$ ne sadrži element	$\frac{a}{b}$ a podeljeno sa b
	$\mathcal{C}$ kompleksni brojevi	i imaginarna jedinica
	$\mathcal{Z}^+, \mathcal{Q}^+, \mathcal{R}^+$ pozitivni $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$	

1.2 O matematičkoj logici

Matematička logika je oblast matematike koja analizira *predikatski račun* i *iskazni račun.*

Šta proučava iskazni račun?

- *Objekti* proučavanja iskaznog računa matematičke logike su rečenice kojima *možemo utvrditi tačnost ili netačnost.* Takve rečenice nazivamo *iskazima.* Pri tom nam nije bitno na kom su jeziku napisane ili izgovorene niti koja je njihova sadržina. Stoga ih skraćeno zapisujemo malim slovima latinice: p, q, r, s...

- Nije važno na koji način se *utvrđuje* (tu presudnu ulogu obično ima naučna metoda, eksperiment, iskustvo, predanje, verovanje...) tačnost ili netačnost *prostih*, osnovnih rečenica (iskaza).
- Iskazni račun matematičke logike se bavi utvrđivanjem kako tačnost (netačnost) *složenih* (sastavnih, rastavnih, uslovnih...) rečenica zavisi od tačnosti (netačnosti) osnovnih objekata koji učestvuju u njoj.
- U matematičkoj logici se definišu *pravila logičkog zaključivanja*, kao složene rečenice koje su uvek tačne, *ne zavisno* od tačnosti njenih osnovnih objekata.

Da li uvek možemo utvrditi tačnost ili netačnost neke rečenice?
Ne možemo. Recimo, šta biste mogli da kažete o tačnosti sledećih rečenica:

Moja mama je najlepša i najpametnija.
Da li ćete položiti ispit iz matematike u junskom roku?
Svemir je ograničen.

Jedino prvu rečenicu bismo mogli "matematički ustrožiti" i utvrditi njenu *istinitosnu vrednost* (tačnost ili netačnost). Ukoliko bismo je posmatrali nad odgovarajućim skupom dece od 3-5 godina ona bismo bila tačna, dok bismo njena tačnost ili netačnost varirala nad ostatkom populacije.

Druga rečenica je upitna, ne iznosi nikakvu činjenicu o čijoj tačnosti bismo trebalo suditi. Tek bismo se odgovoru na postavljeno pitanje mogla dodeliti istinitosna vrednost.

Utvrđivanja istinitosne vrednosti treće rečenice je slično kao kod prve rečenice. Dakle, postoji grupa koja smatra da je svemir ograničen i postoji grupa koja smatra da je svemir neograničen. Međutim, ostatak (čini nam se popriličan) ljudske populacije *ne može* da utvrdi istinitosnu vrednost treće rečenice jer je neopredeljen.

Šta su iskazi? *Iskazi* su samo one rečenice čija se istinitosna vrednost *jednoznačno* može utvrditi. Tako, primeri koje smo razmatrali nisu iskazi. Dok rečenice:
Sutra će ili biti vedro ili oblačno.
U skupu prirodnih brojeva je jedan plus jedan jednako dva.
U skupu $\mathcal{N}$ *je* $1+1=2$.
jesu iskazi i to tačni. Primetimo da su poslednje dve rečenice *isti* iskazi posredovani rečenicama na različitim jezicima. Kako nas u matematičkoj logici interesuje samo istinitosna vrednost iskaza, dok nas ne interesuje *na kom jeziku* je iskaz posredovan, niti koja je *njegova sadržina*, nameće se potreba da iskaze i njihove istinitosne vrednosti što jednostavnije i kraće zapisujemo.

Koje simbole koristimo za iskaze i za istinitosnu vrednost iskaza?
Iskaze ćemo označavati malim slovima latinice, na primer sa: $i, p, q, r....$ Istinitosna vrednost $v(i)$ iskaza i pripada skupu $V = \{\top, \bot\}$. Simbol $\top$ (čita se "te" ili "tačno") označava tačnost, dok simbol $\bot$ (čita se "ne te" ili "netačno") označava netačnost iskaza.

1.2.1 Konjunkcija, disjunkcija i negacija

Malo složenije rečenice mogu se praviti povezivanjem iskaza operacijama konjunkcije $\boxed{\text{i}}$, disjunkcije $\boxed{\text{ili}}$, i primenom negacije $\boxed{\text{ne}}$ na pojedine iskaze. Recimo, za date iskaze p, q, r, s:

p : Banka radi od 9.
q : Banka radi od 8.
r : Na referendum je izašlo više od 50% glasačkog tela.
s : Na referendumu je izglasana podrška stranim savetodavcima.
složenije rečenice su:
$p \ \vee \ \ q$: Banka radi od 9 $\boxed{\text{ili}}$ od 8.
$\neg\, r \wedge \neg s$: Na referendum $\boxed{\text{nije}}$ izašlo više od 50% glasačkog tela $\boxed{\text{i}}$ na referendumu $\boxed{\text{nije}}$ izglasana podrška stranim savetodavcima.

Koje matematičke simbole koristimo za negaciju, konjunkciju i disjunkciju?
To su redom sledeći simboli: $\neg$, $\wedge$ i $\vee$.

Kako se određuju istinitosne vrednosti za negaciju, konjunkciju i disjunkciju iskaza?
U tabeli 1 su redom date istinitosne vrednosti za negaciju, konjunkciju i disjunkciju u zavisnosti od istinitosne vrednosti iskaza na koje su ove operacije primenjene.

$v(i)$	$v(\neg i)$
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \ \wedge \ q)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \ \vee \ q)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

Tabela 1. Istinitosne vrednosti negacije, konjunkcije i disjunkcije

Ekskluzivna[1] disjunkcija: $p \veebar q$
Ekskluzivna disjunkcija je tačna ukoliko su iskazi koji učestvuju u ekskluzivnoj disjunkciji različite istinitosne vrednosti. Rečenica: "Ako izađem na ispit ili ću položiti ili ću pasti", je tipičan primer ekskluzivne disjunkcije. Samo jedan od iskaza p: položiću ispit i q: pašću ispit, može biti tačan, a njegova tačnost zahteva netačnost drugog iskaza (odnosno isključuje mogućnost tačnosti drugog iskaza).

1.2.2 Implikacija i ekvivalencija

U govornom i književnom jeziku implikacijama odgovaraju uslovne rečenice, kao na primer:
$\boxed{\textit{Ako}}$ *budeš jeo svežu šargarepu* $\boxed{\textit{onda}}$ *ćeš imati dobar vid.*

Kako se matematički zapisuju implikacija i ekvivalencija? Neka su redom data dva iskaza p i q. Tada se njihova implikacija zapisuje:

$$p \Rightarrow q,$$

[1]lat. exlusivus znači isključiv, nedopuštajući.

što se čita na neki od sledećih načina:

1. p $\boxed{\text{implicira}}$ q
2. $\boxed{\text{iz}}$ p $\boxed{\text{sledi}}$ q
3. $\boxed{\text{ako}}$ p $\boxed{\text{onda}}$ q
4. p je $\boxed{\text{potreban uslov}}$ za q
5. q je $\boxed{\text{dovoljan uslov}}$ za p

Konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su komutativne binarne operacije nad iskazima, dok implikacija nije komutativna. Tako iskaz p u formuli za implikaciju nazivamo *pretpostavkom*, a iskaz q *posledicom.* Jasno je da je ispravan (tačan) način zaključivanja da iz tačne pretpostavke sledi tačna posledica (videti poslednji red u tabeli istinitosne vrednosti za implikaciju). Međutim, nije očigledno da iz netačne pretpostavke možemo dobiti, na ispravan način, netačnu ili tačnu posledicu (videti prva dva reda u tabeli istinitosne vrednosti za implikaciju). Ilustraciju [15] za valjanost ovakvog načina zaključivanja imamo u tačnom stavu: *prazan skup je podskup svakog skupa* . Ako skupove razmatramo nad skupom racionalnih brojeva $\mathcal{Q}$ sledi da je $(\forall x \in \mathcal{Q})$ i za $(\forall S \subset \mathcal{Q})$ zadovoljena implikacija $x \in \emptyset \ \Rightarrow \ x \in S$. Prvi iskaz $x \in \emptyset$ ove implikacije je uvek netačan dok iskaz $x \in S$ može da bude ili tačan ili netačan, međutim implikacija ova dva iskaza je uvek tačna.

Ekvivalencija iskaza p i q se zapisuje sa:

$$p \ \Leftrightarrow \ q,$$

što se najčešće čita sa:

1. p je $\boxed{\text{ekvivalentno}}$ sa q;
2. p $\boxed{\text{ako i samo ako}}$ q;
3. p je $\boxed{\text{potreban i dovoljan uslov}}$ za q.

Šta je ekvivalencija?

Ekvivalencija dva iskaza predstavlja konjunkciju dve implikacije. Recimo, sledeća rečenica

U dobrog domaćina dobra i stoka.

daje ekvivalenciju dva iskaza (dve relacije): " biti dobar domaćin" i "posedovati dobru stoku":

$\boxed{\text{Ako}}$ je domaćin dobar $\boxed{\text{onda}}$ on poseduje dobru stoku $\boxed{\text{i}}$ $\boxed{\text{ako}}$ je stoka dobra $\boxed{\text{onda}}$ je uzgaja dobar domaćin.

Dakle, ekvivalencija predstavlja kraći zapis konjunkcije dve implikacije sa istim iskazima koji su zamenili mesta, tj.:

$$p \Leftrightarrow q \ \text{ je ekvivalentno sa } (p \Rightarrow q) \ \wedge \ (q \Rightarrow p).$$

Međutim, značaj ekvivalencije je bitno veći od toga da je ona kraći zapis konjunkcije dve implikacije. U matematici, kao i u životu, je veoma važno da neke objekte (zemljište, sorte, ljude...) svrstamo u neke *klase* po nekim značajnim *svojstvima* (pH vrednost, rano sazrevanje, biti vozač...) i da zatim sve pripadnike iste klase tretiramo na isti način.

Dakle, kada kažemo da su dva objekta ekvivalentna ne podrazumevamo da su oni isti nego da imaju jednako neko nama važno svojstvo. Kako je u logici svojstvo objekata koje razmatramo njihova istinitosna vrednost, to je ekvivalencija dva iskaza tačna jedino ako su oba iskaza jednake tačnosti (tabela 2).

U matematici svojstva nazivamo *relacijama* a odgovarajuće objekte nad kojima razmatramo neku relaciju grupišemo u *skup.* Tako bismo na osnovu prethodnog primera skup svih stočara mogli podeliti na dve klase u odnosu na relaciju "biti dobar domaćin". *Relacija ekvivalencije* je jedna od najčešće razmatranih relacija u matematici.

Određivanje istinitosne vrednosti za implikaciju i ekvivalenciju
U tabeli 2 su date istinitosne vrednosti za implikaciju i ekvivalenciju u zavisnosti od istinitosne vrednosti iskaza na koje su ove binarne operacije primenjene.

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \Rightarrow q)$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \Leftrightarrow q)$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$

Tabela 2. Istinitosne vrednosti za implikaciju i ekvivalenciju

Tabelama 1 i 2 su redom definisane negacija, konjunkcija, disjunkcija implikacija i ekvivalencija. Analizom tabela njihovih istinitosnih vrednosti može se dati i sledeća definicija:

Negacija *iskaza je tačna ako*[2] *je iskaz netačan.*

Konjunkcija *dva iskaza je tačna ako su oba iskaza tačna.*

Disjunkcija *dva iskaza je netačna jedino ako su oba iskaza netačna.*

Implikacija *dva iskaza je netačna ako je prvi iskaz tačan, a drugi netačan.*

Ekvivalencija *dva iskaza je tačna ako oba iskaza imaju jednake istinitosne vrednosti.*

1.2.3 Kvantifikatori, iskazne formule i tautologije

Od iskaza uz pomoć operacija sa iskazima gradimo složenije rečenice, iskazne formule. Posebno su značajne one iskazne formule koje su uvek tačne nezavisno od tačnosti iskaza koji u njima učestvuju. Takve iskazne formule predstavljaju ispravan, logičan, način zaključivanja, i nazivaju se **tautologije**.

Iskazne formule *su:*

1. *iskazi* (*predstavljeni iskaznim slovima:* $a, b, c, d, e...$);

2. $\neg a$, $(a \vee b)$, $(a \wedge b)$, $(a \Rightarrow b)$ *i* $(a \Leftrightarrow b)$,
gde su a *i* b *iskazne formule;*

3. *konačnom primenom pravila* **1.** *i* **2.** *dobijaju se iskazne formule.*

[2]Mada u definicijama koristimo reč "ako" podrazumevamo ekvivalenciju ("ako i samo ako") definisanog pojma sa zahtevanim uslovom iz definicije, a ne implikaciju. I u daljem tekstu, isključivo u definicijama, termin "ako" znači "ako i samo ako", "ekvivalentno"....

Tako su iskazne formule: $\neg\neg(a \Rightarrow \neg b)$, $(((\neg a \vee b) \Leftrightarrow \neg(c \wedge b)) \vee a)$, $(a \Leftrightarrow \neg\neg a)$, $p \Rightarrow p$... dok izrazi $\Leftrightarrow a$ ($\Leftrightarrow$ je binarna, a ne unarna operacija), $a \vee b \wedge c$ (nije definisano koja operacija od $\vee$ i $\wedge$ se prvo primenjuje), $a\neg b$, nisu iskazne formule.

Označimo sa $\mathcal{F}$ skup svih iskaznih formula. Istinitosne vrednosti iskaznih formula se određuju polazeći od istinitosnih vrednosti svih iskaznih slova koja učestvuju u formuli i iterativno primenjujući pravila za utvrđivanje istinitosnih vrednosti osnovnih iskaznih formula: negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije i ekvivalencije. Na primer, istinitosna vrednost formule $F(p,q,r) : (p \wedge \neg r) \Rightarrow (q \vee r)$ je za $v(p) = \bot$, $v(q) = \bot$, $v(r) = \top$ je

$v(F(\bot,\bot,\top) = (\bot \wedge \neg\top) \Rightarrow (\bot \vee \top) = (\bot \wedge \bot) \Rightarrow \top = \bot \Rightarrow \top = \top$

Dakle, istinitosna vrednost, v je preslikavanje skupa svih iskaznih formula $\mathcal{F}$ na skup $\{\bot, \top\}$.

$formula$	$zakon$
1. $(a \wedge (a \vee b)) \Leftrightarrow a$ $(a \vee (a \wedge b)) \Leftrightarrow a$	zakoni apsorbcije
2. $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$	modus ponens
3. $(b \wedge a) \Leftrightarrow (a \wedge b)$ $(b \vee a) \Leftrightarrow (a \vee b)$	komutativnost $\wedge$ komutativnost $\vee$
4. $((a \wedge b) \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge (b \wedge c))$ $((a \vee b) \vee c) \Leftrightarrow (a \vee (b \vee c))$	asocijativnost $\wedge$ asocijativnost $\vee$
5. $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$	De Morganov zakon De Morganov zakon
6. $\neg\neg a \Leftrightarrow a$	zakon dvostruke negacije
7. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$ $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$	distributivnost $\vee$ prema $\wedge$ distributivnost $\wedge$ prema $\vee$
8. $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$	svođenje na protivurečnost
9. $p \vee \neg p$	zakon isključenja trećeg
10. $\neg(p \wedge \neg p)$	zakon neprotivurečnosti
11. $p \Rightarrow p$	zakon identičnosti
12. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	pravilo silogizma
13. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	zakon kontrapozicije
14. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$	$\Rightarrow$ izražena preko $\neg$ i $\vee$
15. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$	$\Leftrightarrow$ izražena preko $\Rightarrow$ i $\wedge$

Tabela 3. Neke poznate tautologije

Tautologije predstavljaju ispravne načine logičkog zaključivanja.

Tautologije *su iskazne formule čija je istinitosna vrednost uvek tačna.*

U tabeli 3 su navedene neke poznatije tautologije Tako, tautologije kod kojih je "glavna" operacija implikacija, kao kod pravila silogizma ili pravila modus ponens (videti tabelu 3) govore o tome koje posledice važe pod datim pretpostavkama. Ukoliko je ekvivalencija glavna operacija u tautologiji, na ravnopravan način možemo koristiti ili levu ili desnu podformulu razmatrane tautologije.

Poslednje dve tautologije (zakoni 14 i 15), navedene u tabeli 3, nam omogućuju da bilo koju formulu iskaznog računa zapisujemo samo preko konjunkcije, disjunkcije i negacije. Formula 14. nam kao tautologija omogućava da eliminišemo implikaciju, dok tautologija 15. eliminiše ekvivalenciju. Tako, primenjujući zakone date u tablicama, formulu $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow c$, možemo ekvivalentno zapisati pomoću operacija $\neg, \wedge, \vee$. Preciznije, imamo sledeći niz ekvivalentnih formula:

$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow c$ $\Leftrightarrow$ (po zakonu 15.)
$((a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow (a \Rightarrow b))$ $\Leftrightarrow$ (po zakonu 14.)
$(\neg(\neg a \vee b) \vee c) \wedge (\neg c \vee (\neg a \vee b))$ $\Leftrightarrow$ (po zakonu 5.)
$((\neg\neg a \wedge \neg b) \vee c) \wedge (\neg c \vee (\neg a \vee b))$ $\Leftrightarrow$ (po zakonima 6. i 4.)
$((a \wedge \neg b) \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg a \vee b)$ $\Leftrightarrow$ (po zakonima 7. i 3.)
$(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

Kvantifikatori su oznake koje koristimo u skraćenom zapisu nekih formula. Odnose se na količinu elemenata. Simbol $\forall$ (čita se "za sve", "svaki", "svi"...) zovemo *univerzalni kvantifikator* i nastao je od prevrnutog (po obe ose) početnog slova engleske reči All (svi). *Egzistencijalni kvantifikator*, $\exists$, koji čitamo "postoji","postoji bar jedan", "za neki", je nastao je od prevrnutog (po y-osi) početnog slova engleske reči Exist (postoji). Kvantifikator $\exists$ dozvoljava da postoji više od jednog elementa sa nekom osobinom. Međutim, ako želimo da naglasimo da postoji tačno jedan elemenat koji ima neko svojstvo, koristimo egzistencijalni kvantifikator, $\exists_1$[3] koji čitamo "postoji tačno jedan".

Primer. Rečenice $(\forall x)(x > 0)$ i $(\exists y)(y + 2 < 1)$ su takve da je prva tačna na skupu prirodnih, a netačna na skupu celih brojeva, dok je druga tačna na skupu celih, a netačna na skupu prirodnih brojeva. Međutim, postoje rečenice koje su uvek tačne, nezavisno od skupa na kome se razmatraju. Takve opšte važeće rečenice nazivamo **valjane formule**.

Sledeće rečenice su neki primeri valjanih formula:
Ako za svako x važi $p(x)$ onda postoji y tako da važi $p(y)$:
$(\forall x)p(x) \Rightarrow (\exists y)p(y)$.
Nije tačno da je za svako x zadovoljena formula $p(x)$ je ekvivalentno da postoji x da ne važi $p(x)$:
$\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg p(x)$.

Pokušajte da tačno pročitate i rečima zapišete sledeće valjane formule:
$(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x))$;
$\neg(\exists x)p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\neg p(x)$.

1.2.4 Zadaci

1.1. Smislite tri rečenice, tako da kod jedne *uvek možemo* utvrditi istinitosnu vrednost da kod druge *ne možemo* utvrditi istinitosnu vrednost a da kod treće *nekad možemo a nekad ne možemo* utvrditi istinitosnu vrednost.

1.2. Dati su izrazi: $\neg(a \vee \neg b)$, $((\neg a \vee b) \Leftrightarrow)$, $(c \wedge b) \wedge a$, $a \Leftrightarrow \neg\neg a$, $\Rightarrow p$ i $a \vee \wedge b$. Obrazložiti koji od navedenih izraza nisu iskazne formule a za one izraze koji jesu iskazne formule utvrdite na koji način su dobijene posredstvom pravila **1**, **2.** i **3**.

1.3. Proverite da li je iskazna formula $(a \wedge (a \vee b)) \Leftrightarrow a$ tautologija.

[3] U literaturi se koristi i oznaka $\exists!$.

1.4. Nađite skup A (neki skup skupova u ovom slučaju) na kome rečenica $(\exists Y \in A)(\forall X \in A)(Y \subset X) \Rightarrow Y = \emptyset$, nije tačna.

1.3 Skupovi, funkcije, operacije, relacije

Skup (množina, mnoštvo...) i njegovi elementi (članovi, objekti...) su osnovni pojmovi matematike. Skupove razmatramo u okviru nekog univerzuma, koji ćemo označiti sa U. Univerzum je recimo: ljudska populacija, brojevi, biljne vrste... Ako skup S sačinjavaju elementi $x, y, z...$ označava se $S = \{x, y, z...\}$.

Sa $S = \{x : P(x)\}$ ili sa $S = \{x \mid P(x)\}$ označava se skup svih elemenata x koji imaju osobinu P. Ako je S skup, tada $x \in S$ označava da je x element skupa S ili da x pripada skupu S, dok $x \notin S$ znači da x nije element skupa S. Oznaka za prazan skup je $\emptyset$.

1.3.1 Skupovi

Definišimo neke poznate operacije sa skupovima: uniju, presek, razliku, simetričnu razliku i komplement skupa; neke binarne relacije na skupovima: $=$, $\subseteq$; kao i proizvod dva skupa, kardinalnost i partitivni skup skupa.

Skup B je **podskup** *skupa A, u oznaci*

$B \subseteq A$, *ako je* $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$[4]

Skupovi A i B su **jednaki**, *u oznaci*

$A = B$ *ako je* $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Presek $A \cap B$, *skupova A i B je skup*

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Unija $A \cup B$, *skupova A i B je skup*

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Razlika $A \setminus B$, *skupova A i B je skup*

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Proizvod *skupova A i B, $A \times B$, je skup uređenih parova*

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

Simetrična razlika $A \triangle B$ *skupova A i B je skup*

$A \triangle B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Komplement *skupa A u odnosu na univerzalan skup U je skup*

$C_U A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = I \setminus A$

Partitivni skup $P(A)$ *skupa A je skup svih podskupova skupa A*

$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

Kardinalnost $|A|$ *skupa A je broj njegovih elemenata.*

1.3.2 Preslikavanja, operacije i relacije

Preslikavanje *(***funkcija***) f nepraznog skupa A na neprazan*[5] *skup B je pridruživanje koje elementima skupa A dodeljuje elemente skupa B tako da je zadovoljeno: svakom elementu a iz skupa A pridružujemo tačno jedan element b iz skupa B, koji označavamo sa $b = f(a)$.*

[4] Oznake $\Rightarrow, \wedge, \vee$ i $\veebar$ definisane su u poglavlju 1.2.

[5] U daljem tekstu neće uvek biti naglašeno da se radi o nepraznim skupovima.

Preslikavanje f skupa A na skup B označavamo sa $f : A \to B$. Skup A je **domen** funkcije f, ili skup originala, dok je skup B **kodomen**, ili nadskup skupa slika funkcije f.

Funkcija f je *konstantna* ako je njen skup slika jednoelementni skup.

Funkcija je *identično* preslikavanje, u oznaci id, na skupu S ako je definisana kao $id : S \to S$, tako da za svako $s \in S$ je $id(s) = s$.

Označimo sa S^n n-tostruki proizvod skupa S: $S \times S \times ... \times S$. Tako je skup S^n skup svih uređenih n-torki iz skupa S.

Preslikavanje $\clubsuit$ *je* n*-arna* **operacija** *(operacija dužine* n*),* $n \geq 1$*, na nepraznom skupu* S *ako je:*
$\clubsuit : S^n \to S$.

Za $n = 1$, $\clubsuit$ je unarna operacija. Na primer, negacija $\neg$ je unarna operacija u skupu iskaznih formula $\mathcal{F}$. Komplement skupa u odnosu na univerzalan skup I je takođe unarna operacija na partitivnom skupu $P(I)$. Kardinalni broj skupa nije unarna operacija, za konačan univerzalan skup I, kardinalnost skupa je preslikavanje $|\,| : P(I) \to \{0, 1, 2...|I|\}$.

Za $n = 2$, $\clubsuit$ je binarna operacija. Unija, presek, razlika, simetrična razlika i proizvod skupova su binarne operacije na skupu $P(I)$. Veoma često kod binarnih operacija umesto da pišemo $\clubsuit((s_1, s_2)) = s_3$ pišemo $s_1 \clubsuit s_2 = s_3$. Kada je $n = 3$ radi se o ternarnim operacijama...

Neprazan skup ρ*, je binarna* **relacija** *(relacija dužine* 2*), na nepraznom skupu* S *ako je* $\emptyset \neq \rho \subseteq S^2$.

Relacija ρ je podskup skupa svih uređenih parova elemenata iz skupa S.

Ako je ρ binarna relacija na skupu S onda se ravnopravno koriste sledeća dva ekvivalentna zapisa: $(s_1, s_2) \in \rho$ i $s_1 \rho s_2$, što se čita kao element s_1 je u relaciji ρ sa elementom s_2.

1.4 Osobine preslikavanja, operacija, relacija

1.4.1 Osobine preslikavanja

Funkcija $f : A \to B$ *je:*

- **injektivna** *ili "1-1" ako je*
  $$(\forall a_1, a_2 \in A)\ (f(a_1) = f(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2);$$
- **sirjektivna** *ili "na" ako je* $(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ \ f(a) = b$;
- **bijekcija** *ako je "1-1" i "na".*

Oznake kvantifikatora $\forall$ i $\exists$ definisane su u poglavlju 1.2.3, dok su skupovi brojeva $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^+, \mathcal{R}$ i $\mathcal{R}^+$ uvedeni u poglavlju 1.5.

Inverzna funkcija f^{-1}*, bijektivne funkcije* $f : A \to B$ *je funkcija* $f^{-1}\ B \to A$*, tako da* $(\forall b \in B) f^{-1}(b) = a \in A \Leftrightarrow f(a) = b$.

Date su funkcije f *i* g*, tako da* $f : A \to B$ *i* $g : B \to C$*. Tada je funkcija* k **kompozicija** *funkcija* f *i* g*, u oznaci* $k = g \circ f$ *ako* $k : A \to C$*, tako da je* $(\forall a \in$

A) $k(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Primeri: Posmatrajmo tri funkcije f, g i h koje su zadate na sledeći način:
$f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$, $\quad g : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}^+ \cup \{0\}$ i $h : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}$,
$f(x) = 2 \cdot x - 1$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = \ln x$.

Funkcija f je injektivna ali nije sirjektivna, jer se svi celi brojevi preslikavaju na neparne cele brojeve. Druga funkcija nije ni "1-1", jer različiti originali imaju iste slike, recimo $g(-2) = g(2) = 4$, ni "na", jer na primer, ceo pozitivan broj 3 nema ceo koren. Bijektivno preslikavanje je funkcija h. Funkcija h je injektivna, jer za svaka dva pozitivna, realna broja, x i y, važi $h(x) = h(y) \Leftrightarrow \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$. Takođe, $(\forall x \in \mathcal{R})$ postoji pozitivan realan broj $a \in \mathcal{R}^+$ tako da je $e^x = a > 0$. Tada je $h(a) = \ln a = \ln e^x = x$, što znači da je funkcija h sirjektivna. Kako je h bijekcija, postoji njena inverzna funkcija $h^{-1} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^+$, koja je takođe bijekcija i definisana je kao $h^{-1}(x) = e^x$.

Kompozicija funkcija f i g je funkcija $k = (g \circ f) : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}^+ \cup \{0\}$ i $\forall z \in \mathcal{Z}$ je $k(z) = (g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(2 \cdot z - 1) = (2 \cdot z - 1)^2 = 4 \cdot z^2 - 4 \cdot z + 1 \in \mathcal{Z}^+$.

Primetimo da se proizvod $g \cdot f$, funkcija f i g razlikuje od njihove kompozicije $g \circ f$. Njihov proizvod je funkcija $(g \cdot f)\ (x) = g(x) \cdot f(x) = x^2 \cdot (2x - 1) = 2x^3 - x^2$, za $x \in \mathcal{Z}$.

Važe sledeće osobine:

1. *Kompozicija injektivnih (sirjektivnih) preslikavanja je injektivno (sirjektivno) preslikavanje.*

2. *Ako je funkcija g inverzna za funkciju f, tada je takođe f inverzna funkcija funkcije g.*

3. *Inverzna funkcija g (bijektivne) funkcije f je takođe bijekcija i važi $g \circ f = f \circ g = id$.*

4. *Za kompoziciju tri preslikavanja važi asocijativnost. Preciznije, ako su funkcije f, g i h takve da su definisane odgovarajuće kompozicije: $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h : C \to D$ zadovoljeno je $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Dokaz *osobine 4. Po definiciji kompozicije preslikavanja je $g \circ f : A \to C$ i $h \circ (g \circ f) : A \to D$. Slično je $(h \circ g) \circ f : A \to D$. Takođe je $(\forall a \in A)\ \ h \circ (g \circ f)\ (a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g)f(a) = (h \circ g) \circ f\ (a)$. Kako su dva preslikavanja $f_1 : X \to Y$ i $f_2 : X \to Y$ jednaka ako je $\forall x \in X\ \ f_1(x) = f_2(x)$, prethodna izvođenja impliciraju da su kompozicije preslikavanja jednake, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Dokaze tvrđenja 1. 2. i 3. u okviru prethodnog stava ostavljamo kao zadatke. $\square$

1.4.2 Osobine binarnih operacija

Binarna operacija $\clubsuit : S^2 \to S$ *je:*

- **komutativna** $\Leftrightarrow$ $(\forall s_1, s_2 \in S)\ s_1 \clubsuit s_2 = s_2 \clubsuit s_1$

- **asocijativna** $\Leftrightarrow$ $(\forall s_1, s_2, s_3 \in S)\ (s_1 \clubsuit s_2) \clubsuit s_3 = s_1 \clubsuit (s_2 \clubsuit s_3)$

- **kancelativna sa leve strane** $\Leftrightarrow$ $(\forall a, b \in S)(\forall s \in S)\ s \clubsuit a = s \clubsuit b \Rightarrow\ a = b$

- **kancelativna sa desne strane** $\Leftrightarrow$ $(\forall a, b \in S)(\forall s \in S)\ a \clubsuit s = b \clubsuit s \Rightarrow\ a = b$

- **sa neutralnim elementom** $e \;\Leftrightarrow\; (\exists e\in S)(\forall s\in S)\; s\clubsuit e = e\clubsuit s = s$
- **sa inverznom unarnom operacijom** $^{-1} \;\Leftrightarrow\; (\forall s\in S)(\exists s^{-1}\in S)\; s\clubsuit s^{-1} = s^{-1}\clubsuit s = e$
- **distributivna** *prema operaciji* $\heartsuit : S^2\to S \;\Leftrightarrow$
  $(\forall s_1,s_2,s_3\in S)(s_1\heartsuit s_2)\clubsuit s_3 = (s_1\clubsuit s_3)\heartsuit(s_2\clubsuit s_3)$ *i* $s_3\clubsuit(s_1\heartsuit s_2) = (s_3\clubsuit s_1)\heartsuit(s_3\clubsuit s_2)$.

Na primer, operacija sabiranja $+$ u skupu celih brojeva $\mathcal{Z}$, ima sve navedene osobine za binarnu operaciju iz prethodne definicije. Neutralni elemenat za sabiranje u $\mathcal{Z}$ je 0. Inverzni element za bilo koji ceo broj $x\in\mathcal{Z}$ je njegov suprotni ceo broj $-x\in\mathcal{Z}$.

1.4.3 Osobine binarnih relacija

Binarna relacija $\rho\subseteq S^2$ *na skupu* S *je:*

- **refleksivna** $\;\Leftrightarrow\; (\forall s\in S)\;(s,s)\in\rho$
- **simetrična** $\;\Leftrightarrow\; (\forall s_1,s_2\in S)\;(s_1,s_2)\in\rho\Rightarrow(s_2,s_1)\in\rho$
- **tranzitivna** $\;\Leftrightarrow$
  $(\forall s_1,s_2,s_3\in S)\;((s_1,s_2)\in\rho\wedge(s_2,s_3)\in\rho)\Rightarrow(s_1,s_3)\in\rho$
- **antisimetrična** $\;\Leftrightarrow$
  $(\forall s_1,s_2\in S)\;((s_1,s_2)\in\rho\wedge(s_2,s_1)\in\rho)\Rightarrow s_1=s_2$
- **relacija ekvivalencije** *ako je refleksivna, tranzitivna i simetrična*
- **relacija poretka** *ako je refleksivna, tranzitivna i antisimetrična.*

Klasa ekvivalencije elementa $x\in S$ relacije ekvivalencije $\rho\subset S^2$ je skup

$$K_x^\rho = \{y\in S\mid \quad x\rho y\}.$$

Primeri: Osnovni primeri relacija ekvivalencije su sve relacije jednakosti: jednakost krvnih grupa na populacionom skupu, jednakost brojeva na nekom brojnom skupu, jednakost tipa automobila na skupu svih automobila... Paralelnost pravih u skupu svih pravih u prostoru, podudarnost geometrijskih objekata, sličnost trouglova su takođe relacije ekvivalencije. Kongruentnost po modulu p, u oznaci $\equiv \pmod{p}$ (dva broja x i y su u relaciji kongruencije po modulu p, odnosno $x\equiv y \pmod{p}$ ako je zadovoljeno da je $p|(x-y)$, tj. x i y imaju jednake ostatke pri deljenju sa p) je takođe relacija ekvivalencije na skupu brojeva. Na primer, na skupu prirodnih brojeva u odnosu na relaciju $\equiv \pmod{2}$ postoje dve klase ekvivalencije: parni i neparni prirodni brojevi.

Relacije poretka su $\leq$, $\geq$, $|$ na nekom skupu brojeva. Podskup (inkluzija) $\subseteq$ na partitivnom skupu $P(I)$ jeste relacija poretka, dok relacija "biti pravi podskup" $\subset$ nije relacija poretka jer nema osobinu refleksivnosti.

1.5 O skupovima brojevima

1.5.1 Skup prirodnih brojeva

Od prvih termina: malo, nekoliko, mnogo... koji su trebali da bliže odrede količinu nečega, do skupa kompleksnih brojeva nastajale su i gasile se mnoge civilizacije. Ipak,

$$\boxed{\text{skup } \textbf{prirodnih brojeva } \mathcal{N} = \{1, 2, 3...\}}$$

pokazao se dovoljan za prebrajanje diskretnih količina.

Istorijski gledano, veoma davno su se koristili i racionalni, iracionalni, a samim tim i realni brojevi. Na primer, iracionalan broj π je Arhimed (3. vek p.n.e) izrazio preko obima upisanih i opisanih pravilnih mnogouglova u krug, a već stari Kinezi (3 vek n.e.) su računali π sa tačnošću do na 7 decimala. Kako su se brojevima pre svega izražavale **mere** (dužina, površina, zapremina) do renesanse su se negativni brojevi uglavnom smatrali fikcijom. Tek krajem XVI veka, u okviru rešavanja kubnih jednačina, stidljivo se pojavljuju kompleksni brojevi. Upotreba kompleksnih brojeva do XVIII veka je bila retka i sa greškama u računu. Oni su bili precizno definisani od strane Gausa.

Na skupu prirodnih brojeva posmatramo dve binarne operacije: sabiranje i množenje. Ove dve operacije su asocijativne, komutativne i važi distributivnost množenja prema sabiranju. Prirodan broj 1 je neutralni elemenat za množenje. Neutralni elemenat za sabiranje je 0 i on ne pripada skupu prirodnih brojeva. Proširen sa 0, skup prirodnih brojeva označavamo sa $\boxed{\mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, 3...\}.}$

Matematička indukcija - jedna metoda dokazivanja

Indukcija lat. inductio, znači zaključivanje iz pojedinačnog o opštem, to je suprotna metoda mišljenja i dokazivanja od dedukcije. Matematičkom indukcijom možemo dokazivati tvrđenja koja su obavezno u funkciji prirodnih brojeva. Tako je u primeru koji sledi indukcijom po prirodnom broju dokazana formula za zbir članova geometrijskog niza. Po realnom parametru se ne može izvoditi indukcija.

U opštem slučaju matematičkom indukcijom dokazujemo neko tvrđenje[6] tipa

$$\forall k \in \mathcal{N} \qquad \text{važi} \quad T(k),$$

u tri tzv. induktivna koraka:

1. korak: Pokazujemo da tvrđenje važi za k=1, tj. da je tačno $T(1)$.
2. korak: Pretpostavimo da je tvrđenje $T(k)$ tačno za neko k, $k \in \mathcal{N}$.
3. korak: Dokažemo da pod pretpostavkom da važi **korak 2.** važi i $T(k+1)$.

Objašnjenje: Ako smo dokazali da iz tačnosti $T(k)$ za posledicu imamo tačnost $T(k+1)$ za svaki prirodan broj k, onda ako pokažemo tačnost $T(1)$ to ima za posledicu $T(2)$ (za k=1), a zatim tačnost $T(2)$ za posledicu ima $T(3)$, zatim tačnost $T(3)$ povlači tačnost $T(4)$... Na ovaj način vidimo da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve.

Primer. Ilustrujmo matematičku indukciju na dokazu sledećeg tvrđenja, koje je formula za zbir prvih $k+1$ članova geometrijskog niza (videti odeljak 1.3.1, ove glave):

$$\forall k \in \mathcal{N} \qquad \sum_{i=0}^{k} a \cdot q^i = a\frac{1-q^{k+1}}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

[6] $T(k)$ može biti formula, nejednačina, jednakost...

Ovde je tvrđenje $T(k)$ formula $\sum_{i=0}^{k} a\cdot q^i = a\cdot\dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$.

1. Tvrđenje za k=1, ima s leve strane oblik $\sum_{i=0}^{1} a\cdot q^i = a+aq$, a sa desne $a\dfrac{1-q^{1+1}}{1-q} = a\dfrac{1^2-q^2}{1-q} = a\dfrac{(1-q)(1+q)}{1-q} = a(1+q)$, što je jednako. Znači $T(1)$ je tačno.

2. Pretpostavimo da važi za neko $k,\ k\in\mathcal{N}$, formula $T(k)$.

3. Da vidimo čemu je jednako $T(k+1)$. Levu stranu možemo razbiti na dva sabirka a zatim iskoristiti pretpostavku **koraka 2.**:

$$\sum_{i=0}^{k+1} a\cdot q^i = \sum_{i=0}^{k} a\cdot q^i \ +\ aq^{k+1} \ =\ a\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \ +\ aq^{k+1}.$$

Dalje, prostim računom imamo

$$a\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \ +\ aq^{k+1} = a\frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}-q^{k+2}}{1-q} = a\frac{1-q^{k+2}}{1-q}.$$

Spajanjem početka i kraja ovog niza jednakosti zaista dobijamo da je tačno tvrđenje $T(k+1)$.

Napomena. Prvi korak matematičke indukcije je najčešće trivijalan. U trećem koraku je neophodno iskoristiti pretpostavku drugog koraka.

1.5.2 Celi brojevi

Ukoliko želimo da imamo “jače” osobine za operaciju sabiranja, odnosno ukoliko hoćemo da imamo rešenje po nepoznatoj x, za svaku algebarsku jednačinu oblika:
1) $\qquad x+a=b \quad a,b\in\mathcal{N}$
(koja u skupu $\mathcal{N}$ ima rešenje samo za $a<b$) moramo proširiti skup prirodnih brojeva $\mathcal{N}$ na

$\boxed{\text{skup } \textbf{celih brojeva } \mathcal{Z}=\mathcal{N}\cup\{0\}\cup(-\mathcal{N}),}$ gde je $-\mathcal{N}=\{-n, n\in\mathcal{N}\}$ i

$-n$ je rešenje jednačine $x+n=0$.

U strukturi $(\mathcal{Z},+)$ dodatno važi da svaki element iz skupa celih brojeva ima svoj suprotan ceo broj za inverzni u odnosu na operaciju sabiranja: $x+(-x)=0,\ x\in\mathcal{Z}$. Rešenje jednačine 1) u skupu $\mathcal{Z}$ se dobija kao $b+(-a)$. U skupu celih brojeva se može definisati **apsolutna vrednost** broja kao unarna operacija

$$|x| = \begin{cases} x,\ x\geq 0,\\ -x,\ x<0\end{cases}$$

Ova unarna operacija prema sabiranju i množenju se odnosi po sledećim pravilima:
1. $\quad |x+y|\leq|x|+|y| \qquad$ (**nejednakost trougla**)
2. $\quad |x\cdot y| = |x|\cdot|y|$
3. $\quad |x-y|\geq ||x|-|y||$

1.5.3 Racionalni brojevi

Operacija množenja na skupu $\mathcal{Z}$ nema novih osobina. Ali, međutim jednačinu
2) $\qquad x \cdot a = b \quad a, b \in \mathcal{Z} \;$ i $a \neq 0$
ne možemo da rešimo u okviru skupa celih brojeva, sem u slučajevima kada je zadovoljeno da $a|b$. Zato proširujemo skup celih brojeva na

$$\boxed{\text{skup } \textbf{racionalnih brojeva } \mathcal{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in \mathcal{Z},\ y \in \mathcal{N} \right\}.}$$

Rešenje jednačine 2) u skupu $\mathcal{Q}$ se dobija kao $\frac{b}{a}$. Kako sada svaki broj oblika $\frac{x}{y}$ iz skupa $\mathcal{Q} \setminus \{0\}$ ima svoj inverzni u odnosu na operaciju množenja: $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$.

U ovako definisanom skupu racionalnih brojeva javlja se potreba (zbog različitih zapisa jednakih brojeva, npr., $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = ...$) da se definiše kada su dva racionalna broja jednaka:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; a \cdot d = c \cdot b}. \qquad \text{Slično, } \boxed{\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; a \cdot d \leq c \cdot b}.$$

Skup prirodnih (celih) brojeva nije imao osobinu da se između bilo koja dva različita prirodna (cela) broja nalazi prirodan (ceo) broj. Međutim, ovakvu osobinu ima skup racionalnih brojeva:

Za bilo koja dva različita racionalna broja postoji racionalan broj koji je između njih.

Dokaz. Neka su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dva racionalna broja pri čemu je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; a \cdot d < c \cdot b$. Tada racionalan broj $\frac{a+c}{b+d}$ jeste između njih: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Zaista, iz sledećeg niza ekvivalentnih nejednakosti imamo:
$a \cdot d < c \cdot b \;\Leftrightarrow\; a \cdot d + c \cdot d < c \cdot b + c \cdot d \;\Leftrightarrow\; (a+c) \cdot d < c \cdot (b+d) \;\Leftrightarrow\; \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Na sličan način, pokazuje se i druga zahtevana nejednakost. $\square$

Posledica prethodne teoreme je da se između svaka dva različita racionalna broja nalazi beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Decimalni zapis racionalnih brojeva

Svaki racionalan broj može se poznatim postupkom deljenja brojioca sa imeniocem svesti na tzv. *decimalni zapis* sa konačno ($\frac{1}{4} = 0,25$) ili beskonačno ($\frac{1}{6} = 0,3333... = 0,\dot{3}$ ili $\frac{13}{7} = 1,85714285714... = 1,\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}$) mnogo decimalnih mesta koja se počevši od neke pozicije periodično ponavljaju. Iznad cifara koje se ponavljaju stavljamo tačke da bismo označili period ponavljanja.

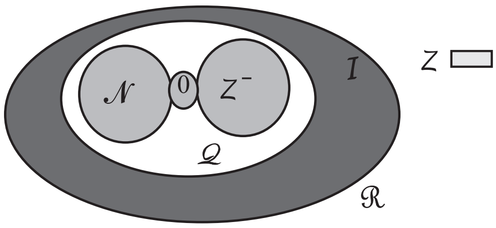
1.5.4 Realni brojevi

Iako su racionalni brojevi "gusti", oni ipak nisu dovoljni da izraze čak ni dužine, a kamoli površine i zapremine. Recimo, dužina dijagonale jediničnog kvadrata nije racionalan broj, kako sledi iz sledećeg stava.

Stav. *Ne postoji racionalan broj x tako da je $x^2 = 2$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji racionalan broj $\frac{a}{b}$ tako da je $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, pri čemu bez umanjenja opštosti možemo uzeti da su a i b uzajamno prosti. Tada je $a^2 = b^2 \cdot 2$, što implicira da je a paran broj. Neka je $a = 2k, k \in \mathcal{Z}$, tada je $4 \cdot k^2 = 2 \cdot b^2$ sledi da je i b paran broj. Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom da su a i b uzajamno prosti. $\square$

Na osnovu prethodnog stava, rešenja $\sqrt{2} = 1,4142135...$ i $-\sqrt{2}$ jednačine $x^2 = 2$ nisu racionalni brojevi, kao što racionalni brojevi nisu ni $\pi = 3,14...e = 2,718281....$ Iracionalni brojevi su i $\sqrt{5} = 2,2360679775...$, $\sqrt{3} = 1,73205080757...$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ ... (iracionalnih brojeva ima više nego racionalnih).



Slika 1. Skupovi brojeva

Zaključno, svi brojevi koji u decimalnom zapisu imaju beskonačno mnogo decimala koje nemaju periodično ponavljanje su **iracionalni brojevi**. Skup iracionalnih brojeva označavamo sa $\mathcal{I}$.

Skup **realnih brojeva**, $\mathcal{R}$, je unija disjunktnih skupova racionalnih i iracionalnih brojeva

$$\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{I} \cup \mathcal{Q}.}$$

Inkluzivni odnosi ($\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}, \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{R}$) definisanih skupova su Venovim dijagramom predstavljeni na slici 1.

1.5.5 Kompleksni brojevi

U skupu realnih brojeva nema rešenja algebarska jednačina $x^2 = -1$. Problem prevazilazimo definisanjem **imaginarne jedinice** $\boxed{i^2 \overset{def}{=} -1}$. Skup **kompleksnih brojeva** je

$$\boxed{\mathcal{C} = \{z | z = x + iy, \quad x, y \in \mathcal{R}\}.}$$

Ako je $y = 0$ dobijamo skup realnih brojeva.

Na ovaj način, rešenja jednačine $2x^2+4x+6 = 0$, su $\dfrac{-4 \pm \sqrt{16-48}}{4} = -1 \pm \sqrt{2}i$. Ova rešenja su konjugovano kompleksni brojevi. Uopšte, **konjugovano kompleksni** brojevi z i $\overline{z}$ su oblika $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$ gde su $x, y \in \mathcal{R}$.

Postoji više ekvivalentnih načina zapisivanja kompleksnih brojeva. Dva od njih su:
1. $z = x + iy \qquad x, y \in \mathcal{R}$, po definiciji skupa $\mathcal{C}$;
(koordinate ovako zapisanog kompleksnog broja su (x, y), sl. 2.a)
2. $z = (r, \phi)$, $r \in \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$, $\phi \in [0, 2\pi)$
(Polarne koordinate kompleksnog broja sl. 2.b)

Geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva

Slika 2. a) Gausova ravan b) Polarni koordinatni sistem

U Gausovom koordinatnom sistemu (sl. 2.a) imamo dve ortogonalne realne ose. Horizontalna osa nosi vrednost **realnog dela** x kompleksnog broja $z = x + iy$, a vertikalna osa je nosač **imaginarnog dela** y. Pišemo, $Re(z) = x$ i $Im(z) = y$. Tako je kompleksan broj z tačka u ravni sa koordinatama $(Re(z), Im(z)) = (x, y)$.

Kompleksan broj u polarnom koordinatnom sistemu je tačka u ravni sa koordinatama $z = (r, \phi)$.

Radijus ili **moduo** r kompleksnog broja je njegovo rastojanje od koordinatnog početka, dok je ϕ **argument** ili **ugao** koji radijus zaklapa sa pozitivnim delom x-ose. Konjugovano kompleksni broj kompleksnog broja z se u opštem slučaju označava sa $\overline{z}$. Konjugovano kompleksni broj kompleksnog broja $z = (r, \phi)$ je $\overline{z} = (r, -\phi)$ (sl. 2.b).

Moduo kompleksnog broja $z = x+iy$ označavamo sa $|z|$ i on je jednak $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, i predstavlja rastojanje tačke z od koordinatnog početka. Ako želimo da iz Gausove ravni pređemo u polarni koordinatni sistem za kompleksni broj $z = x + iy$ polarne koordinate su $(|z|, \phi)$, gde je ugao $\phi = \text{arctg}\, \frac{y}{x}$. Suprotno, ako iz polarnog koordinatnog sistema prelazimo u Gausovu ravan, za kompleksni broj $z = (r, \phi)$ koordinate u Gausovoj ravni su $x = r \cdot \cos\phi$ i $y = r \cdot \sin\phi$ (uporedite a) i b) na sl. 2).

1.6 Niz brojeva

Niz brojeva je preslikavanje skupa prirodnih brojeva ili skupa $\mathcal{N}_0$ u neki skup brojeva. Na primer, preslikavanje $\mathbf{a} : \mathcal{N} \to \{-1, 1\}$ po formuli $\mathbf{a}(n) = (-1)^n$, je niz brojeva $-1, 1, -1, 1, -1, 1....$ Formula $\mathbf{a}(n) = a_n = (-1)^n$, $n \in \mathcal{N}$, se naziva opštim članom niza, a slike preslikavanja $\mathbf{a}$ su -1 i 1, i oni su članovi niza.

1.6.1 Geometrijski i aritmetički niz

Niz brojeva:

$$a_1, a_2, a_3 ... a_n ...$$

oblika

$$a, \quad a\cdot q, \quad a\cdot q^2, \quad a\cdot q^3, \quad a\cdot q^4 ... \; aq^n ...$$

pri čemu su $a \neq 0$ i $q \neq 1$ realni brojevi, nazivamo **geometrijskim nizom**. Brojeve koji učestvuju u nizu nazivamo **članovi** niza. Svi članovi niza imaju isti oblik: $a_n = aq^n$, $n \in \mathcal{N}_0$, pri čemu je eksponent n prirodan broj ili nula. Član $a_n = aq^n$ nazivamo **opštim članom niza**. Svaki geometrijski niz možemo kraće zapisati preko njegovog opšteg člana. Broj q nazivamo **količnikom** geometrijskog niza jer je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ za sve $n \in \mathcal{N}_0$. Tako bismo niz $3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{3}{16}...$ kraće zapisali kao niz $3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathcal{N}_0$. Tako su sledeći nizovi brojeva:

a: 1, 3, 9, 27, 81...
b: 5, 10, 20, 40, 80...
c: 1, 0,2, 0,04, 0,008, 0,0016...
geometrijski za parametar a redom jednak 1, 5 i 1 dok je parametar q redom jednak 3, 2 i 0,2.

Formula za zbir prvih k članova geometrijskog niza je,

$$\sum_{i=0}^{k-1} aq^i = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + ... + a\cdot q^{k-1} = a\frac{1-q^k}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Dokaz ove formule je izveden matematičkom indukcijom u prethodnom odeljku.

Na ovaj način brzo sabiramo veći broj članova geometrijskog niza na primer, $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{10} = \dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.

ili recimo

$$4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} = 4\cdot\frac{1-(\frac{1}{5})^4}{1-\frac{1}{5}} = 4\cdot\frac{\frac{624}{5^4}}{\frac{4}{5}} = \frac{624}{125}.$$

Aritmetičkim nizom nazivamo niz brojeva oblika

$$a, \; a+d, \; a+2d, \; a+3d, \; a+4d... \; a+nd...$$

pri čemu su a i d realni brojevi i $d \neq 0$. Svaka dva susedna člana aritmetičkog niza se razlikuju za d. Opšti član aritmetičkog niza je oblika $a_n = a + nd$, $n \in \mathcal{N}_0$.

Aritmetički nizovi su na primer:

a: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13... 1+2n...
b: 3,4, 2,4, 1,4, 0,4, −1,4, −2,4, −3,4... 3,4 −n...
i njih na kraći način možemo da zapišemo pomoću opšteg člana kao niz $a_n = 1 + 2n$, $n \in \mathcal{N}_0$, odnosno kao niz $b_n = 3,4 - n$, $n \in \mathcal{N}_0$.

Zbir prvih n članova aritmetičkog niza se računa po formuli

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a+id) = n\cdot a + d\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(a_0+a_n)}{2}.$$

Znači, zbir prvih n članova aritmetičkog niza se računa tako što saberemo prvi i poslednji član, i taj zbir pomnožimo sa $n/2$. Tako je zbir prvih 7 članova ($n = 6$) niza

$a_n = 3 + 2n, \quad n \in \mathcal{N}_0 \ (a = 3, \ d = 2,)$

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \frac{7 \cdot (3 + 15)}{2} = 63.$$

1.6.2 Osobine niza

Neki nizovi su takvi da im je svaki sledeći član veći od prethodnog. Njih zovemo **rastući** nizovi. Slično, **opadajući** nizovi su oni kod kojih je svaki sledeći član manji od prethodnog.

Niz je **konvergentan** ukoliko članovi niza *teže* (*konvergiraju*) ka *fiksnom* realnom broju, kada indeks niza n teži ∞ (neograničeno raste). Taj broj zovemo *granica* (limes) niza i precizno je definisana u nastavku.

Članovi niza **b**: $\frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}...$ su svi pozitivni, manji od 1 i prilično brzo se smanjuju, pa je jasno da kada n teži ∞ opšti član niza **b** teži ka 0. Sa druge strane, vrednosti članovi niza **a**: 1, -1, 1, -1... ne zavise od veličine indeksa n, već samo od njegove parnosti, i očigledno opšti član a_n ne teži jednom fiksnom realnom broju. Za niz **c**, sa opštim članom $c_n = \sin n, \ n \in \mathcal{N}$, nije jednostavno utvrditi da li ima granicu ili ne.

Niz **a konvergira** ka **granici** g, što označavamo sa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g, \quad \text{ili sa} \quad a_n \to g \text{ kad } n \to \infty,$$

ako za svaki pozitivan realan broj ϵ, postoji indeks niza $n_0 \in \mathcal{N}$, tako da *svi članovi niza sa indeksom većim od* n_0 pripadaju intervalu $(g - \epsilon, g + \epsilon)$, tj. $|g - a_n| < \epsilon, \ \forall n \geq n_0$.

Ovaj otvoreni interval je podskup skupa realnih brojeva, i naziva se ϵ **okolina broja** g. U ϵ okolini broja g su svi realni brojevi čija je udaljenost od g manja od ϵ. Kako ϵ može biti veoma mali pozitivan broj, na primer $10^{-1}, 10^{-5}, 10^{-12}$... sledi da kada postoji granica niza, članovi niza se "neograničeno zgušnjavaju" oko granice. Međutim "zgušnjavaje" oko nekog broja ne obezbeđuje uvek postojanje granice niza. Tako niz

p: $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 9, \frac{1}{8}, 27, \frac{1}{16}...$

ima neograničeno rastuće neparne članove $p_1, p_3, p_5...$, a parni članovi $p_2, p_2, p_6...$ se "zgušnjavaju" ka 0, ali 0 nije granica ovog niza. Broj 0 je tačka nagomilavanja ovog niza. Ukoliko u *svakom intervalu* koji sadrži broj **t** ima bezbroj članova nekog niza, onda je broj **t tačka nagomilavanja** tog niza. Tako niz **a**: 1, -1, 1, -1... ima dve tačke nagomilavanja 1 i -1.

Niz je **ograničen odozdo** ukoliko postoji realan broj od koga su svi članovi niza veći. Sledeći nizovi su:
a: 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7...
b: 1, 2, 3, 4...
c: -1 -2, -3, -4, -5...
a neograničen i odozgo i odozdo, **b** neograničen odozgo i ograničen odozdo, a niz **c** neograničen odozdo i ograničen odozgo.

Niz može imati najviše jednu granicu, dok može imati više tačaka nagomilavanja. Kako je tačka nagomilavanja niza realan broj u čijoj *svakoj okolini* se nalazi bezbroj članova tog niza, nizovi **a**, **b** i **c** nemaju tačku nagomilavanja, dok niz **d**: 1, 0,-1, 1, 0, -1, 1, 0, -1... ima tri tačke nagomilavanja 1, 0 i -1. Iz ovog primera nam je jasno da niz može imati bilo koji konačan broj tačaka nagomilavanja. Međutim granica niza, ukoliko postoji, je jedinstvena. Ukoliko niz ima samo jednu tačku nagomilavanja, ona može, ali i ne mora biti njegova granica. Niz **p**: $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 9, \frac{1}{8}, 27, \frac{1}{16}$... ima jedinstvenu tačku nagomilavanja koja nije njegova granica. Dodatno o nizu pogledajte u poglavlju 10.1, a zatim nakon uputstva u sledećem poglavlju rešite teorijska pitanja o nizu.

1.7 Kako rešavati teorijska test pitanja?

Teorijska test pitanja su rečenice za koje treba utvrditi da li su tačne ili ne. Rečenice su netačne ukoliko može da se nađe primer kada je opšte tvrđenje u rečenici netačno ili ukoliko je posledica u rečenici netačna a pretpostavka tačna ili ukoliko definicija nekog pojma nije precizna. U bar 50% slučajeva rečenice su konkretni (jednostavniji) zadaci za koje treba proveriti da li su tačno rešeni. Rešenje svake rečenice je dato na desnoj margini rečenice. Ako je rečenica tačna oznaka na margini je $\top$, a ako je rečenica netačna oznaka je $\perp$. Teorijska test rečenica
"*Niz 2,* $-4, 8, -16$... *sa opštim članom* $-(-2)^n$ $n \in \mathcal{N}$ *je geometrijski niz.*"
je tačna. Ova rečenica spada u konkretne zadatke.

Čest oblik teorijskih pitanja su implicitne rečenice. Implicitne rečenice mogu da sadrže veznik *ako* (alternative za *ako* su *ukoliko*, *kada*, *pretpostavka je...*) ili *tada* (alternative za *tada* su *onda*, *sledi*, *ima za posledicu...*). Implicitna rečenica je netačna ukoliko možemo da nađemo primer u kome je pretpostavka tačna a posledica netačna.

Ukoliko se rečenica sastoji od dve ili više tvrdnji odvojenih zarezom ili veznikom *i* ili veznicima *ni - ni* u pitanju su konjuktivne rečenice koje su tačne jedino ukoliko su sve tvrdnje u rečenici tačne. Tako je na primer, rečenica
"*Niz 2,* $-4, 8, -16$... *nije ni aritmetički ni geometrijski, niti raste niti opada, i neograničen je i odozgo i odozdo.*"
konjuktivna i ima šest tvrdnji od kojih samo jedna nije tačna (niz jeste geometrijski), te je i cela rečenica netačna.

Rečenica sa dva veznika *ili ... ili ...* je eksluzivno disjunktivna (tačna je jedino ukoliko je tačno jedna od dve tvrdnje u takvoj rečenici tačna) ili sa jednim veznikom *ili* disjunktivna (tačna je ukoliko je bar jedna od tvrdnji u takvoj rečenici tačna). Tako je na primer, rečenica
"*Svaki linearni sistem sa 6 jednačina i 2 nepoznate može biti ili neodređen ili protivurečan.*"
ekskluzivno disjunktivna koja je tačna jer bilo koji sistem linearnih jednačina sa 6 jednačina i 2 nepoznate nikad ne može biti određen. Dok je rečenica
"*Determinanta je jednaka nuli ako su dve kolone proporcionalne ili dve vrste proporcionalne.*"
je implicitno disjunktivna. Pretpostavka u prethodnoj rečenici "*dve kolone su proporcionalne ili su dve vrste proporcionalne*" je disjunktivnog oblika i može da se realizuje ukoliko su oba ili samo jedan od dva uslova ispunjeni, a u svim tim slučajevima posledica je da je determinanta jednaka nuli, te je rečenica tačna.

Rečenice ekvivalencije su obavezne kod definicija, a moguće su i kod nekih tvrđenja. One sadrže veznik *akko* (skraćenica od *ako i samo ako*) ili reči *to znači* ili *ekvivalentno...* Oba dela rečenice ekvivalencije moraju u isto vreme da budu tačna ili netačna da bismo

rečenica bila tačna. Tako je rečenica
"*Svaki sistem linearnih jednačina je saglasan akko je određen.*"
netačna rečenica ekvivalencije jer postoji sistem koji je saglasan a nije određen.

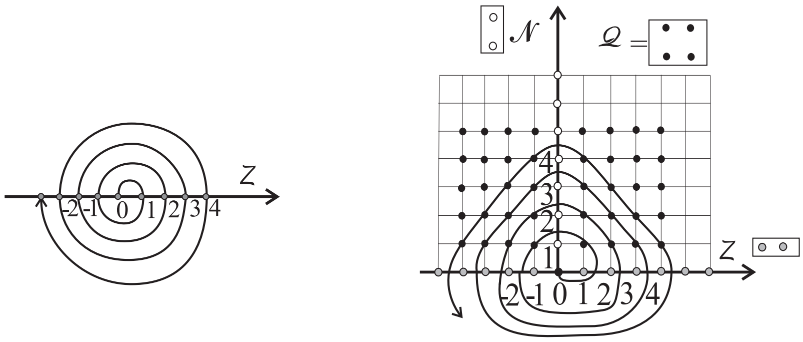
1.8 Teorijska pitanja

1.5. Niz sa članovima 3, 3, 3... 3... je geometrijski.	$\perp$
1.6. Niz sa članovima 3, 3, 3, ... 3... je aritmetički.	$\perp$
1.7. Niz sa članovima 3, 6, 9, 15... je rastući aritmetički niz.	$\perp$
1.8. Niz 2, -10, 50... $2{\cdot}(-5)^n$... je geometrijski.	$\top$
1.9. Niz sa članovima 3, 6, 9... $3{\cdot}n$... je rastući aritmetički niz.	$\top$
1.10. Niz sa članovima -3, -6, -12... je rastući geometrijski niz.	$\perp$
1.11. Niz 2, $-4, 8$... .. $-(-2)^n$... nije ni aritmetički ni geometrijski, niti raste niti opada.	$\perp$
1.12. Niz 2,$-4, 6, -8$... nije ni aritmetički ni geometrijski, niti raste niti opada.	$\top$
1.13. Niz **a** : 5, 4, 3, 2, 1... sa opštim članom $a_n = 5 - n$, $n \in \mathcal{N}_0$ je aritmetički.	$\top$
1.14. Niz **a** : 5, 4, 3, 2, 1... sa opštim članom $a_n = 5 - n$, $n \in \mathcal{N}$ je geometrijski.	$\perp$
1.15. Niz **a** : 2, 4, 8, 16... sa opštim članom $a_n = 2n$, $n \in \mathcal{N}$ je geometrijski.	$\perp$
1.16. Niz **a**: 1, -11, 121... sa opštim članom $(-11)^n$, $n \in \mathcal{N}_0$ je aritmetički.	$\perp$
1.17. Niz **a** : 5, 6, 7, 8, 9... sa opštim članom $a_n = 5 + n$, $n \in \mathcal{N}_0$ je geometrijski.	$\perp$
1.18. Niz zadat opštim članom $\mathbf{g}(n) = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathcal{N}$ je opadajući.	$\perp$
1.19. Niz **a** : $\frac{1}{2}$, -1, 4, -8, 16,... sa opštim članom $a_n = (-2)^n$, $n \in \mathcal{N}_0$ je geometrijski.	$\perp$
1.20. Niz **a**: 2, -10, 50... sa opštim članom $2 \cdot (-5)^n$, $n \in \mathcal{N}_0$ je geometrijski.	$\top$
1.21. Niz **a** : $1, -1, -3, -5$... sa opštim članom $3 - 2 \cdot n$, $n \in \mathcal{N}$ je aritmetički.	$\top$
1.22. Niz **a**: 5, 3, 1, $-1, -3, -5$... sa opštim članom $7 - 2 \cdot n$, $n \in \mathcal{N}_0$ je aritmetički.	$\perp$
1.23. Niz **a**: $11, -1, -13, -25$... je aritmetički, opadajući niz sa opštim članom $23 - 12 \cdot n$, $n \in \mathcal{N}$.	$\top$
1.24. Niz **a**: $11, -1, -13, -25$... je aritmetički, opadajući niz sa opštim članom $23 - 12 \cdot n$, $n \in \mathcal{N}_0$.	$\perp$
1.25. Niz **a**: 0, -11, -22... je opadajući aritmetički sa opštim članom $(-11) \cdot n$, $n \in \mathcal{N}_0$.	$\top$
1.26. Niz **g**: 1, -11, 121... je geometrijski sa opštim članom $(-11)^n$, $n \in \mathcal{N}_0$.	$\top$
1.27. Niz 2, $-4, 6, -8, 10, -16$... nije ni aritmetički ni geometrijski, niti raste niti opada, i neograničen je i odozgo i odozdo.	$\top$
1.28. Niz $-2, 4, -6, 8$... nije ni aritmetički ni geometrijski, niti raste niti opada, i neograničen je i odozgo i odozdo.	$\top$
1.29. Niz 2, 4, 6, ... je aritmetički niz ograničen odozdo i neograničen odozgo, čiji je zbir prva četiri člana jednak 2+4+6+8=20.	$\top$

1.30. Niz 2, 4, 8... .. je geometrijski niz, ograničen odozdo i neograničen odozgo, čiji je zbir prva četiri člana jednak 2+4+8+16=30.	$\top$
1.31. Zbir prva 4 člana geometrijskog niza 2, -10, 50... je jednak $2-10+50=42$.	$\perp$
1.32. Zbir prva četiri člana aritmetičkog niza 1, 3, 5... je jednak 1+3+5+7=16.	$\top$
1.33. Zbir prva 4 člana geometrijskog niza 2, -8, 32... je jednak $2-8+32-128=-102$.	$\top$
1.34. Zbir prvih 11 članova geometrijskog niza je $1-5+25-125+...-5^{11}=\dfrac{1-(-5)^{11}}{1-(-5)}$.	$\perp$
1.35. Zbir prvih 12 članova geometrijskog niza je $1-5+25-125+...-5^{11}=\dfrac{1-(-5)^{12}}{6}$.	$\top$
1.36. Važi $2-10+50-250+...-2\cdot 5^{11}=2\cdot\dfrac{1-(-5)^{12}}{6}$.	$\top$
1.37. Važi 3+6+12+24+...+3$\cdot 2^{20}$=3145725.	$\perp$
1.38. Zbir prvih 21 članova geometrijskog niza $g_n = 3\cdot 2^n$, $n\in\mathcal{N}_0$ je 3+6+12+24+...+3$\cdot 2^{20}$=6291453.	$\top$
1.39. Važi 123+124+125+...+877=377500.	$\top$
1.40. Zbir prvih 8 članova geometrijskog niza 2, -10, 50... je jednak 65104.	$\perp$
1.41. Zbir prvih 8 članova geometrijskog niza 2, -10, 50... je jednak -130208.	$\top$
1.42. Važi 1+3+5+7+...+333=15280.	$\perp$
1.43. Zbir prvih 7 članova geometrijskog niza 2, -10, 50... je jednak -65104.	$\perp$
1.44. Niz $f(n)=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n\in\mathcal{N}$ ima 2 tačke nagomilavanja.	$\perp$
1.45. Niz $f(n)=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n\in\mathcal{N}$ ima jednu tačku nagomilavanja koja se poklapa sa granicom.	$\top$
1.46. Niz $-1,1,-1,1...$ ima dve tačke nagomilavanja.	$\top$
1.47. Svaki rastući niz ograničen odozgo ima granicu.	$\top$
1.48. Svaki opadajući niz ograničen odozgo ima granicu.	$\perp$
1.49. Niz $0, 0.3, 0.33, 0.333...$ ima granicu jednaku $\dfrac{1}{3}$.	$\top$
1.50. U svakoj okolini tačke nagomilavanja niza ima bezbroj članova niza.	$\top$
1.51. Za svaku okolinu tačke nagomilavanja niza može da se odredi član niza tako da svi članovi niza koji ga slede pripadaju toj okolini.	$\perp$
1.52. Niz sa opštim članom $e_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$ $n\in\mathcal{N}$ je rastući i oraničen odozgo sa granicom e.	$\top$

1.9 Kardinalnost skupova

Kada skup ima konačan broj elemenata, onda nema dileme o ukupnom broju elemenata (kardinalnosti) takvog skupa. Međutim, kada se posmatraju skupovi sa beskonačno mnogo elemenata, kao što su skupovi $\mathcal{N}, \mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{I}$, prva ideja je da su oni iste kardinalnosti, ali nije tako. U ovom odeljku ćemo pokazati da skupovi prirodnih, celih i racionalnih brojeva imaju istu kardinalnost, dok skupovi iracionalnih, realnih i kompleksnih brojeva imaju međusobno istu, ali striktno veću kardinalnost nego što je kardinalnost, npr, skupa $\mathcal{N}$.



a) b)

Slika 3. Skupovi $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{Q}$ su prebrojivi

Na osnovu sledeće definicije utvrđujemo kada je neki skup sa beskonačno mnogo elemenata:

Skup S je **beskonačan** *ukoliko postoji bijekcija između pravog podskupa skupa S i skupa S.*

Tako je skup prirodnih brojeva beskonačan, jer je preslikavanje $f(n) = 2 \cdot n,\ n \in \mathcal{N}$, bijektivno preslikavanje između svih prirodnih brojeva i parnih prirodnih brojeva, koji su pravi podskup prirodnih brojeva.

Skup prirodnih brojeva $\mathcal{N}$ se naziva *beskonačno prebrojiv* skup, ili samo *prebrojiv* skup, a njegov kardinalni broj (kardinalnost) se označava sa $|\mathcal{N}| = \aleph_0$ i čita se alef[7]-nula.

Skup S je **prebrojiv** *ukoliko postoji bijekcija između skupa S i skupa prirodnih brojeva $\mathcal{N}$.*

Skupovi celih i racionalnih brojeva su prebrojivi.

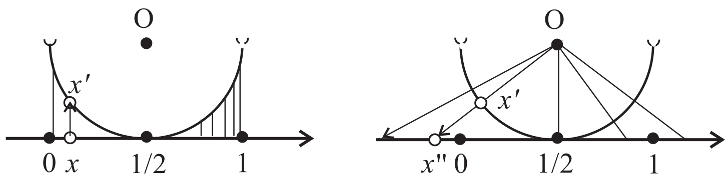
Dokaz. Na slici 3.a je dat šematski prikaz bijektivnog preslikavanja f_1 između skupa celih brojeva i skupa prirodnih brojeva: $f_1(1) = 0, f_1(2) = 1, f_1(3) = -1, f_1(4) = 2...$.

Skup racionalnih brojeva smo definisali $\mathcal{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in \mathcal{Z},\ y \in \mathcal{N} \right\}$. Racionalni brojevi su na sl. 3.b označeni crnim kružićima. Bijektivno preslikavanje f_2 je grafički prikazano na sl. 3.b, krivom linijom koja počinje u koordinatnom početku i redom prolazi kroz sledeće racionalne brojeve: 0, 1/1, -1/1, 2/1, 1/2, -1/2, -2/1, 3/1, 2/2, 2/3, -1/3, -2/2, -3/1... . Tim redom se vrši preslikavanje u skup prirodnih brojeva. □

Skup iracionalnih, a samim tim i skup realnih i kompleksnih brojeva, nisu prebrojivi. Štaviše, ni interval [0,1] nije prebrojiv.

Skup realnih brojeva iz intervala [0,1] nije prebrojiv. Dokaz ovog tvrđenja može da se nađe u [15].

[7] ℵ je prvo slovo hebrejskog pisma.



a) b)

Slika 4. Bijektivno preslikavanje: $(0,1) \to \mathcal{R}$

Postoji bijektivno preslikavanje između skupa realnih brojeva i skupa realnih brojeva iz otvorenog intervala (0,1).

Dokaz. Prvo bijektivno preslikamo bilo koju tačku $x \in (0,1)$ u ortogonalnu projekciju na otvorenu polukružnicu sa centrom u $O = (1/2, 1/2)$ i poluprečnikom $1/2$ (sl. 4.a). Zatim, centralno projektujemo iz O tačku x' sa polukružnice na x'' na realnoj pravoj (sl. 4.b).

Kako je kompozicija bijektivnih preslikavanja bijektivno preslikavanje, na ovaj način je uspostavljena obostrano jednoznačna veza između skupa realnih brojeva iz (0,1) i cele realne ose.

Tako su iste kardinalnosti skup realnih brojeva i njegov pravi podskup interval (0,1). □

Glava 2.

2 Osnovne kombinatorne strukture

Deo kombinatorike opisan u sledećem odeljku predstavlja samo polazne elemente za prebrajanje nekih kombinatornih struktura.

2.1 Neki kombinatorni principi

Prilikom rešavanja zadataka prebrojavanja vrlo često se koriste sledeća četiri principa.

Neka su A i B skupovi bez zajedničkih elemenata (disjunktni skupovi), gde su njihove kardinalnosti redom jednake $|A| = m$ i $|B| = n$. Tada važe prva dva elementarna principa.

Princip 1: *Broj načina da se izabere jedan element iz skupa A* **ili** *iz skupa B je* $\boxed{m+n}$.

Princip 2: *Broj načina da se izabere jedan element iz skupa A* **i** *jedan element iz skupa B je* $\boxed{m \cdot n}$.

Princip 3: *(Dirihleov princip) Ako se $n+1$ elemenat smešta u n kutija tada postoji kutija sa* **bar dva** *elementa.*

Princip 4: *(uključenje-isključenje) Dat je konačan skup S. Na skupu S se razmatra S_i, $i = 1...n$, osobina. Poznato je da: $N(S_i)$, $i = 1...n$, elemenata skupa S ima osobinu S_i, $N(S_i, S_j)$, $i < j$, $i, j = 1...n$, elemenata skupa S ima osobine S_i i S_j... $N(S_1, S_2...S_n)$ elemenata skupa S ima sve razmatrane osobine. Tada je broj elemenata iz S koji imaju bar jednu od osobina S_i, u oznaci $N = N(S_1; S_2; ...S_n)$, jednak:*

$$N = \sum_{i=1}^{n} N(S_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} N(S_i, S_j) + ...(-1)^{n-1} N(S_1, S_2...S_n).$$

Dokaz: Neka skupovi $A_i \subset S$ označavaju redom one podskupove skupa S čiji elementi imaju osobinu S_i. Tada je jasno da: $N(S_i) = |A_i|$, $i = 1...n$, $N(S_i, S_j) = |A_i \cap A_j|$, $i < j$, $i, j = 1...n$... .. $N(S_1, S_2...S_n) = |A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n|$. Sa druge strane je broj elemenata iz S koji imaju bar jednu od osobina S_i jednak kardinalnosti unije $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$. To znači da se četvrti kombinatorni princip svodi na skupovni identitet:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| + ...(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Da bismo ga dokazali primenićemo metodu matematičke indukcije. Za $n = 1$ i $n = 2$ dobijamo redom formule

$|A_1| = |A_1|,$ $\qquad$ $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$

koje su očigledno tačne. Pretpostavimo da je formula tačna za neku vrednost n i dokažimo da je tačna za vrednost $n+1$. Najpre se na osnovu prethodnih identiteta dobija

$$|A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup ... \cup A_n) \cup A_{n+1}| =$$
$$|A_1 \cup ... \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup ... \cup A_n) \cap A_{n+1}|.$$

Poslednji sabirak iz prethodne jednakosti može se na osnovu induktivne pretpostavke prikazati u obliku:

$$|(A_1 \cup ... \cup A_n) \cap A_{n+1}| = |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n+1})| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + ...(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n+1}|.$$

Zato posle dva puta iskorištene indukcijske pretpostavke imamo:

$$|A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| +$$

$$.....(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| + |A_{n+1}| - \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| +$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| - ... + (-1)^n |A_1 \cap ... \cap A_{n+1}| =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n+1} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^n |A_1 \cap ... \cap A_{n+1}|.$$

Ovim je induktivni dokaz završen. □

2.1.1 Permutacije, varijacije i kombinacije

Jedan od glavnih problema u kombinatorici je određivanje broja raznih kombinatornih objekata.

Princip 2 ćemo primeniti više puta u daljem tekstu. Neka je dat n-točlani skup $A_n = \{a_1 ... a_n\}$.

Varijacija *klase k (bez ponavljanja) skupa A_n je svaka uređena k-torka različitih elemenata skupa A_n.*

Ukupan broj V_n^k varijacija k-te klase skupa od n elemenata izračunavamo po formuli:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \tag{1}$$

Permutacija *(bez ponavljanja) nepraznog skupa A_n sa n elemenata je svaka uređena n-torka različitih elemenata skupa A_n.*

Ukupan broj P_n permutacija skupa od n elemenata izračunavamo po formuli:

$$P_n \;=\; V_n^n \;= n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \;=\; n! \tag{2}$$

Primer: Skup od tri elementa $\{a, b, c\}$ ima šest permutacija:
1. a b c 2. a c b 3. b a c 4. b c a 5. c a b 6. c b a.

Pošto permutacija ima veći broj potrebno je uvesti neki sistem za njihovo ispisivanje da bismo bili sigurni da smo ih sve pronašli. Na primer, u tzv. *leksikografskoj* metodi ređanja permutacija - permutacije se slažu kao reči u rečniku, ako su elementi skupa brojevi onda leksikografski redosled podrazumeva uređenost po veličini.

Permutacija p *skupa* $S_n = \{1, 2...n\}$ *je svako bijektivno preslikavanje* $p : \{1, 2...n\} \to \{1, 2...n\}$*. Skup svih permutacija* p *skupa od* n *elemenata označavamo sa* $\mathcal{P}_n$*. Ako je permutacija* $p \in \mathcal{P}_n$ *jednaka* **ciklusu** $(e_1\ e_2...\ e_k)$ *dužine* k *to znači da je* $p(e_i) = e_{i+1}$ *za* $i = 1, 2...k-1$*,* $p(e_k) = e_1$ *i za sve* $e \in (S_n \setminus \{e_1\ e_2...\ e_k\})$ *je* $p(e) = e$*. Ciklus* $(e_1\ e_2)$ $(= (e_2\ e_1))$ *dužine 2 se naziva* **transpozicija** *ili* **inverzija**.

Primer. Neka su p i q permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:
$p = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,1\,2 \end{pmatrix}$ i $q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,1\,3\,4\,5 \end{pmatrix}$, što kraće zapisujemo pomoću ciklusa $p = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$ i $q = (1\ 2)$. Ciklus $p = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$ označava da je slika svakog broja u nizu 1,3,5,2,4 njegov sledbenik, pri čemu je slika poslednjeg elementa u nizu prvi element. Tako je: $p(1) = 3$, $p(3) = 5$, $p(5) = 2$, $p(2) = 4$ i $p(4) = 1$. Elementi koji se ne pojavljuju u ciklusu se preslikavaju sami u sebe. Tako kod ciklusa $q = (1\ 2)$ imamo: $q(1) = 2$, $q(2) = 1$, $q(3) = 3$, $q(4) = 4$ i $q(5) = 5$.

Kompozicija permutacija p i q je permutacija na istom skupu $p \circ g = (1\ 3\ 5\ 2\ 4) \circ (1\ 2) =$[8]$(1\ 4)(2\ 3\ 5)$. Identično preslikavanje id na istom skupu je neutralni elemenat za kompoziciju permutacija. Inverzne pemutacije za p i q su $p^{-1} = (1\ 4\ 2\ 5\ 3), q^{-1} = (12)$. Opštije važi:

Stav. *Ako je permutacija* $p \in \mathcal{P}_n$ *ciklus* $p = (e_1\ e_2...\ e_k)$ *tada je inverzna permutacija* $p^{-1} = (e_k\ e_{k-1}...\ e_1)$*.*

Dokaz. Ako $e \in S_n \setminus \{e_1\ e_2...\ e_k\}$ onda je $p^{-1} \circ p(e) = p^{-1}(p(e)) = p^{-1}(e) = e$. Neka $e \in \{e_1\ e_2...\ e_k\}$. Tada za $e = e_k$ imamo $p^{-1} \circ p(e_k) = p^{-1}(p(e_k)) = p^{-1}(e_1) = e_k$. Za $e = e_i$, $i = 1, 2...k-1$, je $p^{-1} \circ p(e_i) = p^{-1}(p(e_i)) = p^{-1}(e_{i+1}) = e_i$. Tako je $p^{-1} \circ p = (e_k\ e_{k-1}...\ e_1) \circ (e_1\ e_2...\ e_k) = id$. Na sličan način se dokazuje da je $p \circ p^{-1} = id$. □

Jasno je da važe sledeći stavovi:
1. Proizvod dve permutacije na istom skupu je permutacija tog skupa.
2. id je neutralni elemenat za kompoziciju permutacija.

[8]Prvo primenjujemo permutaciju q pa zatim permutaciju p.

3. Svaka permutacija ima inverznu permutaciju nad istim skupom.
4. Asocijativnost kompozicije permutacija je zadovoljena.
(asocijativnost važi opštije za kompoziciju preslikavanja)

Stav. *Svaki ciklus dužine* k *se može predstaviti kao kompozicija* $k-1$ *transpozicije na sledeći način:*

$$(e_1\ e_2 ...\ e_k) = (e_1\ e_k) \circ (e_1\ e_{k-1}) \circ ... \circ (e_1\ e_3) \circ (e_1\ e_2).$$

Parnost permutacije p je broj $Inv(p)$ koji je ukupan broj transpozicija (inverzija) u zapisu permutacije p preko proizvoda transpozicija (prethodni Stav). Za permutaciju p kažemo da je *parna* (*neparna*) ako je broj $Inv(p)$ paran (neparan).

Permutacija $p = (1\ 3\ 5\ 2\ 4) = (1\ 3) \circ (1\ 5) \circ (1\ 2) \circ (1\ 4)$ je parna ($Inv(p)$=4), a $q = (1\ 2)$ je neparna ($Inv(q)$=1). Uopšte, ciklusi parne dužine su neparne permutacije, a ciklusi neparne dužine su parne permutacije na osnovu prethodnog stava.

Kombinacija *k-te klase (bez ponavljanja) skupa A_n je svaki njegov podskup koji sadrži k elemenata.*

Ukupan broj C_n^k kombinacija skupa od n elemenata k-te klase izračunavamo na sledeći način:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \tag{3}$$

Primer. Ako je, na primer $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tada su sve kombinacije treće klase nad ovim skupom jednake svim tročlanim podskupovima skupa A_5:

$$\{1, 2, 3\},\ \{1, 2, 4\},\ \{1, 2, 5\},\ \{2, 3, 4\},\ \{2, 3, 5\},\ \{3, 4, 5\}.$$

Varijacija *klase* k **sa ponavljanjem** *skupa A_n je svaka uređena k-torka elemenata skupa A_n.*

Broj varijacija sa ponavljanjem klase k skupa od n elemenata označavaćemo sa $\overline{V_n^k}$. On je jednak:

$$\overline{V_n^k} = \overbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}^{k \text{ puta}} = n^{k.} \tag{4}$$

Definicijom jednakosti dva skupa onemogućeno je da razlikujemo, npr. sledeće skupove: $\{a, b\}$ i $\{a, a, b, b, b\}$. Znači, ako pri navođenju elemenata skupa neke od njih ponovimo, efekat je isti kao da smo svaki od njih naveli po jedanput. Međutim, u matematici se javlja potreba da se posmatraju kolekcije objekata među kojima ima jednakih. Takvu kolekciju nazivamo **familija** i umesto vitičastih zagrada (jer nije u pitanju skup) koristimo uglaste zagrade, npr. $[a, a, b, b, b]$[9], pri čemu nije bitan raspored elemenata već samo broj pojavljivanja pojedinih elemenata.

Kombinacije sa ponavljanjem klase k skupa A_n su sve k-točlane familije elemenata iz skupa A_n.

[9]Familiju možemo definisati (videti, npr. [3]) i kao preslikavanje ϕ elemenata nekog skupa X u skup nenegativnih celih brojeva. Pri ovakvoj definiciji familije $\phi(x)$ se interpretira kao broj pojavljivanja elementa x iz skupa X u familiji.

Ukupan broj kombinacija sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata označavamo sa $\overline{C_n^k}$, i on je jednak

$$\overline{C_n^k} = \binom{n+k-1}{k}. \tag{5}$$

Ispostavlja se da je broj kombinacija sa ponavljanjem $\overline{C_n^k}$ jednak broju kombinacija bez ponavljanja k-te klase na skupu od $n+k-1$ elementa

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}. \tag{6}$$

Primer. Neka je skup $A_4 = \{1,2,3,4\}$. Tada su sve tročlane familije nad četvoroelementnim skupom A_4 jednake

$$[1,1,1],\ [1,1,2],\ [1,1,3],\ [1,1,4],\ [1,2,3],\ [1,2,4],\ [1,3,4],\ [1,2,2],\ [1,3,3],\ [1,4,4],$$

$$[2,2,2],\ [2,2,3],\ [2,2,4],\ [2,3,4],\ [2,3,3],\ [2,4,4],\ [3,3,3],\ [3,3,4],\ [3,4,4],\ [4,4,4].$$

To su takođe i sve kombinacije sa ponavljanjem treće klase na skupu od 4 elementa. Ukupno ih ima $\overline{C_4^3} = \binom{4+3-1}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20.$

Posmatrajmo sada familiju elemenata $\phi = [a_1, a_1 ... a_2, a_2, .., a_m, a_m ...]$, pri čemu se u familiji ϕ element a_i pojavljuje k_i puta, $i = 1, 2...m$. To znači da se element a_1, u familiji pojavljuje k_1 puta, element a_2, pojavljuje k_2 puta, itd. Neka je ukupan broj elemenata u familiji ϕ jednak $n = k_1 + k_2 + ... + k_m$.

Permutacije sa ponavljanjem *na familiji ϕ sa n elemenata, od kojih su m različitih i redom se ponavljaju k_1, k_2... k_m puta, je svaka* **uređena** *n-torka elemenata iz familije.*

Ukupan broj permutacija sa ponavljanjem k-te klase na familiji sa n elemenata, od kojih su m različitih i redom se ponavljaju k_1, k_2... k_m puta je

$$\overline{P_n}^{k_1,k_2...k_m} = \frac{n!}{k_1!\cdot\ k_2!\cdot ...\cdot k_m!}.$$

Primer. Neka familija ϕ ima tri elementa a i dva elementa b. Sve permutacije sa ponavljanjem pete klase nad ovom familijom su:

aaabb, *aabab*, *aabba*, *abaab*, *ababa*, *abbaa*, *baaab*, *baaba*, *babaa*, *bbaaa*.

Ukupno ih ima $\overline{P_5}^{3,2} = \frac{5!}{3!\cdot\ 2!} = 10.$

2.1.2 Binomni obrazac i Paskalov trougao

Binomni koeficijent n nad k je

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!},\quad k \le n,\ k, n \in \mathcal{N}_0,}$$

gde je $n!$ (čitamo n faktorijel) skraćeni zapis proizvoda

$\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ...\cdot 2\cdot 1.}$ Po definiciji je $0! = 1$.

U skladu sa poznatim obrascima za kvadrat i kub binoma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \cdot a^k \cdot b^{2-k} \quad \text{i}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot a^k \cdot b^{3-k}$$

važi i opštiji obrazac za n-ti stepen binoma, tzv. binomni obrazac, koji se dokazuje indukcijom, koristeći jednakost ◯ datu u daljem tekstu (proverite!).

Binomni obrazac je jednakost oblika:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \text{ , tj.}}$$

$$\boxed{\binom{n}{0} \cdot b^n + \binom{n}{1} \cdot a \cdot b^{n-1} + ... + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{n} \cdot a^n,}$$

gde su $a, b \in \mathcal{C}$ i $n \in \mathcal{N}$.

Paskalov trougao je piramida svih binomnih koeficijenata (sl. 5.b), tako da na vrhu piramide stoji koeficijent $\binom{0}{0}$, ispod vrha, u drugom redu su koeficijenti $\binom{1}{0}$ i $\binom{1}{1}$, zatim u trećem redu su $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ i $\binom{2}{2}$, itd. U opštem slučaju u $n+1$ vrsti su binomni koeficijenti $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$... $\binom{n}{n}$. Svaka vrsta Paskalove piramide počinje i završava se jedinicom jer je $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, za svaki prirodan broj n. Za generisanje Paskalove piramide od vrha naniže najvažnije olakšanje je da svaki novi koeficijent računamo vrlo jednostavno kao zbir dva već poznata koeficijenta iz prethodne vrste, jer je

$$\bigcirc \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad n > 1, \quad k = 1...n-1.$$

Tako smo na slici 5.a) binomni koeficijent 15 iz 7 reda, koji je $15 = \binom{6}{2}$, dobili kao zbir 5+10 binomnih koeficijenata iz prethodnog reda, koji su zapravo $\binom{5}{1}$ i $\binom{5}{2}$.

1	$\binom{0}{0}$
1 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
1 2 1	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
1 3 3 1	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$
1 5 10 10 5 1	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$
1 6 15 20 15 6 1	$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$
.... *a*).............	.... *b*)..................

Slika 5. Paskalov trougao binomnih koeficijenata $-$ dva prikaza

2.2 Teorijska pitanja

2.1. Ima 9 različitih načina da 3 jednaka letka ubacimo u 2 poštanska sandučeta.	$\perp$
2.2. Na 6 različitih načina možemo tri različite čestitke staviti po jednu, u tri različito adresirane koverte.	$\top$
2.3. Ima 9 različitih načina da 2 jednaka letka ubacimo u 3 poštanska sandučeta.	$\perp$
2.4. Na 9 različitih načina možemo tri različita šešira okačiti, na 2 čiviluka.(redosled šešira na jednom čiviluku nije bitan i svi šeširi moraju da se okače)	$\perp$
2.5. Tri različite bunde na 8 različitih načina možemo okačiti na 2 različite vešalice. (redosled bundi na jednoj vešalici nije bitan i sve bunde moraju da se okače)	$\top$
2.6. Na 4 različita načina možemo 3 jednake ogrlice smestiti u 2 različite kutije.	$\top$
2.7. 3 različite povišice možemo na 27 različitih načina dodeliti trojici "zaslužnih" radnika. (jedan radnik može dobiti više povišica)	$\top$
2.8. 3 različite povišice možemo na 27 različitih načina dodeliti trojici "zaslužnih" radnika. (jedan radnik dobija jednu povišicu)	$\perp$
2.9. U 2 jednake bele i 2 jednake zelene saksije možemo 2 roze i 2 plave petonije da zasadimo na 4 različita načina, a na 2 načina da poređamo u niz na balkon već zasađene saksije.	$\perp$
2.10. Ima 9 različitih načina da 3 različitih šešira ostavimo na 2 police.	$\perp$
2.11. U 2 jednake bele i 2 jednake zelene saksije možemo 1 crvenu i 3 plave petonije da zasadimo na 2 različita načina, a na 8 načina da poređamo u niz na balkon već zasađene saksije.	$\perp$
2.12. Broj različitih načina da 3 jednake košulje okačimo na 2 različita ofingera je jednak 4.	$\top$

2.13. Jednu kravu i 3 teleta, koja ne razlikujemo, u štalu sa 4 mesta, možemo da rasporedimo na 4 različita načina.	$\top$
2.14. Broj različitih načina da dve krave i tri teleta smestimo u štalu, sa 5 mesta, pri čemu ne pravimo razliku među mladuncima, niti među kravama, je 8.	$\perp$
2.15. Broj različitih načina da dve krave i tri teleta smestimo u štalu, sa 5 mesta, pri čemu ne pravimo razliku među mladuncima, niti među kravama, je 10.	$\top$
2.16. Broj različitih načina da dve krave i dva teleta smestimo u štalu, sa 5 mesta, pri čemu ne pravimo razliku među mladuncima, niti među kravama, je 12.	$\perp$
2.17. Broj različitih načina da 2 jednake košulje okačimo na 3 različita ofingera je jednak 4.	$\perp$
2.18. Broj različitih načina da po jednu od 3 različite košulje okačimo na 3 različita ofingera je jednak 4.	$\perp$
2.19. Broj različitih načina da na obe ruke, stavimo po jednu, od 3 različite narukvice, je jednak 6.	$\top$
2.20. Broj različitih načina da 2 jednake košulje okačimo na 3 različita ofingera je jednak 6. (na jednom ofingeru može biti 2 košulje)	$\top$
2.21. Na 6 različitih načina možemo 2 zelene i 2 bele žardinjere rasporediti duž staze.	$\top$
2.22. Jednu sadnicu jabuke, jednu sadnicu šljive i jednu sadnicu kruške na 3 različita načina, možemo da zasadimo na 3 različita mesta u voćnjaku.	$\perp$
2.23. Po jednu sadnicu bele, limun-žute i roze ruže na 6 različitih načina, možemo da zasadimo na 3 različita mesta u ružičnjaku.	$\top$
2.24. Četiri sadnice drena koje ne razlikujemo i jednu sadnicu ogrozda na 5 različitih načina, možemo da zasadimo na 5 različitih mesta u voćnjaku.	$\top$
2.25. Dve sadnice jabuke koje ne razlikujemo i dve sadnice šljive koje ne razlikujemo na 6 različitih načina, možemo da zasadimo na 4 različita mesta u voćnjaku.	$\top$
2.26. Ako imamo na raspolaganju 5 roba a zahtevana cena mešavine ovih roba je između 3-će i 4-te robe, tada ima 5 prostih načina mešanja (po 2 od 5 robe).	$\perp$
2.27. U 2 jednake bele i 2 jednake zelene saksije možemo 2 bele i 2 crvene muškatle da zasadimo na 4 različita načina. Muškatle iste boje ne razlikujemo.	$\perp$
2.28. U 3 jednake bele i 2 jednake zelene saksije možemo 2 bele i 3 crvene muškatle da zasadimo na 3 različita načina. Muškatle iste boje ne razlikujemo.	$\top$
2.29. Tačno je $\binom{9876}{9876} = \binom{9876}{0} = 1$.	$\top$
2.30. Tačno je $\binom{9001}{1000} = \binom{9001}{8001}$.	$\top$
2.31. Važi da je: $\binom{9876}{5432} = \binom{9876}{5431} + \binom{9876}{5430}$.	$\perp$
2.32. Jednakost $\binom{9876}{5432} = \binom{9875}{5432} + \binom{9875}{5431}$ je tačna.	$\top$

2.33. Važi da je: $\binom{900}{500} \cdot \binom{800}{500} = \binom{900}{400} \cdot \binom{800}{200}$.	$\perp$
2.34. Važi da je: $\binom{300}{200} \cdot \binom{800}{300} = \binom{300}{100} \cdot \binom{800}{600}$.	$\perp$
2.35. Jednakost $\binom{900}{500} \cdot \binom{800}{800} = \binom{900}{400} \cdot \binom{800}{0}$ je tačna.	$\top$
2.36. Važi da je: $\binom{999}{555} = \binom{999}{554} + \binom{999}{553}$.	$\perp$
2.37. Tačna je sledeća jednakost $\binom{999}{555} = \binom{998}{555} + \binom{998}{554}$.	$\top$
2.38. Važi da je: $\binom{900}{500} + \binom{800}{0} = \binom{900}{400} + \binom{800}{800}$.	$\top$
2.39. Tačno je $\binom{2000}{1111} + \binom{100}{0} = \binom{100}{100} + \binom{2000}{999}$.	$\perp$
2.40. Važi: $\binom{3000}{1999} \cdot \binom{2006}{2006} = \binom{2006}{0} \cdot \binom{3000}{1001}$.	$\top$
2.41. Koeficijenti u binomnom razvoju $(a+b)^6$ su redom 1, 6, 15, 20, 25, 6, 1. (Paskalov trougao)	$\perp$
2.42. Tačno je da je $(b-1)^5 = b^5 - 5b^4 + 10b^3 - 10b^2 + 5b - b$.	$\perp$
2.43. Tačno je da je $(b+1)^5 = b^5 + 5b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 5b + 1$.	$\top$
2.44. Koeficijenti u binomnom razvoju $(a-b)^5$ su redom 1, -6, 15, -20, 15, -6, 1.	$\perp$
2.45. Koeficijenti u binomnom razvoju $(a+b)^6$ su redom 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. (Paskalov trougao)	$\top$
2.46. Ako 10 limuna smeštamo u 2 vrećice tako da u obe imamo bar 1 limun, to možemo uraditi na 10 različitih načina.	$\perp$
2.47. Ako 10 limuna smeštamo u 2 vrećice tako da u obe imamo bar 1 limun, to možemo uraditi na 9 različitih načina.	$\top$
2.48. Ako 1000 semenki smeštamo u 2 vrećice tako da u obe imamo bar 1 semenku, to možemo uraditi na 999 različitih načina.	$\top$
2.49. Ako 50 semenki smeštamo u 2 vrećice tako da u obe imamo bar 1 semenku, to možemo uraditi na 49 različitih načina.	$\top$
2.50. Dirihleov princip glasi: ako $n+1$ kuglicu smeštamo u n kutija tada će bar u jednoj kutiji biti bar 2 kuglice.	$\top$
2.51. Ako 100 klipova kukuruza smestimo u 3 džaka onda će u bar jednom džaku biti bar 34 klipa. (Dirihleov princip)	$\top$
2.52. Ako 2000 semenki bundeve smeštamo u 55 vrećica, onda će uvek, bar u jednoj vrećici, biti bar 37 semenki.	$\top$
2.53. Ako 1090 semenki smeštamo u 33 vrećice, bar u jednoj će biti bar 34 semenke.	$\top$

2.54. Ako 1000 semenki bundeve smeštamo u 32 vrećice, onda će bar u jednoj vrećici, biti bar 32 semenke.	$\top$
2.55. Ako 101 lukovicu lale smeštamo u 5 kesa onda će bar u jednoj kesi biti bar 21 lukovica.	$\top$
2.56. Ako 1000 semenki pistaća smeštamo u 40 vrećica, onda će bar u jednoj vrećici, biti bar 26 semenke.	$\perp$
2.57. Broj različitih načina da od 33 različita cveta izaberemo 3 jednak je broju različitih načina da od 33 cveta izaberemo 30 cvetova.	$\top$
2.58. Broj različitih načina da od 1000 njiva izaberemo 10 je jednak broju različitih načina da od 1000 njiva izaberemo 990 njiva.	$\top$
2.59. Broj različitih načina da od 100 ovaca izaberemo 5 je jednak broju različitih načina da od 100 ovaca izaberemo 95.	$\top$
2.60. Broj različitih načina da od 100 njiva izaberemo 10 je jednak broju različitih načina da od 100 njiva izaberemo 80 njiva.	$\perp$
2.61. Kombinacije razlikujemo od permutacija i varijacija po tome što je bitan raspored elemenata koje biramo.	$\perp$
2.62. U kombinacijama nije bitan raspored elemenata.	$\top$
2.63. U permutacijama i varijacijama nije bitan raspored elemenata.	$\perp$
2.64. U permutacijama sve elemente koje imamo i raspoređujemo.	$\top$
2.65. U varijacijama bez ponavljanja broj pozicija na koje raspoređujemo n elemenata je manji od n.	$\top$
2.66. Kod varijacija bez ponavljanja broj elemenata koje raspoređujemo je uvek manji od ukupnog broja elemenata sa kojima raspolažemo ($k < n$).	$\top$
2.67. Kod varijacija sa ponavljanjem, broj pozicija za raspoređivanje n elemenata mora biti uvek manji od broja elemenata.	$\perp$
2.68. Permuracije razlikujemo od kombinacija i varijacija po tome što raspoređujemo sve elemente sa kojima raspolažemo.	$\top$
2.69. U permutacijama sa ponavljanjem nije bitan međusobni raspored jednakih elemenata.	$\top$
2.70. Kod varijacija sa ponavljanjem, broj pozicija za raspoređivanje može biti bilo koji prirodan broj.	$\top$
2.71. Ako je presek skupova A i B neprazan, skup A ima m elemenata, a skup B n elemenata, tada je broj različitih mogućnosti da izaberemo jedan element iz unije skupova A i B jednak $m + n$.	$\perp$
2.72. Ako je presek skupova A i B prazan, skup A ima m elemenata, a skup B n elemenata, tada je broj različitih mogućnosti da izaberemo jedan element iz skupa A ili skupa B manji od $m + n$.	$\perp$
2.73. Ako je presek skupova A i B prazan, skup A ima m elemenata, a skup B n elemenata, tada je broj različitih mogućnosti da izaberemo jedan element iz skupa A i jedan elemenat iz skupa B manji od $m \cdot n$.	$\perp$

2.74. Ako je presek skupova A i B neprazan, skup A ima m elemenata, a B n elemenata, tada je broj različitih mogućnosti da izaberemo jedan element iz skupa A i jedan elemenat iz skupa B jednak $m \cdot n$.	$\perp$
2.75. Ako su skupovi A i B disjunktni, skup A ima m elemenata, a B n elemenata, tada je broj različitih mogućnosti da izaberemo jedan element iz skupa A i jedan elemenat iz skupa B jednak $m \cdot n$.	$\top$
2.76. Ako je od 100 studenata I godine, Agroekonomskog smera, u januarskom roku Matematiku položilo 80, Ekonomiju 30, a Sociologiju 50 studenata, a po 30 studenata je položilo po dva od tri ispita, a 20 je položilo sva tri, tada su svi studenti položili bar jedan od tri razmatrana ispita.	$\perp$
2.77. Neka je od 56 studenata I godine Departmana za poljoprivrednu tehniku u januarskom roku Matematiku položilo 30, Ekonomiju 15, a Sociologiju 30 studenata. Ako je po 15 studenata položilo po dva od razmatrana tri ispita, dok je 13 studenata položilo sva tri ispita, tada 13 studenata poljoprivredne tehnike nije položilo ni jedan od razmatrana 3 ispita u januarskom ispitnom roku.	$\perp$
2.78. Ako je od 60 studenata stočarskog smera u januarskom roku Matematiku položilo 20, Ekonomiju 25, a Sociologiju 30, a po 17 studenata je položilo po 2 od tri ispita, a 15 je položilo sva tri, tada nijedan ispit nije položio 21 student.	$\top$

2.3 Latinski kvadrati, dizajni i planiranje eksperimenata

Dizajni (blok-šeme) i latinski kvadrati sem u planiranju eksperimenata mogu da se primenjuju u telekomunikaciji, optici i kodiranju. Latinske kvadrate u planiranju eksperimenata možemo koristiti za smanjenje eksperimentelne greške. Sledeći primer je preuzet iz [8] gde su inače dati mnogobrojni primeri.

Primer 1.
U ispitivanju virusne infekcije pet vrsta virusa (označenih slovima A, B, C, D i E) na pet biljaka s pet listova različitih veličina, plan ogleda je bio:

	Veličina lista				
	1.	2.	3.	4.	5.
Biljke					
1.	A	E	D	C	B
2.	E	D	C	B	A
3.	D	C	B	A	E
4.	C	B	A	E	D
5.	B	A	E	D	C

Na ovaj način sve vrste virusa su tretirane na svakoj biljci i veličini lista po jedanput. Eventualni sistematski uticaj biljke i veličine lista na pojedinu vrstu virusa se ovakvim planom eliminiše. Tako je izbačena mogućnost uticaja ove dve varijacije: biljke i veličine lista na rezultate eksperimenta.

Latinski kvadrat (**pravougaonik**) reda n (tipa $v \times n,\ v < n$) nad skupom $S_n = \{1, 2...n\}$ je šema[10] sa n (v) vrsta i n kolona tako da svaka vrsta i svaka kolona sadrži različite elemente iz S_n.

[10] Odnosno matrica, videti poglavlje 6.1.

Elementi skupa S_n ne moraju biti brojevi, već možemo posmatrati bilo kojih n različitih elemenata. U prvom primeru to su bila slova A,B, C, D i E, dok je n bilo jednako 5. Na primer, L je latinski kvadrat reda 5, a P je latinski pravougaonik tipa 3×4 nad skupom $\{a, b, c, d\}$.

$$L = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \qquad P = \begin{matrix} b & a & c & d \\ c & b & d & a \\ a & d & b & c \end{matrix}.$$

Uopšteno važi kada latinski kvadrat koristimo za plan nekog eksperimenta, u ekspeimentu eliminišemo grešku koja bismo nastala usled mogućeg uticaja 2 varijacije. Jednu od njih pridružujemo kolonama, a drugu vrstama. Ako treba eliminisati više od 2 varijacije koriste se dva ili više međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata.

Nedostatak planiranja eksperimenta na osnovu latinskog kvadrata je da vršimo veći broj ponavljanja tretmana nego što je minimalno potrebno. U prvom primeru smo mogli izvršiti samo 5 tretmana. Svaki od virusa tretiramo na jednoj biljci, ali tada nema eleiminisanja moguće greške u zaključivanju usled uticaja veličine lista ili biljke.

Ne preporučuje se upotreba latinskih kvadrata većih od 10×10, ni manjih od 4×4 [8].

Primer 2.
Ispitujemo četiri različita načina ishrane prasadi skraćeno označenih sa a, b, c i d. Za kontrolisanje uticaja na eksperiment su izabrane varijacije: izbora legla prasadi i njihova početna težina. Plan ogleda je dat u obliku latinskog kvadrata reda 4, pri čemu kolonama odgovaraju različite težine, a vrstama različita legla prasadi.

	težine			
legla	$8-10$kg	$10-13$kg	$13-15$kg	$15-17$kg
1.	b	a	c	d
2.	c	b	d	a
3.	a	d	b	c
4.	d	c	a	b

Prva dva primera su pokazala kako planiranje eksperimenta u skladu sa strukturom latinskog kvadrata može da omogući izbegavanje greške koja bismo nastala usled uticaja neke dve sporedne varijacije. Međutim latinski kvadarat može da posluži u planiranju eksperimenta u kome želimo da ispitamo međusobne zavisnosti po dva faktora (varijacije) iz grupe od tri ili više faktora.

Ukoliko želimo napraviti eksperimente u kojima bismo ispitali međusobni uticaj 3 varijacije (sorta, zemljište, đubrivo, klima, rasa, ...), pogodno je u cilju smanjivanja ukupnog broja pojedinačnih eksperimenata[11] koristiti kao model za planiranje eksperimenata latinske kvadrate (ili pravougaonike) odgovarajućeg reda. Red latinskog kvadrata se poklapa sa brojem različitih tipova u okviru jedne varijacije.

[11] Time se smanjuju troškovi i vreme eksperimentalne faze ispitivanja.

Objasnićemo kako recimo latinski kvadrat L možemo koristiti u planiranju eksperimenta.

Primer 3.

Neka upoređujemo uticaj na prinos tri varijacije: dubinu oranja, količinu veštačkog đubriva i sortu pšenice. Svaka od varijacija ima po 5 različitih vrednosti. Dubine oranja su: 10,15,20,25 i 30 cm. Količine đubriva koje koristimo su: 200, 230 250, 300 i 400 kg po hektaru. Neka je 5 sorti pšenice koje koristimo označeno brojevima od 1 do 5. Ukoliko bismo želeli da iskombinujemo svaki par od po dve (oranje - đubrivo, oranje - sorta i đubrivo - sorta) od razmatranih varijacija trebalo bismo izvršiti odgovarajuće eksperimente na $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 75$ parcela. Međutim, latinski kvadrat L nam omogućuje da eksperiment obavimo na 25 parcela! Objašnjenje je jednostavno. Kolonama (ima ih 5) latinskog kvadrata L možemo da pridružimo različite dubine oranja, dok vrstama pridružujemo različite količine veštačkog đubriva (videti latinski kvadrat E).

$E =$

	dubina oranja u cm				
	10	15	20	25	30
200 kg/ha	1	2	3	4	5
230 kg/ha	2	3	4	5	1
250 kg/ha	3	4	5	1	2
300 kg/ha	4	5	1	2	3
400 kg/ha	5	1	2	3	4

Sama polja latinskog kvadrata predstavljaju odgovarajuće parcele, a brojevi u poljima neka su redni brojevi sorti pšenice. Kako u svakoj koloni i vrsti imamo sve brojeve od 1 do 5, znači da će se sa svakom dubinom oranja i sa svakom količinom đubriva iskombinovati svaka sorta pšenice. Kako svaka kolona prolazi kroz sve vrste (i obrnuto) svaka dubina oranja će se iskombinovati sa svakom količinom đubriva.

$E_{5\times3} =$

	dub. oranja		
	10	15	20
200 kg/ha	1	2	3
230 kg/ha	2	3	4
250 kg/ha	3	4	5
300 kg/ha	4	5	1
400 kg/ha	5	1	2

Latinske pravougaonike koristimo u planiranju eksperimenata kada tri varijacije, čiji međusobni uticaj ispitujemo, nisu sve zastupljene sa istim brojem tipova. Recimo, da smo u prethodnom primeru imali samo tri različite dubine oranja, onda bismo nam bilo dovoljno da od L uzmemo samo prve tri kolone, što je latinski pravougaonik $E_{5\times3}$ tipa 5×3.

Ukoliko je potrebno da uporedimo međusobni uticaj više od tri varijacije ili da eliminišemo uticaj više od dve varijacije koristimo ortogonalne latinske kvadrate. Broj ortogonalnih latinskih kvadrata koji su nam potrebni zavisi od broja varijacija. Ako je broj varijacija 4 trebaju nam 2 ortogonalna latinska kvadrata. Ako je broj varijacija 5 treba nam 3 (od kojih su svaka dva ortogonalna) međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata... U opštem slučaju ako je broj varijacija $2+m$, onda nam je potrebno m međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata.

Kako je pojam ortogonalnosti latinskih kvadrata najlakše razumeti na primeru sledi prvo odgovarajući primer i zatim definicija ortogonalnosti latinskih kvadrata.

Primer. Latinski kvadrati O i T reda 3 su međusobno ortogonalni:

$$O = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad T = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}.$$

Ako preklopimo latinske kvadrate O i T, onda u prvoj vrsti imamo parove jednakih elemenata (1,1), (2,2), (3,3), u drugoj vrsti su redom parovi (2,3), (3,1) i (1,2), a u trećoj vrsti su parovi (3,2), (1,3) i (2,1). Za prvu komponentu uređenog para određujemo elemente iz O, a druga komponenta su elementi iz T.

$$\text{Dakle, parovi sa istih pozicija } O \text{ i } T \text{ su: } \begin{matrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \end{matrix}$$

Ukoliko su ovako definisani uređeni parovi svi različiti, latinski kvadrati od kojih su oni generisani su ortogonalni.
Dva latinska kvadrata reda n su međusobno **ortogonalna** *ako se na svim odgovarajućim pozicijama iz oba kvadrata nalaze svi različiti uređeni parovi iz $S_n \times S_n$.*

Latinski kvadarat bilo kog reda uvek postoji i lako se konstruiše, međutim veći broj međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata nekad teško konstruišemo ili čak ni ne postoje. Tako za red 6 ne postoje dva latinska kvadrata koja su ortogonalana, a za red 10 još nisu nađena tri latinska kvadrata međusobno ortogonalna. Međutim, ako postoje ortogonalni latinski kvadarati onda se potreban broj eksperimenata koje treba izvršiti može još više smanjiti.

Sledeći primer ilustruje kako možemo planirati eksperiment u kome analiziramo međusobni uticaj 4 varijacije uz pomoć 2 ortogonalna latinska kvadrata reda 3.

Primer 4.
Na 9 oglednih parcela treba istestirati:
− razvoj 3 poljoprivredne kulture;
− na 3 razne vrste zemljišta;
− u 3 razna klimatska područja
− uz primenu 3 razne vrste veštačkog đubriva;
u cilju nalaženja optimalnih kombinacija (kultura, zemljište, područje, đubrivo).

U toku eksperimenta treba obezbediti da sva 4 sastavna dela kombinacije budu što ravnomernije zastupljena.

Rešenje:
Kolonama latinskih kvadrata O i T pridružimo različite poljoprivredne kulture, vrstama razne tipove zemljišta. Elementima iz O (prva komponenta uređenih parova) pridružimo razna klimatska područja, a elementima iz T (druga komponenta uređenih parova) razne tipove đubriva. Na ovaj način su iskombinovani na sve različite načine svaka dva para (ima ih 6: kultura-zemljište, kultura-klima, kultura-đubrivo, zemljište-klima, zemljište - đubrivo i klima- đubrivo) od razmatrane 4 komponente. Svaki par komponenata možemo da biramo na 9 načina (na primer, par zemljište - đubrivo ima $3 \cdot 3$ kombinacija jer ima 3

tipa zemljišta i tri vrste đubriva). Ukupno svih kombinacija ima $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$, a dovoljno je samo 9 ogleda izvršiti! Jedan plan izvršenja ogleda je dat na sledećoj ilustraciji.

	poljopr. kulture 1.	2.	3.
1. tip zem.	$(\bar{1}, 1)$	$(\bar{2}, 2)$	$(\bar{3}, 3)$
2. tip zem.	$(\bar{2}, 3)$	$(\bar{3}, 1)$	$(\bar{1}, 2)$
3. tip zem.	$(\bar{3}, 2)$	$(\bar{1}, 3)$	$(\bar{2}, 1)$

$\bar{1} = 1.$ klima	$1 = 1.$ đubrivo
$\bar{2} = 2.$ klima	$2 = 2.$ đubrivo
$\bar{3} = 3.$ klima	$3 = 3.$ đubrivo

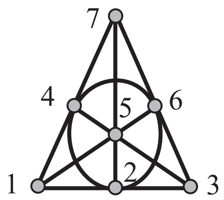
Savršenija kombinatorna struktura od ortogonalnih latinskih kvadarata je dizajn. Za postojanje nekog dizajna je potreban i dovoljan uslov postojanje $n-1$ ortogonalnog kvadrata reda n.

Dizajn *(ili* **blok šema***) tipa* $t-(v, k, \lambda)$ *je skup* $\mathcal{B} = \{B_1, B_2 ... B_d\}$*, k-točlanih podskupova, tzv.* **blokova***, skupa* $S_v = \{1, 2 ... v\}$*,* $t < k < v$*, pri čemu se svaki t-točlani podskup iz* S_v *nalazi u tačno* λ *blokova.*

Ako bismo za blokove izabrali sve k-točlane podskupove skupa S_v dobili bismo trivijalni dizajn koji nije interesantan. Interesantni su samo dizajni koji imaju manje blokova od $\binom{v}{k}$. Dizajni su ređa struktura od latinskih kvadrata.

Na slici 6. je data grafička ilustracija jednog dizajna sa parametrima 2-(7,3,1). Imamo 7 tačaka, označenih brojevima od 1 do 7. Te tačke su elementi skupa $S_7 = \{1, 2 ... 7\}$ iz koga biramo tročlane ($t = 3$) podskupove za blokove. Blokovi u ovom primeru (ima ih 7) su sledeći podskupovi tačaka skupa S_7: $\{1,2,3\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,4,5\}$ i $\{3,6,7\}$. Na sl. 6 su blokovi uglavnom duži sem bloka $\{2,4,6\}$ koji je predstavljen kružnicom. Može se lako proveriti da se svaki dvočlani podskup (njih ima $\binom{7}{2} = 21$) skupa S_7 nalazi u tačno jednom bloku ovog dizajna.

Dizajne možemo koristiti u eksperimentima koji su slični sledećem primeru.



Slika 6. Jedan 2 dizajn na 7 elemenata

Primer: (Degustacija vina[12])

Grupa degustatora (broj degustatora je jednak broju blokova) treba da degustira vina (broj vina je jednak parametru v u dizajnu). Svaki degustator proba isti broj vina (parametar k), međutim, taj broj treba da je što manji da bismo degustatori ostali kompetentni. Svaki par ($t = 2$) vina treba da proba isti broj degustatora (parametar λ u dizajnu).

Dizajn sa sl. 6 bismo mogao da posluži za utvrđivanje koja vina (ukupno 3) će svaki od degustatora (njih 7) da isproba u situaciji kada se ocenjuje kvalitet 7 vina. Svakom degustatoru bismo dodelili po jedan blok i on bismo degustirao ona vina čiji redni brojevi su u bloku koji mu je dodeljen.

[12]Primer je preuzet iz knjige [3].

2.4 Zadaci

2.79. Koliko kuglica treba da izvučemo zatvorenih očiju iz kutije u kojoj se nalaze 5 belih, 5 crvenih i 5 crnih kuglica da bismo bili sigurni da je izvučena bar jedna bela kuglica?
Rešenje: 11.

2.80. Na koliko različitih načina se 10 ljudi može liftom, koji prima 5 osoba, prebaciti iz prizemlja na 5. sprat?
Rešenje: $\binom{10}{5}$.

2.81. Na koliko različitih načina 20 osoba možemo rasporediti u 10 dvokrevetnih soba nekog hotela?
Rešenje: $\binom{20}{2}\cdot\binom{18}{2}\cdot\binom{16}{2}\cdot\binom{14}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}$.

2.82. Neka nam je poznato da se neki petocifren telefonski broj sastoji od dve 2, dve 1 i jedne 0. Koliko u najgorem slučaju moramo obaviti poziva da bismo bili sigurni da smo nazvali željeni broj?
Rešenje: $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$.

2.83. Na koliko različitih načina možemo na ormar poređati 3 dunje, 4 jabuke i 2 kruške?
Rešenje: $\frac{9!}{3!\cdot 4!\cdot 2!}$.

2.84. Očevidac saobraćajnog udesa nije zapamtio poslednje dve cifre registarske tablice automobila. Koliko vozila je najviše "osumnjičeno"?
Rešenje: 100.

2.85. Izračunati na koliko se različitih načina mogu izabrati šifre radio amatera čija je dužina najviše 5 od slova a, b, c, d i svih cifara?
Rešenje: $14+ 14^2+14^3+ 14^4+14^5$.

2.86. Kako bismo latinski kvadrat L reda 4 mogli iskoristiti za planiranje sledećeg eksperimenta: 4 sorte pšenice tretiramo sa tri tipa đubriva i zemljište za setvu pripremamo na 4 različita načina? Interesuje nas koja kombinacija sorte, đubriva i obrade zemljišta će dati najbolje prinose.
Rešenje:12 ogleda bi minimalno izvrsili, na primer tako što bismo izabrali prve tri vrste latinskog kvadrata, pri čemu bi vrstama dodelili đubriva, kolonama tip obrade zemljišta, a elementi bi bile sorte.

Glava 3.

3 Elementarne metode poslovne matematike

U okviru privredne matematike, u ovom poglavlju će biti obrađeni: pravilo trojno, verižni račun, račun deobe i račun mešanja. Verižni račun se koristi kod trgovine (uvoz-izvoz) između zemalja koje imaju različite sisteme mernih jedinica. Ukoliko trgujemo sa istom vrstom robe različitog kvaliteta (cene...) i želimo da napravimo mešavinu takve robe sa zahtevanim međukvalitetom (cenom...) upotrebljavamo račun mešanja. Račun deobe ima jednu od primena u isplaćivanju sezonskih grupa radnika koje su radile pod različitim uslovima. Raznolikost primene pravila trojnog je velika.

Finansijskom matematikom su ovde obuhvaćeni samo elementi složenog kamatnog računa (oročena štednja), računa uloga (kontinuirano oročavanje istih uloga) i otplate duga. Jedna od najznačajnijih primena finansijske matematike je u okviru analize i planiranja novih privrednih projekata.

Primeri koji su navedeni u sledećem odeljku bismo trebalo da motivišu čak i one čitaoce koji će privrednu i finansijsku matematiku koristiti jedino u svakodnevnom životu.

3.1 Uvodni primeri i pojmovi

Neke slične probleme sa sledeća četiri problema ćemo bar jednom imati priliku da rešavamo:

1. Toša T. je pozajmio od strica 3000 eura za kupovinu polovnog automobila. Uz mesečnu kamatu od 1%, koliko mesečno treba da vraća stricu da bismo dug izmirio za tri godine?

2. Želimo da se bavimo proizvodnjom mleka. Koliko krava treba nabaviti za osnovni fond da bismo nakon isteka 8 godina od osnovnog fonda dobili 500 krava ako se zna da se 95% krava oteli svake godine i da su od toga 50% ženska telad?

3. Da li za 18 godina roditelji Mile J. mogu da uštede 25000 eura za kupovinu jednosobnog stana ako svakog meseca ulažu 50 eura uz mesečnu kamatu od 1% ?

4. Za izgradnju manje vikendice na obroncima Fruške gore Peko D. je unajmio 7 radnika: 3 zidara 2 armirača i 3 tesara. Za izgradnju je pogođena suma od 1000 eura. Zidanje je trajalo 5 dana, betoniranje 2 dana i podizanje krova 2 dana. Na koji način Peko treba da podeli sumu od 1000 eura i isplati ove tri grupe radnika?

Rešenja ovakvih i sličnih zadataka naći ćemo u ovom poglavlju. Potreban matematički aparat je jednostavan i zato je poslovna matematika poglavlje ovog udžbenika. Ovde su izneti samo početni elementi, a detaljnije informacije videti npr. u [5], [4].

U sledećim odeljcima ćemo ponoviti razmeru i proporciju.

3.1.1 Razmera i proporcija

Odnos dva ili više brojeva (koji pokazuje koliko puta je svaki od tih brojeva veći (ili manji) od drugog (drugih)) se naziva **razmera**. Tako odnos $a : b$ (čitamo "a prema b") brojeva a i b zovemo dvorazmera. Odnos $a : b : c$ zovemo trorazmera. U zavisnosti od broja komponenata u razmeri govorimo o dvorazmeri, trorazmeri, četvororazmeri... Brojeve a, b, c u razmeri $a : b : c : ...$ nazivamo **koeficijenti** razmere.

Koeficijenti razmere su u praksi najčešće pozitivni brojevi jer predstavljaju mere nekih objekata. Na primer, razmere se javljaju u situacijama kada treba napraviti rastvor od dva ili više jedinjenja ili smesu (mešavinu, leguru...) od dve ili više osnovnih supstanci (vrste robe, materijala...), pri čemu se zahteva da osnovni sastojci budu u zadatom odnosu.

Navedimo osnovne osobine razmere.

Razmera $a : b$ se ne menja ako koeficijente razmere podelimo ili pomnožimo sa nekim brojem različitim od nule, odnosno:

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} \;=\; a : b \quad \text{i} \quad (a \cdot c)\;\;(b \cdot c) \;=\; a : b, \quad c \neq 0.$$

Međutim, dodavanjem ili oduzimanjem broja c koeficijentima a i b se ne dobija u opštem slučaju ista razmera:

$$(a + c)\;\;(b + c) \neq\; a : b \quad \text{i} \quad (a - c)\;\;(b - c) \neq\; a : b, \quad c \neq 0.$$

Navedena analogna pravila važe i ako u razmeri učestvuju više od dva koeficijenta.

Zbog prve osobine jednu razmeru možemo zapisati na više načina (na primer, 4:2:10 $= 2{:}1{:}5 = \frac{4}{5}{:}\frac{2}{5}{:}2 = 1{:}0{,}5{:}2{,}5...$). Da bismo imali jedinstven zapis za istu razmeru možemo zahtevati da prvi koeficijent razmere bude jednak jedinici, ili da minimalni koeficijent bude jednak jedinici. Ova dva načina ne omogućuju da koeficijenti razmere budu svi prirodni.

Racionalne koeficijente razmere lako svodimo na prirodne. Na primer, razmeru

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} : 2 : \frac{6}{5} : \frac{4}{15}$$

svodimo na razmeru $12 : 10 : 30 : 18 : 4$, sa prirodnim koeficijentima, posle njenog množenja sa najmanjim zajedničkim sadržaocem za imenioce koeficijenata, NZS(5,3,1,5,15) = 15. Da bismo koeficijenti razmere bili što manji prirodni brojevi potrebno je sve koeficijente podeliti sa najvećim zajedničkim deliocem za brojioce polaznih racionalnih koeficijenata, NZD(4,2,2,6,4) = 2. Tako dobijamo

$$\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}\right) : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{2}\right) : \left(2 \cdot \frac{15}{2}\right) : \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{15}{2}\right) : \left(\frac{4}{15} \cdot \frac{15}{2}\right) = 6 : 5 : 15 : 9 : 2.$$

Izložen način, ilustrovan na prethodnom primeru, bismo bio treći način za jedinstveno prikazivanje, nažalost, uže klase razmera − razmere sa racionalnim koeficijentima. Sada jedinica nije obavezan koeficijent razmere, ali su svi koeficijenti obavezno prirodni brojevi. Ukoliko razmera sadrži iracionalan broj [13], što se ređe događa, ne možemo primeniti treći način za jedinstveno prikazivanje razmere.

[13] Iracionalni brojevi su definisani u poglavlju 1.5.4.

Proporcija

Proporcija nastaje kada se neke dve veličine međusobno odnose isto kao neke druge dve veličine. Na primer, ako je odnos broja zaposlenih muškaraca i žena u nekoj firmi proporcionalan odnosu ukupnog broja zaposlenih muškaraca i žena. U geometriji su proporcionalne stranice naspram jednakih uglova sličnih trouglova (trouglovi su slični ako imaju jednake uglove). Setimo se samo proporcija Talesove teoreme. Preciznije, **proporcija** je jednakost dve dvorazmere:

$$a : b \; = \; c : d \;\; \text{za} \;\; b \cdot d \neq 0.$$

Tačno je da za $b, d \neq 0$, važi

$$a : b \; = \; c : d \quad \text{je ekvivalentno sa} \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

Brojevi b i c su unutrašnji a brojevi a i d su spoljašnji elementi proporcije. Od ove proporcije možemo da izvedemo još tri ekvivalentne proporcije:

$$a : c \; = \; b : d, \qquad d : b \; = \; c : a \quad \text{i} \quad d : c \; = \; b : a.$$

Njih redom dobijamo zamenom unutrašnjih, zamenom spoljašnjih i istovremenom zamenom unutrašnjih i spoljašnjih elemenata proporcije.

Kako proporciju možemo napisati i u obliku jednakosti dva racionalna broja sledi

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

Tako su izvedene i proporcije kombinovanjem jednakost i polazne proporcije $a : b = c : d$ sa $(a \pm c) : c \; = \; (b \pm d) : d$, sa razmenom unutrašnjih i spoljašnjih koeficijenata proporcije:

$$(a \pm c) : c = (b \pm d) : d, \quad (a \pm c) : (b \pm d) = c : d, \quad d : (b \pm d) = c : (a \pm c),$$

$$(d \pm b) : b \; = \; (c \pm a) : a \quad \text{i} \quad (b \pm a) : a \; = \; (d \pm c) : c ...$$

3.1.2 Procentni i promilni račun

Procenat (lat. pro centum), što znači postotak ili dobitak od stotine, označavamo sa %. Tako 7% (čitamo "7 posto" ili "7 procenata") znači 7 od stotinu.

Ukoliko treba odrediti **procentni iznos** P koji predstavlja **procenat** p (procenat od p%) **sume** S koristimo formulu:

$a)$
$$P = \frac{p}{100} \cdot S.$$

Međutim, ako treba odrediti **promilni iznos** P' koji predstavlja **promil** p' **sume** S koristimo sličnu formulu:

$b)$
$$P' = \frac{p'}{1000} \cdot S.$$

Tako je jedan promil hiljaditi deo, a jedan procenat je jednak 10 promila.

Primeri:

1. 9% težine od 432 kg bismo izračunali po formuli $a)$ kao: $\dfrac{9}{100} \cdot 432$ kg $= 38{,}88$kg.

2. Koliko litara L rastvora pesticida možemo dobiti praveći 24% rastvor od 36kg nerastvorenog pesticida?

Rešenje: Odgovor dobijamo iz: $L = \dfrac{100}{24} \cdot 36 = 150$.

3. Neka raspolažemo sa 12-to promilnim rastvorom od 1g. Od koliko grama nerastvorene supstance smo ga dobili?

Rešenje: Na osnovu formule $b)$ od $\dfrac{12}{1000} \cdot 1\text{g} = 0{,}012$ g se dobija razmatrani rastvor.

4. Posle poskupljenja od 25%, kg pšenice košta 5 din. Kolika je bila cena pšenice pre poskupljenja?

Rešenje: Označimo sa C staru cenu pšenice. Znamo da je nova cena jednaka staroj ceni uvećanoj za 25%: $C + \dfrac{25}{100}C = 5$ din. Sledi $C = \dfrac{5\text{din}}{1,25} = 4$ din.

5. Trgovac je prodavao robu sa gubitkom od 15%, zatim je povećao cenu za 18%. Da li sa novom cenom trgovac gubi ili dobija?

Rešenje: Neka je C nabavna cena robe. Sa gubitkom trgovac je prodavao robu po ceni od $C_1 = C - \frac{15}{100}C$. Nakon povećanja od 18% on robu prodaje po ceni od $C_1 + \frac{18}{100}C_1 = C - \frac{15}{100}C + \frac{18}{100}(C - \frac{15}{100}C) = C + (-\frac{15}{100} + \frac{18}{100} - \frac{15 \cdot 18}{100^2})C = C + \frac{3 \cdot 100 - 270}{10000}C = C + \frac{3}{1000}C$. Nova cena predstavlja uvećanje od 3 promila ili 0,3% u odnosu na nabavnu cenu. Trgovac ipak zarađuje.

3.2 Teorijska pitanja

3.1. Ako prinos jagoda kod N.N. ove godine poraste za 100%, to znači da N.N. ima jagoda duplo više nego prošle godine.	$\top$
3.2. Ako prinos jabuka kod N.N. ove godine opadne za 100%, to znači da kod N.N. nije bilo prinosa jabuka ove godine.	$\top$
3.3. Cena od 1000 eura posle pojeftinjenja od 15% iznosi 850 eura.	$\top$
3.4. Ako se broj zlatica za tri nedelje u jednom krompirištu poveća 9 puta, to znači da je procenat njihovog povećanja za tri nedelje jednak 800%.	$\top$
3.5. Ako se broj zlatica za jednu nedelju u jednom krompirištu poveća 2 puta, to znači da je procenat njihovog povećanja za jednu nedelju jednak 200%.	$\perp$
3.6. Cena od 1000 eura posle pojeftinjenja od 25% iznosi 850 eura.	$\perp$
3.7. Cena od 1000 eura posle poskupljenja od 35% iznosi 1035 eura.	$\perp$
3.8. Cena od 1000 eura posle poskupljenja od 15% iznosi 1150 eura.	$\top$
3.9. Ako dužinu pravougaone leje povećamo za 50%, a širinu smanjimo za trećinu površina leje će ostati ista.	$\top$
3.10. Ako dužinu njive povećamo za 50%, a širinu smanjimo za 50%, površina njive će ostati ista.	$\perp$

3.11. Ako dužinu njive povećamo za 50%, a širinu smanjimo za 10% površina njive će se povećati za 35%.	$\top$
3.12. Ako cenu C hleba povećamo za 20%, a zatim smanjimo za 20%, nova cena će biti jednaka C.	$\perp$
3.13. Cena koja je smanjena za 30%, a zatim povećana za 30% je za 9% manja od prvobitne.	$\top$
3.14. Cena koja je smanjena za 20%, a zatim povećana za 20% je za 4% manja od prvobitne.	$\top$
3.15. Ako cena robe C pojeftini za 5%, pa zatim pojeftini za još 15%, pa zatim poskupi za 20%, nova cena je jednaka C.	$\perp$
3.16. Ako u prvom slučaju početna cena robe poskupi za 1%, pa zatim pojeftini za 5%, a u drugom slučaju početna cena prvo pojeftini za 5%, pa zatim poskupi za 1%, nove cene u oba slučaja su jednake.	$\top$
3.17. Ako platu povećamo za 20%, pa je zatim smanjimo za 17% biće manja od početne plate.	$\top$
3.18. Ako platu povećamo za 20%, pa je zatim smanjimo za 16% biće manja od početne plate.	$\perp$
3.19. Platu koja je povećana za 150% treba smanjiti za 60% da bismo bila jednaka početnoj plati.	$\top$
3.20. Ako su dužina i širina pravougaone njive smanjene za 5,1% (za odvodne kanale), tada je obradiva površina te njive smanjena za približno 9,94%.	$\top$
3.21. Ako u prvom slučaju početna cena robe poskupi za 15%, pa zatim pojeftini za 15%, a u drugom slučaju ista početna cena pojeftini, pa zatim poskupi za 15%, tada su u oba slučaja nove cene međusobno jednake.	$\top$
3.22. Ako u prvom slučaju cena robe poskupi za 15%, pa pojeftini za 10%, a u drugom slučaju ista početna cena pojeftini za 10%, pa poskupi za 15%, tada su u oba slučaja nove cene međusobno jednake i manje od početne.	$\perp$
3.23. Ako cena robe pojeftini za 10%, pa zatim pojeftini za 15%, pa zatim poskupi za 25%, nova cena je jednaka početnoj.	$\perp$
3.24. Posle pojeftinjenja od 15%, a zatim poskupljenja od 16%, cena robe je manja od prvobitne cene.	$\top$
3.25. Posle pojeftinjenja od 11%, a zatim poskupljenja od 12%, cena robe je veća od prvobitne cene.	$\perp$
3.26. Ako je cena dizel goriva 11.9.2006. porasla za 5%, to znači da je 10.9.2006. cena bila manja za 4,76% (na 2 decimale zaokruženo) u odnosu na cenu dizela 11.9.2006.	$\top$
3.27. Ako je cena premium goriva 1.9.2006. porasla za 5%, to znači da je 31.8.2006. bila manja za 5% u odnosu na cenu premiuma 1.9.2006.	$\perp$
3.28. Ako je cena euro dizel goriva 18.9.2007. porasla za 7%, to znači da je 14.18.2007. cena bila manja za 6,542% u odnosu na cenu euro dizela 18.9.2007.	$\top$
3.29. Ako je cena euro dizel goriva 18.9.2007. porasla za 10%, to znači da je 17.9.2007. cena bila manja za $9{,}\dot{0}\dot{9}\%$ u odnosu na cenu euro dizela 18.9.2007.	$\top$

3.30. Ako je cena euro dizel goriva 29.2.2008. opala za 10%, to znači da je 28.2.2008. cena bila veća za $11{,}\dot{1}\%$ u odnosu na cenu euro dizela 29.2.2008.	$\top$
3.31. Ako su dužina i širina pravougaone njive smanjene za 3% (za odvodne kanale), tada je obradiva površina te njive smanjena za tačno 5,91%.	$\top$
3.32. Ako su dužina i širina pravougaone njive smanjene za 3% (za odvodne kanale), tada je obradiva površina te njive smanjena za tačno 6,09%.	$\bot$
3.33. Ako su dužina i širina pravougaone njive smanjene za 5,1% (za odvodne kanale), tada je obradiva površina te njive smanjena za približno 10,2%.	$\bot$
3.34. Posle pojeftinjenja od 5%, a zatim poskupljenja od 7%, cena robe je manja od prvobitne cene.	$\bot$
3.35. Posle pojeftinjenja od 25%, a zatim poskupljenja od 27%, cena robe je manja od prvobitne cene.	$\top$
3.36. Ako svaki koeficijenat razmere podelimo istim brojem različitim od 0, razmera se ne menja.	$\top$
3.37. Razmere A:B:C i (A+7):(B+7):(C+7) za A,B,C različito od 0, su jednake.	$\bot$
3.38. Razmera se menja ako svakom koeficijentu razmere oduzmemo isti broj različit od 0.	$\top$
3.39. Razmera se ne menja ako svakom koeficijentu razmere dodamo isti broj različit od 0.	$\bot$
3.40. Razmere $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ i $2 : 3$ su jednake.	$\bot$
3.41. Dvorazmere $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ i $5 : 4$ su različite.	$\top$
3.42. Razmere $\frac{1}{2} : 2 : \frac{2}{3} : \frac{3}{5}$ i $(\frac{1}{2} - 1) : (2 - 1) : (\frac{2}{3} - 1) : (\frac{3}{5} - 1)$ su jednake.	$\bot$
3.43. Razmere $\frac{1}{2} : 2 : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ i $6 : 24 : 6 : 9$ su jednake.	$\bot$
3.44. Razmere $\frac{1}{2} : 2 : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ i $6 : 24 : 8 : 9$ su jednake.	$\top$
3.45. Trorazmere $2 : 3 : 2$ i $1 : \frac{3}{2} : 1$ su jednake.	$\top$
3.46. Razmere $\frac{1}{3} : 2 : \frac{2}{5} : \frac{3}{2}$ i $(\frac{1}{3} - 1) : (1) : (\frac{2}{5} - 1) : (\frac{3}{2} - 1)$ su različite.	$\top$
3.47. Trorazmere $2 : 3 : 2$ i $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ su jednake.	$\bot$
3.48. Razmere $\frac{1}{3} : 2 : \frac{2}{5} : \frac{3}{2}$ i $(\frac{1}{3} + 100) : (102) : (\frac{2}{5} + 100) : (\frac{3}{2} + 100)$ su jednake.	$\bot$
3.49. Trorazmere $2 : 4 : 6$ i $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$ su jednake.	$\bot$
3.50. Trorazmere $2 : 18 : 6$ i $\frac{2}{9} : 2 : \frac{2}{3}$ su jednake.	$\top$
3.51. Trorazmera a:b:c je različita od trorazmere (a+1):(b+1):(c+1).	$\top$

3.52. Razmere $\frac{1}{3} : \frac{3}{5} : \frac{2}{5} : \frac{2}{3}$ i $5 : 9 : 6 : 10$ su jednake.	$\top$
3.53. Razmere $\frac{1}{3} : 2 : \frac{2}{5} : \frac{2}{3}$ i $\frac{1}{6} : 1 : \frac{1}{5} : \frac{1}{3}$ su različite.	$\perp$
3.54. Petorazmera 5:3:1:2:4 je različita od petorazmere 10:6:2:4:8.	$\perp$
3.55. Trorazmera 5:3:1 je različita od trorazmere 10:6:2.	$\perp$
3.56. Trorazmera $a : b : c$ je različita od trorazmere $(a-1)$:$(b-1)$:$(c-1)$.	$\top$
3.57. Razmera 5:3:1:1 je jednaka razmeri 10:6:2:2.	$\top$
3.58. Dvorazmera $8 : 5$ je jedinstven zapis dvorazmere $\frac{6}{5} : \frac{3}{4}$, a da su koeficijenti što manji prirodni brojevi.	$\top$
3.59. Dvorazmera $14 : 5$ je jedinstven zapis dvorazmere $\frac{6}{5} : \frac{3}{7}$, a da su koeficijenti što manji prirodni brojevi.	$\top$

3.3 Račun mešanja i pravilo trojno - proporcija

Računom mešanja se određuje u *kakvoj razmeri* treba mešati postojeće vrste robe da bismo se dobila nova vrsta robe određene cene (kvaliteta). Slično, **račun legiranja** treba da ustanovi u kakvoj razmeri treba legirati postojeće vrste metala da bismo se dobila legura zahtevanog kvaliteta (osobina). Matematički aparat za oba računa je isti, tako da će u nastavku ovde biti reči samo o računu mešanja.

Račun mešanja je **prost** ako se mešaju dve, a **složen** ako se mešaju tri ili više vrsta roba.

3.3.1 Prost i složen račun mešanja

Objasnićemo prost račun mešanja na primeru.

Ako se raspolaže pasuljem od 80 i 110 dinara po kilogramu, a kupac želi da ima pasulj po ceni od 100 dinara po kilogramu, postavlja se pitanje koliko kilograma treba uzeti od pasulja po 80 dinara, a koliko kilograma pasulja po 110 dinara da bismo dobijena mešavina zaista vredela 100 dinara?

Obeležimo sa x, količinu pasulja od 80 dinara, a sa y količinu pasulja od 110 dinara koju treba uzeti za mešavinu. Zadatak se može izraziti sledećom linearnom jednačinom:

$$80x + 110y = 100(x + y).$$

Kada promenljivu x prebacimo na desnu, a y na levu stranu, zatim podelimo jednačinu sa y i sa 20 dobijamo traženu razmeru:

$$110y - 100y = 100x - 80x \quad \Leftrightarrow \quad 10y = 20x \quad \Leftrightarrow \quad 1 : 2 = x : y.$$

Znači, da bismo dobili pasulj po ceni od 100 dinara možemo uzeti 1 kilogram po ceni od 80 dinara i 2 kilograma po ceni od 110 dinara, što bismo značilo da imamo 3 kilograma mešavine po ceni od 100 dinara. Kako se razmera ne menja kada koeficijente razmere pomnožimo sa istim brojem, možemo koristiti i razmeru 5:10 ako nam treba mešavina od

15 kilograma pasulja, ili 100:200 ako nam treba 300 kilograma mešavine, ili razmeru $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ ako nam treba samo kilogram mešavine po ceni od 100 dinara.

Primetimo da je cena mešavine uvek *manja* od cene skuplje komponente i *veća* od cene jeftinije komponente.

Ako analiziramo postupak rešavanja vidimo da smo koeficijente razmere u prethodnom primeru dobili tako što smo oduzeli od cene skupljeg pasulja cenu mešavine - to je koeficijent za jeftiniji pasulj, dok smo koeficijent za skuplji pasulj dobili oduzimanjem od cene mešavine cenu jeftinijeg pasulja.

Zaključak: U opštem slučaju koeficijente razmere za prost račun mešanja dobijamo na sledeći način: Razlika u ceni mešavine i jevtinije robe je koeficijent razmere za skuplju robu, dok je razlika u ceni mešavine i skuplje robe koeficijent razmere za jevtiniju robu.

Ceo postupak možemo tabelarno prikazati, pri čemu vodimo računa da koeficijente razmere unakrsno računamo:

cene roba	110		80
cena mešavine		100	
koeficijenti razmere	20		10

Rešimo sledeće primere tabelarno, bez pisanja jednačina.

Primeri:

1. Napravite mešavinu jabuka po ceni od 25 dinara kilogram, ako raspolažete sa jabukama po ceni od 40 i po ceni od 20 dinara po kilogramu.
2. Neka je trgovačka firma nabavila pirinač iz Makedonije po ceni od 90 dinara po kilogramu i pirinač iz Kine po ceni od 50 dinara po kilogramu. Kupac zahteva 4oo kg pirinča po ceni od 75 dinara po kilogramu. Kako napraviti mešavinu?
3. Kako treba mešati brašno od 36 i 40 dinara po kilogramu da bismo se dobilo brašno po 39 dinara? Želimo mešavinu brašna od 25 kilograma.

Rešenja:

1.

c. r.	40		20
c. m.		25	
k. r.	5		15

2.

c. r.	90		50
c. m.		75	
k. r.	25		15

3.

c. r.	40		36
c. m.		39	
k. r.	3		1

Jabuke treba mešati u odnosu 5:15, pirinač u razmeri 25:15, a brašno u razmeri 3:1, pri čemu je prvi koeficijent razmere za skuplju, a drugi za jevtiniju komponentu u mešavini.

Mešavine pirinča je potrebno 400 kilograma. Kako je 25+15=40, znači da koeficijente razmere 25:15 treba pomnožiti sa 400/40=10. Tako su traženi koeficijenti razmere 250:150. Za 400 kg pirinča po ceni od 75 dinara po kilogramu, treba izmešati 250 kg po ceni od 90 i 150 kg po ceni od 50 dinara.

Za 25 kg brašna po ceni od 39 dinara treba koeficijente razmere 3:1 ponožiti sa 25/(3+1) =6,25. Traženi koeficijenti razmere su $(3 \cdot 6,25) : (1 \cdot 6,25) = 18,75 : 6,25$. Znači za mešavinu od 25 kg, brašna od 40 dinara treba uzeti 18,75 kg, dok brašna po 36 dinara treba uzeti 6,25 kg.

Složen račun mešanja

Kada imamo na raspolaganju robu sa više od dve različite cene (kvaliteta) i treba da napravimo mešavinu tih roba koja će imati neku zahtevanu cenu koristimo složeni račun mešanja.

Cena mešavine, obavezno mora biti manja od cene najskuplje robe, a veća od cene najjeftinije robe, da bismo problem mešanja bio rešiv. Za razliku od prostog računa mešanja gde je rešenje (tražena razmera po kojoj vršimo mešanje) bila *jedinstvena*, kod složenog računa mešanja imamo *više rešenja*. To što imamo više različitih razmera po kojima možemo da izvršimo mešanje, a da je zadovoljen zahtev za cenu mešavine, pruža mogućnost dodatnih zahteva u složenom računu mešanja.

Metoda rešavanja složenog računa mešanja se svodi na višestruku primenu prostog računa mešanja. Objasnimo to na primeru.

Primer. Trgovinsko preduzeće ima na lageru pasulj "tetovac" po ceni od 120, 135 i 150 dinara po kilogramu. Kupac želi 3 tone pasulja po ceni od 130 dinara po kilogramu. Na koji način trgovinska firma treba da napravi mešavinu raspoloživih pasulja tako da zadovolji kupca i da pri tom proda što više pasulja čija je cena 120 dinara po kilogramu?

Rešenje. Da nema dodatnog uslova da u mešavini koristimo što više pasulja po ceni od 120 dinara, problem bismo mogli rešiti na tri načina.

Prvi način je kada se koriste samo pasulji po ceni od 120 i 135 dinara po kilogramu za mešavinu. Koeficijente razmere bismo odredili na isti način kao i kod prostog računa mešanja. Odgovarajući račun je dat u prvoj tabeli, označenoj sa A. Dobijeni koeficijenti razmere su 5:10 = 1:2, što znači da u 3 kilograma mešavine imamo 1 kilogram po ceni od 120 i 2 kilograma po ceni od 135 dinara.

A

c. r.	120	135
c. m.	130	
k. r.	5	10

B

c. r.	120	150
c. m.	130	
k. r.	20	10

Drugi način je da mešamo samo pasulj po ceni od 120 dinara sa pasuljem po ceni od 150 dinara. Odgovarajući koeficijenti razmere 20:10 = 2:1 su dati u tabeli B. Znači od 3 kg pasulja 2 uzimamo po ceni od 120 i 1 kilogram po ceni od 150 kilograma. Ovaj drugi način je povoljniji u odnosu na prvi jer u mešavini ima 2/3 pasulja po ceni od 120 dinara, dok kod prvog rešenja u mešavini imamo samo 1/3 pasulja po ceni od 120 dinara.

Treći način je kombinacija prva dva načina. Mešavinu pravimo od svih raspoloživih pasulja. Preciznije, vrši se spajanje prve mešavine (prvo rešanje) i druge mešavine (drugo rešenje). Koeficijenti razmere, na osnovu kojih ćemo uzimati prvu i drugu mešavinu mogu biti proizvoljni. Ako bismo bili 1:1, razmera po kojoj bismo mešali pasulje po cenama od 120, 135 i 150 dinara bismo bila (1+2):2:1 =3:2:1. Na ovaj način bismo u 6 kg mešavine imali polovinu ($\frac{3}{6}$) pasulja po ceni od 120 kg. Da se radi o polovini mešavine mogli smo da zaključimo i na osnovu toga što smo uzeli: pola mešavine (3 kg) kombinujući pasulj od 120 i 135 dinara (u toj kombinaciji ima 1/3 pasulja po ceni od 120 dinara) i pola mešavine (3kg) pasulja od 120 i 150 dinara (u kojoj je 2/3 pasulja po ceni od 120 dinara), tj. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

U okviru trećeg rešenja imamo *bezbroj različitih rešenja* (razmeru po kojoj ćemo mešati pasulje sa tri cene), jer na proizvoljan način možemo birati koeficijente razmere na osnovu kojih ćemo spojiti prvo i drugo rešenje.

Jedno od tih rešenja je dato u tabeli C. U njemu smo uzeli 15 kilograma prve mešavine (5:10) i 30 kg druge mešavine (20:10), znači koeficijenti razmere spajanja prva dva rešenja su 1:2, tako da u ovom rešenju imamo $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$ pasulja po ceni od 120 dinara.

Zaista, u tabeli C (kod koje smo obrnuli vrste i kolone u odnosu na prethodne tabele), rešenje je razmera 25:10:10= 5:2:2, u čijem odnosu treba redom da mešamo pasulje od 120, 135 i 150 dinara.

C

c. r.	c. m.	koef. razmere		
120		5	20	25 (5)
	130			
135		10		10 (2)
150			10	10 (2)

Bez obzira na koji način bismo u trećem rešenju kombinovali prva dva rešenja uvek bismo u mešavini procentualno manje imali pasulja od 120 dinara po kilogramu nego kod drugog rešenja, gde je njegova zastupljenost $6\dot{6}\%$. Dakle, optimalno rešenje je da pasulje po ceni od 120 i 150 dinara pomešamo u odnosu 2:1. Tri tone tražene mešavine po ceni od 130 dinara za kupca obezbeđujemo mešanjem 2000 kg pasulja po 120 i 1000 kg pasulja po 150 dinara.

Ilustrujmo složen račun mešanja na još nekoliko primera.

Primeri.
1. Kako treba pomešati tri vrste vina po ceni od 60, 75 i 80 dinara, da bismo dobili 70 litara vina po ceni od 70 dinara po litru?
2. Raspolažemo sa brašnom po ceni od 14, 18, 22 i 24 dinara po kilogramu. Napraviti mešavinu 100 kg brašna, od svih raspoloživih, po ceni od 20 dinara, tako da u mešavini bude minimalno zastupljeno brašno po ceni od 14 dinara. Brašna po ceni od 24 dinara imamo na rapolaganju 20 kilograma, ali želimo da svu količinu upotrebimo u mešavini. Brašna po ceni od 18 dinara imamo samo 50 kg, dok ostalog brašna imamo u dovoljnim količinama.
3. Legirano je 15 g zlata od 14 karata i 15 g zlata od 20 karata. Po koliko grama zlata od 16, 20 i 22 karata, treba dodati već dobijenoj leguri, ako se želi dobiti zlato od 18 karata?

Rešenja.
1. Problem ćemo rešiti tabelarno. U prvoj koloni pišemo cene vina u rastućem redosledu. U drugoj koloni je cena mešavine smeštena u vrstu između njoj nabližih cena vina. Treća, četvrta i peta kolona sadrže koeficijente razmere u čijem odnosu možemo mešati vina da dobijemo vino po ceni od 70 dinara. Koeficijente razmere računamo unakrsno. Tako smo u trećoj koloni, koeficijent 5 izračunali kao $75-70$, a koeficijent 10 kao $70-60$. To znači da vina po ceni od 60 i 75 dinara treba mešati u razmeri 5:10. Slično, u četvrtoj koloni vidimo, da vina po ceni od 60 i 80 dinara treba mešati u razmeri 10:10.

cene robe	cena meš.	koef. razmere		
60		5	10	15
	70			
75		10		10
80			10	10

Peta kolona je zbir treće i četvrte što znači da vina po ceni od 60, 75, i 80 dinara možemo[14]

[14]Podsetimo se da je dozvoljeno da skratimo koeficijente pa da ih onda saberemo, ili da ih proširimo sa bilo kojim brojem pa onda da ih saberemo, a da mešavina od tri vina opet bude po ceni od 70 dinara.

mešati u razmeri 15:10:10. Kako je 15+10+10=35, a nama treba 70 litara mešavine, pomnožimo koeficijente razmere sa 2, što daje razmeru 30:20:20. Dakle, jedno rešenje je da pomešamo 30 litara vina po ceni od 60 dinara, 20 litara po ceni od 75 dinara i 20 litara po ceni od 80 dinara.

2. Brašno po ceni od 14 dinara po kilogramu možemo mešati ili sa brašnom po ceni od 22 ili sa brašnom po ceni od 24 dinara po kilogramu.

U tabeli su dati odgovarajući koeficijenti razmere za dozvoljene mešavine po dva brašna:

cene brašna	cena meš.	koef. razmere			
14		2	4		
18				2	4
	20				
22		6		2	
24			6		2

Da bismo ispoštovali zahtev da koristimo što manje (a da ga ipak koristimo) brašna po ceni od 14 dinara, bolje je da ga mešamo sa brašnom od 22 dinara (videti tabelu, odgovarajuća razmera je 2:6, u odnosu na razmeru 4:6 za mešavinu od 14 i 24 dinara). Kako sva brašna treba da učestvuju u mešavini brašno po ceni od 24 dinara moramo pomešati sa brašnom po ceni od 18 dinara, jer ne možemo postići cenu od 20 dinara ako ga mešamo sa brašnom po ceni od 22 dinara. Mešavina brašna po ceni od 18 i 24 dinara je u razmeri 4:2. Od ove mešavine moramo da napravimo 60 kilograma, da bismo upotrebili svo brašno (20 kg) po ceni od 24 dinara. Time smo potrošili i 40 kg po ceni od 18 dinara i ostalo nam je još samo 10 kg brašna po ceni od 18 dinara. Da bismo što manje koristili mešavinu od 14 i 22 dinara, preostalih 40 kilograma, koliko nam još treba do 100 kg zahtevane količine brašna po 20 dinara, napravimo što više kombinujući brašna od 18 i 22 dinara. Njihova razmera je u odnosu 2:2=1:1. Znači, još 20 kg mešavine ćemo napraviti od 10 kg brašna po 18 i 10 kg brašna po 22 dinara. Sada imamo 80 kg mešavine po ceni od 20 dinara, i potrošili smo svo brašno od 18 i 24 dinara. Još 20 kg moramo napraviti od brašna po 14 i 22 dinara u odnosu 2:6=1:3, što znači da ćemo uzeti 5kg po ceni od 14 dinara i 15 kg brašna po ceni od 22 dinara.

Jedinstveno rešenje je napraviti mešavinu brašna: 5 kg po 14 dinara, 50 po 18 dinara, 25 kg po 22 dinara i 20 kg po 24 dinara.

3. Već napravljena legura od 30 g je od 17 karata. Napravimo tabelu:

karati	kar. meš.	koeficijenti razmere		
16		2		$2 \cdot 7{,}5$=15
30 g. 17			4	$4 \cdot 7{,}5$=30
	18			
20		2		$2 \cdot 7{,}5$= 15
22			1	$1 \cdot 7{,}5$= 7,5

U trećoj koloni smo legirali zlato od 16 i 20 karata u razmeri 2:2, a u četvrtoj smo legirali već napravljenu leguru od 17 karata sa zlatom od 22 karata u razmeri 4:1. U petoj koloni su spojene ove dve legure iz treće i četvrte kolone, i dobijeni su koeficijenti razmere 2:4:2:1, po kojima treba legirati zlato od 16, 17, 20 i 22 karata. Da bismo koristili svih 30 g zlata (već napravljene legure) od 17 karata, sve koeficijente razmere smo pomnožili sa brojem 7,5. Konačno rešenje je da izvršimo legiranje 15 g zlata od 16 karata, 15 g zlata od 20 karata, 7,5 g zlata od 22 karata sa već napravljenih 30 g legure od 17 karata.

3.3.2 Pravilo trojno - proporcija

Matematički problem koji svodimo i rešavamo pomoću proporcije u kojoj imamo jednu nepoznatu i tri poznate veličine nazivamo prosto **pravilo trojno**. Sam problem obično izražavamo jednom uslovnom rečenicom. Recimo, ako za 50 kg pšenice platimo 325 dinara koliko ćemo platiti za 15 kg pšenice? Neka je sa x označena cena 15 kg pšenice. Sa jedne strane proporcije, pišemo odnos kg pšenice, a sa druge, odnos njihovih dinarskih cena: $50 : 15 = 325 : x$. Iz ove proporcije je jasno da je $x = \dfrac{325 \cdot 15}{50} = 97,5$ dinara.

Kod postavljanja proporcije moramo da vodimo računa da li su veličine direktno ili obrnuto proporcionalne. Na primer, ako 5 kg jabuka košta 50 dinara, onda će *veća* količina jabuka koštati proporcionalno *više*, a *manja* količina jabuka proporcionalno *manje* - i to je direktna proporcija. Međutim, ako jedan posao obavi 5 radnika za 50 dana, tada će *većem* broju radnika trebati proporcionalno *manje*, a *manjem* broju radnika proporcionalno *više* dana za isti posao. Ovog puta, broj radnika i broj radnih dana su u obrnutoj proporciji. Ilustrovaćemo obrnutu proporciju na sledećem primeru.

Primer: Izvesna količina hrane podmiruje potrebe 90 ljudi za 15 dana. Koliko dana će ista količina hrane poslužiti za ishranu 135 ljudi, ako su obroci isti?

Rešenje: U ovom slučaju veći broj ljudi moći će da se hrani manji broj dana, pa je u pitanju obrnuta proporcija odnosa broja ljudi i broja dana njihove prehrane $90 : 135 = x : 15$. Tako je broj dana prehranjivanja 135 ljudi jednak $x = \dfrac{90 \cdot 15}{135} = 10$.

Kada tri poznate veličine nisu eksplicitno izražene, već moramo da ih dodatno računamo pomoću više datih vrednosti, govorimo o **složenom pravilu trojnom**.

Primer: Kopanje šanca dužine 12m, širine 6m, dubine 4m staje 48000 dinara. Koliko će dinara stajati kopanje šanca dužine 14m, širine 3m, dubine 6m?

Rešenje: Umesto da dubinu, širinu i dužinu šanaca posebno tretiramo izračunaćemo njihove zapremine u m^3: $12 \cdot 6 \cdot 4 = 288$ i $14 \cdot 3 \cdot 6 = 252$. Kako se zapremine šanaca proporcionalno odnose ceni njihovog iskopavanja, sledi $288 : 252 = 48000 : x$, odakle je $x = \dfrac{48000 \cdot 252}{288} = 42000$. Dakle, cena iskopavanja šanca manje zapremine je 42000 dinara.

Takođe i sledeći zadatak ima više od tri poznate vrednosti koje možemo sažeti u tri vrednosti.

Primer: Neki posao obavi 30 radnika za 27 dana uz 8 časova dnevnog rada. Koliko će dana biti potrebno da taj posao završe 24 radnika, ako rade po 9 časova?

Rešenje: U ovom primeru umesto da upoređujemo odnose radnika, sati i dana, uporedićemo odnos broja radnih dana (taj odnos moramo zadržati jer u njemu figuriše nepoznata veličina) i odnos ukupnog broja dnevnih radnih *sati* za cele grupe radnika. Grupa koja radi 27 dana odradi dnevno 30·8= 240 sati, a druga grupa radi dnevno $24 \cdot 9$=216 sati. Kako je u pitanju obrnuta proporcija imamo $240 : 216 = x : 27$, odakle je $x = \dfrac{240 \cdot 27}{216} = 30$

dana.

Sažimanje poznatih vrednosti ponekad mora delimično da ide i uz nepoznatu vrednost. Sledi primer.

Primer: Put dug 6 km, širok 4m, debljine 0,4m, izradi 120 radnika za 24 dana uz radno vreme od 8h dnevno. Koliko će dana morati raditi 150 radnika po 6h dnevno, ako je potrebno da se izradi put dug 5 km, širok 5m, debljine 0,5m?

Rešenje: Najjednostavnije je da uporedimo odnos zapremina puteva sa odnosom ukupnog broja radnih sati izrade. Zapremina prvog puta je $6000 \cdot 4 \cdot 0,4$=9600 metara kubnih. Drugi put je zapremine $5000 \cdot 5 \cdot 0,5$=12500 metara kubnih. Za $120 \cdot 24 \cdot 8$=23040 časova se izgradi prvi, a za $150 \cdot x \cdot 6$=900 $\cdot x$ časova drugi put. Kako za veću zapreminu treba više sati imamo proporciju $9600 : 12500 = 23040 : (900 \cdot x)$, odakle je $x = \dfrac{23040 \cdot 12500}{9600 \cdot 900} = 33,3$ dana.

3.3.3 Višestruko pravilo trojno

Kada se neka radnja (proces, posao...) započne sa jednim odnosom vrednosti, a nastavi sa drugim odnosom vrednosti onda dva puta moramo primeniti pravilo trojno. Što je više promena odnosa vrednosti imamo više primena pravila trojnog.

Primer: Planirano je da izvestan posao obavi 25 radnika za 60 dana. Posao je počeo 1. aprila, ali samo sa 15 radnika. Posle 30 dana dođe na posao još 20 radnika. Kog datuma će posao biti završen, ako se radi svakog dana?

Rešenje: Prvi zadatak koji se nameće je: ako neki posao uradi 25 radnika za 60 dana za koliko dana će ga uraditi 15 radnika? Neka smo sa x označili nepoznati broj dana. Iz obrnute proporcije odnosa broja radnika i broja dana imamo $25 : 15 = x : 60$. Tako je potrebno $x = 25 \cdot 60/15 = 100$ dana. Međutim, radnici su radili 30 dana, pa bismo preostali posao uradilo njih 15 za 70 dana. Zbog promene situacije, (broja radnika) imamo drugi zadatak: ako preostali posao 15 radnika obavi za 70 dana za koliko dana će preostali posao obaviti 35 radnika? Sada je obrnuta proporcija $15 : 35 = x : 70$, odakle je $x = 70 \cdot 15/35$ =30 dana. Dakle, posle 30 dana njih 35-toro mora raditi još 30 dana. Od 1. aprila 60-ti dan je 30. maj, kada će biti završen posao.

3.4 Verižni račun i račun podele

Kada prelazimo iz jednog sistema jedinica na drugi pogodno je da koristimo verižni račun. Ako imamo niz jednakosti koje počinjemo (ili završavamo) sa jednostavnom jednačinom sa jednom nepoznatom tako da ciklično (kružno) nadovezujemo iste merne jedinice (kg, m, dinare $, l, t...), onda govorimo o **verižnom** računu. Na primer, zadatak u kome želimo da izračunamo koliko dinara košta 100 m platna, ako smo u Londonu 3 jarda tog platna platili 1800 penija? Da bismo sa jarda (yd) i penija (d) prešli na metre i dinare, moramo znati jednakosti prelaska: 12 yd =11m i 240 d = 1 £ i 1 £(funta sterlinga) = 95 dinara. Sad treba samo poređati jednakosti i jednu jednačinu tako da se nadovezuju iste jedinice mere:

x dinara = 100m
11 m = 12 yd
3 yd = 1800 d
240 d = 1 £
1 £= 95 dinara

Kako sa leve i desne strane imamo jednake (isto vredne) veličine ako izmnožimo sve leve i sve desne vrednosti opet ćemo dobiti jednake veličine:
x din · 11m · 3 yd · 240 d · 1 £= 100m · 12 yd · 1800 d · 1 £· 95 din. Kako se sve jedinice nalaze i na levoj i na desnoj strani jednačine (posledica njihovog nadovezivanja) možemo ih sve skratiti i izraziti nepoznatu vrednost

$$x = \frac{100 \cdot 12 \cdot 1800 \cdot 1 \cdot 95}{11 \cdot 3 \cdot 240 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 300 \cdot 95}{11} = 25909,09.$$

Tako smo izračunali da sto metara engleskog štofa košta 25909,09 dinara.

Zaključak: Sam postupak možemo pojednostaviti tako što jedinice mere nećemo pisati u jednakostima i polaznoj jednačini, ali ćemo voditi računa da ih nadovezujemo, i da počnemo i završimo sa istom jedinicom mere. Zatim, nepoznatu promenljivu računamo tako što pomnožimo sve brojeve sa desnih strana jednakosti i podelimo ih sa proizvodom svih brojeva sa leve strane.

Jednostavnije zadatke iz pravila trojnog takođe možemo rešavati pomoću verižnog računa. Recimo, ako rešavamo koliko dinara staje 25 kg krompira ako 18 kg staje 252 dinara? Pomoću, proporcije, odnosno, pravila trojnog, kilogrami krompira su direktno proporcionalni ceni krompira, sledi da je $25 : 18 = x : 252$, odakle bismo izračunali cenu (x) 25 kg krompira. Sa druge strane, pomoću verižnog računa možemo napisati jednu jednačinu i jednu jednakost:
x din = 25 kg
18 kg = 252 din, odakle je $x = (25 \cdot 252) : 18 = 350$ dinara. Ovo bismo bio ujedno i primer najprostijeg verižnog računa sa 3 poznate (inače bismo mogao da figuriše veći neparan broj poznatih) i jednom nepoznatom vrednošću.
Napomena: Obratite pažnju da problem pravila trojnog u kojem imamo obrnutu proporciju ne možemo rešiti verižnim računom.

Račun deobe

Račun deobe nastaje u situacijama kada količinu K, $K > 0$, treba podeliti na $n \geq 2$ ($n \in \mathcal{N}$) delova, odnosno
a) $K = K_1 + K_2 + ... + K_n$
tako da se zadovolji zadati odnos
b) $K_1 : K_2 : ... : K_n = p_1 : p_2 : ... : p_n$,
gde su svi brojevi K_i i p_i, za $i = 1, 2...n$, veći od nule.
To znači da u opštem slučaju količine K_i možemo izraziti kao
c) $K_i = p_i \cdot A, \quad i = 1, 2..., n$ gde je $0 < A \leq \frac{K}{n}$. Kada je faktor $A = \frac{K}{n}$, svi koeficijenti razmere p_i su jednaki.

Iz a) i c) sledi da je

$$K = p_1 \cdot A + p_2 \cdot A + ... + p_n \cdot A = A \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Kada iz prethodne jednačine izračunamo nepoznatu vrednost faktora A i uvrstimo je u c) dobijemo obrazac za računanje količina K_i tako da su ispunjeni uslovi a) i b):

2) $$K_i = p_i \cdot \frac{K}{\sum_{j=1}^{n} p_j}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots n.$$

Primeri:

1. Poljoprivredni kombinat planira 1000 hektara da zaseje kukuruzom, pšenicom i suncokretom u odnosu 13:8:4. Koliko hektara treba zasejati kukuruzom, a koliko pšenicom?
Rešenje: Kako je faktor $A = \dfrac{1000}{13+8+4} = 40$, imamo da kukuruzom treba zasejati $13 \cdot 40 = 520$, pšenicom $8 \cdot 40 = 320$ i suncokretom $4 \cdot 40 = 160 = 1000 - (520 + 320)$ hektara.

2. Istu vrstu posla obavljalo je 4 grupe radnika jednake kvalifikacije. Broj radnika, broj radnih dana i broj dnevnih radnih časova za svaku od 4 grupe radnika su dati u sledećoj tabeli:

grupe	1.	2.	3.	4.
broj radnika	3	12	6	2
dani	4	6	12	3
radni sati	8	5	10	4

Na koji način sumu od 12000 dinara rasporediti grupama radnika?
Rešenje: Ukupan broj sati rada redom prve, druge, treće i četvrte grupe je $3 \cdot 4 \cdot 8$, $12 \cdot 6 \cdot 5$, $6 \cdot 12 \cdot 10$ i $2 \cdot 3 \cdot 4$. Kako zarada po grupama mora biti proporcionalna sa ukupnim vremenom njihovog rada koeficijenti razmere su ukupni brojevi sati rada po grupama.

Tako je faktor $A = \dfrac{12000\text{din}}{12 \cdot (8 + 30 + 60 + 2)} = 10$ din. Zarada koju će redom dobiti 1, 2, 3. i 4. grupa je $3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10$din $= 960$ din, $12 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 10$ din $= 3600$ din, $6 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 10$ din $= 7200$ din i $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10$ din $= 240$ din.

3. Izvesnu sumu su podelile tri osobe. Prva je dobila trećinu, druga $\dfrac{4}{7}$ sume, a treća je dobila 100 dinara. Koliko dinara su dobile prva i druga osoba i kolika je ukupna suma koja je podeljena?
Rešenje: Označimo sa S polaznu sumu. Znači prva osoba je dobila $\frac{1}{3}$ S dinara, druga $\frac{4}{7}$ S dinara, a treća 100 dinara. Kako je ukupna suma jednaka zbiru razdeljenog novca $\frac{1}{3}$ S + $\frac{4}{7}$ S + 100 = S. Sledi 100 = S (1- $\frac{1}{3} - \frac{4}{7}$) = S $\frac{21-7-12}{21}$ = S $\frac{2}{21}$. Odakle je S = 50$\cdot$ 21 = 1050 dinara. Vidimo takođe da je treća osoba dobila $\frac{2}{21}$ od S. Prva osoba je dobila $\frac{1050}{3}$ = 350 dinara, dok je druga osoba dobila $\frac{1050 \cdot 4}{7}$ =600 dinara.

3.5 Vremenske serije

Ponekad treba zastati, osvrnuti se, analizirati prošlost, da bismo bolje mogli da planiramo budućnost.

Kada na raspolaganju imamo podatke o potrošnji, proizvodnji ili prodaji neke robe ili usluga u toku nekog vremenskog perioda (godine, meseci, dani...) možemo te podatke analizirati, da bismo doneli neke zaključke i planove za budući rad. Slede primeri.

Primer 1. U tabeli su dati podaci o godišnjoj proizvodnji semenskog kukuruza Instituta za semenarstvo u Novom Sadu u periodu od 10 godina:

proizvodnja (t)	3321	4980	4999	5330	4803
godina	1993.	1994.	1995.	1996.	1997.

proizvodnja (t)	4909	5200	5320	5980	6799
godina	1998.	1999.	2000.	2001.	2002.

Označimo sa $y_1, y_2, y_3, y_4 ... y_{10}$, redom proizvodnju semenskog kukuruza u 1993, 1994, 1995, 1996... 2002 godini. Iz tabele vidimo da je $y_2 = 4980$ tona, $y_{10} = 6799$ tona... Ako želimo da izračunamo koliko je procentualno povećana ili smanjena proizvodnja u nekoj godini iz razmatranog vremenskog perioda u odnosu na neku fiksiranu godinu, koju nazivamo **baznom** godinom koristimo **bazne indekse**. Neka je y_B proizvodnja u baznoj godini, tada bazne indekse, koje označavamo sa I računamo po formuli:

$$I_i = \frac{y_i}{y_B} \cdot 100, \quad \text{za} \quad i = 1, 2...n,$$

gde n predstavlja broj godina u razmatranom vremenskom periodu. U našem primeru n je 10.

U trećem redu sledeće tabele su izračunati bazni indeksi za 1999 godinu, dok je u četvrtom redu bazna 1993 godina.

godina	’93.	’94.	’95.	’96.	’97.
proizvodnja (t)	3321	4980	4999	5330	4803
bazni ind. za ’99	63,85	95,77	96,13	102,5	92,37
bazni ind. za ’93	100	150	150,53	160,5	144,63

godina	’98.	’99.	’00.	’01.	’02.
proizvodnja (t)	4909	5200	5320	5980	6799
bazni ind. za ’99	94,4	100	102,31	115	130,75
bazni ind. za ’93	152,41	156,06	160,19	180,1	204,73

Iz baznih indeksa za 1999 godinu uočavamo da je u 1993, 1994, 1995, 1997 i 1998 godini proizvodnja semenskog kukuruza bila redom za 36,15%, 4,23%, 3,87%, 7,63%, 5,6% manja u odnosu na proizvodnju u 1999. Porast proizvodnje u odnosu na 1999 godinu je bio u sledećim godinama: 1996, 2000, 2001 i 2002, i to redom za 2,5 %, 2,31%, 15% i 30,75%.

U vrsti baznih indeksa za 1993 godinu vidimo da je najveći porast proizvodnje semenskog kukuruza ostvaren u 2002 godini i da je procenat uvećanja 104,73% u odnosu na 1993. Minimalno uvećanje proizvodnje od 44,63% je ostvareno u 1997 godini.

Prosečna stopa rasta r_S može da se izrazi pomoću formule

$$r_S = \left(\sqrt[n-1]{\frac{y_{max}}{y_{min}}} - 1 \right) \cdot 100,$$

gde je y_{max} maksimalna vrednost proizvodnje, a y_{min} je minimalna vrednost proizvodnje semenskog kukuruza u razmatranom periodu. Ovu formulu ima smisla koristiti kada su podaci koje analiziramo takvi da ujednačeno, monotono rastu iz godine u godinu u razmatranom periodu (ili ravnomerno opadaju).To bismo značilo da je potrebno da važi: $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq ... \leq y_n$. U primeru koji razmatramo to nije slučaj.

Ako podaci ravnomerno opadaju tj. $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq y_4 \geq ... \geq y_n$, tada prosečnu stopu pada proizvodnje p_S možemo računati po formuli:

$$p_S = \left(\sqrt[n-1]{\frac{y_{min}}{y_{max}}} - 1 \right) \cdot 100.$$

U našem primeru prosečna godišnja stopa rasta proizvodnje u procentima iznosi

$$r_S = \left(\sqrt[9]{\frac{6799}{3321}} - 1 \right) \cdot 100 = 8,2.$$

Verižne indekse, koje označavamo sa V računamo po formuli:

$$V_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100, \quad \text{za} \quad i = 2...n.$$

godina	1993	1994	1995	1996	1997
proizvodnja (t)	3321	4980	4999	5330	4803
verižni indeksi	–	149,95	100,38	106,62	90,11

godina	1998	1999	2000	2001	2002
proizvodnja (t)	4909	5200	5320	5980	6799
verižni indeksi	102,2	105,93	102,31	112, 41	113,7

Verižni indeksi daju procenat povećanja (ili smanjenja u zavisnosti od podataka) u odnosu na prethodnu godinu. Tako indeks V_1 ne postoji jer podaci za 1992 godinu nisu dati u našem primeru. Svi izračunati verižni indeksi sem indeksa V_5 za 1997 godinu su veći od 100%, što je posledica činjenice da je proizvodnja u svim godinama sem u 1997 rasla. Ako pogledamo tabelu verižnih indeksa vidimo da je:

- proizvodnja u '94 porasla za skoro 50% u odnosu na '93;
- proizvodnja u '95 porasla za samo 0,38% u odnosu na '94;
- proizvodnja u '96 porasla za 6,62% u odnosu na '95;
- proizvodnja u '97 opala za skoro 10% u odnosu na '96, itd.

Pomoću verižnih indeksa takođe možemo da izračunamo prosečnu stopu rasta ili opadanja po zajedničkoj formuli:

$$rp_S = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=2}^{n} (V_i - 100).$$

Na ovaj način je prosečna godišnja stopa rasta proizvodnje semenskog kukuruza 9,2%, tj.:

$$rp_S = \frac{1}{9} \cdot (50 + 0,4 + 6,6 - 10 + 2 + 6 + 2 + 12 + 14) = \frac{83}{9} = 9,2,$$

što je za 1% veće od prosečne stope koju smo dobili po prvoj formuli za r_S.

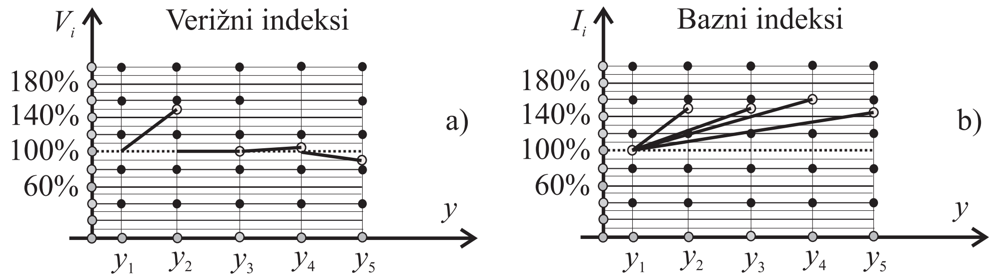
Zaključak: Kada podaci u vremenskom intervalu zadovoljavaju uslov stalnog ujednačenog rasta (opadanja) prosečnu stopu rasta (pada) jednostavnije računamo po formuli za r_S (p_S), u suprotnom bolje da koristimo formulu za rp_S.

Na osnovu prosečne stope rasta možemo predvideti vrednost proizvodnje (prodaje, cene...) u narednom vremenskom periodu.

Tako bismo očekivana proizvodnja semenskog kukuruza u 2010. godini uz godišnju stopu rasta od 9,2% bila

$$(1,092)^8 \cdot 6799 = 13748.$$

Bazne i verižne indekse možemo grafički prikazati. Grafički prikaz daje jednostavniji i bolji uvid razmatranih podataka. Za petogodišnji period od 1993 − 1997. (podaci $y_1, y_2 ... y_5$) su prikazani bazni indeksi za baznu prvu godinu (sl. 7.b) i verižni indeksi (sl. 7.a).



Slika 7. Grafički prikaz verižnih i baznih indeksa

Ukoliko su nam poznati bazni indeksi verižne možemo izračunati na sledeći način:

$$V_i = \frac{I_i}{I_{i-1}} \cdot 100, \quad i = 2...n.$$

U suprotnom ako su nam poznati verižni indeksi bazne možemo izračunati po sledećoj formuli:

$$I_i = \begin{cases} \frac{I_{i+1}}{V_{i+1}} \cdot 100, & i < B \\ 100\%, & i = B \\ \frac{I_{i-1}}{100} \cdot V_i, & i > B \end{cases}.$$

Objasnimo ovu formulu na sledećem primeru.

Primer 2. U tabeli su dati verižni indeksi kojima pratimo petogodišnju prodaju šećera trgovackog preduzeća "XY":

godina	1999.	2000.	2001.	2002.	2003.
verižni indeksi	–	120	110	105	103

Iz tabele vidimo da je proizvodnja od 1999. do 2003. iz godine u godinu stalno rasla i to redom za 20%, 10%, 5% i 3%. Ako na osnovu datih verižnih indeksa hoćemo da izračunamo bazne indekse za baznu 2001 godinu, prvo krećemo od baznog indeksa $I_3 = 100\%$, jer je to indeks bazne godine. Indekse I_2 i I_1 računamo po prvom delu formule, dok indekse I_4 i I_5 računamo po trećem delu formule. Tako su redom:

- $I_2 = \dfrac{I_3}{V_3} \cdot 100 = \dfrac{100}{110} \cdot 100 = 90,91\%;$
- $I_1 = \dfrac{I_2}{V_2} \cdot 100 = \dfrac{90,91}{120} \cdot 100 = 75,76\%;$
- $I_4 = \dfrac{I_3}{100} \cdot V_4 = \dfrac{100}{100} \cdot 105 = 105\%;$
- $I_5 = \dfrac{I_4}{100} \cdot V_5 = \dfrac{105}{100} \cdot 103 = 108,15\%.$

Primer 3. U toku godine prodaja šećera je u sedmomesečnom periodu novembar − maj stabilna. Međutim, u periodu jun − oktobar povećana je potražnja i prodaja šećera (obrada sezonskog voća, pečenje rakije, vinarska industrija...). Uočeno je da se potrebe za šećerom u periodu jun − oktobar redom povećavaju za 16%, 13%, 17%, 32% i 23%, što je u tabeli prikazano sa baznim indeksima za bazu u maju. Neka je prodaja u maju u Novom Sadu iznosila 450 tona šećera. Toliko su robne rezerve i obezbedile za svaki mesec u godini. Koliko dodatno treba obezbediti šećera da bismo se pokrile potrebe za šećerom u mesecima sa povećanom potražnjom?

godina	jun	jul	avgust	septembar	oktobar
bazni indeksi	116	115	117	132	123

Ako sa $š_1$, $š_2$, $š_3$, $š_4$ i $š_5$ označimo novosadske potrebe za šećerom redom u junu, julu, avgustu, septembru i oktobru sledi da su dodatne potrebe za šećerom

$$Š = \sum_{i=1}^{5}(š_i - 450).$$

U ovom primeru ne moramo da računamo $š_i$ jer su nam dati bazni indeksi (da imamo verižne indekse morali bismo ih računati). Dovoljno je da saberemo sve procente povećanja i zbir pomnožimo sa 450. Sledi da su povećane potrebe za šećerom $(0,16 + 0,15 + 0,17 + 0,32 + 0,23) \cdot 450 = 1,03 \cdot 450 = 463,5$ tona.

Na pitanje: Koliko iznosi maksimalna mesečna potrošnja šećera Novosađana? Odgovor bismo bio: Maksimalna potrošnja se ostvaruje u septembru i iznosi $1,32 \cdot 450 = 594$ tona.

Primer 4. Istraživački tim Novosadskog sajma je došao do zaključka da u toku 5 dana "Jesenjeg sajma lova i ribolova" ustalilo pravilo da se broj posetilaca sajma, od petka do utorka, prvo povećava pa zatim smanjuje po vrednostima koje su date u tabeli:

dan	1.	2.	3.	4.	5.
verižni indeksi	−	130	110	70	110

To je dalo ideju upravnom odboru da ove godine cenu zakupa sajamskog prostora veže za planirani broj posetilaca. Njihov broj oni znaju već posle prvog dana sajma. Ako je prvog dana bilo 1233 posetilaca, koliko ih se očekuje do kraja sajma?

Označimo sa y_1,y_2,y_3,y_4 i y_5 broj posetilaca 1, 2, 3, 4 i 5. dana sajma. Znači $y_1 = 1233$. Iz formule za verižne indekse imamo:

$$y_i = \frac{y_{i-1}}{100} \cdot V_i, \ i = 2, 3...n,$$

odnosno

- $y_2 = \dfrac{y_1}{100} \cdot V_2 = \dfrac{1233}{100} \cdot 130 = 1603,$
- $y_3 = \dfrac{y_2}{100} \cdot V_3 = \dfrac{1603}{100} \cdot 110 = 1763,$
- $y_4 = \dfrac{y_3}{100} \cdot V_4 = \dfrac{1763}{100} \cdot 70 = 1234,$
- $y_5 = \dfrac{y_4}{100} \cdot V_5 = \dfrac{1234}{100} \cdot 110 = 1357.$

Ukupan planirani broj posetilaca sajma je $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} y_i = 7190.$

3.6 Teorijska pitanja

3.60. U direktnoj proporciji pri povećanju jedne veličine smanjuje se druga.	$\perp$
3.61. Ukupan prinos po hektaru na jednoj parceli u toku godine je u direktnoj proporciji sa količinom i kvalitetom agrotehničkih mera primenjenih na toj parceli.	$\top$
3.62. Ukupan broj studenata koji su u januarskom roku 2006. izašli na ispit iz Matematike je u direktnoj proporciji sa njihovim znanjem iz Matematike.	$\top$
3.63. Broj izlazaka studenta na ispit iz Matematike je u direktnoj proporciji sa njegovim znanjem iz Matematike.	$\perp$
3.64. Ako paor ima 100 ha obradive zemlje i proizvodi samo krompir i kukuruz, tada su njegova proizvodnja krompira i kukuruza direktnoj proporciji.	$\perp$
3.65. Obrnuta proporcija se može rešiti preko verižnog računa.	$\perp$
3.66. Broj koka nosilja i broj jaja su u direktnoj proporciji na farmi jaja.	$\top$
3.67. Proporcija je jednakost dve trorazmere.	$\perp$
3.68. Procenat klijavosti nekog semena je u obrnutoj proporciji sa brojem izniklih biljaka.	$\perp$
3.69. Ukupan broj cvetova u toku godine na stablu hibiskusa je u direktnoj proporciji sa količinom nege prema hibiskusu.	$\top$
3.70. Broj sadnica po hektaru u obrnutoj je proporciji sa rastojanjem među sadnicama.	$\top$
3.71. Broj sadnica po hektaru u voćnjaku u obrnutoj je proporciji sa međurednim rastojanjem voća.	$\top$

3.72. Broj radnih sati i površina obrađenog zemljišta su u direktnoj proporciji.	$\top$
3.73. Broj radnih sati i broj radnika za poznatu količinu posla su u direktnoj proporciji.	$\perp$
3.74. Cena robe je obrnuto proporcionalna količini robe x na slobodnom tržištu.	$\top$
3.75. Prinos oraha po hektaru je u obrnutoj proporciji sa prosečnim prinosom oraha po stablu.	$\perp$
3.76. U direktnoj proporciji su visina sobne temperature zimi i količina vode potrebne za zalivanje hibiskusa.	$\top$
3.77. Cena buketa ruža i broj ruža u buketu su u direktnoj proporciji.	$\top$
3.78. Gazdinstvo koje jedne godine proizvodi samo kukuruz i pšenicu, proizvodi ih u obrnutoj proporciji.	$\top$
3.79. U sušnom periodu broj dana zalivanja i površina koju zalivamo su, uz ograničenu količinu vode, u direktnoj proporciji.	$\perp$
3.80. Ako je na farmi tovnih pilića stalan broj pilića, onda su količina tovne hrane i broj dana njihovog hranjenja u direktnoj proporciji.	$\top$
3.81. Neka je broj konja na ergeli stalan, tada su količina stočne hrane i broj dana njihovog hranjenja u obrnutoj proporciji.	$\perp$
3.82. Neka je period tova svinja na farmi određen, tada su količina stočne hrane i broj tovljenika u direktnoj proporciji.	$\top$
3.83. Neka je količina stočne hrane na farmi koza fiksirana, tada su broj koza i broj dana njihovog hranjenja u obrnutoj proporciji.	$\top$
3.84. Neka je jedan ciklus hranjenja koza na farmi fiksiran, tada su količina stočne hrane i broj koza u ciklusu u obrnutoj proporciji.	$\perp$
3.85. Neka je broj ovaca na farmi stalan, tada su količina stočne hrane i broj dana njihovog hranjenja u direktnoj proporciji.	$\top$
3.86. Neka je količina hrane na farmi ovaca fiksna, tada su količina ovaca i broj dana njihovog hranjenja u direktnoj proporciji.	$\perp$
3.87. Neka je količina stočne hrane na farmi koka nosilja fiksna, tada su broj koka i broj dana njihovog hranjenja u obrnutoj proporciji.	$\top$
3.88. Neka "Pipiko" ima jednaku dnevnu nabavku pilećeg mesa i proizvodi samo pileće viršle i pileći parizer, tada su dnevna proizvodnja pilećih viršli i pilećeg parizera u direktnoj proporciji.	$\perp$
3.89. Ako mlekara pravi samo fetu i gaudu i ima uvek jednaku mesečnu nabavku mleka, tada su mesečna proizvodnja fete i gaude u direktnoj proporciji.	$\perp$
3.90. Ako zalivamo iz cisterne u kojoj je ograničena količina vode, tada su broj dana zalivanja i veličina površine koju zalivamo u direktnoj proporciji.	$\perp$
3.91. Iz proporcije $p : q = a : b$, za $p, q, a, b \in \mathcal{R}^+$ slede proporcije $p : a = q : b$, $(p + q) : q = (a + b) : b$.	$\top$
3.92. Iz proporcije $p : q = a : b$, za $p, q, a, b \in \mathcal{R}^+$ slede proporcije $b : a = q : p$, $b : q = a : p$.	$\top$
3.93. Iz jednakosti $p : q = a : b$, za $p, q, a, b \in \mathcal{R}^+$ slede jednakosti $p : b = q : a$, $(p + b) : b = (q + a) : a$.	$\perp$

3.94. Iz proporcije $p : q = a : b$, za $p, q, a, b \in \mathcal{R}^+$ sledi proporcija $b : a = p : q$.	$\perp$
3.95. Proporcija je jednakost dve dvorazmere.	$\top$
3.96. U direktnoj proporciji pri povećanju jedne veličine povećava se i druga veličina.	$\top$
3.97. U obrnutoj (indirektnoj) proporciji pri povećanju jedne veličine povećava se i druga veličina.	$\perp$
3.98. U obrnutoj proporciji pri povećanju jedne veličine, druga veličina se smanjuje.	$\top$
3.99. U direktnoj proporciji pri povećanju jedne veličine smanjuje se druga veličina.	$\perp$
3.100. U direktnoj proporciji pri smanjenju jedne veličine smanjuje se i druga veličina.	$\top$
3.101. U obrnutoj proporciji pri smanjenju jedne veličine i druga veličina se smanjuje.	$\perp$
3.102. Problem koji se svodi na obrnutu proporciju ne možemo rešavati verižnim računom.	$\top$
3.103. Problem koji se svodi na direktnu proporciju ne možemo rešavati verižnim računom	$\perp$
3.104. Neka je količina stočne hrane na farmi fiksirana, tada su količina stočnog fonda i broj dana njihovog hranjenja u obrnutoj proporciji.	$\top$
3.105. Ako imamo na raspolaganju fiksan broj kombajna za vršidbu u jednom gazdinstvu, tada su broj sati dnevnog rada i broj dana vršidbe u obrnutoj proporciji.	$\top$
3.106. Mešavina (legura) 100 gr zlata od 14 i 200 gr zlata od 17 karata ima 16 karata.	$\top$
3.107. Legura 300 gr zlata od 14 i 200 gr zlata od 19 karata ima 18 karata.	$\perp$
3.108. Mešanjem 1 t veštačkog đubriva sa 20% sastojka A i 1000 kg veštačkog đubriva sa 40% sastojka A dobijamo veštačko đubrivo sa 30% sastojka A.	$\top$
3.109. Mešavina 100 gr herbicida A po ceni od 30 din po gr i 50 gr herbicida B od 24 din po gr ima cenu od 28 din po gr.	$\top$
3.110. Mešanjem 1 l kruškovače sa 18% alkohola i 1 l kruškovače sa 24% alkohola dobijamo 2 l kruškovače sa 20% alkohola.	$\perp$
3.111. Mešanjem 1 dl 80% esencije sirćetne kiseline sa 1 l vode dobijamo 8% sirćetnu kiselinu.	$\perp$
3.112. Mešavina 100 kg pasulja po 140 din i 200kg pasulja po 170 din ima cenu od 165 dinara.	$\perp$
3.113. Mešavina 100 kg semena trava sa 20% semena ET i 150 kg semena trava sa 80% semena ET ima 40% semena ET.	$\perp$
3.114. Mešavina 1 kg semena klijavosti 90% i 1500 g semena klijavosti 85% ima 87% klijavost.	$\top$
3.115. U prostom računu mešanja koeficijent razmere u mešavini za skuplju robu je jednak razlici cene skuplje robe i cene mešavine.	$\perp$
3.116. Mešanjem 40 kg brašna tip-400 po ceni od 25 dinara po kg sa 100 kg brašna tip-400 po ceni od 18 dinara po kg dobijamo brašno tip-400 po ceni od 20 dinara po kg.	$\top$

3.117. Mešanjem 33 novčanice od 100 dinara sa 11 novčanica od 500 dinara dobijamo 44 novčanice sa prosečnom vrednošću od 200 dinara.	$\top$
3.118. Ako imamo na raspolaganju 6 roba, a zahtevana cena mešavine ovih roba je između 3-će i 2-ge robe, tada ima 8 prostih načina mešanja (po 2 od 6 roba).	$\top$
3.119. Mešavina 100 l kajsijevače po ceni od 300 din po l i 50 l kajsijevače od 240 din po l ima cenu od 280 dinara po litri.	$\top$
3.120. Cena mešavine je veća od cene jeftinije, a manja od cene skuplje robe.	$\top$
3.121. Cena mešavine je manja od cene jeftinije, a veća od cene skuplje robe.	$\perp$
3.122. Mešanjem 5 dl 75% alkohola sa 15 dl destilovane vode dobijamo 45% alkohol.	$\perp$
3.123. U 2 l rakije sa 50% alkohola dodato je 3 l destilovane vode i dobijena je rakiju sa 20% alkohola.	$\top$
3.124. Ako imamo na raspolaganju 4 robe, a zahtevana cena mešavine ovih roba je između 1-ve i 2-ge robe, tada ima 3 prosta načina mešanja (po 2 od 4 robe).	$\top$
3.125. Mešanjem 3 t veštačkog đubriva sa 15% N i 4,5 t veštačkog đubriva sa 40% N dobijamo veštačko đubrivo sa 30% N.	$\top$
3.126. Mešanjem 140 kg brašna tip-500 po ceni od 25 dinara po kg sa 100 kg brašna tip-500 po ceni od 18 dinara po kg dobijamo brašno tip-500 po ceni od 23 dinara po kg.	$\perp$
3.127. Mešavina 200 l jabukovače po ceni od 300 din po l i 50 l jabukovače od 250 din po l ima cenu od 290 dinara po litri.	$\top$
3.128. Mešanjem 2 l rakije sa 40% alkohola sa 20 dl destilovane vode dobijamo rakiju sa 20% alkohola.	$\top$
3.129. Mešanjem 1 dl 80% sirćetne kiseline sa 0,9 l vode dobijamo 8% sirćetnu kiselinu.	$\top$
3.130. Mešanjem 1 dl 80% esencije sirćetne kiseline sa 1,9 l vode dobijamo 4% sirćetnu kiselinu.	$\top$
3.131. Mešavina 1 kg semena klijavosti 60% i 1500 g semena klijavosti 85% ima 75% klijavost.	$\top$
3.132. U prostom računu mešanja koeficijent razmere u mešavini za skuplju robu je jednak apsolutnoj vrednosti razlike cene jeftinije robe i cene mešavine.	$\top$
3.133. Cena mešavine roba sa različitim cenama je veća od cene najskuplje robe.	$\perp$
3.134. U prostom računu mešanja koeficijenti razmere za mešavinu su jedinstveno određeni.	$\perp$
3.135. Koeficijent razmere za jeftiniju robu u prostom računu mešanja jednak je razlici cene mešavine i jeftinije robe.	$\perp$
3.136. Kod složenog računa mešanja mešamo 2 robe.	$\perp$
3.137. U prostom računu mešanja koeficijenti razmere za mešavinu jedinstveno su određeni ako je sem cene mešavine zahtevana i količina mešavine.	$\top$
3.138. U prostom računu mešanja dve robe sa datim cenama koeficijenti razmere za mešavinu sa zahtevanom cenom nisu jedinstveno određeni bez dodatnog uslova.	$\top$
3.139. U prostom računu mešanja dve robe sa datim cenama koeficijenti razmere za mešavinu sa zahtevanom cenom jesu jedinstveno određeni bez dodatnog uslova.	$\perp$

3.140. Bazni indeksi su relativne promene, u procentima, razmatrane veličine (prodaja, proizvodnja...) u aktuelnom periodu u odnosu na prethodni period.	$\perp$
3.141. Bazni indeks I_1 ne postoji.	$\perp$
3.142. Bazni indeks I_B postoji i jednak je 100%.	$\top$
3.143. Prosečnu stopu rasta za podatke o prodaji koji su uređeni na sledeći način $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$ računamo po formuli $(\sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} - 1) \cdot 100$.	$\top$
3.144. Verižni indeks za otkup pšenice od 102% za 2004. znači da je otkup pšenice u 2004. manji za 2% u odnosu na 2003. godinu.	$\perp$
3.145. Verižni indeks za otkup šećerne repe od 80% za 2005. znači da je otkup šećerne repe u 2005. manji za 20% u odnosu na 2006. godinu.	$\perp$
3.146. Verižni indeks za izvoz pšenice od 72% za 2007. znači da je izvoz pšenice u 2007. manji za 28% u odnosu na 2006.	$\top$
3.147. Bazni indeks za izvoz malina od 142% za godinu 2004. u odnosu na baznu 2000. znači da je u 2004. izvoz malina porastao za 42% u odnosu na 2000.	$\top$
3.148. Verižni indeks za prodaju jabuka od 133% za godinu 2003, znači da je u 2003. prodaja jabuka porasla za 133% u odnosu na 2002.	$\perp$
3.149. Verižni indeks od 350% za prodaju sadnica u oktobru znači da je prodaja u oktobru porasla za 250% u odnosu na septembar.	$\top$
3.150. Verižni indeks za prodaju vina od 120% za godinu 2003. znači da je u 2003. prodaja vina porasla za 20% u odnosu na 2002.	$\top$
3.151. Verižni indeks za otkup višanja od 20% za 2006. znači da je otkup višanja u 2006. manji za 80% u odnosu na 2005. godinu.	$\top$
3.152. Bazni indeks od 70% za prodaju jabuka u januaru u odnosu na bazni novembar, znači da je prodaja u januaru u odnosu na novembar opala za 30%.	$\top$
3.153. Neka je bazni indeks za proizvodnju $I_3 = 80\%$, to znači da je u trećem periodu u odnosu na bazni proizvodnja opala za 80%.	$\perp$
3.154. Bazni indeks za prodaju meda od 102% za godinu 2004. u odnosu na baznu 2000. znači da je u 2004. prodaja meda porasla za 102% u odnosu na 2000.	$\perp$
3.155. Verižne indekse računamo po formuli $V_j = \frac{y_j}{y_{j-1}}$, $j = 1, 2...n$.	$\perp$
3.156. Prosečnu stopu rasta za podatke o prodaji koji su uređeni na sledeći način $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$ računamo po formuli $\sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100$.	$\perp$
3.157. Procentnu stopu pada za 10 podataka, koji su rastući, računamo iz formule $(\sqrt[9]{\frac{y_{10}}{y_1} - 1}) \cdot 100$.	$\perp$
3.158. Vrednost $\sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} - 1$ je prosečna stopa rasta kada $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_{n-1} \leq y_n$.	$\perp$
3.159. Bazni indeks od 50% za prodaju jaja u oktobru u odnosu na bazni januar znači da je prodaja u oktobru u odnosu na januar porasla za 50%.	$\perp$

3.160. Iz verižnih indeksa izražavamo za koliko procenata se povećala ili smanjila vrednost proizvodnje (prodaje...) u razmatranoj jedinici vremena u odnosu na prethodnu.	$\top$
3.161. Vrednost $(\sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} - 1) \cdot 100$ je prosečna stopa pada podataka y_i kada je $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_{n-1} \geq y_n$.	$\top$
3.162. Prosečnu stopu pada za podatke o prodaji koji su uređeni na sledeći način $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_k$ računamo po formuli $(\sqrt[k-1]{\frac{y_k}{y_1}} - 1) \cdot 100$.	$\perp$
3.163. Prosečnu stopu rasta prodaje za podatke o prodaji koji su uređeni na sledeći način $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_t$, računamo po formuli $(\sqrt[t-1]{\frac{y_1}{y_t}} - 1) \cdot 100$.	$\perp$
3.164. Verižne indekse V za podataka y_i, $i = 1, 2...n$ računamo po formuli $V_j = \frac{y_j}{y_{j-1}} \cdot 100$, $j = 2...n$.	$\top$
3.165. Bazni indeks za prodaju meda od 102% za godinu 2004. u odnosu na baznu 2000. znači da je u 2004. prodaja meda porasla za 2% u odnosu na 2000.	$\top$
3.166. Bazni indeksi su relativne promene, u procentima, razmatrane veličine (prodaja, proizvodnja...) u aktuelnom periodu u odnosu na bazni period.	$\top$
3.167. Bazni indeks za baznu godinu je jednak 100%.	$\top$
3.168. Ako su bazni indeksi za otkup višanja redom 120%, 120%, 120%, 120% i 100% za period od 5 godina, tada je verižni indeks $V_5 \approx 83,3\%$.	$\top$
3.169. Neka su verižni indeksi redom V_2=102%, V_3=150%, V_4=200%, tada je za baznu treću godinu (B=3) bazni indeks za četvrtu godinu jednak I_4= 50%.	$\perp$
3.170. Neka su verižni indeksi redom V_2=102%, V_3=150%, V_4=105%, tada je za baznu treću godinu (B=3) bazni indeks $I_2 = 66,\dot{6}\%$.	$\top$
3.171. Verižni indeks V_1 ne postoji.	$\top$
3.172. Neka su verižni indeksi redom V_2=102%, V_3=150%, V_4=205%, tada je za baznu treću godinu (B=3) I_4= 205%.	$\top$
3.173. Neka je u avgustu cena lubenica iz nedelje u nedelju bila redom 20, 15, 10 i 15 dinara po kg, tada su bazni indeksi za baznu prvu nedelju redom, 100%, 75%, 50% i 75%.	$\top$
3.174. Neka je u avgustu cena lubenica iz nedelje u nedelju bila redom 20, 15, 10 i 15 dinara po kg, tada su verižni indeksi za cenu u II, III i IV nedelji, redom 75%, $66,\dot{6}\%$ i 150%.	$\top$
3.175. Neka je u avgustu cena dinja iz nedelje u nedelju bila redom 20, 15, 10 i 15 dinara po kg, tada su bazni indeksi za baznu treću nedelju redom, 200%, 150%, 100% i 150%.	$\top$
3.176. Neka je u avgustu cena krastavaca iz nedelje u nedelju bila redom 40, 30, 40 i 30 dinara po kg, tada su bazni indeksi za baznu treću nedelju redom: 100%, 50%, 100% i 50%.	$\perp$

$$\boxed{\text{\textbf{3.177.} Neka je u septembru cena bresaka iz nedelje u nedelju bila redom 150, 75 i 75 dinara po kg, tada su verižni indeksi redom 100\% i 200\%.}}$$ $\perp$

Glava 4.

4 Elementi finansijske matematike

4.1 Složeni kamatni račun

Obračun kamate moguće je uraditi na dva bitno različita načina. To su **prost** i **složen** kamatni račun. Kod prostog računa kamata se računa samo jednom za ceo period, dok se kod složenog, kamata računa na kamatu i obračun se vrši na kraju svakog obračunskog perioda. Tako na primer, neka smo uložili 1000 dinara na tri godine uz godišnju kamatu od 10% i neka se obračun vrši godišnje. Kako je 10% od 1000 dinara 100 dinara, za tri godine prostim kamatnim računom bismo imali 1300 dinara. Međutim, složenim kamatnim računom bismo u drugu godinu ušli sa kapitalom od 1100 dinara na koji bismo kamata od 10% bila 110 dinara, pa bismo u treću godinu ušli sa kapitalom od 1210 (1100 + 110) dinara i na kraju treće godine uz dodavanje kamate za treću godinu od 121 dinar imali bismo završni kapital od 1331 dinar. Znači 31 dinar više kapitala nam je omogućilo računanje kamate na kamatu kod složenog kamatnog računa.

Kapitalisanje predstavlja obračun kamate i njeno dodavanje na prethodni kapital. Tako kod složenog kamatnog računa imamo više kapitalisanja, dok kod prostog kamatnog računa imamo samo jedno kapitalisanje. Na osnovu dužine obračunskog perioda kapitalisanje može biti godišnje, polugodišnje, tromesečno (kvartalno), mesečno i kontinuirano (neprekidno). Ako se kamata obračunava na početku obračunskog perioda kažemo da je kapitalisanje **anticipativno**. Dalje u tekstu, podrazumevaćemo da je kapitalisanje **dekurzivno**, odnosno da se obračun kamate vrši na kraju obračunskog perioda.

Izvedimo formulu za složeni kamatni račun. Neka je G **glavnica**, odnosno suma koja se oročava uz kamatu (interes) od p procenata po jedinici vremenskog perioda (mesec, godina...). Označimo sa G_k sumu sa kojom raspolažemo nakon proteka k jedinica razmatranog vremenskog perioda. Neka se obračunski period poklapa sa razmatranom jedinicom vremena.

Nakon proteka prve jedinice vremena G_1 je glavnica G uvećana za kamatu na glavnicu. Slično, nakon proteka i druge jedinice vremena G_2 je suma iz prethodnog perioda G_1 uvećana za kamatu na tu sumu:

$$G_1 = G + \frac{p}{100} \cdot G = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$G_2 = G_1 + \frac{p}{100} \cdot G_1 = G_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Tako dobijamo i da je

$$G_3 = G_2 + \frac{p}{100} \cdot G_2 = G_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

Na sličan način, dobijamo opštu formulu za sumu nakon isteka $n \in \mathcal{N}$ jedinica vremena za koju nam je data kamatna stopa od p%:

$$G_n = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . \tag{3)}$$

U formuli 3) ima 4 parametra G, G_n, p i n, od kojih je suma G_n eksplicitno izražena preko ostala 3 parametra. Odgovarajuće formule koje eksplicitno izražavaju G, p i n, redom su:

$$G = \frac{G_n}{(1+\frac{p}{100})^n}, \qquad \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G}} - 1, \quad \text{i} \quad n = \frac{\ln G_n - \ln G}{\ln(1+\frac{p}{100})}.$$

Prve dve formule jasno slede iz 3), dok formulu za n računamo iz 3) logaritmovanjem[15] (videti primer 2. niže).

Mada finansijska matematika jeste oblast čiji su sadržaji dominantno povezani sa bankarstvom i privrednim finansijama, postoje primeri njene primene van ovih grana. Neki od njih slede:

Primer 1. Neka se jedna vrsta virusa za 1 minut utrostruči (poveća se za 200%). Posle pola sata njihovog umnožavanja smo delovali na viruse nekim sredstvom tako da se njihov broj prepolovljuje za minut. Posle koliko vremena ćemo stabilizovati broj virusa na početnu količinu?
Rešenje: Ako je G količina virusa koju imamo na početku, nakon pola sata povećavanja sa minutnom "kamatom" od 200% imamo ih $G(1+2)^{30} = G_{30}$. Sada ih smanjujemo sa "kamatom" od 50%: $G_{30}(1-0,5)^n$ što treba da je jednako G. Sledi, $G \cdot 3^{30} \cdot 0,5^n = G$ odnosno posle deljenja sa G i logaritmovanja: $30\ln3 + n\ln0{,}5 = 0$. Te je $n = -30\ln 3/\ln 0,5 = 30 \cdot 1,585 = 47,55$ minuta.

Primer 2. Na koliko meseci treba oročiti 100 dinara da bismo se uz mesečnu kamatu od 7% dobila suma od 1000 dinara?
Rešenje: Logaritmujmo[16] obe strane jednačine $1000 = 100 \cdot 1.07^n$, po nepoznatoj n. Koristimo osobine logaritma:

$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, za sve $a, b \in \mathcal{R}^+$, i
$\log a^b = b \cdot \log a$, za svako $a \in \mathcal{R}^+$ i svako $b \in \mathcal{R}$,

što implicira da je:
$\log 1000 = \log 100 + n \cdot \log 1.07 \quad \Leftrightarrow \quad n = \dfrac{3-2}{\log 1,07} \approx 34$. Za dve godine i 10 meseci bismo od 100 dinara dobili sumu od 1000 dinara.

Primer 3. [17] Neka je goveđi fond Srbije 1998. godine milion grla. 60% od osnovnog fonda je predviđeno za priplod. Od predviđenog broja 90% se teli svake godine. Zna se da u proseku svaka dvadeseta krava ima dva teleta. Godišnje ugine ili se pokolje 40% od osnovnog fonda. Koliki će goveđi fond biti 2001. godine u Srbiji?
Rešenje: U ovom primeru osnovni goveđi fond predstavlja glavnicu $G = 1.000.000$. Procenat p je sada procenat godišnjeg uvećanja goveđeg fonda: $\dfrac{p}{100} = \dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{90}{100} + \dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{90}{100} \cdot \dfrac{5}{100} - \dfrac{40}{100} = 0,167$. U Srbiji će 2001. godine osnovni goveđi fond iznositi (formula 3)): $G_3 = 1.000.000 \cdot 1,167^3 \approx 1.589.324$ grla.

---

[15] $\log_a x = y$ akko je $a^y = x$ za $a > 0$. Ako je osnova logaritma $a = 10$, pišemo log, a ako je $a = e$, pišemo ln.

[16] Ovog puta smo zbog specifičnosti brojeva (100 i 1000) u zadatku koristili logaritam sa osnovom 10, mada ćemo ravnopravno koristiti i prirodan logaritam.

[17] Primer preuzet iz [16].

4.1.1 Približna i konformna kamatna stopa

U situacijama kada se obračunski period ne poklapa sa jedinicom vremena za koji je data kamatna stopa, recimo kamatna stopa je godišnja a kapitalisanje je tromesečno, moramo izračunati kamatnu stopu za dati obračunski period. To možemo da uradimo na jednostavan način, koji nije precizan, (tačan je jedino ako se radi o prostom kamatnom računu), tako što podelimo godišnju kamatnu stopu sa brojem obračunskih perioda u jednoj godini. Na primer, ako je godišnja kamata 12% onda bismo tromesečna kamata bila 3%, polugodišnja 6%, mesečna 1%. Kada treba računati dnevnu kamatu onda najčešće pojednostavljujemo da godina ima 360 dana, a mesec 30 dana.

Formulu za sumu koju dobijamo za uloženu glavnicu G nakon isteka $n,\ n \in \mathcal{N}$, jedinica vremena za koju nam je data kamatna stopa od $p\%$, pri čemu kapitalisanje vršimo za obračunski period koji se u jedinici vremena sadrži m puta imamo na osnovu formule 3):

3.a) $$G_{n,m} = G \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}.$$

Izmene koje imamo u odnosu na formulu 3) su:
- kamatna stopa je umesto p % sada p/m % i
- broj kapitalisanja je umesto n jednak $m \cdot n$.

Primer:

Kapital od 200000 dinara uložen je na 7 godina. Izračunajte krajnji kapital, ako banka kapitališe polugodišnje sa 18% godišnje kamate.
Rešenje: U toku 7 godina ima 14 obračunskih perioda (kapitalisanja) od 6 meseci. Šestomesečna kamata je 9%. Posle 14 kapitalisanja imamo sumu:

$$G_{7,2} = 200000 \cdot \left(1 + \frac{18}{2 \cdot 100}\right)^{7 \cdot 2} = 200000 \cdot 1,09^{14} = 668345,4 \text{ dinara.}$$

Na ovaj način, računajući šestomesečnu kamatnu stopu dobili smo više para nego da smo istu svotu, od 200000 dinara, oročili na isti period, od 7 godina, uz istu kamatnu stopu od 18%, a da je kapitalisanje bilo godišnje. Pod ovakvim uslovima imali bi:

$$G_7 = 200000 \cdot \left(1 + \frac{18}{100}\right)^{7} = 200000 \cdot 1,18^7 = 637094,78 \text{ dinara.}$$

Ova razlika bismo bila još veća da je obračunski period bio manji.

Ako želimo da prevaziđemo ovakve "nepreciznosti" koristimo **konformnu** stopu. Znači koristeći konformnu stopu od $k\%$, za obračunski period koji se m puta sadrži u vremenu za koji nam je data kamatna stopa $p\%$ treba da dobijemo isti finansijski efekat:

$$G \cdot \left(1 + \frac{k}{100}\right)^{n \cdot m} = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n}.$$

Kada podelimo sa G imamo

$$\left(\left(1 + \frac{k}{100}\right)^{m}\right)^{n} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n}.$$

Sledi da osnove moraju biti jednake:

$$\left(1+\frac{k}{100}\right)^m = 1+\frac{p}{100}.$$

Tako konformnu stopu od $k\%$, za vremenski period koji se m puta sadrži u periodu za koji nam je data kamatna stopa od $p\%$, računamo po formuli:

$$\frac{k}{100} = \sqrt[m]{1+\frac{p}{100}} - 1.$$

Za godišnju kamatnu stopu od 18% bismo šestomesečna konformna kamatna stopa bila
$\frac{k}{100} = \sqrt[2]{1+\frac{18}{100}} - 1 = \sqrt{1,18} - 1 = 0,086278$, dok bismo tromesečna konformna kamatna stopa bila
$\frac{k}{100} = \sqrt[4]{1+\frac{18}{100}} - 1 = \sqrt[4]{1,18} - 1 = 0,0422466354.$

4.1.2 Ulaganje

Ulaganje je situacija slična složenom kamatnom računu sa razlikom što se kod složenog kamatnog računa ulaganje vrši samo jednom, dok se kod ulaganja *ista* suma **ulog** U ulaže na početku *svake* jedinice vremena (mesec, godina,..) koji razmatramo. Pod pretpostavkom da je kamata po jedinici vremena $p\%$ i da razmatramo ulaganje koje traje n jedinica vremena, interesuje nas koliku **sumu** S_n ćemo imati na kraju ulaganja?

Kako na osnovu složenog kamatnog računa sledi da je: ulog sa početka dao sumu od $U\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ na kraju razmatranog perioda; ulog sa početka druge jedinice vremena dao sumu od $U\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}$ na kraju razmatranog perioda; ulog sa početka treće jedinice vremena dao sumu od $U\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}$ na kraju razmatranog perioda... Ako označimo sa $q = 1+\frac{p}{100}$, i ako smo iza treće jednakosti dodali i oduzeli 1, a iza četvrte koristili formulu za zbir prvih $n+1$ članova geometrijskog niza $1+q+q^2+...+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, sledi da je:

$$\begin{aligned} S_n &= U\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + U\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + ... + U\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 + U\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) \\ &= U\cdot q^n + U\cdot q^{n-1} + ... + U\cdot q = U\cdot(q^n+q^{n-1}+...+q+1-1) \\ &= U\cdot\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1\right) = U\cdot\frac{q^{n+1}-1-q+1}{q-1}. \end{aligned}$$

Tako je posle isteka n jedinica vremena suma sa kojom se raspolaže jednaka:

4) $$S_n = U\cdot q\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Primer:

Koliko treba ulagati svake godine sa godišnjom kamatom od 12% da bismo se za 30 godina

dobila suma od 40000 eura, potrebna za dvosoban stan?
Rešenje: Iz jednačine 4) sledi
$U = S_n \cdot \dfrac{q-1}{q \cdot (q^n - 1)} = 40000 \cdot \dfrac{0.12}{1.12 \cdot (1.12^{30} - 1)} =$
$40000 \cdot \dfrac{0.12}{1.12 \cdot (1.12^{30} - 1)} \approx 40000 \cdot 0.0037 \approx 148$ eura.
Počnite da štedite!

Iz formule 4) je ponekad potrebno izračunati n, odnosno ukupan broj uloga. Izrazimo n:

$$\begin{aligned} \frac{S_n(q-1)}{Uq} &= q^n - 1, \\ \frac{S_n(q-1)}{Uq} + 1 &= q^n, \\ n &= \frac{\ln\left(\frac{S_n(q-1)}{Uq} + 1\right)}{\ln q}. \end{aligned}$$

Po prethodnoj formuli rešavamo zadatke slične sledećem:

Primer:
Koliko meseci treba ulagati 1000 dinara uz mesečnu kamatu od 3%, da bismo se uštedelo bar 100000 dinara?
Rešenje:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{100000 \cdot 0,03}{1000 \cdot 1,03} + 1\right)}{\ln 1,03} = \frac{\ln\left(\frac{3000}{1030} + 1\right)}{0,02956} = \frac{\ln 3,913}{0,02956} = 46,15.$$

Dovoljno je štedeti 3 godine i 11 meseci.

4.1.3 Otplata duga

Otplaćivanje duga je problem suprotan problemu ulaganja. Umesto da ulažemo jednake sume mi otplaćujemo jednake **rate** R za pozajmljeni **dug** D u *zahtevanom roku* od n jedinica vremena sa kamatom od $p\%$ po jedinici vremena.

Označimo sa $q = 1 + \dfrac{p}{100}$. Pretpostavimo da se radi o periodu od n meseci.

Posle prvog meseca dug je uvećan za mesečnu kamatu i nakon plaćanja mesečne rate R aktuelni dug iznosi
$D + \dfrac{p}{100} \cdot D - R$ što je jednako $q \cdot D - R$.

Posle drugog meseca dug iz prethodnog meseca je uvećan za mesečnu kamatu i nakon plaćanja mesečne rate R aktuelni dug na kraju drugog meseca je
$q \cdot D - R + \dfrac{p}{100} \cdot (q \cdot D - R) - R$ što je jednako $q^2 \cdot D - q \cdot R - R$.
Slično, na kraju trećeg meseca aktuelni dug iznosi
$q^2 \cdot D - q \cdot R - R + \dfrac{p}{100} \cdot (q^2 \cdot D - q \cdot R - R)$, što je jednako
$q^3 \cdot D - q^2 \cdot R - q \cdot R - R$.

Na sličan način se dobija da je dug na kraju k-tog meseca $k \leq n$ jednak
$q^k \cdot D - q^{k-1} \cdot R - .... - q \cdot R - R$.

Na kraju razmatranog perioda od n meseci svo dugovanje treba da je otplaćeno, odnosno aktuelni dug je jednak nuli:

$$q^n \cdot D - q^{n-1} \cdot R - q^{n-2} \cdot R - ... - q \cdot R - R = 0$$
$$\Leftrightarrow \ q^n \cdot D = R \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q + 1)$$
$$\Leftrightarrow \ q^n \cdot D = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ukoliko je potrebno izračunati kolika je rata R koristimo sledeću formulu:

5) $$R = D \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1}.$$

Primer:

Pretpostavimo da je uzeta pozajmica od 40000 eura, sa godišnjom kamatom od 15 % i rokom otplate od 30 godina. Kolika je godišnja rata otplate ovog duga?

Rešenje: Na osnovu formule 5) godišnja rata iznosi

$$40000 \cdot \frac{1,15^{31} - 1,15^{30}}{1,15^{30} - 1} \approx 40000 \cdot \frac{9,932}{65,212} \approx 6092 \text{ eura.}$$

Nekada je potrebno izračunati koliko rata ćemo imati ako su poznati dug, kamata i rata. U formuli 5) broj rata je označen sa n. Da bismo iz formule 5) izrazili n moramo u nekoliko sledećih koraka transformisti formulu dok ne budemo u mogućnosti da primenimo logaritmovanje. Iz 5) sledi:

$$q^n R - R = Dq^n(q-1),$$
$$q^n(R - D(q-1)) = R,$$
$$q^n = \frac{R}{R - D(q-1)},$$
$$n \ln q = \ln \frac{R}{R - D(q-1)},$$
$$n = \frac{\ln \frac{R}{R-D(q-1)}}{\ln q}.$$

Poslednja formula nam pomaže da rešimo sledeći zadatak:

Primer: Firma je pozajmila 30000 dinara sa godišnjom kamatom od 8%. Dogovor je da se godišnje vraća 6000 dinara. Za koliko godina će vratiti dug?

Rešnje: Dug, $D = 30000$ dinara, rata R je 60000, parametar $q = 1 + 0,08 = 1,08$. Stoga na osnovu formule za broj rata n imamo

$$n = \frac{\ln \frac{R}{R-D(q-1)}}{\ln q} = \frac{\ln \frac{6000}{6000-30000 \cdot 0,08}}{\ln 1,08} = \frac{\ln \frac{6000}{3600}}{0,077} = \frac{\ln 1,67}{0,077} = 6,66.$$

Za vraćanje duga biće potrebno 7 godina.

4.1.4 Rešenja uvodnih zadataka

Podsetimo se uvodnih zadataka ove glave:

1. Toša T. je pozajmio od strica 3000 eura za kupovinu polovnog automobila. Uz mesečnu kamatu od 1%, koliko mesečno treba da vraća stricu da bismo dug izmirio za tri godine?

2. Želimo da se bavimo proizvodnjom mleka. Koliko krava treba nabaviti za osnovni fond da bismo nakon isteka 16 godina od osnovnog fonda dobili 500 krava ako se zna da se 95% krava oteli svake godine i da su od toga 50% ženska telad?

3. Da li za 18 godina roditelji Mile J. mogu da uštede 25000 eura za kupovinu garsonjere ako svakog meseca ulažu 50 eura uz mesečnu kamatu od 1% ?

4. Za izgradnju manje vikendice na obroncima Fruške gore Peko D. je unajmio 7 radnika: 3 zidara 2 armirača i 3 tesara. Za izgradnju je pogođena suma od 1000 eura. Zidanje je trajalo 5 dana, betoniranje 2 dana i podizanje krova 2 dana. Na koji način Peko treba da podeli sumu od 1000 eura i isplati ove tri grupe radnika?

Rešenja:

1. Za računanje Tošine mesečne rate koristimo formulu

$$R = D \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1},$$

pri čemu je dug $D = 3000$, $q = 1,01$ i $n = 36$ meseci. Sledi $R = 3000 \cdot \frac{1{,}01^{37} - 1{,}01^{36}}{1{,}01^{36} - 1} = 3000\frac{1{,}445 - 1{,}43}{0{,}43} = 3000\frac{0{,}015}{0{,}43} = 3000 \cdot 0,03488372 = 104,65$. Tako je Tošina mesečna rata 104,65 eura.

2. Iako je potrebno je 2 godine da žensko tele postane krava, račun ćemo pojednostaviti, i račununati 1 godinu. Prvo moramo izračunati procenat godišnjeg prirasta krava. On je 0,95 $\cdot$ 0,5= 0.475. Iz formule za složeni kamatni račun

$$S_n \ = \ U \cdot q^n \ ,$$

potrebno je da nađemo ulog U koji u zadatku predstavlja početni kravlji fond. Broj godina $n = 8$ je poznat kao i godišnja "kamata" od 47,5%. "Sumu", odnosno broj krava nakon isteka 8 godina zahtevamo na 500. Sledi
$U = S_8/1,475^8 = 500/22,4 = 22,32$. Znači kao polazni fond bile bismo dovoljne 23 krave.

3. Mogu, jer po formuli za ulaganje

$$S_n \ = \ U \cdot q\frac{q^n - 1}{q - 1} \ ,$$

imamo $S_{18 \cdot 12} \ = \ 50 \cdot 1,01\frac{1{,}01^{18 \cdot 12} - 1}{1{,}01 - 1} \ = 50,5\frac{7{,}579}{0{,}01} = 50,5 \cdot 757,9 = 38273,95$, što bismo bilo dovoljno za jednosoban stan.

4. Neka su redom K_1, K_2 i K_3 sume koje treba dati zidarima, armiračima i tesarima. One se odnose isto kao i ukupan broj radnih dana ovih grupa radnika: $(3 \cdot 5) : (2 \cdot 2) : (2 \cdot 3) = 15 : 4 : 6$. Po formuli

$$K_i \ = \ p_i \cdot \frac{K}{\sum_{j=1}^{n} p_j} \quad i = 1, 2, 3...n.$$

sledi da su zidari dobili
$K_1 = 15 \cdot \frac{1000}{15+4+6} = 15 \cdot 40 = 600$ eura
armirači $K_2 = 4 \cdot 40 = 160$ eura i $K_3 = 6 \cdot 40 = 240$ eura.

4.1.5 Zadaci

[18]

4.1. Raspolaže se sa rakijom od 33 i 40 gradi. Kako ih treba pomešati da dobijemo rakiju od 35 gradi.

Rešenje. U odnosu 5:2 treba mešati rakiju.

4.2. Koliko litara vina od 10 maligana treba dodati na 12 litara vina od 14 maligana, da bismo se dobilo vino od 13 maligana?

Rešenje. 4 litre.

4.3. Pasulj od 100 dinara je mešan sa pasuljem od 118 dinara, pa je dobijeno 90 kg mešavine pasulja po ceni od 110 dinara. Koliko kilograma je uzeto od svake vrste?

Rešenje. Odnos je 40:50.

4.4. Ako smo imali 800 l vina od 13,5 maligana i toj količini dodali 200 l od 12 maligana, od koliko maligana je mešavina?

Rešenje. Mešavina je od 13,2 maligana.

4.5. Raspolaže se grožđem od 75, 78, 85, 92 i 100 dinara po kilogramu, a želi se mešavina od 80 dinara po kilogramu. Pošto se grožđem od 75, 78 i 100 dinara raspolaže u većim količinama, to je potrebno izvršiti kombinaciju tako da od tih vrsta što više uđe u mešavinu.

Rešenje. Jedna razmera za mešanje bismo mogla da bude 32:25:2:5:7.

4.6. Imamo 15 kg pirinča po ceni od 30 dinara po kilogramu. Po koliko pirinča od 60, 90 i 130 dinara po kilogramu treba dodati da bismo dobili pirinač od 110 dinara po kilogramu?

Rešenje. Treba dodati 15, 15 i 112,5 kg pirinča po cenama od 60, 90 i 130 dinara.

4.7. Ako u džezvi voda za 5 šoljice kafe provri za 3 minuta, za koliko minuta će provriti voda za 7 šoljica kafe?

Rešenje. Za 4 minute i 12 sekundi.

4.8. Ako je za izradu 6000m štofa širine 1,4m potrebno je 2800 kg vune, koliko kilograma vune je potrebno da bismo se izradilo 10000m štofa širine 150cm?

Rešenje. 5000kg.

4.9. Izrada nasipa dužine 30m, širine 6m, visine 4m staje 1080000 dinara. Koliko će visok biti nasip dužine 25m, širine 7m, ako njegova izgradnja treba da staje 525000 dinara?

Rešenje. Nasip će biti visok 2 m.

4.10. Poljoprivredno dobro je raspolagalo hranom za 150 dana za svojih 25 krava. Posle 30 dana dobro je prodalo 8 krava. Za koliko dana će dobro imati još hrane za preostali broj krava?

Rešenje. Za 176,5 dana.

4.11. Po planu neki posao obavi 30 radnika za 40 dana uz 8 časova dnevnog rada. Posao otpočnu svi radnici i rade po planu 10 dana. Tada posao napusti 15 radnika. Bez njih se radilo 5 dana. U međuvremenu, dođe naređenje da se posao mora završiti u narednih 10 dana, pa je i radno vreme povećano na 10 časova dnevno. Koliko treba još radnika uzeti da bismo posao bio završen na vreme?

Rešenje. 15 radnika bismo završilo posao za 60, a da bismo se posao završio za 10 dana sa produženim radnim vremenom potrebno je još zaposliti 51 radnika.

4.12. Neki posao završi 12 radnika za 27 dana uz radno vreme od 6 časova dnevno. Takav posao je počet 1. juna, ali samo sa 9 radnika, zbog čega je povećano radno vreme na 9 časova dnevno. Pod tim uslovima se radilo 10 dana. Tada je došlo na posao još 5 radnika, pa se i radno vreme smanji na 8 časova dnevno. Kog datuma će posao biti završen, ako je svaki dan radni?

Rešenje. Posao će biti završen 21. juna.

4.13. Količina od 120 kg grožđa se može kupiti za 14400 dinara. Koliko se dinara može kupiti za 4800 dinara?

[18] U ovom pododeljku su uglavnom korišteni zadaci iz [5] i [4], dok je većina primera u tekstu originalna.

Rešenje. 40 kg.

4.14. Koliko funti sterlinga staje 1 engleska tona jabuka, ako kod nas 100kg vredi 3200 dinara? Znamo da je 1 engleska tona (et) jednaka 1016 kg, da je kurs 1 funte 95 dinara?

Rešenje. 333,4 funte košta engleska tona jabuka.

4.15. Koliko grama čistog zlata vredi SAD dolar, ako je zvanični kurs za \$ 52 dinara i ako je cena 1 kg čistog zlata 337583 dinara?

Rešenje. 0,1541 grama čistog zlata vredi 1 američki dolar.

4.16. Radnik je dobio platu od 1250 dinara nakon odbijenog samodoprinosa od 1%. Koliko je odbijeno na ime samodoprinosa?

Rešenje. Odbijeno je 12,63 dinara.

4.17. Jedno naselje danas ima 47880 stanovnika, što predstavlja 26% više nego pre 20 godina. Koliko je stanovnika to naselje imalo pre 20 godina?

Rešenje. Pre 20 godina je bilo 38000 stanovnika.

4.18. U fabrici prehrambene industrije, pomešane su 54 litre 30%-tnog rastvora limunske kiseline i 36 litara 50%-tnog rastvora iste kiseline sa 15 litara čiste vode. Koliko procenata kiseline ima nova smeša?

Rešenje. 32,57%

4.19. Jedna trećina nabavljene robe je prodata sa zaradom od 18%, jedna šestina sa gubitkom od 5%, a ostatak sa zaradom od 12% za 168000 din. Odrediti ukupnu nabavnu cenu, ukupnu zaradu i ukupnu prodajnu cenu celokupne robe?

Rešenje. Ukupna nabavna vrednost je 300000 din, ukupna zarada je 33500din, te je ukupna prodajna cena 333500 din.

4.20. Posle sniženja cene za 20%, roba se prodaje po 180 din. Za koliko procenata povećati sadašnju cenu, da bismo se roba prodavala po ranijoj ceni?

Rešenje. Za 25%.

4.21. Cena robe povećana je za 20%, pa zatim još za 5%. Za koliko procenata je ukupno povećana polazna cena robe?

Rešenje. Za 26%.

4.22. Četiri fabrike treba da ostvare mesečnu proizvodnju od redom 30000t, 40000t i 80000t.
a) Sa koliko procenata svaka fabrika učestvuje u ukupnom planu proizvodnje?
b) Kako je izvršen plan, ako je ukupno proizvedeno 218000t?

Rešenje.
a) Procentualno učešće fabrika je redom 15%, 20%, 25% i 40%.
b) Plan je prebačen za 9%.

4.23. Petina nabavljene robe je prodata sa zaradom od 10%, a polovina sa zaradom od 20%. Sa koliko procenata zarade treba prodati ostatak robe, da bismo se ostvarila ukupna zarada od 18%?

Rešenje. Ostatak od $\frac{3}{10}$ robe treba prodati sa zaradom od 20 %.

4.24. Pre 20 godina uloženo je 35000 dinara, a pre 5 godina još 30000 dinara. Koliko iznosi uvećani kapital, ako je godišnja kamata 8%?

Rešenje. 207213,33 dinara.

4.25. U banku je uloženo 60000 dinara, a 8 godina kasnije podignuto je 80000 dinara. Kojom sumom se raspolaže 25 godina od dana ulaganja ako banka računa 24% godišnju kamatu sa polugodišnjim kapitalisanjem?

Rešenje. Posle 25 godina raspolaže se sa 13568731 dinara.

4.26. Na koji iznos će da poraste kapital od 100000 dinara, ako je uložen za prvih 25 godina uz 4% godišnje kamate, a sledećih 30 godina sa 5% godišnje kamate? Kapitalisanje je polugodišnje.

Rešenje. Uvećaće se na 1184242,6 dinara.

4.2 Teorijska pitanja

4.27. Kapitalisanje je obračun kamate i njeno dodavanje na osnovicu.	$\top$
4.28. Kapitalisanje može biti dekurzivno i anticipativno.	$\top$
4.29. Dekurzivno kapitalisanje predstavlja obračun i dodavanje kamate na kraju obračunskog perioda.	$\top$
4.30. U formuli za složeni kamatni račun kapitalisanje se vrši dekurzivno.	$\top$
4.31. U formuli za složeni kamatni račun kapitalisanje se vrši anticipativno.	$\perp$
4.32. U složenom kamatnom računu ulaganje se vrši više puta.	$\perp$
4.33. Kod anticipativnog kapitalisanja obračun kamate vršimo na kraju obračunskog perioda.	$\perp$
4.34. Ako je godišnja kamata 9%, onda bismo tromesečna kamata za prost kamatni račun bila 3% .	$\perp$
4.35. Ako je godišnja kamata 9%, onda bismo četvoromesečna kamata za prost kamatni račun bila 3%.	$\top$
4.36. Ulagač složenim kamatnim računom gubi u odnosu na prosti kamatni račun .	$\perp$
4.37. U složenom kamatnom računu ulaganje se vrši jednom.	$\top$
4.38. U prostom kamatnom računu kamatu računamo na kamatu.	$\perp$
4.39. U složenom kamatnom računu ulaganje se vrši više puta.	$\perp$
4.40. U prostom kamatnom računu kamata pomnožena brojem obračunskih perioda se dodaje na osnovicu.	$\top$
4.41. Prostim kamatnim računom štediša dobija manje nego složenim kamatnim računom.	$\top$
4.42. Primenom prostog kamatnog računa ulagač dobija više u odosu na primenu složenog kamatnog računa pod istim početnim uslovima.	$\perp$
4.43. Ukoliko u prostom kamatnom računu ima više obračunskih perioda, kamatu ne računamo na kamatu.	$\top$
4.44. Kapitalisanje je dekurzivno ako obračun kamate vršimo na kraju obračunskog perioda.	$\top$
4.45. Primenom prostog kamatnog računu u odnosu na primenu složenog kamatnog računa, pri ulaganju štedište, banka dobija.	$\top$
4.46. Prostim kamatnim računom štediša gubi u odnosu na složeni kamatni račun.	$\top$
4.47. Prostim kamatnim računom dobijamo manje para nego ako koristimo složeni kamatni račun pod istim početnim uslovima.	$\top$
4.48. Prostim kamatnim računom štediša dobija isto kao i složenim kamatnim računom jedino ako imamo jedan obračunski period.	$\top$
4.49. Primenom prostog kamatnog računu u odnosu na primenu složenog kamatnog računa, pri ulaganju štedište, štediša dobija.	$\perp$
4.50. Na koliko meseci treba da uložimo sumu S, uz mesečnu kamatu od $m\%$, da bismo imali ušteđenu sumu U, računamo iz: $\dfrac{\ln\dfrac{U}{S}}{\ln(1+m\%)}$.	$\top$

4.51. Na koliko godina treba da uložimo sumu S uz mesečnu kamatu od $m\%$, da bismo imali ušteđenu sumu U računamo iz: $\dfrac{\ln\dfrac{U}{S}}{12\cdot\ln(1+m\%)}$.	$\top$
4.52. Koliko treba uložiti danas uz dnevnu kamatu od $q\%$ da bismo se po isteku n dana imala ušteđena suma S, računa se iz: $\dfrac{S\cdot q\%}{(1+q\%)^{n+1}-(1+q\%)}$.	$\perp$
4.53. Koliko treba uložiti danas, uz dnevnu kamatu od $q\%$, da bismo se po isteku n dana imala ušteđena suma S računa se iz: $\dfrac{S}{(1+q\%)^n}$.	$\top$
4.54. Ako se uloži suma S uz mesečnu kamatu od $q\%$, tada se nakon m meseci raspolaže sa ušteđevinom koja se računa iz: $S(1+q\%)^n$.	$\perp$
4.55. Neka se količina mrava u špajzu neprestano i naizmenično: u periodu od 3 nedelje uvećava za 20% u toku svake nedelje, a zatim u narednih 7 nedelja smanjuje za 10% u svakoj nedelji, tada mrava u toku dužeg vremena neće biti u špajzu.	$\top$
4.56. Neka se količina virusa V neprestano naizmenično u periodu od 5 minuta uvećava za 5% u toku svakog minuta, a zatim u narednih 12 minuta se smanjuje za 2% u svakoj minuti, tada će količina virusa V u toku vremena neograničeno rasti.	$\top$
4.57. Da bismo na kraju godine imali za 50% veću platu, dovoljno je da se plata povećava za 3% svih 12 meseci.	$\perp$
4.58. Da bismo na kraju godine imali duplo veću platu dovoljno je da se plata povećava za 6% svih 12 meseci.	$\top$
4.59. Da bismo na kraju godine imali duplo veću platu dovoljno je da se plata povećava za 5% svih 12 meseci.	$\perp$
4.60. Neka se količina virusa neprestano naizmenično u periodu od 5 minuta uvećava za 2% svakog minuta, a zatim se u narednih 10 minuta smanjuje za 1% u svakoj minuti, tada će virusi u toku vremena nestati.	$\top$
4.61. Konformnu kamatnu stopu koristimo kada želimo da imamo isti finansijski efekat iako kapitalisanje vršimo u kraćem vremenu od perioda za koji nam je data kamatna stopa.	$\top$
4.62. Ako za složeni kamatni račun, kapitalisanje vršimo u kraćim periodima nego što je period za koji je data kamatna stopa i pri tom koristimo konformnu kamatnu stopu, isto je kao i da smo kapitalisanje vršili samo u periodima za koje je data kamatna stopa.	$\top$
4.63. Konformnu kamatnu stopu za dan dobijenu od mesečne kamate od $m\%$ računamo iz: $\sqrt[12]{1+m\%}-1$.	$\perp$
4.64. Konformnu kamatnu stopu za period koji se k puta sadrži u periodu za koji je data kamatna stopa od $s\%$ računamo iz $\sqrt[k]{1+\dfrac{s}{100}}-1$.	$\top$
4.65. Ako je godišnja kamatna stopa $s\%$ onda je konformna kamatna stopa za tromesečni period manja od $\dfrac{s}{4\cdot 100}$.	$\top$

4.66. Konformna kamatna stopa za četvoromesečje dobijena od godišnje kamatne stope od 6% iznosi 2%.	$\perp$
4.67. Konformna kamatna stopa za polugođe dobijena od godišnje kamatne stope od 300% je jednaka 100%.	$\top$
4.68. Ako za složeni kamatni račun kapitalisanje vršimo u kraćim periodima nego što je period za koji je data kamatna stopa i pri tom ne koristimo konformnu kamatnu stopu, štediša gubi.	$\perp$
4.69. Konformna kamatna stopa za četvoromesečje dobijena od godišnje kamatne stope od 700% je jednaka 100%.	$\top$
4.70. Konformna kamatna stopa za 6 meseci dobijena od godišnje stope od 2% jednaka je $\sqrt[6]{1,02}-1$.	$\perp$
4.71. Konformna kamatna stopa za 3 meseca, dobijena od godišnje stope od 4%, jednaka je $\sqrt[4]{1,04}-1$.	$\top$
4.72. Konformna kamatna stopa za četiri meseca dobijena od godišnje kamatne stope od 3% je jednaka 1%.	$\perp$
4.73. Konformna kamatna stopa za pola godine od godišnje kamatne stope od 0,21% je 0,1%.	$\top$
4.74. Konformna kamatna stopa za kvartal dobijena od godišnje kamatne stope od 4% je jednaka 1%.	$\perp$
4.75. Konformna kamatna stopa za kvartal dobijena od godišnje kamatne stope od 8% je manja od 2%.	$\top$
4.76. Konformna kamatna stopa omogućuje da kod složenog kamatnog računa precizno vršimo kapitalisanje u manjim obračunskim periodima.	$\top$
4.77. Konformna četvoromesečna kamatna stopa za godišnju kamatnu stopu od 3% je veća od 1%.	$\perp$
4.78. Konformna tromesečna kamatna stopa za godišnju kamatnu stopu od 4% je veća od 1%.	$\perp$
4.79. Konformna kamatna stopa za četvoromesečni period dobijena od 9% godišnje kamatne stope je manja od 3%.	$\top$
4.80. Konformna kamatna stopa za mesec dobijena od godišnje kamatne stope od 3% je manja od 0,25%.	$\top$
4.81. Ako je godišnja kamatna stopa p%, onda je konformna kamatna stopa za tromesečni period manja od $\dfrac{p}{4\cdot 100}$.	$\top$
4.82. Konformna kamatna stopa za 6 meseci dobijena od godišnje kamatne stope od 4%, je manja od 1%.	$\perp$
4.83. Ako za složeni kamatni račun kapitalisanje vršimo u kraćim periodima nego što je period za koji je data kamatna stopa i pri tom ne koristimo konformnu kamatnu stopu banka gubi.	$\top$
4.84. Za višestruko uzastopno ulaganje iste sume koristimo formulu za složeni kamatni račun.	$\perp$

4.85. Koliko treba da ulažemo početkom svakog meseca uz mesečnu kamatu od $m\%$, da bismo na isteku n meseci imali ušteđenu sumu S, računamo iz: $\dfrac{S\cdot m\%}{(1+m\%)((1+m\%)^n-1)}$...	$\top$
4.86. Mesečna rata za otplatu duga mora biti manja od mesečne kamate na dug da bismo se dug mogao vratiti.	$\perp$
4.87. Ako zajam Z vraćamo u jednakim mesečnim ratama M sa mesečnom kamatom od $m\%$, tada ćemo broj potrebnih rata izračunati po formuli: $\dfrac{\ln M-\ln(M-Z\cdot m\%)}{\ln(1+m\%)}$.	$\top$
4.88. Neka dug D vraćamo u jednakim mesečnim ratama R sa mesečnom kamatom od $p\%$, tada ćemo broj potrebnih rata izračunati po formuli: $\dfrac{\ln R}{\ln(R-D\cdot p\%)\ln(1+p\%)}$.	$\perp$
4.89. Koliko treba da ulažemo svakog dana, uz dnevnu kamatu od $d\%$, da bismo na isteku n dana imali ušteđenu sumu SS, računamo iz: $\dfrac{SS\cdot d\%}{(1+d\%)((1+d\%)^n-1)}$.	$\top$
4.90. Koliko treba da štedimo mesečno, uz mesečnu kamatu od $p\%$, da bismo na isteku n godina imali ušteđenu sumu S računamo iz: $\dfrac{S\cdot p\%}{(1+p\%)((1+p\%)^{12\cdot n}-1)}$.	$\top$
4.91. Koliko treba da ulažemo svakog dana uz dnevnu kamatu od $q\%$, da bismo na isteku n dana imali ušteđenu sumu S računamo iz: $\dfrac{S\cdot q\%}{(1+q\%)^{n+1}-(1+q\%)}$.	$\top$
4.92. Koliko meseci treba da otplaćujemo dug K uz mesečnu kamatu od $m\%$ i uz mesečnu ratu M računamo iz: $\dfrac{\ln M-\ln(M-K\cdot m\%)}{\ln(1+m\%)}$.	$\top$
4.93. Koliko meseci treba da otplaćujemo dug K uz mesečnu kamatu od $m\%$ i mesečnu ratu M, računamo iz: $\dfrac{\ln M-\ln(M-K\cdot(m\%+1))}{\ln(1+m\%)}$.	$\perp$
4.94. Koliki kredit K se može otplatiti uz mesečnu kamatu od $m\%$ i mesečnu ratu M za n meseci računa se iz: $K=M\cdot(m\%+1)^n\cdot\dfrac{(m\%+1)^n-1}{m\%}$.	$\perp$
4.95. U formuli za račun otplate duga kapitalisanje se vrši anticipativno.	$\perp$
4.96. Dug od 10000 dinara uz dnevnu kamatu od 20% i dnevnu ratu od 5000 dinara vratićemo za 3 dana.	$\top$
4.97. Dug od 100 dinara uz dnevnu kamatu od 50% i dnevnu ratu od 70 dinara vratićemo za 3 dana.	$\perp$
4.98. Dug od 100 dinara uz dnevnu kamatu od 50% i dnevnu ratu od 70 dinara vratićemo za 4 dana.	$\top$
4.99. Da bismo kredit mogli vratiti mesečna kamata na kredit mora biti manja od mesečne rate otplate.	$\top$

4.100. Da bismo dug mogao da se vrati rata za otplatu duga mora biti veća od kamate na početni dug.	⊤
4.101. Dug od 1000 dinara uz dnevnu kamatu od 50% i dnevnu ratu od 500 dinara ne možemo vratiti.	⊤
4.102. U formuli za otplatu duga kapitalisanje je vršeno dekurzivno.	⊤
4.103. Dug od 100 eura uz dnevnu kamatu od 1% i dnevnu ratu od 0,5 eura doživotno nećemo vratiti.	⊤
4.104. U računu uloga ulaganje se vrši više puta.	⊤
4.105. Dug od 300 dinara uz dnevnu kamatu od 3% i dnevnu ratu od 3 dinara doživotno nećemo vratiti.	⊤
4.106. Rate u računu otplate duga su jednake.	⊤
4.107. Dug od 1000 dinara uz dnevnu kamatu od 40% i dnevnu ratu od 700 dinara vratićemo za 3 dana.	⊤

Glava 5.

5 Polinomi

Polinom P *po kompleksnoj promenljivoj* $z = x + iy$ *je funkcija* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ...a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, *gde su* **koeficienti** $a_k \in \mathcal{C}$ *i* $n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$.

Elementi: $a_n z^n, a_{n-1}z^{n-1}, ...a_1 z, a_0$ su **članovi** polinoma P. Ako su svi koeficijenti polinoma realni onda je i polinom P **realan**. U nastavku podrazumevamo da su polinomi po kompleksnoj promenljivoj realni.

Ako je vodeći koeficijent $a_n \neq 0$ tada je polinom P n-tog **stepena**, tj. $st(P) = n$. Broj 0 se naziva **nula polinom**.

Ako polinomi P i Q nisu nula polinomi tada je
$st(P(z) + Q(z)) \leq max\{st(P), st(Q)\}$ i $st(P(z) \cdot Q(z)) = st(P) + st(Q)$.

5.1 Najveći zajednički delilac polinoma - NZD

Slično kao kod prirodnih brojeva, ako su P i Q polinomi i postoji polinom K tako da je $P(x) \cdot K(x) = Q(x)$, onda kažemo da je polinom P delitelj polinoma Q, i pišemo $P|Q$.

Polinom $D(z)$ *je* **najveći zajednički delilac** *polinoma* $P(z)$ *i* $Q(z)$*, u oznaci* $D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ *ako je zadovoljeno:*

$$\mathit{1.}\ \ D|P \wedge D|Q \qquad i \qquad \mathit{2.}\ \ (\forall R) \ \ (R|P \wedge R|Q) \Rightarrow R|D.$$

Ako polinom R deli polinom D, tj. $R|D$, to ima za posledicu da je $st(R) \leq st(D)$. Zato se u prethodnoj definiciji za polinom D koristi pridev najveći, u smislu da je D polinom najvećeg stepena koji deli polinome P i Q.

Primetimo da ako je $D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ tada je i $\alpha \cdot D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ gde je $0 \neq \alpha \in \mathcal{R}$.

Za bilo koja dva nenula polinoma P *i* Q *postoji njihov najveći zajednički delilac. On je jedinstveno određen sa tačnošću do jedne multiplikativne konstante.*

Dokaz. Primenimo Euklidov algoritam: prvo podelimo polinom P sa polinomom Q, a zatim sve dok je ispunjeno da ostatak pri deljenju nije nula polinom, iterativno delimo delilac sa ostatkom. Tako dobijamo sledeći niz jednačina u kojima su redom $Q, R_1, R_2, ..., R_k$ delioci, a redom $R_1, R_2, ..., 0$ ostaci:

$$\begin{array}{lcccl}
P(z) & = & Q(z) & \cdot\ Q_1(z) & +R_1(z) \\
Q(z) & = & R_1(z) & \cdot\ Q_2(z) & +R_2(z) \\
R_1(z) & = & R_2(z) & \cdot\ Q_3(z) & +R_3(z) \\
\multicolumn{5}{l}{\dotfill} \\
R_{k-3}(z) & = & R_{k-2}(z) & \cdot\ Q_{k-1}(z) & +R_{k-1}(z) \\
R_{k-2}(z) & = & R_{k-1}(z) & \cdot\ Q_k(z) & +\mathbf{R_k(z)} \\
R_{k-1}(z) & = & R_k(z) & \cdot\ Q_{k+1}(z) & +0 \\
\text{deljenik} & & \textbf{delilac} & \text{količnik} & \textbf{ostatak}
\end{array}$$

Euklidov postupak tvdi da je $R_k(z) = NZD(P(z), Q(z))$. Proverimo to.

Pokažimo prvo da je polinom R_k delilac polinoma P i delilac polinoma Q. Iz poslednje jednačine imamo da polinom R_k deli polinom R_{k-1}. Zatim uz korišćenje činjenice $R_k|R_{k-1}$, iz pretposlednje jednačine imamo da polinom R_k deli i polinom R_{k-2}. Iz treće jednačine od kraja uz činjenice $R_k|R_{k-1}$ i $R_k|R_{k-2}$, imamo i $R_k|R_{k-3}$. Slično, dolazimo do druge jednačine pri čemu smo saznali da važi $R_k|R_i$ za $i = k-1, k-2, k-3, ..., 1$. Tada, iz druge jednačine zaključujemo da $R_k|Q$, i najzad iz prve jednačine zaključujemo $R_k|P$.

Potrebno je još pokazati da je R_k *najveći* zajednički delilac polinoma P i Q, odnosno da ako pretpostavimo da postoji polinom T, koji deli oba polinoma P i Q da tada mora da važi da je $T|R_k$. Iz pretpostavke da postoji polinom T tako da je ispunjeno $T|P$ i $T|Q$, iz prve jednačine imamo da onda važi $T|R_1$. Zatim, iz druge jednačine dobijamo da $T|R_2$. Potom, iz treće sledi da $T|R_3$,... Iz poslednje jednačine imamo da pošto važi da $T|R_{k-1}$ sledi da je i $T|R_k$, što je i trebalo dokazati. □

5.2 Osnovna teorema algebre

Rešenje z_1 algebarske jednačine $P(z) = 0$ nazivamo **nulom** ili **korenom** polinoma P. Tako su $z_1 = -2$ i $z_2 = 3$ koreni polinoma $P(z) = z^2 - z - 6$, jer je $P(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$ i $P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$. Slično su $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$ i $z_3 = 0$ koreni ili nule polinoma $Q(z) = z^3 - 2z^2 + 5z = z(z^2 - 2z + 5)$, pošto je ispunjeno:

- $Q(z_1) = Q(1+2i) = (1+2i)((1+2i)^2-2(1+2i)+5) = (1+2i)\cdot(1+4i-4-2-4i+5) = (1+2i)\cdot 0 = 0$,
- $Q(z_2) = Q(1-2i) = (1-2i)\cdot((1-2i)^2-2(1-2i)+5) = (1-2i)\cdot(1-4i-4-2+4i+5) = (1-2i)\cdot 0 = 0$ i
- $Q(z_3) = Q(0) = 0^3 - 2\cdot 0^2 + 5\cdot 0 = 0$.

Važi sledeće tvrđenje za realne polinome po kompleksnoj promenljivoj:

Svaki polinom stepena $n \in \mathcal{N}$ ima n rešenja u skupu kompleksnih brojeva.

Osnovna teorema algebre nam daje nešto slabije tvrđenje:

Svaki polinom $P(z)$ stepena n, $n \geq 1$ ima bar jednu nulu u skupu $\mathcal{C}$.

5.2.1 Faktorizacija polinoma

U opštem slučaju faktorisati polinom znači zapisati ga u obliku proizvoda polinoma nižeg stepena. Faktorizaciju polinoma smatramo "uspešnijom" ukoliko su polinomi faktori što nižeg stepena.

Svaki polinom se na jedinstven način može faktorisati u proizvod polinoma prvog i polinoma drugog stepena pri čemu su polinomi drugog stepena sa diskriminantom manjom od nule.

Tako polinom $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 3z - 6$ nije faktorisan. Možemo ga faktorisati na više načina, na primer: $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 + z - 2)$, $P(z) = (z^3 - z^2 + 3z - 3)(z + 2)$, $P(z) = (z - 1)(z^3 + 2z^2 + 3z + 6)$, ... (proverite!)

Njegova jedinstvena faktorizacija preko proizvoda polinoma prvog i drugog stepena je: $P(z) = (z^2+3)(z-1)(z+2)$. Ovaj realan polinom ima dve realne nule $z_1 = 1$ i $z_2 = -2$ i dve konjugovano kompleksne nule $z_3 = \sqrt{3}i$ i $z_4 = -\sqrt{3}i$.

Sledeće tvrđenje je posledica prethodnih:

Ako je polinom P neparnog stepena onda jednačina $P(z) = 0$ ima bar jednu realnu nulu.

Ukoliko nam je potreban odgovor na pitanje da li neki polinom sa celobrojnim koeficijentima ima racionalnih rešenja, na osnovu sledeće dve teoreme, zaključujemo da su kandidati za racionalne nule u veoma suženom skupu razlomaka i da sve kandidate efikasno proveravamo da li su nule po Hornerovoj šemi.

Ako polinom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ...a_1 z + a_0$ ima sve koeficijente cele $a_i \in \mathcal{Z}$ i ako su vodeći i slobodni koeficijent različiti od nule tada je potreban uslov da racionalan broj $\frac{p}{q}$, $p \cdot q \neq 0$ bude nula jednačine $P(z) = 0$ da je zadovoljeno: $p|a_0$ i $q|a_n$.

Dokaz. Neka je $\frac{p}{q}$ koren jednačine $P(z) = 0$. Preciznije, važi jednakost:

$$a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su p i q uzajamno prosti celi brojevi. Pomnožimo jednakost $P(\frac{p}{q}) = 0$ sa q^{n-1} i izrazimo prvi sabirak preko preostalih:

1) $$-a_n\frac{p^n}{q} = a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}$$

Na desnoj strani jednakosti 1) imamo ceo broj pa je i $-a_n\frac{p^n}{q}$ ceo broj. Kako q ne deli p to mora biti da važi da $q|a_n$.

Pomnožimo sada jednakost $P(\frac{p}{q}) = 0$ sa $\frac{q^n}{p}$, i prebacimo poslednji sabirak na desnu stranu, dobićemo:

2) $$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_1 q^{n-1} = -a_0\frac{q^n}{p}$$

Na levoj strani jednakosti 2) imamo ceo broj pa je i $-a_0\frac{q^n}{p}$ ceo broj. Pošto su brojevi p i q uzajamno prosti to znači da $p|a_0$. $\square$

Napomena. Naglasimo da prethodna teorema daje samo *potreban* uslov da algebarska jednačina ima racionalnu nulu. Svi zahtevani uslovi iz teoreme mogu biti zadovoljeni a da ne postoje racionalne nule. Na primer, jednačina $3z^2 - 2 = 0$ je takva, da nijedan racionalan broj iz skupa $\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$ nije njeno rešenje.

Primer. Dat je polinom $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Proverite koji racionalni brojeva su po prethodnom tvrđenju kandidati za nule $P(x)$.

Rešenje. U $P(x)$ slobodni koeficijent je 4 a vodeći 1. Po teoremi p/q je kandidat za nulu ako $p|4$ i $q|1$. Sledi da su kandidati iz skupa $p/q \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$. Zamenom u $P(x)$ se lako proverava da su nule 1, -1, 2 i -2.

Hornerovom šemom možemo brže (sa manje računanja) da proverimo da li je neki broj nula nekog polinoma ili ne. Ona je zajedno sa prethodnim tvrđenjem dobar aparat za brzo nalaženje racionalnih nula.

5.3 Bezuova teorema i Hornerova šema

Ukoliko želimo da utvrdimo kolika je vrednost $P(z_0)$, polinoma $P(z)$, stepena n, u tački z_0, direktnim računanjem potrebno je izvršiti $n + (n-1) + ... + 1 = \dfrac{n^2+n}{2}$, množenja i n sabiranja. Za isti posao Hornerova šema zahteva manje vremena (broj množenja smanjuje na n). Dodatni kvalitet Hornerove šeme je što u toku izračunavanja $P(z_0)$ dobijamo i koeficijente polinoma koji nastaje prilikom deljenje $P(z)$ linearnim članom $z - z_0$. Preciznije o tome nam govori Bezuova teorema.

Bezuova teorema. *Neka polinom* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *delimo polinomom prvog stepena* $z - z_0$, $z_0 \in \mathcal{C}$. *Neka je rezultat deljenja polinom* $Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i$, *tada je ostatak pri deljenju jednak* $P(z_0)$,

$$P(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0) + P(z_0),$$

pri čemu su koeficijenti polinoma Q *jednaki*

$$\triangle \qquad b_{n-1} = a_n, \quad b_i = b_{i+1}z_0 + a_{i+1}, \quad i = n-2, ..., 1, 0, \; i \; P(z_0) = b_0 z_0 + a_0.$$

Koeficijente polinoma Q *kao i* $P(z_0)$ *je na osnovu prethodnih formula pogodno izračunati po šemi, poznatoj kao* **Hornerova šema***:*

z_0	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	b_0	$P(z_0)$

Dokaz. Pokažimo prvo da je polinom $P(z)$ jednak polinomu $B(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0) + P(z_0)$. Kako su polinomi jednakih stepena jednaki ako su im jednaki odgovarajući koeficijenti nađimo koeficijente polinoma B:
$B(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0) + P(z_0)$
$= b_{n-1}z^n + (b_{n-2} - z_0 b_{n-1})z^{n-1} + ... + (b_1 - z_0 b_2)z^2 + (b_0 - z_0 b_1)z - z_0 b_0 + P(z_0)$.

Nakon zamene koeficijenata b_i, $\quad i = 0, 1, ..., n-1$ i $P(z_0)$ po formuli $\triangle$ sledi:
$B(z) = a_n z^n + (z_0 b_{n-1} + a_{n-1} - z_0 b_{n-1})z^{n-1} + ... + (z_0 b_2 + a_2 - z_0 b_2)z^2$
$+(z_0 b_1 + a_1 - z_0 b_1)z - z_0 b_0 + z_0 b_0 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = P(z)$.

Na ovaj način smo proverili da su koeficijenti b_i dobro definisani. Dokažimo još da je $P(z_0) = z_0 b_0 + a_0$. U sledećem nizu jednakosti smo redom zamenjivali b_0, b_1, ..., b_{n-2} i b_{n-1} po formuli $\triangle$.
$z_0 b_0 + a_0 = z_0(z_0 b_1 + a_1) + a_0 = b_1 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 = (z_0 b_2 + a_2)z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 =$
$b_2 z_0^3 + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 = ...$
$b_{n-1}z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + ... + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i z_0^i = P(z_0)$. $\square$

Primeri.

Ako je $P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = 2z^5 + 0z^4 + 0z^3 - 3z^2 + 5z - 4$, i želimo da izračunamo $P(2)$ po Hornerovoj šemi je:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c} 2 & 2 & 0 & 0 & -3 & 5 & -4 \\ \hline\hline & 2 & 4 & 8 & 13 & 31 & 58 \end{array},$$

što implicira $P(2) = 58$. Odnosno po Bezuovoj teoremi je
$P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = (z-2)(2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 13z + 31) + 58$. Međutim, ako želimo da izračunamo $P(1)$:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 5 & -4 \\ \hline\hline & 2 & 2 & 2 & -1 & 4 & 0 \end{array},$$

zaključujemo da je 1 nula polinoma P, odnosno da je:
$P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = (z-1)(2z^4 + 2z^3 + 2z^2 - z + 4)$.

Za razvijanje polinoma $Q(z) = z^5 - 5z^4 - 14z^3 - z^2 + 2z + 5$ po stepenima od $z+2$ možemo višestruko primeniti Hornerovu šemu:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c} -2 & 1 & -5 & -14 & -1 & 2 & 5 \\ \hline\hline & 1 & -7 & 0 & -1 & 4 & -3 \\ & 1 & -9 & 18 & -37 & 78 & \\ & 1 & -11 & 40 & -117 & & \\ & 1 & -13 & 66 & & & \\ & 1 & -15 & & & & \\ & 1 & & & & & \end{array}.$$

Sledi da je $Q(z) = (z+2)^5 - 15(z+2)^4 + 66(z+2)^3 - 117(z+2)^2 + 78(z+2) - 3$.

5.4 Zadaci

5.1. Da li je polinom $x^4+x^3-11x^2-9x+18$ deljiv sa polinomom $x-2$? Koristite Hornerovu šemu.

Rešenje. Nije. Ostatak je -20.

5.2. Da li je 3 nula polinoma $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$?

Rešenje. Jeste.

5.3. Odredite sve racionalne nule polinoma $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$.

Rešenje. Sve nule su mu racionalne: $1, -2, 3$ i -3.

5.4. Polinom $P = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$, razviti po stepenima linearnog faktora $x-2$, višestrukom primenom Bezuove teoreme.

Rešenje. $P = (x-2)^4 + 9(x-2)^3 + 19(x-2)^2 - 9(x-2) - 20$.

5.5 Grupa, izomorfizam

U ovom odeljku ćemo razmatrati neprazan skup i neke operacije i relacije na njemu. Tako uređenu trojku $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, \Re)$ zovemo operacijsko relacijska struktura ili *algebarska struktura*, gde je $\mathcal{A}$ neprazan skup koji zovemo *nosač* strukture sa skupom operacija $\mathcal{O}$ raznih dužina i skupom relacija $\Re$ raznih dužina na $\mathcal{A}$. Ukoliko je u skupu relacija samo relacija jednakosti $=$, i skup operacija je konačan $\mathcal{O} = \{o_1, ..., o_n\}$ tada operacijsko relacijsku strukturu zovemo operacijska struktura ili *univerzalna algebra* i pišemo: $(\mathcal{A}, o_1, ..., o_n)$. Dalje ćemo uglavnom razmatrati algebarske strukture sa jednom ili dve binarne operacije i relacijom $=$.

Algebarska struktura $(A, \cdot)$ je **grupa** *ako je:*
1. $\cdot$ binarna operacija na skupu A,
2. operacija $\cdot$ je asocijativna,
3. postoji neutralni elemenat e operacije $\cdot$,
4. za svaki elemenat $a \in A$ postoji njegov inverzni element $a^{-1} \in A$.

Grupa $(A, \cdot)$ je **Abelova** ili **komutativna** grupa ako je operacija $\cdot$ komutativna.

Ako algebarska struktura $(A, \cdot)$ ispunjava *1.* i *2.* iz prethodne definicije onda je ona **semigrupa**.

Ukoliko je zadovoljena samo osobina *1.* onda je $(A, \cdot)$ **grupoid**.

Primeri: Skup celih brojeva i operacija sabiranja $(\mathcal{Z}, +)$ je komutativna grupa. Utvrdimo prvo da je u pitanju grupa na osnovu prethodne definicije: sabiranje jeste operacija na skupu celih brojeva jer je zbir dva cela broja ceo broj; asocijativnost $x+(y+z) = (x+y)+z$ na skupu $\mathcal{Z}$ važi; neutralni element za sabiranje je 0; svaki ceo broj x ima za svoj inverzni element $-x$ (suprotan broj). Kako dodatno važi da je sabiranje i komutativno na skupu celih brojeva sledi da je zaista struktura $(\mathcal{Z}, +)$ komutativna grupa. Komutativne grupe su i nadstrukture $(\mathcal{Q}, +)$ i $(\mathcal{R}, +)$, dok je podstruktura $(\mathcal{N}, +)$ samo komutativna semigrupa.

Kako u skupu racionalnih i u skupu realnih brojeva svi elementi sem 0 imaju inverzni element za množenje, zanimljivije je posmatrati strukture $(\mathcal{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathcal{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ koje su komutativne grupe.

5.5.1 Grupa permutacija $(\mathcal{P}_n, \cdot)$

Sa permutacijama smo se sreli u poglavlju o kombinatorici 2.1.1, gde je permutacija bila definisana kao raspored skupa od n elemenata što je u skladu sa definicijom permutacije p kao bijektivnog preslikavanja skupa $S_n = \{1, 2, ..., n\}$ u S_n. Sa $\mathcal{P}_n$ je označen skup svih permutacija p, skupa od n elemenata. U poglavlju 2.1.1 su definisane parne i neparne permutacije, a za parne permutacije važi sledeće tvrđenje:

Stav. Neka je $\mathcal{A}_n$ skup svih parnih permutacija na skupu $\{1, 2, ..., n\}$ i $\circ$ operacija kompozicije preslikavanja, tada je struktura $(\mathcal{A}_n, \circ)$ grupa.

Dokaz. Jasno je da je kompozicija na skupu parnih permutacija zatvorena jer kompozicija dve permutacije sa parnim brojem transpozicija ima paran broj transpozicija jer je zbir dva parna broja paran broj. Na osnovu činjenice dokazane u 2.1.1 da inverzna permutacija ima isti broj transpozicija kao i polazna permutacija sledi da su permutacije p i p^{-1} iste parnosti. Tako su ispunjeni zahtevi zatvorenosti:
$(\forall p, q \in \mathcal{A}_n)\ p \circ q \in \mathcal{A}_n \wedge p^{-1} \in \mathcal{A}_n$, i struktura $(\mathcal{A}_n, \circ)$ je podgrupa grupe svih permutacija $(\mathcal{P}_n, \circ)$. Poznato je da je svaka podgrupa grupe grupa, te je $(\mathcal{A}_n, \circ)$ grupa. □

Grupa $(\mathcal{A}_n, \circ)$ se zove *alternativna* grupa.

Grupa $(B, \cdot)$ je **izomorfna** *grupi $(A, +)$ ako:*
1. postoji bijekcija f skupa A na B $\ f : A \to b$ i

2. f je homomorfizam (operacije · i + su saglasne), odnosno važi:

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2).$$

Izomorfnost je veoma važan pojam. Ukoliko su dve strukture izomorfne dovoljno je ispitivati osobine samo jedne od tih struktura jer analogno važi u izomorfnoj strukturi. Takođe, za novu strukturu je dovoljno naći njoj izomorfnu poznatu strukturu i time znamo sve osobine uočene strukture. Sledeća teorema nam kaže da ukoliko proučimo grupe permutacija i njene podgrupe znamo sve o konačnim grupama.

(**Kejlijeva teorema**) *Svaka konačna grupa je izomorfna sa nekom podgrupom grupe permutacija nekog skupa.*

5.6 Teorijska pitanja

5.1. Polinom $(x^2+2)^2$ ima 4 nule u skupu realnih brojeva.	$\perp$
5.2. Polinom $9x^3-4x^2+7x-1$ ima 4 kandidata za racionalne nule.	$\perp$
5.3. Polinom $(x^2+2)^4$ ima 4 nule u skupu kompleksnih brojeva.	$\perp$
5.4. Postoji polinom drugog stepena koji nema realnih korena.	$\top$
5.5. Postoji polinom 6-tog stepena koji ima tačno jednu realnu nulu. (višestruke nule računamo onoliko puta kolika im je višestrukost)	$\perp$
5.6. Svaki polinom 5-tog stepena ima tačno ili 1 ili 3 ili 5 realnih nula.	$\top$
5.7. Svaki polinom 5-tog stepena kome smo odredili dve realne nule ima bar još jednu realnu nulu.	$\top$
5.8. Svaki polinom trećeg stepena ima bar jednu realnu nulu.	$\top$
5.9. Polinom $(x^2-2)^4$ ima 8 nula u skupu kompleksnih brojeva.	$\top$
5.10. Svaki polinom 4-tog stepena ima 4 nule u skupu kompleksnih brojeva.	$\top$
5.11. Svaki polinom 4-tog stepena ima 4 ili 2 ili nijednu realnu nulu.	$\top$
5.12. Polinom $2003 \cdot x^3 - 2002 \cdot x^2 + 2001$ ima bar jednu realnu nulu.	$\top$
5.13. Polinom $2x^3-x+2$ ima 6 kandidata za racionalne nule.	$\top$
5.14. Polinom $2004 \cdot x^3 - 2003 \cdot x^2$ ima tri realne nule.	$\top$
5.15. Polinom $2x^3-x+3$ ima 6 kandidata za racionalne nule.	$\perp$
5.16. Polinom neparnog stepena ima bar jednu nulu u skupu realnih brojeva.	$\top$
5.17. Polinom k-tog stepena ima k nula u skupu kompleksnih brojeva.	$\top$
5.18. Polinom $(x^2-2)^2$ ima 4 nule u skupu realnih brojeva.	$\top$
5.19. Ako je $x=1$ dvostruka nula za polinom $Q(x)$, onda je $Q(x)$ deljiv sa $(x-1)^2$.	$\top$
5.20. Ako je $Q(1)=0$, za polinom $Q(x)$, onda je $Q(x)$ deljiv sa $x+1$.	$\perp$
5.21. Ako je $x=-1$ dvostruka nula za polinom $Q(x)$, onda je $Q(x)$ deljiv sa $(x-1)^2$.	$\perp$
5.22. Ako je $x=-1$ trostruka nula za polinom $Q(x)$, onda je $Q(x)$ deljiv sa $(x+1)^3$.	$\top$

5.23. Ako polinom $x^6 - 2x^5 + 3x^3 - x^2 - 2$ ima 1 realni koren, onda ima bar još jednu nulu u skupu realnih brojeva.	$\top$
5.24. Polinom $9x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ ima 4 kandidata za racionalne nule.	$\perp$
5.25. Polinom $(2x^2 + 2)^4$ ima sve realne nule.	$\perp$
5.26. Polinom $P = (2x^2 + 2)^4$ je faktorisan.	$\top$
5.27. Polinom $Q(x) = (x^2 + 2) \cdot (x + 3)^2$ je faktorisan i ima tačno jednu realnu nulu.	$\perp$
5.28. Polinom $Q = (2x^2 - 2) \cdot (3 + x)^4$ je faktorisan.	$\perp$
5.29. Polinom $8x^3 - 4x^2 + 7x - 2$ ima 10 kandidata za racionalne nule.	$\top$
5.30. Postoji polinom 4-tog stepena koji ima tačno jednu realnu nulu. (višestruke nule računamo višestruko)	$\perp$
5.31. $-\frac{1}{2}$ je nula polinoma $x^7 - 1995x^6 + 2001x^5 - 1991x^4 + 2007x^3 - 2006x^2 - 2005x - 2$.	$\perp$
5.32. $\frac{1}{3}$ nije nula polinoma $x^7 - 1995x^6 + 2001x^5 - 1991x^4 + 2002x^3 - 1995x^2 - 2001x - 6$.	$\top$
5.33. Polinom $(2x^2 + 1)^4$ ima 4 kandidata za racionalne nule.	$\perp$
5.34. Polinom $(2x^2 + 1)^4$ ima 10 kandidata za racionalne korene, od kojih nijedan nije koren.	$\top$
5.35. Polinom 4-tog stepena kome smo odredili jednu realnu nulu ima bar još jednu realnu nulu.	$\top$
5.36. Polinom $Q(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$ ima 4 nule u skupu kompleksnih brojeva.	$\top$
5.37. Polinom $(x^2 - 2)^4$ ima 8 nula u skupu realnih brojeva.	$\top$
5.38. Polinom $10x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ ima 10 kandidata za racionalne nule.	$\perp$
5.39. Polinom $P(x) = x^4 + 8$ ima 8 kandidata za racionalne nule i nema realnih nula.	$\top$
5.40. Polinom $p(x) = 13x^4 + 4x^3 - 3x - 29$ ima 8 kandidata za racionalne nule.	$\top$
5.41. Polinom $p(x) = 11x^4 + 4x^3 - 3x - 31$ ima sledeće kandidate za racionalne nule: $\pm 1, \pm 11, \pm\frac{1}{31}, \pm\frac{11}{31}$.	$\perp$
5.42. Postoji polinom 3-ćeg stepena koji ima 2 realne nule.	$\perp$
5.43. Svaki polinom 3-ćeg stepena ima tačno ili 1 ili 3 realne nule.	$\top$
5.44. Polinom $P(x) = (x^2 - 2)^3$ ima 6 nula u skupu kompleksnih brojeva i 4 kandidata za racionalne nule od kojih ni jedan nije nula.	$\top$
5.45. Polinom $p(x) = (x^4 + 4)^2$ ima 8 kompleksnih nula i 6 kandidata za racionalne nule.	$\perp$
5.46. Polinom $P(x) = (x^2 - 2)^3$ ima 6 nula u skupu realnih brojeva.	$\top$
5.47. Polinom 3-ćeg stepena može da ima samo 2 nule iz skupa kompleksnih brojeva.	$\perp$

5.48. Polinom 3-ćeg stepena kome smo odredili dve realne nule ima i treću nulu realnu (višestruke nule računamo višestruko).	$\top$
5.49. NZD za polinome P i Q Euklidovim algoritmom dobijamo kao poslednji ne nula ostatak pri iterativnom deljenju delioca sa ostatkom, a prvi korak je deljenje P sa Q.	$\top$
5.50. NZD za polinome P i Q Euklidovim algoritmom dobijamo kao poslednji količnik.	$\perp$

Glava 6.

6 Elementi linearne algebre

U narednim poglavljima će biti obrađeni potrebni elementi matričnog računa neophodni za rešavanje sistema linearnih jednačina, kao i za rešavanje optimizacionih problema nad sistemom linearnih (ne)jednačina. Optimizacioni problem sa ograničenjima koja su sistem linearnih nejednačina i jednačina naziva se problem linearnog programiranja.

Prvi od sledeća dva primera se svodi na sistem linearnih jednačina (tri jednačine sa tri nepozante), dok je drugi jedan problem linearnog programiranja.

Primer 1.
Koliko kuhinja tipa K1, K2 i K3 može da se sastavi od 14 stolova, 66 stolica i 50 kuhinjskih elemenata, ako kuhinju K1 čine 4 stolice, 1 sto i 2 elementa; kuhinju K2 6 stolica, 1 sto i 4 elementa; dok kuhinja K3 ima 8 stolica, 2 stola i 8 kuhinjskih elemenata?

Primer 2.
Preduzeće "Borovi", za prevoz robe poseduje 3 kamiona nosivosti 10t u garaži G, 5 kamiona nosivosti 5t u mestu A, i 10 kamiona nosivosti 2t u mestu B. Poznato je da se cene transporta po km odnose u razmeri 3:2:1 (cena prevoza kamiona od 2t po jedinici kilometra je 3 puta jevftinija od cene prevoza kamiona od 10t i 2 puta jeftinija od kamiona od 5t). Potrebno je izvršiti transport 50t robe iz mesta A u mesto B. Rastojanje između mesta A i B je 40 km, između A i G je 30 km i rastojanje između B i garaže je 15 km. Nakon obavljenog transporta svi kamioni moraju da se vrate u garažu. Cena prevoza praznih kamiona je duplo jeftinija od cene prevoza natovarenih kamiona. Kako pod datim uslovima izvršiti transport na najjeftiniji način?

Rešenje je (x, y, z)=(3,4,0), tj. 3 kamiona od 10t (x) i 4 kamiona od 5t (y) (z=0) treba da izvrše transport. Funkcija cilja je funkcija cene transporta (197,5 x+ 95 y + 67,5 z)c, gde je c cena transporta punog kamiona od 2t. Ova funkcija ima minimalnu vrednost u tački (3,4,0) za posmatrani problem.

Navedeni primeri su takvi da ih je moguće rešiti i "peške" (bez odgovarajućeg matematičkog zapisa i metoda za njegovo rešavanje). Pokušajte da ih rešite sada! Međutim, lako je zamisliti komplikovanije probleme sličnog tipa koje ne bismo mogli rešiti bez odgovarajućeg matematičkog aparata. Potreban minimum tog aparata je iznet u sledećoj glavi.

6.1 Algebra matrica

Matrica *tipa $m \times n$ na skupu $\mathcal{R}$ je pravougaona šema elemenata iz $\mathcal{R}$ sa m vrsta i n kolona:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matrice označavamo velikim slovima latinice: $A_{m\times n}$, $B_{p\times q}$... Ako je tip matrice poznat on se ne navodi. Kada želimo da naglasimo elemente matrice pišemo $A = [a_{ij}]$, $i = 1...m$, $j = 1...n$, ili $[a_{ij}]_{m\times n}$, ili samo $[a_{ij}]$. Kada matricu zapisujemo pomoću njenih kolona (vrsta) imamo:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (A = [a_1\ a_2 ....\ a_n]) \quad \text{pri čemu je}$$

$$a_i = [\ a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} ....\ a_{in}],\ \ i = 1...m, \quad (a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1...n).$$

Kvadratna matrica reda n je matrica tipa $n \times n$. *Glavna dijagonala* kvadratne matrice $[a_{ij}]$ sadrži elemente $a_{ii},\ \ i = 1...n$, dok *sporedna dijagonala* sadrži redom elemente $a_{1n}, a_{2(n-1)}...a_{i(n+1-i)}...a_{n1}$.

Primer: Matrica A je kvadratna reda 2. Matrice B i C su redom tipa 3×2 i 3×3. Elementi sa glavne dijagonale matrice C reda 3 su redom 1,5,9, dok su na sporednoj dijagonali sledeći elementi 7,5,3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

6.1.1 Operacije na skupu matrica

Zbir matrica A *i* B *istog tipa* $m \times n$ *je matrica* $A + B = C = [c_{ij}]_{m \times n}$, *tako da je* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \ i = 1...m,\ \ j = 1...n.$

Proizvod matrice A **brojem** $\alpha \in \mathcal{R}$ *je matrica* $\alpha \cdot A = C = [c_{ij}]$ *istog tipa* $m \times n$ *kao i matrica* A, *pri čemu je* $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}\ \ i = 1...m,\ \ j = 1...n.$

Proizvod dve matrice $A_{m \times n}$ *i* $B_{n \times p}$ *na skupu* $\mathcal{R}$ *je matrica* $A \cdot B = C = [c_{ij}]_{m \times p}$, *tako da je*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad i = 1...m, \quad j = 1...p.$$

Primetimo da je potreban i dovoljan uslova da proizvod $A \cdot B$ matrica A i B bude definisan sledeći:

$$\text{broj kolona prve matrice} \ = \ \text{broju vrsta druge matrice}$$
$$\text{tj. } (m \times \boxed{n) \cdot (n} \times p) = m \times p$$

Primer: Ilustrovaćemo prethodne tri operacije na sledećim matricama:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad i \ \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 12 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \qquad 5 \cdot A = B \quad \text{i} \quad B \cdot C = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ovde su elementi matrice $B \cdot C$ redom dobijeni kao: $10 = 5 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 1$, $10 = 5 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 0$, $20 = 10 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 1$ i $5 = 10 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 0$. Proizvod matrica

$C \cdot B$ je takođe definisan jer matrica C ima 2 kolone, a matrica B 2 vrste. Matrica $C \cdot B$ je kvadratna matrica reda 3. Izračunajte je.
Napomena: Proizvodi $A \cdot B$ i $B \cdot A$ matrica A i B su definisani jedino ako su tipovi matrica sledeći: $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, za neke $m, n \in \mathcal{N}$. Međutim, tada je rezultat proizvoda $A \cdot B$ kvadratna matrica reda m, dok je proizvod $B \cdot A$ kvadratna matrica reda n. Tako je za $m \neq n$ uvek $A \cdot B \neq B \cdot A$. Sa druge strane, kada množimo kvadratne matrice istog reda ($m = n$) u opštem slučaju **ne važi komutativnost**. Na primer,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Pravougaonu matricu čiji su svi elementi 0 nazivamo **nula matrica** i označavamo sa O, dok kvadratnu matricu čiji su elementi na glavnoj dijagonali 1, a ostali 0, nazivamo **jedinična matrica** i označavamo[19] sa I. Razlozi za nazive jedinična i nula matrica slede iz činjenice da važi:

$$A \cdot I = I \cdot A = A \quad \text{i} \quad A + O = O + A = A,$$

za svaku matricu A koja je istog reda kao I, odnosno istog tipa kao O. Znači, I je jedinica za množenje, a O je neutralni element za sabiranje matrica.

Kada je potrebno naglasiti red n matrice pišemo I_n odnosno $O_{m\times n}$.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad O_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dijagonalna matrica je matrica koja jedino na glavnoj dijagonali ima elemente različite od nule. Jedinična matrica je specijalna dijagonalna matrica. **Trougaona** matrica ima sve elemente ispod glavne dijagonale jednake 0, što implicira da je dijagonalna matrica specijalan slučaj trougaone.

Osobine operacija na skupu matrica

Za svake tri matrice, za koje su navedeni proizvodi definisani i za svaki broj $\alpha \in \mathcal{R}$ važi:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, *asocijativnost;*
2. $A \cdot I = I \cdot A = A$;
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, *desna distributivnost;*
4. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$, *leva distributivnost;*
5. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.

Označimo sa $\mathcal{M}_{m\times n}$, skup svih matrica tipa $m \times n$ na skupu $\mathcal{R}$. Mada sa istim znakom + označavamo i operaciju sabiranja realnih brojeva i operaciju sabiranja matrica,

[19]Koristi se i oznaka E odnosno E_n za jediničnu matricu reda n.

dok sa $\cdot$ označavamo čak tri različite[20] operacije smatramo da do zabune ne može doći. Kada razmatramo strukturu $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$, pod operacijom $\cdot$ podrazumevamo množenje matrica iz $\mathcal{M}_{m\times n}$, brojem iz $\mathcal{R}$. Na skupu matrica $\mathcal{M}_{m\times n}$ su operacije sabiranja matrica i množenja matrica brojem zatvorene, što nije slučaj sa operacijom množenja dve matrice. Dodatne osobine koje su zadovoljene na strukturi $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ su precizirane sledećom teoremom:

Za sabiranje matrica i množenje matrica realnim brojem važe sledeće osobine:

1. $(\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n})\ (A + B) + C = A + (B + C)$, asocijativnost
2. $(\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n})\ A + B = B + A$, komutativnost
3. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n})\ A + O = O + A = A$, $(\exists O \in \mathcal{M}_{m\times n})$
   postoji neutralni element
4. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n})\ (\exists(-A)^{21} \in \mathcal{M}_{m\times n})\ A + (-A) = (-A) + A = O$,
   postoji inverzni element
5. $(\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n})\ (\forall \alpha \in \mathcal{R})\ \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$, distributivnost
6. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n})\ (\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R})\ (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$, distributivnost
7. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n})\ (\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R})\ (\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$,
8. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n})\ 1 \cdot A = A$

6.1.2 Transponovane matrice

Transponovana[22] *matrica* $A^T_{n\times m}$ *matrice* $A_{m\times n}$ *se dobija zamenom mesta vrsta i kolona matrice* A *tj.* $b_{ji} = a_{ij}\quad i = 1...m,\ j = 1...n.$

Osobine transponovanja matrica Odgovor na pitanje kako transponovanje matrica dejstvuje na zbir matrica, proizvod matrica i proizvod matrice brojem dat je sledećim osobinama:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A_{m\times n} + B_{m\times n})^T = A^T_{n\times m} + B^T_{n\times m}$;
3. $(\alpha \cdot A_{m\times n})^T = \alpha \cdot A^T_{n\times m}$;
4. $(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p})^T = B^T_{p\times n} \cdot A^T_{n\times m}$.

Prve tri osobine se lako dokazuju na osnovu prethodnih definicija. Za četvrtu osobinu sledi dokaz.

Dokaz 4.**:**
Neka su redom sa C, D, E, F i G označene matrice $A_{m\times n} \cdot B_{n\times m}$, C^T, $B^T_{m\times n}$, $A^T_{n\times m}$ i $E \cdot F$. Tada je na osnovu proizvoda matrica i transponovanja matrice zadovoljeno: $d_{ji} = c_{ij} =$

[20]Primetimo da se operacije: množenje realnih brojeva, množenje matrica i množenje matrice realnim brojem, poklapaju, u specijalnom slučaju kada je red matrice 1.

[21]Matrica $-A = -1 \cdot A$ je inverzna matrica za matricu A u odnosu na operaciju sabiranja matrica.

[22]Sem oznake A^T koristi se i oznaka A' za transponovanu matricu matrice A.

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$, za $i = 1...m,\ j = 1...p$; $e_{ji} = b_{ij}$, za $i = 1...n,\ j = 1...p$; $f_{ji} = a_{ij}$, za $i = 1...m,\ j = 1...n$. Tako je proizvod
$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \cdot f_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} = c_{ji} = d_{ij}$, za $i = 1...p,\ j = 1...m$, što je i trebalo dokazati. □

6.2 Determinante

Determinante reda 2 računamo tako što od proizvoda elemenata sa glavne dijagonale oduzmemo proizvod elemenata sa sporedne dijagonale:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{vmatrix} = 11 \cdot 22 - 12 \cdot 21 = -10, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -12...$$

U opštem slučaju, determinanta reda 2 je:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Poznato je da se determinanta reda 3 računa na sledeći način: iza treće kolone se dopišu prve dve kolone, zatim se sabiraju umnožci elemenata sa glavne dijagonale sa umnožcima elemenata sa "paralela" glavne dijagonale i oduzimaju umnožci elemenata sa sporedne dijagonale i njenih "paralela". Tako je

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \begin{matrix} = & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ & - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \end{matrix} .$$

Dakle, ima ukupno šest sabiraka koji redom odgovaraju sledećim permutacijama iz $\mathcal{P}_3$: id, (123), (132), (13), (23), (12). Prve tri permutacije su parne.

Imamo, na primer, da je determinanta

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 0 - 45 + 8 - 0 - 5 + 12 = -30.$$

Međutim, ako želimo da izračunamo determinantu matrice reda 4 to ne možemo da uradimo uopštavanjem[23] načina na koji smo računali determinantu reda 3.

Opšti način za računanje determinanti je dat sledećom definicijom.

Determinanta *kvadratne matrice A reda n je realan broj:*
$$|A| = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p)}\, a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)},$$
gde je $\mathcal{P}_n$ skup svih permutacija na skupu $\{1, 2...n\}$, a $Inv(p)$ je ukupan broj transpozicija u zapisu permutacije p preko proizvoda transpozicija[24]*.*

[23] Dopisali bismo prve tri kolone, a zatim bi na pravougaonoj šemi 3×7 sabirali umnožke elemenata sa glavne dijagonale sa umnožcima elemenata sa "paralela" glavnoj dijagonali, dok bismo odgovarajuće umnožke elemenata sa sporedne dijagonale i sa njenih "paralela" oduzimali.

[24] Videti Stav 3. u odeljku 2.1.1

Dakle, determinatu možemo predstaviti kao preslikavanje skupa svih kvadratnih matrica u skup realnih brojeva. Sem upotrebljene oznake $|A|$ koristi se i oznaka $det(A)$ [21], [15]. U zapisu determinante matrice u razvijenom obliku nećemo pisati uglaste zagrade. Tako je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{determinanta matrice} \quad A = [a_{ij}].$$

Napomena: Proizvod n elemenata $a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}$, $p \in \mathcal{P}_n$, iz definicije determinante matrice A ima po jedan činilac iz svake od n vrsta, pri čemu je među njima zastupljen i po jedan elemenat iz svake od n kolona matrice A. Da su sve vrste zastupljene je očigledno jer indeksi vrsta idu redom od 1,2... do n. Indeksi kolona su redom $p(1), p(2)...p(n)$. Međutim, pošto je p bijekcija $p : \{1...n\} \to \{1...n\}$ to se skup slika $\{p(i)|i = 1...n\}$ preslikavanja p poklapa sa skupom indeksa svih kolona $\{1...n\}$.

Broj potrebnih računskih operacija se veoma brzo povećava sa porastom reda matrice. Kada bismo determinantu reda 5 računali po definiciji imali bismo 5!=120 sabiraka, dok bismo za relativno malu matricu, reda 10, za njenu determinantu bilo potrebno sabrati 3.628.800 sabiraka! Na sreću, u praksi ne moramo determinante da računamo po definiciji. Postoje brži načini za računanje determinanti. Jedan od njih je dat u stavu $*$, poglavlja 4.2.3.

6.2.1 Osobine determinanti

Kako su determinante definisane samo za kvadratne matrice to su u sledećim svojstvima, operacije sabiranja, množenja matrica i množenja matrica skalarom restrikovane samo na skup kvadratnih matrica $\mathcal{M}_n$ fiksiranog reda $n \in \mathcal{N}$.

Determinanta zbira dve kvadratne matrice nije jednaka zbiru determinanti tih matrica. Tako je determinanta zbira dve jedinične matrice reda 2 jednaka

$$4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

Neka su A i B proizvoljne matrice iz $\mathcal{M}_n$ i neka je α realan broj. Tada je zadovoljeno:

1. $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$;
2. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$;
3. $|A^T| = |A|$.

Dokaz *1.*: Neka je označena sa $B = \alpha \cdot A$. Tada je $b_{ji} = \alpha a_{ij}$ $i, j = 1...n$. Takođe je:

$$|B| = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p)} \, b_{1p(1)} \cdot b_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot b_{np(n)} =$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p)} \, \alpha a_{1p(1)} \cdot \alpha a_{2p(2)} \cdot \ldots \alpha \cdot a_{np(n)} = \alpha^n |A| \quad \square$$

Skica dokaza *2.***:** Neka je sa C označena matrica $A \cdot B$. Tada je $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj},\ i, j = 1...n$. Dokaz može da se izvede matematičkom indukcijom po redu matrica n, ali na ovom mestu, dajemo dokaz samo za $n = 2$:

$$|C| = (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) \cdot (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) - (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) \cdot (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}) =$$

$$a_{11} \cdot b_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{22} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot a_{22} \cdot b_{22} + a_{11} \cdot b_{11} \cdot a_{21} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot a_{21} \cdot b_{12} -$$

$$(a_{21} \cdot b_{11} \cdot a_{11} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{21} \cdot a_{11} \cdot b_{12} + a_{21} \cdot b_{11} \cdot a_{12} \cdot b_{22} + a_{22} \cdot b_{21} \cdot a_{12} \cdot b_{22}) =$$

$$a_{11} \cdot a_{22}(b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) + a_{12} \cdot a_{21}(-b_{11} \cdot b_{22} + b_{12} \cdot b_{21}) = |A| \cdot |B|$$

Dokaz *3.***:** Neka je $B = A^T$, što znači da je $b_{ji} = a_{ij}\ i, j = 1...n$. Tada je:

$$|B| = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p)}\ b_{1p(1)} \cdot b_{2p(2)} \cdot ... \cdot b_{np(n)} =$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p)}\ a_{p(1)1} \cdot a_{p(2)2} \cdot ... \cdot a_{p(n)n} =^{25}$$

$$\sum_{p^{-1} \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p^{-1})}\ a_{1p^{-1}(1)} \cdot a_{2p^{-1}(2)} \cdot ... \cdot a_{np^{-1}(n)} =^{26}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p)}\ a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdot ... \cdot a_{np(n)} = |A|.$$

□

Elementarne transformacije nad matricama su: zamena dve vrste, množenje vrste brojem različitim od nule i dodavanje vrsti druge vrste pomnožene brojem. Kako se i da li se menja determinanta matrice nakon primene neke od ovih transformacija je objašnjeno u sledećem stavu.

Stav □. Data je kvadratna matrica A reda n. Neka je sa $A_{(i_1,i_2)}$ označena matrica koja je dobijena od matrice A tako što su zamenjene vrste i_1 i i_2. Neka je sa $A_{i(\alpha)}$ označena matrica koja je dobijena od matrice A tako što je i- vrsta pomnožena brojem α, $0 \neq \alpha \in \mathcal{R}$. Označimo sa $A_{i_1(\alpha),i_2}$ maticu koja se od matrice A razlikuje samo po elementima i_2-ge vrste, koji su oblika: $a_{i_2k} + \alpha \cdot a_{i_1k},\ k = 1...n$. Tada važi:

1. $|A_{(i_1,i_2)}| = -|A|$;
2. $|A_{i(\alpha)}| = \alpha \cdot |A|$;
3. $|A_{i_1(\alpha),i_2}| = |A|$.

Dokaz *1.* Pretpostavimo da je $i_1 < i_2$. Imamo

$$|A_{(i_1,i_2)}| = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p)}\ a_{1p(1)} \cdot ...a_{i_2p(i_2)} \cdot ...a_{i_1p(i_1)} \cdot ... \cdot a_{np(n)} =$$

[25] Zadovoljeno je da $Inv(p) = Inv(p^{-1})$ kao i da su jednaki skupovi $\{(p(i), i) | i = 1...n\} = \{(i, p^{-1}(i)) | i = 1...n\}$ za svaku permutaciju iz $\mathcal{P}_n$.

[26] Dok permutacija p "prošeta" po $\mathcal{P}_n$ i njena inverzna permutacija će prošetati po svim vrednostima iz $\mathcal{P}_n$ jer je $(\mathcal{P}_n, \cdot)$ grupa (videti Stav 4, odeljka 2.1.1).

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_n}(-1)^{Inv(p)}\ a_{q(1)q(p(1))}\cdot ...a_{q(i_2)q(p(i_2))}\cdot ...a_{q(i_1)q(p(i_1))}\cdot ...\cdot a_{q(n)q(p(n))}$$

Pomnožili smo sve indekse permutacijom $q = (i_1, i_2)$. Sa t označimo permutaciju koja je proizvod permutacija q i p: $t = q \cdot p$. Kako je $(-1)^{Inv(t)} = (-1)^{Inv(p)} \cdot (-1)^{Inv(q)} = (-1)^{Inv(p)} \cdot (-1)$, imamo $(-1)^{Inv(p)} = -(-1)^{Inv(t)}$. Stoga je prethona formula jednaka sa:

$$-\sum_{t\in\mathcal{P}_n}(-1)^{Inv(t)}\ a_{1t(1)}\cdot ...a_{i_1t(i_2)}\cdot ...a_{i_2t(i_2)}\cdot ...\cdot a_{nt(n)} = -|A|.$$

□

Dokaz *2.* Dokaz se izvodi slično kao i dokaz osobine *1.* prethodne teoreme.
Posledica osobina *1. i 2.*: *Ako matrica A ima dve vrste (kolone) sa proporcionalnim elementima tada je $|A| = 0$.*

Dokaz posledice: Neka su proporcionalne vrste i_1 i i_2 matrice A, i neka je koeficijent proporcionalnosti $\alpha \neq 0$ (odn. $a_{i_2j} = \alpha a_{i_1j}$). Tada je po osobini *2.* $|A| = \alpha|B|$, pri čemu matrica B ima sve vrste sem i_2-ge vrste jednake vrstama matrice A, dok je i_2-ga vrsta matrice B jednaka i_1-voj vrsti matrice A (B). Tako matrica B ima jednake dve vrste, $b_{i_1j} = b_{i_2j} = a_{i_1j}$ što implicira da su jednake matrice $B = B_{(i_1,i_2)}$ pa su i njihove determinante jednake $|B| = |B_{(i_1,i_2)}|$. S druge strane, po osobini *1.* je $|B| = -|B_{(i_1,i_2)}|$. Predhodne dve jednakosti su moguće jedino ukoliko je $|B| = 0$, što znači da je i $|A| = 0$. □

Dokaz *3.* Pretpostavimo da je $i_1 < i_2$. Imamo

$$|A_{i_1(\alpha),i_2}| = \sum_{p\in\mathcal{P}_n}(-1)^{Inv(p)}\ a_{1p(1)}\cdot ...a_{i_1p(i_1)}\cdot ...(a_{i_2p(i_2)} + \alpha\cdot a_{i_1p(i_1)})\cdot ...\cdot a_{np(n)} =$$

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_n}(-1)^{Inv(p)}\ a_{1p(1)}\cdot ...a_{i_1p(i_1)}\cdot ...a_{i_2p(i_2)}\cdot ...\cdot a_{np(n)} +$$

$$\alpha\sum_{p\in\mathcal{P}_n}(-1)^{Inv(p)}\ a_{1p(1)}\cdot ...a_{i_1p(i_1)}\cdot ...\cdot a_{i_1p(i_1)}\cdot ...\cdot a_{np(n)} = |A|\ +\ 0$$

Poslednja jednakost sledi iz činjenice da druga suma predstavljala determinantu matrice koja je imala dve jednake vrste (i_1-va i i_2-ga vrsta su jednake) što na osnovu prethodne posledice jeste 0. □

6.2.2 Minor matrice i adjungovana matrica

Minor reda k, $k < min\{m, n\}$, matrice A tipa $m \times n$ na skupu $\mathcal{R}$ je determinanta podmatrice $K_{k\times k}$ matrice A, pri čemu se matrica K dobija izbacivanjem $m - k$ vrsta i $n - k$ kolona matrice A.

Tako su elementi neke kolone (vrste) matrice K elementi neke kolone (vrste) matrice A. Na primer, sve podmatrice reda 2 matrice $A = \begin{bmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 4\ 5\ 6 \end{bmatrix}$ su:

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 4\ 5 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 4\ 6 \end{bmatrix}\quad \text{i}\quad \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 5\ 6 \end{bmatrix}.$$

Tako bismo kvadratna matrica reda 3 imala 9 minora reda 2, jer na 3 načina možemo da iz polazne matrice izbacimo jednu vrstu i na 3 načina možemo da izbacimo jednu kolonu da bismo dobili podmatricu reda 2. Minora reda 1 ima koliko i elemenata polazne matrice i njihova vrednost je jednaka vrednosti odgovarajućih elemenata matrice.

Minore reda $n-1$ kvadratne matrice A reda n nazivamo *glavnim minorima.* Sa M_{ij} označavamo glavni minor reda $n-1$ dobijen kao determinanta podmatrice koja je u odnosu na matricu A okrnjena za neku i-tu vrstu i neku j-tu kolonu $i, j \in \{1, 2...n\}$. *Kofaktorom* ili **algebarskim komplementom** elementa a_{ij} matrice A nazivamo broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Adjungovana *matrica A^* kvadratne matrice $A = [a_{ij}]$ reda n je matrica sa elementima $[A_{ji}] = [A_{ij}]^T$, $i, j = 1...n$ gde je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij} matrice A.*

Primer: Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ tada su kofaktori:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6$,

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6$,

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$,

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$ i

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$.

Stoga je adjungovana matrica $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

6.2.3 Rekurzivni način računanja determinanti

Determinante kvadratnih matrica reda n za $n \geq 4$ je "teže" izračunati. Na primer, za računanje determinante matrice reda 5 je potrebno izračunati 120 zbirova i 600 proizvoda. Sledeća tvrđenje nam pruža mogućnost da brže[27] računamo daterminante matrica većeg reda.

Stav $*$.*Neka je data matrica $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Tada je*

$$(1) \quad a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + ... + a_{in} \cdot A_{kn} = \begin{cases} |A|, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$(2) \quad a_{1j} \cdot A_{1k} + a_{2j} \cdot A_{2k} + ... + a_{nj} \cdot A_{nk} = \begin{cases} |A|, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

[27] U opštem slučaju za računanje determinante matrice reda n po definiciji treba $n \cdot n!$ množenja i $n!$ sabiranja. Međutim, kada determinantu računamo pomoću n determinanti reda $n-1$, potreban broj proizvoda je $n + n \cdot (n-1) \cdot (n-1)!$, dok je potreban broj zbirova $n + n \cdot (n-1)!$. Na ovaj način se broj proizvoda smanjuje za $n! - n$ dok se broj potrebnih sabiranja povećava samo za n.

U formuli (1) za $i = k$ imamo razvoj po i-toj vrsti, dok u formuli (2) za $j = k$ imamo razvoj po j-toj koloni.

Rekurzivni način računanja determinanti je posebno pogodan kad se višestruko primenjuje. Na primer, determinantu matrice 4 reda ćemo izračunati pomoću determinanti 2 reda. Prvo smo izvršili razvoj po četvrtoj koloni a zatim po prvoj vrsti:

$$\begin{vmatrix} 1&2&3&3\\ 4&5&6&0\\ 7&8&9&0\\ 3&2&1&0 \end{vmatrix} = 3\cdot(+\begin{vmatrix} 4&5&6\\ 7&8&9\\ 3&2&1 \end{vmatrix}) + 0\cdot(-\begin{vmatrix} 1&2&3\\ 7&8&9\\ 3&2&1 \end{vmatrix}) + 0\cdot(+\begin{vmatrix} 1&2&3\\ 4&5&6\\ 3&2&1 \end{vmatrix}) + 0\cdot(-\begin{vmatrix} 1&2&3\\ 4&5&6\\ 7&8&9 \end{vmatrix}) =$$

$$3\cdot(4\cdot(+\begin{vmatrix} 8&9\\ 2&1 \end{vmatrix}) + 5\cdot(-\begin{vmatrix} 7&9\\ 3&1 \end{vmatrix}) + 6\cdot(+\begin{vmatrix} 7&8\\ 3&2 \end{vmatrix})) = 3\cdot(4\cdot(-10)+5\cdot 20+6\cdot(-10)) = 0.$$

Neka je data matrica $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ i neka je njena adjungovana matrica $A^* = [A_{ji}]$. Tada je

$$A\cdot A^* = A^*\cdot A = |A|\cdot I.$$

Dokaz:

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}....a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}....a_{2n}\\ ....\\ a_{n1}\ a_{n2}....a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}\ A_{21}....\ A_{n1}\\ A_{12}\ A_{22}....\ A_{n2}\\ ....\\ A_{1n}\ A_{2n}....\ A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k}.... & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk}\\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{2k}.... & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{nk}\\ \multicolumn{3}{c}{...}\\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{2k}.... & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} \end{bmatrix} \overset{\textbf{Stav}.*}{=}$$

$$\begin{bmatrix} |A| & 0.... & 0\\ 0 & |A|.... & 0\\ \multicolumn{3}{c}{..............}\\ 0 & 0\ .... & |A| \end{bmatrix} = |A|\cdot I.$$

Uz korišćenje formule (2) Stava $*$, na sličan način se dokazuje i da je $A^*\cdot A = |A|\cdot I$. $\square$

Osobine adjungovanih matrica

Neka je A kvadratna matrica reda n i α realan broj. Tada važe sledeće tri osobine za adjungovane matrice.

1. $|A^*| = |A|$.
2. $(A^*)^* = A$, za n=2, $\qquad (A^*)^* = |A|^{n-2}\cdot A$, za $n \geq 2$.
3. $(\alpha\cdot A)^* = \alpha^{n-1}\cdot A^*$.

Ilustrovaćemo navedene osobine na matrici A reda 2. Neka je $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$, tada su kofaktori elemenata matrice A redom $A_{11} = 5,\ \ A_{12} = -7,\ \ A_{21} = -4,\ \ A_{22} = 3,$ odnosno adjungovana matrica matrice A je $A^* = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$. Međutim, njihove determinante su jednake:

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 28 = -13 \quad |A^*| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 28 = -13.$

Izračunajmo šta je adjungovana matrica adjungovane matrice. Označimo sa B matricu A^*. Kofaktori elemenata matrice B su redom $B_{11} = 3\ \ B_{12} = 4,\ \ B_{21} = 7,\ \ B_{22} = 5,$ odnosno adjungovana matrica matrice B je $B^* = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A.$

Treću osobinu je interesantnije proveriti na matrici višeg reda. Na osnovu osobine $|\alpha A| = \alpha^n |A|,\ \ \alpha \in \mathcal{R}$, kada tražimo adjungovanu matricu matrice αA (svi elementi matrice A su pomnoženi sa α), svaki kofaktor, koji je determinanta $n-1$ reda, će imati faktor α^{n-1}. Šta više, svaki kofaktor matrice αA će se za faktor α^{n-1} razlikovati od odgovarajućeg kofaktora matrice A. Proverimo na matrici C reda 3.

$3C = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tada su odgovarajuće adjungovane matrice:

$$C^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \\ -10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3 \cdot C)^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3^2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -3^2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 3^2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -3^2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & 3^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -3^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ 3^2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -3^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & 3^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3^2 \cdot 2 \\ 3^2 \cdot 10 & -3^2 \cdot 5 & -3^2 \cdot 2 \\ -3^2 \cdot 10 & 0 & 3^2 \cdot 2 \end{bmatrix} = 3^2 \cdot C^*.$$

Naglasimo još jednom razliku između množenja matrice brojem i množenja determinante brojem:

Determinantu množimo brojem tako što **samo jednu** vrstu ili kolonu izmnožimo brojem, dok matricu množimo brojem tako što **sve** elemente matrice izmnožimo brojem.

Na primer,

$33 \cdot \begin{bmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1 \\ 3\ 1\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33\ 66\ 99 \\ 66\ 33\ 99 \\ 99\ 33\ 66 \end{bmatrix}$, dok je

$$33 \cdot \begin{vmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1 \\ 3\ 1\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 33 & 66 & 99 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 66 & 99 & 33 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 99 & 33 & 66 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 33 & 2 & 3 \\ 66 & 3 & 1 \\ 99 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 99 \\ 2 & 3 & 33 \\ 3 & 1 & 66 \end{vmatrix} = ...$$

Koja mogućnost je izostavljena?

6.3 Inverzna matrica i rang matrice

Inverzna matrica kvadratne matrice A reda n je matrica A^{-1} reda n za koju je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Ako matrica $A \in \mathcal{M}_n$ ima inverznu matricu onda je A **regularna** matrica, inače je A **singularna**.

Potreban i dovoljan uslov da matrica $A \in \mathcal{M}_n$ bude regularna je da je njena determinanta različita od nule (tj. $|A| \neq 0$).

Dokaz.

($\Leftarrow$) Neka je matrica A regularna. Tada postoji njena inverzna matrica A^{-1} tako da je $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$. Tada su i njihove determinante jednake. Na osnovu osobine 2. teoreme 3 to je ekvivalentno sa $|A^{-1}| \cdot |A| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I|$. Kako je determinanta jedinične matrice jednaka $|I| = 1$ imamo da je proizvod dva broja $|A|$ i $|A^{-1}|$ iz skupa $\mathcal{R}$ jednak 1. To ima za posledicu da su obe detrminante $|A|$ i $|A^{-1}|$ različite od 0.

($\Rightarrow$) Neka je determinanta matrice A različita od nule. Kako u opštem slučaju važi za kvadratne matrice da je $A^* \cdot A = A \cdot A^* = |A| \cdot I$. Nakon množenja s leve strane formule sa brojem $\frac{1}{|A|}$ (smemo jer je $|A| \neq 0$) i uz korišćenje osobine $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$ sledi

$\left(\frac{1}{|A|} \cdot A^*\right) \cdot A = A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot A^*\right) = I$, što znači da je $\frac{1}{|A|} \cdot A^*$ tražena inverzna matrica za A, tj.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*.$$

□

6.3.1 Osobine regularnih matrica

Neka su matrice $A, B \in \mathcal{M}_n$ regularne. Tada je

1. $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}, \quad \alpha \neq 0.$
2. $(A^{-1})^{-1} = A.$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$

6.3.2 Rang matrice

Rang *matrice* $A_{m\times n}$ *je* $r(A) = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } A \textit{ nula matrica} \\ k, & k \in \{1, 2 ... \min\{m, n\}\} \end{cases}$ *, pri čemu je k maksimalan prirodan broj za koji važi da postoji minor reda k matrice A različit od nule, dok su svi minori reda* $k+1$ *ili većeg (ako postoje) jednaki nuli.*

Primer: Neka su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1\,1 \\ 0\,0 \end{bmatrix} \ \text{ i } \ C = \begin{bmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \end{bmatrix},$$

tada je $r(A) = 2, r(B) = 1$ i $r(C) = 3$. Matrice A, B i C iz primera se nazivaju 0-1 matrice ili retke matrice.

Rang trougaone matrice tipa $m \times n$ *za* $m \geq n$*, jednak je broju elemenata sa glavne dijagonale različitih od nule.*

Na primer, ako su trougaone matrice A i B oblika:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,1 \\ 0\,2\,3\,1 \\ 0\,0\,0\,7 \\ 0\,0\,0\,8 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix},$$

njihovi rangovi su redom $r(A) = 3$ i $r(B) = 2$.

Rang regularne matrice reda n je n.

Dokaz. Neka je A regularna matrica reda n. Tada je $|A| \neq 0$. Kako je determinanta kvadratne matrice A minor te matrice maksimalnog reda n to je po definiciji ranga matrice $r(A) = n$. $\square$

Kako smo obradili potreban minimum matričnog računa u sledećem poglavlju ćemo ga primeniti na rešavanje sistema linearnih jednačina.

6.4 Zadaci

6.1. Rešite zadatak iz prvog primera u uvodu ove glave.

6.2. Date su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $5 \cdot A^3 - A + 2 \cdot I_2$, gde je $A^3 = A \cdot A \cdot A$ i I_2 je jedinična matrica reda 2. Ako su prizvodi $B \cdot C$, $C \cdot B$ i $B \cdot A$ definisani izračunajte ih.

6.3. Za matricu A iz prethodnog zadatka nađite matrice: A^T, A^* i A^{-1}. Zatim nađite determinante:$|A^T|, |A^*|$ i $|A^{-1}|$.

6.4. Kramerovom metodom rešiti sistem $A\cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, gde je A matrica iz 2. zadatka.

6.5. Date su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte vrednost determinante matrice A na osnovu razvoja po 1. vrsti i na osnovu razvoja po 2. koloni. Ukoliko postoje inverzne matrice A^{-1} i B^{-1} nađite ih. Odredite rang matrice C.

6.6. Rešite sistem $S_{3,4}$ linearnih jednačina: $C \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, Gausovim metodom eliminacije. Matrica C je matrica iz prethodnog zadatka.

6.7. Rešite matričnu jednačinu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.5 Teorijska pitanja

6.8. Matrica $= \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \end{bmatrix}$ je jedinična matrica reda 4.	$\perp$
6.9. Svaka dijagonalna matrica van sporedne dijagonale ima 0.	$\perp$
6.10. Tip nula matrice $O = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$ je 0×0.	$\perp$
6.11. Nula matrica je neutralan elemenat za množenje matrica.	$\perp$
6.12. Trougaona (donja) matrica je kvadratna matrica kod koje su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0.	$\top$
6.13. Trougaone matrice su podskup skupa dijagonalnih matrica.	$\perp$
6.14. Komutativnost za sabiranje matrica važi.	$\top$
6.15. Komutativnost za množenje matrica važi.	$\perp$
6.16. Asocijativnost za sabiranje matrica važi.	$\top$
6.17. Asocijativnost za množenje matrica važi.	$\top$
6.18. Postoji bar jedan od proizvoda $A \cdot B$ i $B \cdot A$, ako je matrica A tipa 7×5 a matrica B tipa 7×6.	$\perp$
6.19. Za svake dve matrice B i C, ako postoji proizvod $B \cdot C$ važi da je $(B \cdot C)^T = B^T \cdot C^T$.	$\perp$

6.20. Elementi na glavnoj dijagonali ostaju na glavnoj dijagonali i posle transponovanja.	$\top$
6.21. Elementi na glavnoj dijagonali matrice A su jednaki elementima na sporednoj dijagonali matrice A^T.	$\perp$
6.22. Element a_{ij} matrice $A = [a_{ij}]$ se nalazi u i-toj koloni i j-toj vrsti.	$\perp$
6.23. Kvadratne matrice različitog reda ne mogu se ni sabrati ni pomnožiti.	$\top$
6.24. Element b_{ij} matrice $B = [b_{ij}]$ se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni.	$\top$
6.25. Transponovana dijagonalna matrica jednaka je polaznoj dijagonalnoj matrici.	$\top$
6.26. Za svaku pravougaona matrica P su definisani proizvodi $P^T \cdot P$ i $P \cdot P^T$.	$\top$
6.27. Transponovanjem kvadratne matrice skup elemenata na glavnoj i skup elemenata na sporednoj dijagonali se ne menjaju.	$\top$
6.28. Za sve pravougaone matrice različitog tipa zbir nikad nije definisan, dok proizvod može da bude definisan.	$\top$
6.29. Pravougaone matrice istog tipa ne mogu da se pomnože.	$\top$
6.30. Neka su date matrice $A_{3\times5}$, $B_{3\times4}$ i $C_{5\times3}$, tada su definisani sledeći proizvodi: $A \cdot C \cdot B$, $(A \cdot C)^n$, $(C \cdot A)^n \cdot C$, $C \cdot (A \cdot C)^n$, za $n \in \mathcal{N}$.	$\top$
6.31. Red matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je 2.	$\top$
6.32. Red matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je 1.	$\perp$
6.33. Matrica $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je jedinična reda 2.	$\perp$
6.34. Množenje vrste ili kolone matrice brojem različitim od 0 je elementarna transformacija.	$\top$
6.35. Red matrice $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je 2, dok se elemenat 2 u 1. vrsti i 2. koloni.	$\top$
6.36. Red matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je 0.	$\perp$
6.37. Postoji bar jedan od proizvoda $A \cdot B$ i $B \cdot A$, ako je matrica A tipa 3×5 a matrica B tipa 3×6.	$\perp$
6.38. Postoji bar jedan od proizvoda $A \cdot B$ i $B \cdot A$, ako je matrica A tipa 3×5 a matrica B tipa 6×3.	$\top$
6.39. Množenje vrste ili kolone matrice nulom nije elementarna transformacija.	$\top$
6.40. Postoji bar jedan od proizvoda $A \cdot B$ i $B \cdot A$, ako je matrica A tipa 5×7 a matrica B tipa 6×7.	$\perp$
6.41. Neka su date matrice $A_{2\times3}$, $B_{2\times4}$ i $C_{3\times2}$, tada su definisani sledeći proizvodi: $A \cdot C \cdot B$, $(A \cdot C)^n$, $(C \cdot A)^n \cdot C$, $C \cdot (A \cdot C)^n$, za $n \in \mathcal{N}$.	$\top$
6.42. Matricu množimo brojem tako što tim brojem pomnožimo elemente neke vrste.	$\perp$
6.43. K je kvadratna matrica akko je definisan proizvod $K \cdot K$.	$\top$

6.44. Transponovana jedinična matrica jednaka je jediničnoj matrici.	$\top$
6.45. Za svaku kvadratnu matricu A_n skup elemenata na glavnoj dijagonali matrice A_n je jednak skupu elemenata na sporednoj dijagonali matrice A_n^T.	$\perp$
6.46. Za svaku kvadratnu matricu A_n skup elemenata na glavnoj dijagonali matrice A_n je jednak skupu elemenata na glavnoj dijagonali matrice A_n^T.	$\top$
6.47. Množenje kvadratnih matrica istog reda je komutativno.	$\perp$
6.48. Za sve matrice $B, C, D \in \mathcal{M}_{m\times n}$, važi $B + (D + C) = (C + B) + D$.	$\top$
6.49. Neka su A, B i C proizvoljne matrice reda n, tada je $C \cdot (A + B)^T = C \cdot B^T + C \cdot A^T$.	$\top$
6.50. Neka su A, B i C proizvoljne matrice reda n, tada je $C \cdot (A \cdot B)^T = (C \cdot B^T) \cdot A^T$.	$\top$
6.51. Za sve pravougaone matrice A i B, istog tipa, proizvodi $A \cdot B$ i $B \cdot A$ su definisani.	$\perp$
6.52. Za sve matrice $B, C, D \in \mathcal{M}_{m\times n}$, važi $B + (D + C) = (D + C) + B$.	$\top$
6.53. Broj kolona prve matrice treba da je jednak broju vrsta druge matrice da bismo njihov proizvod bio definisan.	$\top$
6.54. Za sve matrice $B, C, D \in \mathcal{M}_{m\times n}$, važi $B + (D + C) = (B + C) + D$.	$\top$
6.55. Za pravougaone matrice A i B, istog tipa, zbirovi $A+B$ i $B+A$ su definisani.	$\top$
6.56. Za sve kvadratne matrice B, C, D, istog reda važi $B \cdot (D + C) = B \cdot C + B \cdot D$.	$\top$
6.57. Pravougaone matrice istog tipa mogu da se saberu.	$\top$
6.58. Za sve matrice $E, F, G \in \mathcal{M}_{m\times n}$, važi $E \cdot (F + G) = F \cdot E + G \cdot E$.	$\perp$
6.59. Za sve matrice $B, C, D \in \mathcal{M}_n$, važi $B \cdot (D + C) = B \cdot C + D \cdot B$.	$\perp$
6.60. Za sve matrice $B, C, D \in \mathcal{M}_{m\times n}$, važi $B + (D + C) = (C + D) + B$.	$\top$
6.61. Neka je B bilo koja kvadratna matrica reda n, i neka je $k \neq 0$ realan broj tada je $(k \cdot B)^T = \frac{1}{k} \cdot B^T$.	$\perp$
6.62. Broj jedinica na glavnoj dijagonali jedinične matrice jednak je njenom redu.	$\top$
6.63. Na sporednoj dijagonali jedinične matrice parnog reda su svi elementi jednaki 0.	$\top$
6.64. Matricu množimo brojem tako što tim brojem pomnožimo elemente svih vrsta.	$\top$
6.65. Na sporednoj dijagonali jedinične matrice neparnog reda je jedna 1 i ostalo su 0.	$\top$
6.66. Na sporednoj dijagonali jedinične matrice neparnog reda su svi elementi jednaki 0.	$\perp$
6.67. Za pravougaone matrice A i B istog tipa, proizvodi $(A \cdot B)^5$ i $(B \cdot A)^5$ su definisani.	$\perp$
6.68. Za sve pravougaone matrice A i B istog tipa, proizvodi $(A \cdot B^T)^2$ i $(B \cdot A^T)^2$ su definisani.	$\top$
6.69. Determinanta matrice je definisana samo za kvadratne matrice.	$\top$
6.70. Dva od tri tipa elementarnih transformacija primenjenih na matricu menjaju njenu determinantu.	$\top$

6.71. Svaka determinanta matrice različita od 0 menja znak ako zamenimo mesta dvema kolonama njene matrice.	$\top$
6.72. Determinantu matrice množimo brojem tako što sve elemente pomnožimo tim brojem.	$\perp$
6.73. Sva tri tipa elementarnih transformacija primenjenih na matricu menjaju njenu determinantu.	$\perp$
6.74. Determinanta je jednaka 0 ako su joj dve vrste proporcionalne.	$\top$
6.75. Svaka determinanta matrice različita od 0 menja znak ako zamenimo njene dve vrste.	$\top$
6.76. Determinanta matrice se ne menja ako vrsti dodamo drugu vrstu pomnoženu brojem.	$\top$
6.77. Za svake dve kvadratne matrice istog reda zbir njihovih determinati jednak je determinanti zbira njihovih kvadratnih matrica.	$\perp$
6.78. Determinantu množimo brojem tako što sve elemente jedne vrste ili jedne kolone pomnožimo tim brojem.	$\top$
6.79. Determinanta svake (donje) trougaone matrice jednaka je proizvodu elemenata sa sporedne dijagonale.	$\perp$
6.80. Determinanta dijagonalne matrice jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.	$\top$
6.81. Determinanta svake kvadratne matrice se ne menja ako zamenimo dve kolone matrice.	$\perp$
6.82. Ako se zamene neke dve kolone bilo koje determinante ona se ne menja.	$\perp$
6.83. Determinanta jedinične matrice bilo kog reda jednaka je nuli.	$\perp$
6.84. Za svaku kvadratnu matricu za koju su svi elementi u nekoj vrsti međusobno jednaki sledi da njena determinanta je jednaka 0.	$\perp$
6.85. Postoji kvadratna matrica za koju su svi elementi u nekoj vrsti međusobno jednaki i njena determinanta je jednaka 0.	$\top$
6.86. Ako su svi elementi u nekoj koloni kvadratne matrice jednaki 0 njena determinanta je jednaka 0.	$\top$
6.87. Determinanta nula matrice bilo kog reda jednaka je nuli.	$\top$
6.88. Determinanta matrice se menja ako koloni dodamo drugu kolonu pomnoženu brojem.	$\perp$
6.89. Za svaku kvadratna matrica A_n i $0 \neq k \in \mathcal{R}$ važi $\lvert k \cdot A\rvert = k^n \cdot \lvert A\rvert$.	$\top$
6.90. Neka su B i A bilo koje kvadratne matrice istog reda, tada je $\lvert A\rvert + \lvert B\rvert = \lvert A+B\rvert$.	$\perp$
6.91. Za determinante za svako $a,b,c,d \in \mathcal{R}$ važi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+1999\cdot a & d+1999\cdot a \end{vmatrix}$.	$\perp$

6.92. Važi za determinante za svako $a,b,c,d \in \mathcal{R}$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d+2004\cdot b & c+2004\cdot a \end{vmatrix}$.	$\top$
6.93. Važi za determinante za svako $a,b,c,d \in \mathcal{R}$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$.	$\top$
6.94. Važi za determinante za svako $e,f,g,h \in \mathcal{R}$: $\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & h \\ e & g \end{vmatrix}$.	$\top$
6.95. Važi za determinante za svako $a,b,c,d \in \mathcal{R}$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ c & d \end{vmatrix}$.	$\perp$
6.96. Za determinanate važi $\begin{vmatrix} 6 & 15 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.	$\top$
6.97. Za determinanate važi $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.	$\top$
6.98. Važi $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.	$\top$
6.99. Red i determinanta matrice $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ su jednaki 3.	$\top$
6.100. Tačna je sledeća jednakost $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.	$\top$
6.101. Determinanta $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0,25 & 0,5 \\ 32 & 7 & 1,5 & 3 \\ 3 & 15 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.	$\perp$
6.102. Determinanta matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je 3!.	$\top$
6.103. Determinanta matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ je 4!.	$\perp$
6.104. Determinanta matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ je 4!.	$\top$

6.105. Determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$	$\perp$
6.106. Za determinanate važi $\begin{vmatrix} 0\ 5 \\ 5\ 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 0\ 1 \\ 1\ 0 \end{vmatrix}$.	$\perp$
6.107. Determinanta matrice $\begin{bmatrix} 0\ 2 \\ 2\ 0 \end{bmatrix}$ je 2.	$\perp$
6.108. Ako po definiciji računamo determinantu reda 4 imamo 24 sabirka.	$\top$
6.109. Ako determinantu reda 4 računamo po definiciji imamo 8 sabiraka.	$\perp$
6.110. Ako po definiciji računamo determinantu reda 5 imamo 120 sabiraka.	$\top$
6.111. Opšti sabirak $b_{15} \cdot b_{23} \cdot b_{32} \cdot b_{44} \cdot b_{51}$, u definiciji determinante matrice $B_5 = [b_{ij}]$ ima predznak $-$ (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih elemenata je parna).	$\perp$
6.112. Opšti sabirak $d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{61}$ po definiciji determinante $\|D_6\|$ ima predznak + (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih činilaca je parna).	$\perp$
6.113. $c_{13} \cdot c_{21} \cdot c_{35} \cdot c_{42} \cdot c_{54}$ je jedan od 120 opštih sabiraka po po definiciji $\|C_5\|$ sa predznakom $-$ (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih elemenata je neparna).	$\perp$
6.114. Sledeći proizvod elemenata: $d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{61}$ matrice $D_7 = [d_{ij}]$ je sabirak u determinanti $\|D_7\|$.	$\perp$
6.115. Predznak opšteg sabirka $a_{15} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43} \cdot a_{51}$ u definiciji determinante $\|A\|$ reda 5 je + (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih činilaca je parna).	$\top$
6.116. U definiciji determinante $\|D_6\|$ opšti sabirak $d_{11} \cdot d_{23} \cdot d_{32} \cdot d_{45} \cdot d_{54} \cdot d_{66}$ ima predznak + (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih opštih činilaca je parna).	$\top$
6.117. Predznak opšteg sabirka $b_{13} \cdot b_{24} \cdot b_{31} \cdot b_{42} \cdot b_{55}$, u definiciji determinante matrice B_5 je + (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih opštih činilaca je parna).	$\top$
6.118. Predznak opšteg sabirka $a_{15} \cdot a_{26} \cdot a_{34} \cdot a_{43} \cdot a_{51} \cdot a_{62}$ po definiciji determinante $\|A\|$ reda 6 je + (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih opštih činilaca je parna).	$\perp$
6.119. Predznak opšteg sabirka $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} \cdot a_{56} \cdot a_{65}$ po definiciji determinante $\|A\|$ reda 6 je + (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih opštih činilaca je parna).	$\perp$
6.120. Jedan od 120 opštih sabiraka u definiciji $\|A_5\|$ je $a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{35} \cdot a_{42} \cdot a_{51}$ i ima predznak + u definiciji (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih opštih činilaca je parna).	$\perp$

6.121. Jedan od 720 opštih sabiraka u definiciji $\|A_6\|$ je $a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{35} \cdot a_{42} \cdot a_{51} \cdot a_{66}$ i ima predznak $-$ u definiciji (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih opštih činilaca je neparna).	$\top$
6.122. Po definiciji determinante $\|D_6\|$ opšti sabirak $d_{16} \cdot d_{23} \cdot d_{32} \cdot d_{45} \cdot d_{54} \cdot d_{61}$ ima predznak $+$ (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih opštih činilaca je parna).	$\perp$
6.123. Matrica $A_{2\times 4}$ ima 6 minora reda 2.	$\top$
6.124. Predznak opšteg sabirka $a_{15} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41} \cdot a_{52}$ u determinanti $\|A\|$ reda 5 je $+$ (permutacija koja redom preslikava indeks vrste u indeks kolone ovih opštih činilaca je parna).	$\top$
6.125. Neka je D_{ij} algebarski komplement elementa d_{ij} matrice $D_4 = [d_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ tada je $d_{13} \cdot D_{13} + d_{23} \cdot D_{23} + d_{33} \cdot D_{33} + d_{43} \cdot D_{43} = \|D_4\|$.	$\top$
6.126. Neka je D_{ij} algebarski komplement elementa d_{ij} matrice $D_4 = [d_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ tada je $d_{13} \cdot D_{12} + d_{23} \cdot D_{22} + d_{33} \cdot D_{32} + d_{43} \cdot D_{42} = \|D_4\|$.	$\perp$
6.127. Neka je D_{ij} kofaktor elementa d_{ij} matrice $D_4 = [d_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ tada je $d_{13} \cdot D_{12} + d_{23} \cdot D_{22} + d_{33} \cdot D_{32} + d_{43} \cdot D_{42} = 0$.	$\top$
6.128. Minora reda k, matrice $B_{m\times n}$, za $k \leq \min\{m, n\}$ ima $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$. Proverite na primeru za $k = 3, m = 3, n = 4$.	$\top$
6.129. Minora reda 3 matrica tipa 4×3 ima 9.	$\perp$
6.130. Minora reda 4 matrice tipa 5×4 ima 5.	$\top$
6.131. Matrica $A_{4\times 4}$ ima 16 minora reda 3.	$\top$
6.132. Matrica $A_{4\times 4}$ ima 4 minora reda 3.	$\perp$
6.133. Glavne minore imaju samo kvadratne matrice.	$\top$
6.134. Kvadratna matrica reda n ima n^2 glavnih minora.	$\top$
6.135. Matrica $A_{2\times 3}$ ima 3 minora reda 2.	$\top$
6.136. Matrica $A_{3\times 5}$ nema minore reda 4.	$\top$
6.137. Matrica $A_{2\times 3}$ ima minor reda 3.	$\perp$
6.138. Matrica $A_{2\times 4}$ ima 6 minora reda 2.	$\top$
6.139. Matrica $A_{3\times 3}$ ima 3 minora reda 3.	$\perp$
6.140. Matrica tipa 5×3 ima 10 minora reda 3.	$\top$
6.141. Matrica tipa 5×3 ima minor reda 4.	$\perp$
6.142. Kofaktor elementa a_{ij} matrice A se u A* nalazi u i-toj koloni i j-toj vrsti.	$\perp$
6.143. Algebarski komplement A_{ij} elementa a_{ij} matrice $A = [a_{ij}]$, se računa po formuli $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, gde je M_{ij} glavni minor matrice A.	$\top$
6.144. Ako je red kvadratne matrice neparan, opšti predznaci kofaktora, po definiciji kofaktora, elemenata sa sporedne dijagonale su $+$.	$\top$
6.145. Ako je red kvadratne matrice paran, opšti predznaci (po definiciji) algebarskih komplemenata elemenata sa sporedne dijagonale su $+$.	$\perp$

6.146. I za paran i za neparan red matrice opšti predznaci kofaktora elemenata sa glavne dijagonale su po definiciji kofaktora $-$.	$\perp$
6.147. Ako je red kvadratne matrice paran opšti predznaci algebarskih komplemenata elemenata sa glavne dijagonale su po definiciji $+$.	$\top$
6.148. Kofaktor elementa c_{12} matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ je 2.	$\perp$
6.149. Kofaktor elementa a_{21} matrice $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ je -2.	$\top$
6.150. Kofaktor elementa a_{21} matrice $A = [a_{ij}]$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je 1.	$\perp$
6.151. Algebarski komplement elementa b_{22} matrice $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ je 4.	$\top$
6.152. Kofaktor A_{33}, matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ je 9 .	$\top$
6.153. Transponovana i adjungovana matrica jedinične matrice su jedinične matrice.	$\top$
6.154. Kvadratna matrica je singularna ako nema inverznu matricu.	$\top$
6.155. Kvadratna matrica je singularna akko je njena determinanta jednaka 0.	$\top$
6.156. Kvadratna matrica je regularna akko ima inverznu matricu.	$\top$
6.157. Kvadratna matrica je regularna akko je njena determinanta jednaka 0.	$\perp$
6.158. Ako je A regularna matrica važi $(A^{-1})^{-1} = A$.	$\top$
6.159. Neka su C i B regularne matrice, tada je $(C \cdot B)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1}$	$\top$
6.160. Neka je B matrica inverzna matrici A, tada je $\|A \cdot B\| = 1$.	$\top$
6.161. Neka su C i B regularne matrice, tada je $(C \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot C^{-1}$.	$\top$
6.162. Neka je B inverzna matrica za matricu A, tada je $A \cdot B = B \cdot A$.	$\top$
6.163. Neka je B regularna matrica reda n i neka je k realan broj, tada je $(k \cdot B)^{-1} = k^n \cdot B^{-1}$.	$\perp$
6.164. Neka su A i B regularne matrice, tada je $A \cdot B = B \cdot A$.	$\perp$
6.165. B regularna matrica akko je $\|B\| \neq 0$.	$\top$
6.166. Neka je B matrica inverzna matrici A, tada je $\|A \cdot B\| = \|B \cdot A\|$.	$\top$
6.167. Ako je A regularna matrica važi $\|A\| \neq \|5 \cdot A\|$.	$\top$
6.168. Ako je A singularna, $A \cdot A^*$ je nula matrica.	$\top$
6.169. Nula matrica reda n je regularna.	$\perp$
6.170. Matrica A ima inverznu matricu je ekvivalentno sa $\|A\| = 0$.	$\perp$
6.171. Matrica A je singularna je ekvivalentno sa: postoji A^{-1}.	$\perp$
6.172. Ako su A i B regularne matrice, tada iz $B \cdot A = C$ sledi $B = A^{-1} \cdot C$ i $A = C \cdot B^{-1}$.	$\perp$
6.173. Ako je $\|A\| \neq 0$, to znači da je A singularna matrica.	$\perp$

6.174. Jedinična matrica je regularna.	$\top$
6.175. Ako su A i B regularne matrica tada iz $B \cdot A = C$ sledi $B = C \cdot A^{-1}$ i $A = B^{-1} \cdot C$.	$\top$
6.176. Ako je A regularna matrica tada je matrična jednačina $A \cdot X = B$ jedinstveno rešiva po X.	$\top$
6.177. Ako su A i B regularne matrica važi $\vert A \cdot B\vert = \vert A\vert \cdot \vert B\vert \neq 0$.	$\top$
6.178. Neka je B matrica inverzna matrici A, tada je $\vert A \cdot B\vert = \vert B \cdot A\vert$.	$\top$
6.179. Neka je B matrica inverzna matrici A, tada je $\vert A \cdot B\vert = \vert B \cdot A\vert = 1$.	$\top$
6.180. Važi, za za svaku matricu A_n i realan broj α, $\quad (\alpha \cdot A_n)^* = \alpha^{n-1} \cdot A_n^*$.	$\top$
6.181. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}$ ima inverznu matricu.	$\perp$
6.182. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ ima inverznu matricu.	$\perp$
6.183. Matrica inverzna za $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.184. Matrica $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ je kvadratna reda 3 i singularna.	$\top$
6.185. Matrica= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je regularna matrica reda 4.	$\perp$
6.186. Matrica = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ je regularna matrica reda 2.	$\perp$
6.187. Matrica inverzna za $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.188. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ je regularna.	$\perp$
6.189. Matrica inverzna za $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.190. Matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ su međusobno inverzne.	$\perp$
6.191. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ nema inverznu matricu.	$\top$
6.192. Matrica $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nema inverznu matricu.	$\top$

6.193. Matrica inverzna za $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.194. Matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ su međusobno inverzne.	$\perp$
6.195. Matrica inverzna za $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.196. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ima inverznu matricu i determinanta joj je jednaka 2.	$\perp$
6.197. Matrica $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ je regularna.	$\perp$
6.198. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ nema inverznu matricu.	$\top$
6.199. Matrica $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nema inverznu.	$\perp$
6.200. Matrica inverzna za $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.201. Matrica inverzna za $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.202. Matrica inverzna za $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.203. Matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ su međusobno inverzne.	$\top$
6.204. Matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ su međusobno inverzne.	$\perp$
6.205. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ima inverznu matricu i determinanta joj je jednaka -2.	$\top$
6.206. Međusobno adjungovane matrice su: $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} h & f \\ g & e \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.207. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ onda je $(A^*)^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.	$\top$

6.208. Međusobno adjungovane matrice su: $\begin{bmatrix} e & -f \\ -g & h \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} h & f \\ g & e \end{bmatrix}$.	$\top$
6.209. Matrica $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je adjungovana za matricu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.210. Matrica adjungovana za matricu $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.211. Ako je A regularna matrica tada su matrice $A^* \cdot A$ i $A \cdot A^*$ jednake istoj dijagonalnoj matrici.	$\top$
6.212. Matrica adjungovana za matricu $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.213. Jedinična matrica je adjungovana sama sebi.	$\top$
6.214. Za sve kvadratne matrice reda većeg od 1 važi $\|A_k^*\| = \|A\|^{k-1}$.	$\top$
6.215. Za sve regularne matrice A je $A \cdot A^*$ nula matrica.	$\perp$
6.216. Ako je A singularna, onda je $A \cdot A^*$ nula matrica.	$\top$
6.217. Ako je A regularna matrica, tada je $A \cdot A^*$ dijagonalna matrica.	$\top$
6.218. Matrica $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je adjungovana za matricu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.219. Matrica $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je adjungovana za matricu $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.220. Za sve kvadratne matrice važi $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.	$\top$
6.221. Matrica adjungovana za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ je $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.222. Matrica $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je adjungovana za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.223. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ onda je $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.224. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ onda je $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.225. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ onda je $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.	$\perp$
6.226. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ onda je $A^* = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.	$\top$
6.227. Rang matrice je 0 jedino ako je matrica nula matrica.	$\top$
6.228. Rang matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je 2.	$\top$
6.229. Rang matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je 2.	$\top$

6.230. Primenom elementarnih transformacija nad matricom, njen rang se ne menja.	$\top$
6.231. Rang dijagonalne matrice jednak je broju elemenata na glavnoj dijagonali različitih od 0.	$\top$
6.232. Rang regularne matrice jednak je njenom redu.	$\top$
6.233. Rang svake matrice tipa 7×3 je najviše 7.	$\perp$
6.234. Rang, red i determinanta matrice $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ su jednaki 2.	$\perp$
6.235. Rang jedinične matrice reda n je n.	$\top$
6.236. Rang matrice $\begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ je 1.	$\top$
6.237. Rang matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je 0.	$\perp$
6.238. Rang singularne matrice jednak je njenom redu.	$\perp$
6.239. Rang, red i determinanta matrice $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ su jednaki 3.	$\top$
6.240. Rang matrice može da se odredi samo za kvadratne matrice.	$\perp$
6.241. Rang matrice $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je 2.	$\perp$
6.242. Rang singularne matrice je manji od njenog reda.	$\top$
6.243. Rang, red i determinanta matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ su jednaki 3.	$\top$
6.244. Rang matrice tipa 4×7 je najviše 4.	$\top$
6.245. Rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je 1.	$\perp$
6.246. Rang matrice tipa 4×3 je najviše 4.	$\perp$
6.247. Rang, red i determinanta matrice $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ su jednaki 2.	$\top$

Glava 7.

7 Metode rešavanja i modelovanje sistema linearnih jednačina

Posmatraćemo sistem S_{mn} od m linearnih jednačina sa n nepoznatih

$$S_{mn} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 \ + a_{13}x_3 \ + \ ... \ + \ a_{1n}x_n \ = b_1 \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 \ + a_{23}x_3 \ + \ ... \ + \ a_{2n}x_n \ = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ ... \ + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. ,$$

gde su elementi a_{ij} i b_i, $\ i = 1...m, \ j = 1...n$, zadate vrednosti iz skupa $\mathcal{R}$. Elementi a_{ij} nazivaju se **koeficijenti** sistema, a elementi b_i su **slobodni koeficijenti**. Nepoznate x_j, $j = 1...n$, određuju se (ukoliko postoje) tako da zadovoljavaju sve jednačine sistema S_{mn}.

Sistem linearnih jednačina je:

1. **saglasan** (moguć, neprotivurečan) ako postoji rešenje:
   (a) **određen** ako postoji tačno jedno rešenje;
   (b) **neodređen** ako postoji više (bezbroj) rešenja;
2. **protivurečan** (nemoguć, kontradiktoran, nesaglasan) ako ne postoji rešenje.

Ako su svi slobodni koeficijenti jednaki nuli ($b_i = 0, \ i = 1...m$) sistem je **homogen**. S_{mn} nazivamo **pravougaonim** sistemom za $m \neq n$, dok se za $m = n$ govori o **kvadratnom** sistemu i koristi se oznaka S_n. Sistem S_{mn} se u matričnom obliku može zapisati

$$A \cdot X = B,$$

gde je $A = [a_{ij}]$ matrica tipa $m \times n$, a

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matricu A se naziva **matrica sistema** S_{mn} (ili matrica koeficijenata), a matrica

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

naziva se **proširena matrica sistema** S_{mn}.

Prvo pitanje koje se postavlja za sisteme linearnih jednačina je:

Da li postoji rešenje linearnog sistema?

Odgovor nam daje sledeće važno tvrđenje:

Kroneker-Kapelijeva teorema *Neka je dat sistem linernih jednačina u matričnom obliku* S_{mn}*:* $A \cdot X = B$*. Tada taj sistem ima rešenje ako je rang matrice* A *jednak rangu proširene matrice* $\overline{A}$*, tj.*

$$\textit{Sistem je moguć (tj. ima rešenje)} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = r(\overline{A}).$$

Ukoliko nakon izračunavanja ranga matrice A i ranga proširene matrice $\overline{A}$ dobijemo potvrdan odgovor o postojanju rešenja sistema, možemo da pređemo na drugu fazu: nalaženja rešenja sistema linearnih jednačina.

Posledica 1. *Ako je matrica sistema* A*, kvadratnog sistema linearnih jednačina* S_n*, regularna onda je rešenje sistema jedinstveno i može da se izrazi formulom*

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Posledica 2. *Ako je pravougaoni sistem linearnih jednačina* S_{mn} *takav da je* $r(A) = r(\overline{A}) < n$ *onda je sistem neodređen.*

Posledica 3. *Ako je pravougaoni sistem linearnih jednačina* S_{mn}*, takav da je* $r(A) \neq r(\overline{A})$ *onda je sistem protivurečan (kontradiktoran).*

Skica dokaza Posledice 1:

Ako je matrica A regularna onda je $r(A) = n$. Proširena matrica sistema $\overline{A}$ je tipa $n \times (n+1)$ pa je $r(\overline{A}) \leq n$. Međutim, determinanta $|A|$ je minor reda n matrice $\overline{A}$ različit od nule. Tako je i rang $r(\overline{A}) = n$ pa je po Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem saglasan. Sa druge strane, pošto je matrica A regularna, postoji njena inverzna matrica A^{-1} i sa njom možemo pomnožiti sa leve strane sistem S_n. Zatim koristimo asocijativnost množenja matrica, jednakost $A^{-1} \cdot A = I$ i zakon $I \cdot X = X$:
$A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Iz poslednje formule se rešenje lako izračunava množenjem matrica $A^{-1} \cdot B$. Jedinstvenost rešenja sledi iz jedinstvenosti inverzne matrice za svaku regularnu matricu. $\Box$

Posledica 3 je direktna posledica Kroneker-Kapelijeve teoreme.

7.1 Kvadratni i homogeni sistemi

Mada Posledica 1 daje jedan način za računanje rešenja određenog kvadratnog sistema linearnih jednačina ističemo još jedan način za računanje rešenja kvadratnih sistema sa regularnom matricom sistema koji daje poznata Kramerova teorema. Označimo sa A_j kvadratnu matricu reda n koju dobijamo od matrice sistema A kod koje smo izbacili j-tu kolonu i na njeno mesto smestili kolonu slobodnih koeficijenata:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} \ \ldots \ a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} \ \ldots \ a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} \ \ldots \ a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je determinanta matrice A_j, razvijena po elementima j-te kolone i njihovim kofaktorima, jednaka $|A_j| = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}$.

Kramerova teorema *Ako je determinanta kvadratnog sistema S_n različita od nule, onda sistem ima jedinstveno rešenje* $(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}...., \frac{|A_n|}{|A|})$, *tj.*

$$|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} ... \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

Dokaz. Na osnovu Posledice 1 znamo da je sistem ekvivalentan sa sitemom $X = A^{-1} \cdot B$, odakle se neposredno dobija

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} A^* B = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & ... & A_{n1} \\ & .... & \\ & ...... & \\ A_{1n} ... & & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1} \\ ... \\ \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kn} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_1| \\ . \\ . \\ |A_n| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ . \\ . \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{bmatrix},$$

pri čemu je korišten razvoj determinante matrice A_j po j-toj koloni (koloni slobodnih koeficijenata). □

Homogeni sistemi linearnih jednačina

Direktnom proverom zaključujemo da je nula vektor kolone $X = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$ jedno rešenje homogenog kvadratnog sistema $S_n : \quad A \cdot X = O$. Ovo rešenje $(x_1, x_2...x_n) = (0, 0...0)$ nazivamo **trivijalnim** rešenjem i to je jedino rešenje za $|A| \neq 0$. Međutim, ukoliko postoje, mnogo su interesantnija netrivijalna rešenja homogenog sistema. Sledeće tvrđenje nam daje potreban i dovoljan uslov za postojanje netrivijalnih rešenja.

Homogeni kvadratni sistem linearnih jednačina ima netrivijalna rešenja ako je determinanta sistema S_n jednaka nuli ($|A| = 0$).

Dokaz. Kako su svi slobodni koeficijenti jednaki nuli to je uvek zadovoljen potreban i dovoljan uslov $r(A) = r(\overline{A})$ Kroneker-Kapelijeve teoreme da je sistem moguć. Da bismo izbegli da sistem ima samo trivijalno rešenje, na osnovu Posledice 1, zaključujemo da matrica sistema mora biti singularna tj. $|A| = 0$. □

Uopštimo prethodnu teoremu i na pravougaone sisteme linearnih jednačina u skladu sa Posledicom 2, Kroneker-Kapelijeve teoreme.

Pravougaoni homogeni sistem linearnih jednačina ima netrivijalna rešenja ako je $r(A) < n$.

Dakle, kod kvadratnih homogenih sistema dovoljno je izračunati da je determinanta sistema $|A| = 0$ da bismo utvrdili da je rang matrice homogenog sistema manji od broja nepoznatih, a samim tim homogeni sistem ima bezbroj rešenja.

7.2 Gausov metod eliminacije

Gausov metod eliminacije je opšti postupak ili za nalaženje rešenja (ako ono postoji) ili za utvrđivanje da je sistem linearnih jednačina kontradiktoran. Može se primenjivati i na pravougaone i na kvadratne sisteme linearnih jednačina. Osnovna ideja postupka je da se sistem elementarnim transformacijama svede na što jednostavniji oblik iz kog se može ili lako izračunati rešenje ili zaključiti da ga nema.

U odnosu na rešavanje kvadratnih sistema Kramerovom teoremom, ili nalaženjem inverzne matrice (Posledica 1), Gausov metod eliminacije ima prednost u manjem potrebnom broju osnovnih matematičkih operacija sabiranja i oduzimanja.

Elementarne transformacije *matrice* $A_{m\times n}$ *su:*

a) *razmena* i*-te i* j*-te vrste (kolone) matrice;*

b) *množenje svih elemenata* i*-te vrste (kolone) brojem* $\alpha \neq 0$*;*

c) *množenje elemenata* i*-te vrste (kolone) brojem* α *i dodavanjem tih umnožaka* j*-toj vrsti (koloni).*

Elementarne matrice *su one matrice koje dobijamo nakon primene jedne elementarne transformacije na jediničnu matricu.*

Tako su matrice

$$I_{(32)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{1(5)} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad I_{1(5),2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elementarne, pri čemu su od jedinične matrice trćeg reda matrice $I_{(32)}$, $I_{1(5)}$ i $I_{1(5),2}$ redom dobijene: zamenom druge i treće vrste, množenjem prve vrste sa 5 i dodavanjem drugoj vrsti prve vrste pomnožene sa 5.

Rang matrice je invarijantan (nepromenjiv) u odnosu na elementarne transformacije. Preciznije:

Neka je matrica B *dobijena primenom elementarnih transformacija na matricu* A*. Tada je rang matrice* B *jednak rangu matrice* A*.*

Dokaz. Na osnovu stava □ prethodnog poglavlja zaključujemo da su determinanta matrice A i determinanta B ili obe različite od nule ili obe jednake nuli. Takođe, do istog zaključka dolazimo ako posmatramo bilo koju determinantu podmatrice A_k reda k matrice A i njoj odgovarajuću determinantu podmatrice B_k reda k matrice B. Kako rang matrice zavisi isključivo od toga da li su determinante njenih kvadratnih podmatrica jednake ili različite od nule, sledi da su rangovi matrica B i A jednaki. □

Prethodno tvrđenje zajedno sa Kroneker-Kapelijevom teoremom omogućava nam da na proširenu matricu sistema linearnih jednačina primenjujemo elementarne transformacije (dovoljno je da ih primenjujemo samo na vrstama).

Algoritam Gausove metode eliminacije

Rešavanje opšteg pravougaonog sistema linearnih jednačina Gausovim metodom eliminacije vršimo primenom elementarnih transformacija na vrste proširene matrice sistema $S_{mn}: \ A \cdot X = B$. U prvom koraku postižemo da prva kolona transformisane proširene matrice sistema bude $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$. To postižemo tako što nađemo vrstu u kojoj je prvi element (e) različit od nule i zamenimo tu vrstu sa prvom (ako već nije prva). Zatim podelimo prvu vrstu sa e da bismo na poziciji $_{11}$ dobili 1. Na preostalim pozicijama prve kolone pravimo 0 (ako već nisu nule) primenom elementarnih transformacija tipa **c)**. Na sličan način elementarnim transformacijama tipa **a)** i **b)**, na poziciji $_{22}$ pravimo jedinicu, a zatim anuliramo elemente u drugoj koloni ispod pozicije $_{22}$ .... Nastavljajući ovaj postupak na ostalim kolonama doći ćemo ili do matrice oblika $\overline{C}$ ili do matrice oblika $\overline{B}$ iz sledeće teoreme.

Elementarnim transformacijama možemo proširenu matricu sistema $\overline{A}$ svesti: ili na matricu $\overline{B}$ ukoliko je sistem moguć ili na matricu $\overline{C}$ ukoliko je sistem nemoguć. Gde su

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & .... & b_{1n} & q_1 \\ 0 & b_{22} & .... & b_{2n} & q_2 \\ & & .... & & \\ 0 & 0 & ...\ b_{rr}... & b_{rn} & q_r \\ 0 & 0 & ...0... & 0 & 0 \\ & & .... & & \\ 0 & 0 & ...0... & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & .... & c_{1n} & w_1 \\ 0 & c_{22} & .... & c_{2n} & w_2 \\ & & .... & & \\ 0 & 0 & ...c_{rr}... & c_{rn} & w_r \\ 0 & 0 & ...0.... & 0 & w_{r+1} \\ & & .... & & \\ 0 & 0 & ...0... & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je koeficijent w_{r+1} različit od 0 i $b_{ii} = c_{ii} = 1$[28], za $i = 1...r$.

U prvom slučaju imamo dve bitno različita podslučaja:

a) $r = n$, tada je rešenje sistema jedinstveno,

b) $r < n$, tada ima više rešenja, pri čemu je broj stepeni slobode $n - r$.

Nalaženje jedinstvenog rešenja u slučaju a)

Ako je od polazne proširene matrice sistema metodom eliminacije dobijena matrica $\overline{B}$ u slučaju **a)**, to znači da je polaznom sistemu linearnih jednačina pridružen sledeći ekvivalentan sistem:

$$\begin{array}{rl} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ ... \ + b_{1n}x_n & = q_1 \\ x_2 \ \ + b_{23}x_3 + \ ... \ + b_{2n}x_n & = q_2 \\ .... & \\ x_{n-1} + b_{n-1n}x_n & = q_{n-1} \\ x_n & = q_n \end{array}.$$

Rešavanjem ovog sistema od poslednje jednačine prema prvoj dobijamo:

$$x_n = q_n, \quad x_{n-1} = q_{n-1} - b_{n-1n}q_n, \ ... \quad x_1 = g_1 - \sum_{k=2}^{n} b_{1k}x_k \ ,$$

pri čemu su u poslednjoj jednačini zamenjene fiksne vrednosti promenljivih $x_n, x_{n-1}..., x_2$, koje su izračunate iz predhodnih $n - 1$ jednačina.

[28] Ne mora se zahtevati da svi elementi b_{ii} i c_{ii} na dijagonali budu 1, dovoljno je zahtevati da su različiti od nule. Za onoliko za koliko se povećava broj množenja da bismo dobili jedinice, se smanjuje broj množenja potrebnih da dobijemo rešenje(a) iz matrice $\overline{B}$. Jedino ako nas postupak dovede do slučaja $\overline{C}$, uzaludno smo trošili dodatno vreme za pravljenje jedinica na dijagonali.

Na primer:

$$\begin{array}{r} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=5 \\ x_2-5x_3+7x_4=2 \\ x_3-x_4=0 \\ x_4=2 \end{array} \quad \text{rešavamo} \quad \left\uparrow \begin{array}{l} x_1=5-2\cdot(-2)+3\cdot 2-4\cdot 2=7 \\ x_2=2+5\cdot 2-7\cdot 2=-2 \\ x_3=0+2=2 \\ x_4=2 \end{array} \right. ,$$

sledi da je jedinstveno rešenje sistema $(7,-2,2,2)$.

Nalaženje opšteg rešenja u slučaju b)

U slučaju **b)** je matrici $\overline{B}$ pridružen sistem:

$$\begin{array}{rcl} x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+ & .... & +b_{1n}x_n=q_1 \\ x_2 \quad +b_{23}x_3+ & .... & +b_{2n}x_n=q_2 \\ & .... & \\ & & x_{rr}+...+b_{rn}x_n=q_r \end{array} .$$

Mada slobodnih $n-r$ promenljivih možemo na proizvoljan način da biramo između n promenljivih, ipak je najjednostavnije da za slobodne promenljive izaberemo: $x_{r+1}, x_{r+2}...x_n$. Slobodne promenljive "slobodno" uzimaju bilo koju realnu vrednost. Nakon prebacivanja slobodnih promenljivih na levu stranu jednačina sledi:

$$\begin{array}{rcl} x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+\ ...\ +b_{1r}x_r & = & q_1\ -b_{1r+1}x_{r+1}-...-b_{1n}x_n \\ x_2\quad +b_{23}x_3+\ ...\ +b_{2r}x_r & = & q_2\ -b_{2r+1}x_{r+1}-...-b_{2n}x_n \\ .... & & \\ x_r & = & q_r\ -b_{rr+1}x_{r+1}-...-b_{rn}x_n \end{array} .$$

Ovaj oblik sistema linearnih jednačina se razlikuje od slučaju **a)** jedino po tome što na desnoj strani jednačina nisu fiksirani realni brojevi, već su u pitanju realne funkcije koje zavise od slobodnih promenljivih. Nalaženje rešenja, koja će biti u funkciji od slobodnih promenljivih, redom za promenljive $x_r, x_{r-1}...\ x_2, x_1$ dobijamo na sličan način kao što smo nalazili $x_n...x_1$ u slučaju **a)**.

Na primer:

$$\begin{array}{r} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=5 \\ x_2-5x_3+7x_4=2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} x_1+2x_2 & =5+3x_3-4x_4 \\ x_2 & =2+5x_3-7x_4 \end{array} ,$$

sledi da je $x_1=5+3x_3-4x_4-2(2+5x_3-7x_4)=1-7x_3+10x_4$. Opšte rešenje ovog sistema sa dva stepena slobode je:
$(1-7x_3+10x_4,\ 2+5x_3-7x_4,\ x_3,\ x_4)$.

Napomena: Primetimo da nula vrste u matricama $\overline{B}$ i $\overline{C}$ nisu obavezno prisutne. Broj vrsta u matricama $\overline{B}$ i $\overline{C}$ sa svim 0, predstavlja broj jednačina u polaznom sistemu linearnih jednačina koje su linearno zavisne od preostalih jednačina (svakoj vrsti odgovara jedna jednačina). Odnosno te jednačine se mogu izbaciti iz sistema bez uticaja na rešenje. Ukoliko nema linearno zavisnih jednačina u sistemu matrice $\overline{B}$ i $\overline{C}$ neće imati nijednu vrstu nula.

Primeri. Na sledeća tri primera ilustrovaćemo sve mogućnosti koje mogu da nastanu pri rešavanju sistema linearnih jednačina Gausovom metodom eliminacije:

$$S_{34}:\begin{cases} x_1+x_3=2\\ 2x_1+x_2+2x_3=5\\ 2x_2+6x_3+x_4=9\end{cases}\qquad S_{54}:\begin{cases} x_1+x_3=2\\ 2x_1+x_2+2x_3=5\\ 2x_2+6x_3+x_4=9\\ 3x_1+3x_3+x_4=7\\ x_1+x_3+x_4=3\end{cases}$$

$$S_{44}:\begin{cases} x_1+x_3=2\\ 2x_1+x_2+2x_3=5\\ 2x_2+6x_3+x_4=9\\ 6x_3+x_4=9\end{cases}$$

Odgovarajuće proširene matrice ovih sistema su:

$$\overline{A_1}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 2\,1\,2\,0\,5\\ 0\,2\,6\,1\,9\end{bmatrix},\ \overline{A_2}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 2\,1\,2\,0\,5\\ 0\,2\,6\,1\,9\\ 3\,0\,3\,1\,7\\ 1\,0\,1\,1\,3\end{bmatrix},\ \overline{A_3}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 2\,1\,2\,0\,5\\ 0\,2\,6\,1\,9\\ 0\,0\,6\,1\,9\end{bmatrix}.$$

Kako su prve tri jednačine jednake u sva tri sistema, Gausov metod eliminacije ćemo paralelno primenjivatina na sve tri proširene matrice sistema. Elementarne transformacije koje primenjujemo su: prvu vrstu množimo sa -2 i dodajemo drugoj, prvu vrstu množimo sa -3 i dodajemo četvrtoj i prvu vrstu množimo sa -1 i dodajemo petoj vrsti (samo kod $\overline{A_2}$). Rezultat ovih transformacija su matrice:

$$\overline{A_1'}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,2\,6\,1\,9\end{bmatrix},\ \overline{A_2'}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,2\,6\,1\,9\\ 0\,0\,0\,1\,1\\ 0\,0\,0\,1\,1\end{bmatrix},\ \overline{A_3'}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,2\,6\,1\,9\\ 0\,0\,6\,1\,9\end{bmatrix}.$$

Na ovaj način su prve kolone svedene na željeni oblik. Nastavljamo sa primenom elementarnih transformacija da bismo druga kolona imala jedinicu na poziciji $_{22}$ i nule ispod te pozicije, za šta je u našim primerima dovoljno drugu vrstu pomnožiti sa -2 i dodati trećoj:

$$\overline{A_1''}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,0\,6\,1\,7\end{bmatrix},\ \overline{A_2''}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,0\,6\,1\,7\\ 0\,0\,0\,1\,1\\ 0\,0\,0\,1\,1\end{bmatrix},\ \overline{A_3''}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,0\,6\,1\,7\\ 0\,0\,6\,1\,9\end{bmatrix}.$$

Zatim treću vrstu delimo sa 6 i u $\overline{A_2''}$ četvrtu vrstu množimo sa -1 i dodajemo petoj, a dodatno u $\overline{A_3''}$ treću vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo četvrtoj:

$$\overline{A_1'''}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,0\,1\,\frac{1}{6}\,\frac{7}{6}\end{bmatrix},\ \overline{A_2'''}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,0\,1\,\frac{1}{6}\,\frac{7}{6}\\ 0\,0\,0\,1\,1\\ 0\,0\,0\,0\,0\end{bmatrix},\ \overline{A_3'''}=\begin{bmatrix}1\,0\,1\,0\,2\\ 0\,1\,0\,0\,1\\ 0\,0\,1\,\frac{1}{6}\,\frac{7}{6}\\ 0\,0\,0\,0\,2\end{bmatrix}.$$

Ovo su završni oblici transformisanih polaznih proširenih matrica sistema. Analizirajmo ih.

$\overline{A_1'''}$ ima oblik matrice $\overline{B}$ iz teoreme 14, pri čemu je to slučaj **b)** kad je $r < n$. Preciznije, broj nepoznatih je $n = 4$, a broj nezavisnih nejednačina je $r = 3$ (sve su bile nezavisne). Znači imamo jedan stepen slobode i možemo jednu promenljivu ostaviti slobodnu. Neka to bude x_4. Matrica $\overline{A_1'''}$ nam kaže da se polazni sistem sveo na oblik

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 &= \tfrac{7}{6} \end{aligned} .$$

Sledi da je opšte rešenje sistema $(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}x_4,\ 1,\ \frac{7}{6} - \frac{1}{6}x_4,\ x_4)$ pri čemu je x_4 proizvoljan realan broj.

Na osnovu $\overline{A_2'''}$ vidimo da je peta jednačina bila linearno zavisna od preostale 4 linearne jednačine. Oblik matrice $\overline{A_2'''}$ je slučaj **a)** prethodnog stava kada je $r = n = 4$ i imamo jedinstveno rešenje. Osim iste tri jednačine koje imamo pridružene i kod matrice $\overline{A_1'''}$ ovde dodatno imamo i jednačinu koja odgovara četvrtoj vrsti $x_4 = 1$. Tako u odnosu na opšte rešenje iz predhodnog sistema ovde imamo jedinstveno rešenje $(1, 1, 1, 1)$ koje dobijamo direktnom zamenom $x_4 = 1$ u predhodno opšte rešenje.

Poslednja vrsta matrice $\overline{A_3'''}$ daje netačnu jednakost 0=2, pa je polazni sistem S_{44} kontradiktoran. Matrica $\overline{A_3'''}$ je oblika matrice $\overline{C}$ prethodnog stava za $n = 4$, $r = 3$.

7.3 Zadaci

7.1. Kramerovom metodom rešiti sistem $A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, gde je A matrica iz 2. zadatka prethodne glave.

7.2. Date su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte vrednost determinante matrice A na osnovu razvoja po 1. vrsti i na osnovu razvoja po 2. koloni. Ukoliko postoje inverzne matrice A^{-1} i B^{-1} nađite ih. Odredite rang matrice C.

7.3. Rešite sistem $S_{3,4}$ linearnih jednačina: $C \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, Gausovim metodom eliminacije. Matrica C je matrica iz prethodnog zadatka.

7.4. Rešite matričnu jednačinu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.5. Diskutovati u zavisnosti od realnog parametra p, kada je sledeći sistem linearnih jednačina konatradiktoran, određen ili neodređen:

$$\begin{bmatrix} p & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & p-1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}.$$

7.4 Teorijska pitanja

7.6. Sistem linearnih jednačina je moguć akko ima bar jedno rešenje.	$\top$
7.7. Ekvivalentni sistemi linearnih jednačina imaju isti skup rešenja.	$\top$
7.8. Dve linearne jednačine su linearno zavisne ako jednu možemo da dobijemo od druge množenjem brojem.	$\top$
7.9. Svaki linearni sistem sa 6 jednačina i 5 nepoznatih je ili određen ili neodređen ili protivurečan.	$\top$
7.10. Sistem linearnih jednačina je kontradiktoran akko nema rešenja.	$\top$
7.11. Postoji SLJ sa 3 jednačine i 5 nepoznatih koji je određen.	$\perp$
7.12. Sistem linearnih jednačina je saglasan akko ima više rešenja.	$\perp$
7.13. Svaki sistem linearnih jednačina sa 7 jednačina i 8 nepoznatih je određen.	$\perp$
7.14. Svaki sistem linearnih jednačina sa 3 jednačine i 5 nepoznatih nije određen.	$\top$
7.15. Protivurečan, nesaglasan, kontradiktoran i nemoguć SLJ su ekvivalentni pojmovi koji označavaju SLJ bez rešenja.	$\top$
7.16. Svaki sistem linearnih jednačina sa 4 jednačine i 7 nepoznatih je ili neodređen ili kontradiktoran.	$\top$
7.17. Svaki sistem sa manje jednačina od broja nepoznatih je ili neodređen ili protivurečan.	$\top$
7.18. Sistem linearnih jednačina je neodređen akko nema rešenja.	$\perp$
7.19. Sistem linearnih jednačina je moguć akko ima jedno ili više rešenja.	$\top$
7.20. Nemoguć sistem nema rešenje.	$\top$
7.21. Neodređen sistem nema rešenje.	$\perp$
7.22. Sistem linearnih jednačina je saglasan akko ima ili jedno ili više rešenja.	$\top$
7.23. Sistem linearnih jednačina $\begin{aligned} 2x+2y-4u-4v&=2 \\ -3x-3y+6u+6v&=3 \end{aligned}$ je nemoguć.	$\top$
7.24. SLJ $\begin{aligned} x+y-2u-2v&=1 \\ 2x+2y-4u-4v&=2 \\ 2x+2y-2u-2v&=2 \\ x+y-2u-2v&=2 \end{aligned}$ je neodređen sistem linearnih jednačina.	$\perp$
7.25. SLJ $\begin{aligned} x+2y-3u-4v&=5 \\ -x-2y+3u+4v&=5 \end{aligned}$ je nemoguć sistem linearnih jednačina.	$\top$

7.26. SLJ $\begin{aligned} 2x+2y-4u-4v&=0\\ 2x+2y-2u-2v&=2\\ x+\ y-2u-2v&=2\\ 4x+4y-4u-4v&=2 \end{aligned}$ je kontradiktoran sistem linearnih jednačina.	$\top$
7.27. Sistem linearnih jednačina $\begin{aligned} 2x+2y-4u-4v&=2\\ -3x-3y+6u+6v&=-3 \end{aligned}$ je protivurečan.	$\perp$
7.28. $\begin{aligned} x+\ y-2u-2v&=1\\ 2x+2y-4u-4v&=1 \end{aligned}$ je kontradiktoran sistem linearnih jednačina.	$\top$
7.29. Svaki nehomogen sistem sa 7 linearnih jednačina i 8 nepoznatih je uvek neodređen.	$\perp$
7.30. Ako je matrica sistema A tipa $m\times n$ onda je proširena matrica $\overline{A}$ tipa $m\times(n+1)$	$\top$
7.31. Svaki kvadratni SLJ ima jedinstveno rešenje ako je determinanta matrice sistema jednaka 0.	$\perp$
7.32. Ako je matrica sistema A tipa $m\times n$ onda je proširena matrica $\overline{A}$ tipa $(m+1)\times n$.	$\perp$
7.33. Matrica B sistema linearnih jednačina $A\cdot X=B$ sadrži slobodne koeficijente.	$\top$
7.34. Proširena matrica sistema sadrži jednu vrstu više nego matrica sistema.	$\perp$
7.35. Matrica A sistema linearnih jednačina $A\cdot X=B$ sadrži slobodne koeficijente.	$\perp$
7.36. Matrica sistema sadrži jednu vrstu više nego proširena matrica sistema.	$\perp$
7.37. Sistem S_{25} : $\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,2\,1\\ 2\,4\,6\,4\,2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u\ v\ b\ y\ z \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 2\\ 0 \end{bmatrix}$ nema rešenje.	$\top$
7.38. SLJ $\begin{bmatrix} 1\,0\,1\\ 0\,1\,0\\ 1\,0\,1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{bmatrix}$ je neodređen.	$\perp$
7.39. Sledeći sistem linearnih jednačina S_{25} je protivurečan. $\begin{bmatrix} 3\,6\,9\,6\,3\\ 2\,4\,6\,4\,2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u & v & x & y & z \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 2\\ 3 \end{bmatrix}$	$\top$
7.40. Kvadratni sistem linearnih jednačina je određen akko je determinanta sistema različita od nule.	$\top$
7.41. Kvadratni sistem linearnih jednačina je ili neodređen ili kontradiktoran akko je determinanta sistema jednaka nuli.	$\top$
7.42. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix} 1\\ 1 \end{bmatrix}$, gde je $X^T=\begin{bmatrix} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \end{bmatrix}$ je kontradiktoran SLJ.	$\top$
7.43. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix} 1\\ 1 \end{bmatrix}$, gde je $X^T=\begin{bmatrix} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \end{bmatrix}$ je sistem linearnih jednačina koji nema rešenje.	$\top$
7.44. SLJ $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 6 & -3 & -9 \end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix} 2\\ -6 \end{bmatrix}$, gde je $X^T=\begin{bmatrix} u\ v\ s\ t \end{bmatrix}$ je kontradiktoran.	$\perp$
7.45. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix} 1\\ 4 \end{bmatrix}$, gde je $X^T=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ je protivurečan sistem linearnih jednačina.	$\perp$

7.46. Sledeći sistem linearnih jednačina je nemoguć.	$\begin{bmatrix} 3\,6\,9\,6\,3 \\ 2\,4\,6\,4\,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v & x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$	$\top$
7.47. Sledeći sistem linearnih jednačina S_{25} je neodređen.	$\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,2\,1 \\ 2\,4\,6\,4\,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v & x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\perp$
7.48. Sledeći sistem linearnih jednačina S_{25} ima bezbroj rešenja.	$\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,2\,1 \\ 2\,4\,6\,4\,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v & x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\top$
7.49. Sledeći sistem linearnih jednačina S_{35} ima bezbroj rešenja.	$\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,2\,1 \\ 2\,4\,6\,4\,2 \\ 2\,4\,6\,4\,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v & x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\perp$

7.50. SLJ $\begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 0\,2\,0\,0 \\ 0\,0\,5\,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je određen SLJ. $\perp$

7.51. SLJ $\begin{bmatrix} 1\,1\,1 \\ 0\,2\,0 \\ 0\,5\,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je određen sistem linearnih jednačina. $\perp$

7.52. Svaki homogen sistem sa 3 jednačine i 4 nepoznate je neodređen. $\top$

7.53. Postoji homogen sistem sa 3 jednačine i 5 nepoznatih koji ima samo trivijalno rešenje. $\perp$

7.54. Homogen sistem sa manje jednačina od broja nepoznatih je uvek neodređen. $\top$

7.55. Svaki homogen SLJ sa 3 jednačine 4 nepoznate ima i netrivijalna rešenja. $\top$

7.56. Homogen sistem sa 5 jednačina i 2 nepoznate je kontradiktoran. $\perp$

7.57. Homogen sistem linearnih jednačina je uvek saglasan. $\top$

7.58. Homogen sistem linearnih jednačina je uvek moguć. $\top$

7.59. Svaki homogen sistem linearnih jednačina koji ima netrivijalno rešenje je neodređen. $\top$

7.60. Trivijalno rešenje homogenog sistema sa n nepoznatih $x_1, x_2..., x_n$ je $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. $\top$

7.61. Svaki homogen sistem sa 4 jednačine i 4 nepoznate je određen. $\perp$

7.62. Bilo koji homogen sistem linearnih jednačina ne može biti protivurečan. $\top$

7.63. $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ ne može biti rešenje ni jednog nehomenog sistema linearnih jednačina sa n nepoznatih $x_1, x_2..., x_n$. $\top$

7.64. Kvadratni sistem linearnih jednačina $A \cdot X = O$, ima samo trivijalno rešenje, ako je A regularna matrica sistema, a O nula kolona matrica. $\top$

7.65. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x\ y\ z\ w \end{bmatrix}$ je homogen neodređen sistem. $\top$

7.66. SLJ $\begin{bmatrix} 1\,6\,7 \\ 0\,2\,0 \\ 0\,0\,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je homogen neodređen. $\perp$

7.67. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x\ y\ z\ w \end{bmatrix}$ je homogen određen sistem.	$\perp$
7.68. Ako je matrica kvadratnog homogenog sistema regularna onda SLJ ima samo trivijalno rešenje.	$\top$
7.69. Ako je matrica kvadratnog homogenog sistema regularna sistem nema netrivijalno rešenje.	$\top$
7.70. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x\ y\ z\ w \end{bmatrix}$ je homogen sistem koji ima netrivijalna rešenja.	$\top$
7.71. SLJ S_{33} $\begin{bmatrix} 15 & 11 & 13 \\ 30 & 32 & 34 \\ 45 & 33 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je homogen određen sistem.	$\perp$
7.72. Sledeći sistem linearnih jednačina je kvadratni homogen bez netrivijalnih rešenja. $\begin{bmatrix} 15 & 11 & 13 \\ 30 & 22 & 26 \\ 45 & 30 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\perp$
7.73. Sledeći sistem linearnih jednačina je kvadratni homogen koji ima i netrivijala rešenja. $\begin{bmatrix} 15 & 11 & 13 \\ 30 & 22 & 24 \\ 45 & 30 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\perp$
7.74. SLJ S_{34} $\begin{bmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 \\ 30 & 32 & 34 & 36 \\ 45 & 48 & 51 & 54 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je homogen određen.	$\perp$
7.75. Ako sistem linearnih jednačina ima više jednačina nego nepoznatih možemo ga rešavati Gausovim metodom eliminacije.	$\top$
7.76. Ako SLJ ima manje jednačina nego nepoznatih možemo ga rešavati Gausovim metodom eliminacije.	$\top$
7.77. Kvadratne SLJ ne možemo rešavati Gausovim metodom eliminacije.	$\perp$
7.78. Gausov metod eliminacije je opšti metod za rešavanje sistema linearnih jednačina.	$\top$
7.79. Elementarne transformacije nad jednačinama nekog SLJ ne menjaju skup rešenja tog SLJ.	$\top$
7.80. Ako bilo koju jednačinu bilo kog SLJ pomnožimo nulom skup rešenja tog SLJ se neće promeniti.	$\perp$
7.81. Ako linearno zavisnu jednačinu nekog SLJ pomnožimo nulom skup rešenja tog SLJ se neće promeniti.	$\top$
7.82. Ako jednačinu SLJ podelimo brojem različitim od 0 skup rešenja tog SLJ se neće promeniti.	$\top$
7.83. Gausov metod eliminacije opšti SLJ elementarnim transformacijama nad jednačinama svodi na "trougaoni" SLJ u kom se lakše izračunava(ju) rešenje(a) ukoliko postoji(e).	$\top$

7.84. Sistem linearnih jednačina je kontradiktoran ako se elementarnim transformacijama nad jednačinama (Gausov metod) neka njegova jednačina svodi na netačnu jednakost $0 = k$, pri čemu je k broj različit od 0. $\top$

7.85. Kvadratni SLJ je kontradiktoran ako se Gausovim metodom eliminacije neka njegova jednačina svodi na tačnu jednakost $0 = 0$. $\perp$

7.86. Svaki kvadratni SLJ kom se Gausovim metodom eliminacije neka njegova jednačina svede na tačnu jednakost $0 = 0$ je neodređen. $\perp$

7.87. Ako se Gausovim metodom eliminacije neka jednačina kvadratnog SLJ svede na tačnu jednakost $0 = 0$ tada svaki takav SLJ nije određen. $\top$

7.88. Ako se Gausovim metodom eliminacije neka jednačina SLJ svede na tačnu jednakost $0 = 0$ to znači da je ta jednačina bila linearno zavisna od preostalih jednačina SLJ. $\top$

7.89. Stepene slobode imaju samo određeni sistemi linearnih jednačina. $\perp$

7.90. Broj stepeni slobode neodređenog SLJ sa međusobno nezavisnim jednačinama jednak je razlici broja nepoznatih i broja jednačina. $\top$

7.91. SLJ $\begin{array}{r} x+y-u-v=1 \\ -x-y+u+v=1 \end{array}$ ima 2 stepena slobode. $\perp$

7.92. SLJ $\begin{array}{r} x+y-u-v=1 \\ -x-y+u+v=-1 \end{array}$ ima 2 stepena slobode. $\perp$

7.93. SLJ $\begin{array}{r} x+y-u-v=1 \\ -x-y+u+v=-1 \end{array}$ ima 3 stepena slobode. $\top$

7.94. SLJ $\begin{array}{r} x+y-2u-2v=1 \\ 2y-4u-4v=1 \end{array}$ ima 2 stepena slobode. $\top$

7.95. SLJ $\begin{array}{r} x+y-2u-2v=0 \\ 2y-4u-4v=0 \\ 4u-4v=0 \end{array}$ ima 3 stepena slobode. $\perp$

7.96. Ako se pri Gausovom metodu eliminacije pojavi vrsta koja ima sve nule, sem u poslednjoj koloni, to znači da je polazni sistem određen. $\perp$

7.97. Ako se pri Gausovom metodu eliminacije pojavi vrsta sa svim nulama sem u poslednjoj koloni polazni sistem je kontradiktoran. $\top$

7.98. Ako je matrica sistema linearnih jednačina $A_{5\times 7}$ sistem se može rešavati Gausovim metodom eliminacije. $\top$

7.99. Ako se pri Gausovom metodu eliminacije kvadratnog sistema pojavi vrsta nula to znači da polazni sistem nije određen. $\top$

7.100. Ako se pri rešavanju kvadratnog sistema Gausovim metodom eliminacije pojavi vrsta nula to znači da je sistem ili neodređen ili kontradiktoran. $\top$

7.101. Sistem linearnih jednačina je nemoguć ako se elementarnim transformacijama nad vrstama (Gausov metod) neka njegova jednačina svodi na netačnu jednakost $0 = k$, pri čemu je k broj različit od 0. $\top$

7.102. Ako se pri Gausovom metodu eliminacije pojavi vrsta koja ima sve nule, sem u poslednjoj koloni, to znači da je polazni sistem nemoguć. $\top$

7.103. Ako se pri Gausovom metodu eliminacije pojavi vrsta koja ima sve nule, sem u poslednjoj koloni, to znači da je polazni sistem bez rešenja.	$\top$
7.104. Sistem linearnih jednačina je neodređen ako se elementrnim transformacijama nad vrstama (Gausov metod) neka njegova jednačina svodi na netačnu jednakost $0 = k$, pri čemu je k broj različit od 0.	$\perp$
7.105. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x \; y \; z \; w \end{bmatrix}$ je sistem koji rešavamo Gausovim metodom eliminacije.	$\top$
7.106. Gausovim metodom eliminacije dobili smo $\left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ to znači da je polazni sistem sa 3 jednačine i 4 nepoznate neodređen sa 3 stepena slobode.	$\perp$
7.107. Poslednja vrsta u proširenoj matrici prethodnog zadatka implicira da je treća jednačina u polaznom sistemu bila "suvišna", tj. posledica prve dve jednačine.	$\top$
7.108. SLJ $\begin{bmatrix} 1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,2\,0\,0\,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y & u & v & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je neodređen sistem linearnih jednačina sa 3 stepena slobode.	$\top$
7.109. SLJ $\begin{bmatrix} 1\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ je neodređen SLJ sa 1 stepenom slobode.	$\top$
7.110. SLJ $\begin{bmatrix} 1\,1\,1 \\ 0\,2\,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je neodređen sistem linearnih jednačina sa 2 stepena slobode.	$\perp$
7.111. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x \; y \; z \; w \end{bmatrix}$ je sistem koji rešavamo Gausovim metodom eliminacije.	$\top$
7.112. $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ sistem $A \cdot X = B$, od metoda koje smo radili, možemo rešavati Gausovim metodom eliminacije.	$\top$
7.113. Ako je sistem linearnih jednačina kvadratan uvek ga možemo rešavati pomoću inverzne matrice sistema.	$\perp$
7.114. Ako sistem linearnih jednačina ima veći broj jednačina od nepoznatih možemo ga rešavati Kramerovom teoremom.	$\perp$
7.115. Ako sistem linearnih jednačina ima manji broj jednačina od nepoznatih možemo ga rešavati pomoću inverzne matrice sistema.	$\perp$
7.116. Sistem: $\begin{array}{l} 2001x + 2002y = 2003 \\ 2002x + 2001y = 2004 \end{array}$ možemo rešiti Kramerovom teoremom.	$\top$
7.117. Sistem: $\begin{array}{l} 4002x + 2002y = 2003 \\ 2001x + 1001y = 2004 \end{array}$ možemo rešiti Kramerovom teoremom.	$\perp$
7.118. SLJ $\begin{array}{l} 2x + 2y = 2 \\ 4x + 4y = 4 \end{array}$ možemo rešiti pomoću inverzne matrice sistema.	$\perp$

7.119. Kvadratne sisteme linearnih jednačina sa regularnom matricom sistema možemo rešiti Kramerovom teoremom.	$\top$
7.120. Kramerovu teoremu možemo primeniti na rešavanje kvadratnih sistema linearnih jednačina u kojima je matrica sistema singularna.	$\perp$
7.121. Kramerovu teoremu ne možemo primeniti na rešavanje sistema linearnih jednačina u kojima je broj jednačina različit od broja nepoznatih.	$\top$
7.122. Sistem $x+2y=3,\quad 4x+5y=6$ možemo rešiti pomoću inverzne matrice sistema.	$\top$
7.123. Sistem $3x+4y=5$, $9x+12y=15$ možemo rešiti Kramerovom teoremom.	$\perp$
7.124. Sistem $-x+2y=3$, $4x-5y=6$ možemo rešiti Kramerovom teoremom.	$\top$
7.125. Ako sistem linearnih jednačina ima isti broj jednačina i nepoznatih **uvek** ga možemo rešavati Kramerovom teoremom.	$\perp$
7.126. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ možemo rešiti Kramerovom teoremom.	$\perp$
7.127. Prethodni SLJ $S_{4,4}$, rešavamo pomoću inverzne matrice sistema.	$\perp$
7.128. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x \; y \; z \end{bmatrix}$, je sistem koji rašavamo Kramerovom metodom.	$\perp$
7.129. Sistem $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je homogen sistem koji možemo rešiti Kramerovom teoremom.	$\top$
7.130. Ako sistem linearnih jednačina ima isti broj jednačina i nepoznatih **uvek** ga možemo rešiti pomoću inverzne matrice sistema.	$\perp$
7.131. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x \; y \; z \; w \end{bmatrix}$ je sistem koji rašavamo Kramerovom metodom.	$\perp$
7.132. SLJ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x \; y \; z \; w \end{bmatrix}$ je homogen sistem koji rešavamo Kramerovom metodom.	$\perp$
7.133. Sistem $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ gde je $X^T = \begin{bmatrix} x \; y \; z \; w \end{bmatrix}$ je SLJ koji se može rašavati pomoću inverzne matrice sistema.	$\perp$
7.134. Jednakost ranga matrice sistema i proširene matrice sistema potvrđuje postojanje rešenja SLJ.	$\top$
7.135. Sistem linearnih jednačina je određen akko je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema i jednak broju nepoznatih.	$\top$
7.136. Kroneker-Kapelijeva teorema daje potreban i dovoljan uslov za postojanje rešenja sistema linearnih jednačina.	$\top$

7.137. Sistem linearnih jednačina je neodređen akko je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema i jednak broju nepoznatih.	$\perp$
7.138. SLJ $A_{m\times n}\cdot X=B$ je neodređen ako je $r(A)=r(\overline{A})=n$.	$\perp$
7.139. Sistem linearnih jednačina $A_{m\times n}\cdot X=B$ ima više rešenja ako je $r(A)=r(\overline{A})<n$.	$\top$
7.140. Sistem linearnih jednačina je kontradiktoran akko je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema.	$\perp$
7.141. Sistem linearnih jednačina je kontradiktoran akko je rang matrice sistema različit od ranga proširene matrice sistema.	$\top$
7.142. SLJ je moguć akko je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema.	$\top$
7.143. Jednakost ranga matrice sistema i proširene matrice sistema potvrđuje postojanje rešenja.	$\top$
7.144. Sistem linearnih jednačina je saglasan akko je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema.	$\top$
7.145. Sistem linearnih jednačina $A_{m\times n}\cdot X=B$ ima jedinstveno rešenje ako je $r(A)=r(\overline{A})=n$.	$\top$
7.146. Sistem linearnih jednačina ima jedinstveno rešenje akko je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema.	$\perp$

Glava 8.

8 Linearno programiranje - LP

Posmatraćemo problem linearnog programiranja LP_{mn}, u **standardnom obliku**, od m linearnih jednačina sa n nepoznatih

$$LP_{mn}\left\{\begin{array}{c}\min(c_1x_1+c_2x_2\ +c_3x_3\ +....+\ c_nx_n)\\ a_{11}x_1\ +a_{12}x_2\ +a_{13}x_3\ +....\ +\ a_{1n}x_n\ =b_1\\ a_{21}x_1\ +a_{22}x_2\ +a_{23}x_3\ +....\ +\ a_{2n}x_n\ =b_2\\ ....\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+....\ +\quad a_{mn}x_n=b_m\\ x_1,\ x_2...,x_n\geq 0\end{array}\right.,$$

gde su elementi a_{ij} i b_i, $\quad i=1...m,\quad j=1...n$, zadate vrednosti iz skupa realnih brojeva $\mathcal{R}$. Elemente a_{ij} nazivamo koeficijentima sistema, a elementi b_i su slobodni koeficijenti. **Domen** (koristi se i termin **dopustivi skup**) $D,\quad D\subset\mathcal{R}^n$, sadrži one vektore $\mathbf{x}=(x_1,x_2...x_n)$ koji zadovoljavaju jednačine podsistema S_{mn} $(A\cdot\mathbf{x}^T=B)$ i takozvana **trivijalna ograničenja** $\quad x_j\geq 0,\quad j=1...n$. Zahtev koji se postavlja pri rešavanju L_{mn} problema je da se nađe ona vrednost $\mathbf{x}^{opt}$ iz dopustivog skupa D tako da linearna **funkcija cilja** $z=c_1x_1+c_2x_2+....\ c_nx_n$ ima u tački $\mathbf{x}^{opt}$ minimalnu vrednost z_{min} nad D:

$$\min_{\mathbf{x}\in D}z=c_1x_1^{opt}+c_2x_2^{opt}+....\ c_nx_n^{opt}=z_{min}.$$

Napomena: Potreban uslov da domen D linearnog problema bude neprazan je da je $m<n$, što ćemo u nastavku podrazumevati.

Problem linearnog programiranja LP_{mn} je u **simetričnom obliku**, ako umesto m linearnih jednačina posmatramo m linearnih nejednačina istog tipa, recimo:

$$LP_{mn}\left\{\begin{array}{c}\min(c_1x_1+c_2x_2\ +c_3x_3\ +....+\ c_nx_n)\\ \\ a_{11}x_1\ +a_{12}x_2\ +a_{13}x_3\ +....+\ a_{1n}x_n\ \leq b_1\\ a_{21}x_1\ +a_{22}x_2\ +a_{23}x_3\ +....+\ a_{2n}x_n\ \leq b_2\\ ....\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+....+\quad a_{mn}x_n\leq b_m\\ x_1,\ x_2...x_n\geq 0\end{array}\right..$$

Opšti problem linearnog programiranja ne mora biti ni u standardnom ni u simetričnom obliku.

Kako svakoj linearnoj nejednačini iz skupa ograničenja problema lineranog programiranja odgovara jedna hiperravan (poluprava za $n=1$, poluravan za $n=2$, poluprostor za $n=3...$), koja je konveksan skup tačaka, i kako je poznato da je presek konveksnih skupova konveksan skup, važi sledeća osobina.

Domen problema linearnog programiranja je konveksan skup tačaka.

8.1 Geometrijska metoda

Geometrijsku metodu ima smisla primenjivati ukoliko je broj promenljivih mali, ne veći od tri. Iako je domen primene ove metode vrlo sužen, navodimo je zbog njene pedagoške očiglednosti. Metod ćemo ilustrovati na primeru sa dve promenljive (sa jednom je trivijalan, a sa tri je teže metod grafički ilustrovati).

Posmatrajmo sledeći problem

$$\begin{array}{c} min(2x_1 + 2x_2) \\ 2x_1 - x_2 \geq -6 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

U prvom koraku ove metode grafički nalazimo oblast, *domen* funkcije cilja, u kojoj su zadovoljena sva ograničenja razmatranog problema. Teorijski se zna da domen mora biti konveksna oblast.

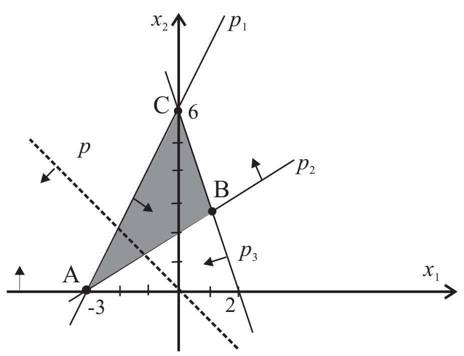
Nalaženje domena funkcije cilja

Svakom netrivijalnom ograničenju pridružićemo po jednu pravu, koju dobijamo kada umesto znaka nejednakosti stavimo jednakost. U našem primeru treba nacrtati prave $p_1 : 2x_1 - x_2 = -6$, $p_2 : -2x_1 + 3x_2 = 6$ i $p_3 : 3x_1 + x_2 = 6$. Dovoljno je da odredimo po dve tačke sa svake prave:

p_1	0	-3	p_2	0	-3	p_3	0	2
	6	0		2	0		6	0

Ove tri prave smo nacrtali na sl. 8. Svaka od njih deli ravan na dve poluravni. Koja od tih dve poluravni pridružene odgovarajućoj pravi p_1, p_2 i p_3 odgovara netrivijalnim ograničenjima $2x_1 - x_2 \geq -6$, $-2x_1 + 3x_2 \geq 6$ i $3x_1 + x_2 \leq 6$ nalazimo tako što:

1. uvrstimo bilo koju konkretnu tačku iz ravni, koja nije na pravoj, u odgovarajuću nejednačinu;
2. ako je dobijena nejednakost tačna, poluravan kojoj *pripada* izabrana tačka je tražena;
3. ako je dobijena nejednakost netačna, poluravan kojoj *ne pripada* izabrana tačka je tražena.



Slika 8. Domen i pravac optimizacije funkcije cilja

U razmatranom primeru nijedna od pravih p_1, p_2 i p_3 ne prolazi kroz koordinatni početak. Uzimamo zato tačku $(0, 0)$, i uvrstimo je u prve tri nejednačine. Dobijamo nejednakosti: $0 \geq -6$, $0 \geq 6$ i $0 \leq 6$. Prva i treća nejednakost su tačne, sledi da prvom i trećem ograničenju odgovaraju poluravni u odnosu na prave p_1 i p_3 koje sadrže koordinatni početak, dok drugom ograničenju odgovara poluravan u odnosu na p_2 koja ne sadrži koordinatni početak. Na slici 1. su sa strelicama naznačene poluravni koje odgovaraju ograničenjima. Trivijalnom ograničenju $x_2 \geq 0$, odgovara poluravan iznad ose x_1. Presek ove četiri poluravni je domen D razmatranog problema (oblast trougla ABC šrafirana na slici). Primetimo da trivijalno ograničenje nije doprineo smanjenju domena.

Prelazimo na drugi korak - određivanje minimalne vrednosti funkcije cilja $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$, na domenu $(x_1, x_2) \in D$. **Pravac** funkcije cilja nalazimo crtanjem prave koja je pridružena proizvoljnoj vrednosti c funkcije cilja. Na slici 8. je nacrtana prava $p:\ 2x_1 + 2x_2 = 0$ (za c je izabrana 0). (Ova prava ima presek sa D što znači da vrednost 0 funkcija cilja f dostiže na D.) **Smer opadanja** (odnosno smer rasta) funkcije cilja nalazimo:
1. izračunavanjem vrednosti funkcije cilja u bilo kojoj tački $T(t_1, t_2)$ ravni (van nacrtane prave na kojoj znamo da je vrednost funkcije cilja c);
2. ukoliko je $f(t_1, t_2) < c$, pravac normalan na pravac funkcije cilja u smeru poluravni kojoj pripada tačka T je smer opadanja funkcije cilja;
3. u suprotnom, za $f(t_1, t_2) > c$, radi se o smeru rasta funkcije cilja.

U razmatranom problemu za T, na primer, uzimamo tačku $C(0, 6)$. Vrednost funkcije cilja u tački C je $f(0, 6) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12 > 0$, sledi da paralelnim pomeranjem prave p u poluravni odredjenoj tačkom C funkcija cilja raste. Paralelnim pomeranjem u suprotnoj poluravni funkcija cilja opada. S obzirom da se traži minimum funkcije cilja, vršimo pomeranje prave p u pravcu opadanja, na slici 8. označenog strelicom, sve dok postoji presek prave sa domenom D. Tako se minimalna vrednost funkcije cilja dostiže u tački $A(-3, 0)$, $\min\limits_{(x_1,x_2)\in D} f(x_1, x_2) = f(A) = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 = -6$.

Nakon nalaženja domena D (koji znamo da je konveksan), nekog problema linearnog programiranja minimum (maksimum) linearne funkcije cilja možemo naći i na osnovu sledeće teoreme.

Linearna funkcija na ograničenom konveksnom skupu tačaka ekstremne vrednosti (minimum i maksimum) dostiže u ekstremnim tačkama konveksnog skupa.

Ekstremne tačke duži su njene krajnje tačke. Temena su ekstremne tačke poligona u ravni i poliedra u prostoru. Precizna algebarska definicija ekstremne tačke nekog skupa tačaka je:

Tačka $\mathbf{x}$ *je* **ekstremna tačka** *skupa* $S \subset \mathcal{R}^n$ *ako je* $\mathbf{x} \in S$ *i nije tačno da*

$$(\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S)(\exists \lambda \in (0,1))\ \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}.$$

8.2 Simpleks metoda

Simpleks metoda je najrašireniji način rešavanja problema linearnog programiranja. Podesna je za programiranje. Mada joj je računska složenost u najgorem slučaju eksponencijalna, u praksi je ova metoda vrlo primenljiva i brza.

Pretpostavka je da nema međusobno zavisnih netrivijalnih ograničenja, što znači da je rang matrice koeficijenata u ograničenjima jednak broju ograničenja m.

Osnovni koraci simpleks metode:

1: Svede se početni LP problem na standardni oblik, u kome se dodatno zahteva da svi slobodni koeficijenti budu nenegativni.

2: Uvedu se dopunske promenljive $x_{n+1}, x_{n+2}...x_{n+m}$ sa ciljem da se napravi m baz̆ičnih kolona, koje čine svi različiti jedinični vektori kolona. Napravi se početna simpleks tablica:

$$\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 1 & 0 & ... & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 & 1 & ... & 0 & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & . & . & ... & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & 0 & 0 & ... & 1 & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & ... & c_n & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{array}$$

Ukoliko su nakon koraka **1.** nekim promenljivima iz skupa $\{x_1, x_2...x_n\}$ vec bile pridružene bazične kolone ne uvodimo svih m dopunskih promenljivih, nego samo onoliko dopunskih promenljivih koliko nam je potrebno da dopunimo svih m bazičnih kolona (videti primer koji sledi). U tablici su koeficijenti uz promenljivu x_j zapisani u j-toj koloni. Poslednja kolona sadrži slobodne koeficijente u netrivijalnim ograničenjima, dok poslednja vrsta sadrži koeficijente u funkciji cilja z. Prvih m vrsta tablice odgovara netrivijalnim ograničenjima. Poslednji element u poslednjoj vrsti ima vrednost $-z(\mathbf{x}^{baz})$, gde je $\mathbf{x}^{baz}$ bazično rešenje pridruženo tablici.

Bazično rešenje se određuje direktno iz tablice:

– promenljivama kojima odgovaraju nebazične kolone dodeljujemo vrednost 0;

– promenljivama kojima odgovaraju bazične kolone dodeljujemo vrednost slobodnog koeficijenta iz vrste u kojoj je bazična jedinica.

Tako je bazično rešenje početne simpleks tablice $x_1 = ... = x_n = 0$, $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2 ...\ x_{n+m} = b_m$, odnosno
$\mathbf{x}^{baz} = (0...0, b_1, b_2...b_m)$.

3: **3.1.** Ako su svi elementi u poslednjoj vrsti simpleks tablice nenegativni optimalno $\mathbf{x}^{opt}$ rešenje polaznog LP problema je aktuelno bazično rešenje $\mathbf{x}^{opt} = \mathbf{x}^{baz}$ i minimalna vrednost funkcije cilja je $z_{min} = z(\mathbf{x}^{baz})$, što može da se direktno pročita kao suprotna vrednost od vrednosti u poslednjoj vrsti i poslednjoj koloni aktuelne simpleks tablice.

3.2. U suprotnom, postoji u poslednjoj vrsti simpleks tablice negativan element: Neka je to element $c_k < 0$. Tada u k-toj koloni biramo poziciju s tako da se postigne minimum
$min\{\frac{b_i}{a_{ik}}, a_{ik} > 0\} = \frac{b_s}{a_{sk}}$. Zatim elementarnim transformacijama na vrstama simpleks tablice pravimo novu simpleks tablicu u kojoj će k-ta kolona biti bazična. Jedinicu u k-toj koloni pravimo na poziciji preseka sa s-tom vrstom (pozicija sa indeksom $_{sk}$). Postupak nastavljamo korakom **3.**

Primer: Neka je dat LP problem koga ćemo transformisati u standardni oblik sa nenegativnim slobodnim koeficijentima:

$$\begin{array}{c} \max(-2x_1 + x_2) \\ -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{c} -\min(2x_1 - x_2) \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{c} -\min(2x_1 - x_2) \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Transformisanje polaznog problema u standardni oblik zahteva da umesto nejednačina imamo jednačine za netrivijalna ograničenja. To smo postigli uvođenjem novih, tzv. izravnavajućih promenljivih, x_3 i x_4, koje su nenegativne. Sa leve strane prvog netrivijalnog ograničenja smo dodali x_3 i oduzeli promenljivu x_4 u drugom ograničenju.

U opštem slučaju važi da je $\max f = -\min(-f)$. Sva trivijalna ograničenja su već bila prisutna u polaznom problemu pa smo prešli na standardni oblik.

Kako, već imamo 2 bazične kolone (treću i četvrtu) pridružene izravnjavajućim promenljivima x_3 i x_4 ne moramo uvoditi dopunske promenljive. Početno bazično rešenje je (0,0,1,3).

Polazna simpleks tablica i njene dve iteracije su:

$$\begin{array}{rrrr|r} -3 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

U prve dve simpleks tablice postoje negativni koeficijenti u poslednjoj vrsti, što znači da one nisu završne tablice i da ih moramo transformisati. U prvoj iteraciji smo od druge kolone napravili bazičnu. Poziciju jedinice (uokvireni element druge kolone) te nove bazične kolone smo odredili kao poziciju na kojoj imamo $\min\{\frac{b_1}{a_{21}}, \frac{b_2}{a_{22}}\} = \min\{1, 3\} = 1$. U drugoj iteraciji od prve kolone pravimo bazičnu. Bazično rešenje pridruženo drugoj simpleks tablici je (0,1,0,2). Vrednost funkcije cilja u toj tački je -1.

Treća simpleks tablica je i poslednja jer nema negativnih koeficijenata u poslednjoj vrsti. Bazično rešenje pridruženo trećoj simpleks tablici je (2,7,0,0), što je ujedno i optimalno rešenje. Vrednost funkcije cilja u toj tački je -3. Kako nama treba maksimum funkcije $-2x_1 + x_2$, a ne minimum funkcije $2x_1 - x_2$, optimalna (maksimalna na domenu) vrednost polaznog problema je 3 i postiže se u tački $(x_1, x_2) = (2, 7)$.

8.3 Zadaci

8.1. Nađite optimalno rešenje za problem linearnog programiranja:

$$\begin{array}{c} \max(x_1 - 5x_2) \\ 3x_1 - x_2 \leq -1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. geometrijskom metodom;

2. simpleks metodom.

8.2. Rešite: Tri osnovne komponente K_1, K_2, K_3 za smešu stočne hrane su prisutne na tržištu. U tabeli je data cena komponenti i procentualna zastupljenost satojaka A, B i C u pojedinim komponentama.

komponente	K_1	K_2	K_3
cena	100	110	150
A	10%	10%	20%
B	80%	70%	70%
C	10%	20%	10%

Odredite koliko treba da bude zastupljena pojedina komponenta u smesi stočne hrane tako da dobijemo najjeftiniju smesu kod koje je zadovoljeno da sadrži: 15% sastojka A, 70% sastojka B i 15% sastojka C.

8.3. Jedan traktor tipa A za jedan dan uzore 5 hektara kukuruzišta ili 7 hektara kupusišta. Jedan traktor tipa B za isto vreme uzore 6 hektara kukuruzišta i 10 hektara kupusišta. Preduzeće raspolaže sa 5 traktora tipa A i 3 traktora tipa tipa B. Da li je moguće za tri dana uzorati 100 hektara kukuruzišta i 150 hektara kupusišta? Pretpostavka je da traktori koji se prvog dana pošalju na jedan tip parcela rade na istom tipu parcela sva tri dana.

8.4. Rešite zadatak u okviru drugog primera iz uvoda ove glave.

8.4 Transportni problem - TP

Problem transporta roba je jedan od prvih problema linearnog programiranja koji je rešavan analitičkim metodama pedesetih godina prošlog veka, kada metode linearnog programiranja (LP) nisu bile razvijene. Kasnije je utvrđeno da je transportni problem (TP) specijalan slučaj problema LP.

Naći optimalan plan transporta proizvoda iz mesta proizvodnje ili skladišta do mesta prodaje, sa ciljem da taj način transporta ima minimalan transportni trošak je zadatak koji rešava **transportni problem**. Ograničenja koja su prisutna u transportnom problemu proističu iz raspoloživih transportnih sredstava i raspoložive saobraćajne mreže.

Sem ovakve, klasične formulacije transportnog problema, u iste okvire mogu da se uvrste i zadaci optimalnog razmeštaja mašina, postrojenja, pomoćnih službi, skladišta, servisa, energetskih objekata, itd., sa ciljem veće ekonomičnosti rada i vremena.

Uvodni primer TP

Neka izvozno preduzeće "Malina" ima tri sabirna centra malina A_1, A_2 i A_3 i dve udaljene hladnjače B_1 i B_2.

Početna TP tabela	Skladišta			kapac. hlad.
	A_1	A_2	A_3	
hladnjača B_1	9	7	16	7
hladnjača B_2	11	13	10	8
količ. robe	6	5	4	15

Cene transporta malina iz svakog sabirnog centra do svake hladnjače su date u sledećoj tabeli u gornjem desnom uglu odgovarajućeg polja. Kapaciteti hladnjača su dati u poslednjoj koloni, dok je količina malina u sabirno-otkupnim centrima data u poslednjoj vrsti tabele. (jedinica cene je 1000 dinara, a jedinica robe je tona)

Ukupni kapacitet hladnjača je 15 tona (7+8) i ukupna količina malina u sabirnim centrima je takođe 15 tona (6+5+4), što znači da je ”ponuda i tražnja” u ovom TP ujednačena. Tako će optimalan plan transporta, koji ima minimalne transportne troškove, biti takav da se:

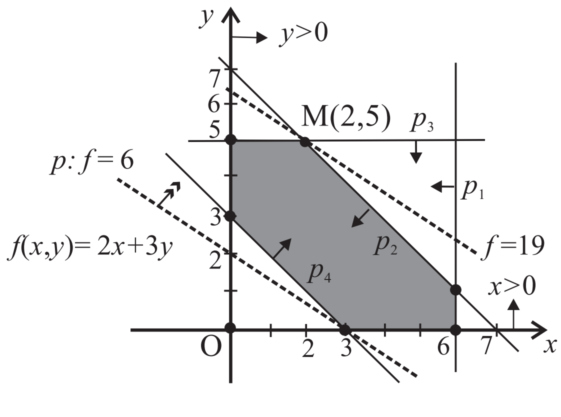
- sve maline iz otkupnih centara rasporede u neku hladnjaču;
- sve hladnjače su maksimalno snabdevene malinama.

Primer TP koji navodimo je toliko pojednostavljen da može da se reši na elementaran način. Ne moramo uvoditi 6 nepoznatih x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, gde x_{ij} predstavlja onu količinu malina koju transportujemo u B_j iz A_i. U složenijim slučajevima potrebno je definisati svih $m \cdot n$ nepoznatih (m je broj proizvođača, a n broj potrošača).

Dovoljne su nam samo dve promenljive x i y.

opšti plan	Skladišta			t
	A_1	A_2	A_3	
B_1	9 x	7 y	16 $7-x-y$	7
B_2	11 $6-x$	13 $5-y$	10 $x+y-3$	8
t	6	5	4	15

Neka iz A_1 u B_1 transportujemo x tona, a iz A_2 u B_1 y tona malina. Tada iz A_3 u B_1 moramo da transportujemo $(7-x-y)$ tona da bismo u hladnjači B_1 bilo 10 tona malina. Maline koje su preostale u sabirnim centrima A_1, A_2 i A_3 ćemo transportovati u B_2. A preostalo je redom: $6-x$, $5-x$ i $4-(7-x-y) = x+y-3$ tona malina. Ovaj opšti početni plan transporta je dat u sledećoj tabeli. Treba da odredimo x i y tako da on bude optimalan plan sa minimalnom cenom transporta.



Slika 9. Elementarno rešavanje TP

Transportna cena ovog plana trasporta malina je $C(x, y) = 9x + 7y + 16 \cdot (7 - x - y) + 11 \cdot (6 - x) + 13 \cdot (5 - y) + 10 \cdot (x + y - 3) = 213 - 4 \cdot (2x + 3y)$. Tako se minimum troškova $C(x, y)$ postiže ako maksimizujemo $(2x + 3y)$. Kako nijedna količina prevezene robe ne može biti negativna, ograničenja za promenljive x i y su:

$$\begin{array}{rr} x \geq 0 & 6 - x \geq 0 \\ y \geq 0 & 5 - y \geq 0 \\ 7 - x - y \geq 0 & x + y - 3 \geq 0 \end{array} .$$

Odnosno polazni TP problem sa 6 nepoznatih smo sveli na sledeći problem LP:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\max(2x + 3y)} \\ 0 \leq x \leq 6 & 0 \leq y \leq 5 \\ x + y \leq 7 & x + y \geq 3 \end{array} .$$

Rešimo ga 2D-geometrijskom metodom. (Samostalno problem rešite simpleks metodom!)

Domen je osenčeni poligon na slici 9. Pravac funkcije cilja je nacrtan isprekidanom linijom. Dvostruka strelica pokazuje smer rasta funkcije cilja. Maksimum se postiže u temenu M(2,5). Znači, za $x = 2$ i $y = 5$ postiže se maksimum funkcije cilja $2x + 3y$ i on iznosi 19, te su minimalni transportni troškovi $C(2, 5) = 213 - 4 \cdot 19 = 137$ hiljada dinara. Minimum transportnih troškova se ostvaruje po sledećem planu transporta:

od A_1 do B_1 2 t	od A_2 do B_1 5 t	od A_3 do B_1 0 t
od A_1 do B_2 4 t	od A_2 do B_4 0 t	od A_3 do B_2 4 t

Ovaj optimalan plan proizvodnje možemo kraće zapisati sa $(2, 5, 0, 4, 0, 4; 137)$.

Napomena. Uobičajeno je da se u tabelarnom prikazu TP proizvođači pišu levo, u prvoj koloni, a potrošači na vrhu tabele, u prvoj vrsti. Međutim, to pravilo nije strogo poštovano, što čitaoca ne treba da dovede u zabunu.

8.5 Klasična postavka TP

Neka imamo m skladišta (mesta proizvodnje) i n mesta potrošnje. Skladišta označimo sa $A_1, A_2...A_m$, a količine robe koju ona imaju uskladištena označimo sa $a_1, a_2...a_m$. Količine robe koje su potrebne potrošačima $B_1, B_2...B_n$, označimo sa $b_1, b_2...b_n$. Transportni problem je **zatvoren** ukoliko je ukupna ponuda jednaka ukupnoj potražnji, odnosno

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Neka su, imajući u vidu raspoloživa transportna sredstva i raspoloživu saobraćajnu mrežu, određene cene c_{ij} transporta jedinice (kg, m, m^3, t, l...) količine robe x_{ij} od mesta A_i do mesta B_j.

Zadatak optimizacije je da se odredi koja količina robe će biti transportovana od skladišta A_i do potrošača B_j, za svako i i j, tako da cena transporta bude minimalna tj. da se odrede one vrednosti x_{ij} za koje će trošak transporta

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} \cdot x_{ij},$$

biti minimalan, pri čemu će sva skladišta A_i biti ispražnjena:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2...m,$$

a svi potrošači B_j maksimalno snabdeveni:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2...n.$$

Trivijalna ograničenja nenegativnosti za svih $m \cdot n$ promenljivih su takođe prisutna

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, 2...m, \qquad j = 1, 2...n.$$

Ukupno imamo $m+n$ netrivijalnih ograničenja, međutim zbog zatvorenosti TP jednačine ograničenja nisu nezavisne, te je broj nezavisnih jednačina, odnosno rang matrice sistema $m + n - 1$.

Posle nalaženja početnog plana, dalji postupak u nalaženju optimalnog transporta, pošto je ovaj zapis TP u formi problema LP, može da se odvija po simpleks metodi.

Bazično rešenje transportnog problema je **nedegenerisano** ako u planu transporta ima tačno $m + n - 1$ vrednosti različitih od 0 (bazičnih vrednosti). U suprotnom bazično rešenje je **degenerisano**.

8.5.1 Otvoreni model TP

Uslov da je ponuda jednaka potražnji često u praksi nije ispunjen već imamo slučaj da je ponuda robe veća od potražnje. Takav transportni problem nazivamo **otvoren**. Otvoren TP možemo svesti na zatvoren TP (klasičan model) tako što ćemo uvesti dopunskog potrošača B_{n+1} koji će fiktivno preuzeti višak ponude. Cena transporta po jedinici robe iz bilo kog skladišta A_i do fiksnog potrošača B_{n+1} jednaka je nuli. Optimalni plan transporta za ovako izmenjen model se poklapa sa optimalnim planom transporta zatvorenog modela. Onu robu koju po optimalnom planu transportujemo od skladišta A_i do fiksnog potrošača B_{n+1}, zapravo ostavljamo u skladištima A_i, kao višak robe koja nema svog kupca.

Zadatak. Na sličan način bismo rešili i situaciju, koja se ređe dešava na uređenim tržištima, da je potražnja veća od ponude. Kako biste od takvog otvorenog TP napravili zatvoreni TP?

8.6 Početni plan transporta

Obradićemo dva načina za nalaženje početnog plana transporta:

- metoda severozapadnog ugla;
- Vogelova metoda.

Metoda severozapadnog ugla je jednostavnija od Vogelove metode. Međutim, ne vodi se računa o transportnim cenama c_{ij}, tako da početno rešenje može biti daleko od optimalnog. Sa druge strane, Vogelova metoda je računski zahtevnija, ali u opštem slučaju daje bolje početno rešenje. Šta više, u primeru na kojem ilustrujemo obe metode, početno rešenje dobijeno Vogelovom metodom je optimalno.

Obe metode objasnićemo na primeru.

Neka je zatvoren (ponuda = potražnji = 17000 jedinica robe) TP zadat tabelom:

transportni problem	potražnja 3500	6000	7500
ponuda 3000	7	7	4
ponuda 3100	14	16	14
ponuda 2500	8	16	23
ponuda 4400	10	12	9
ponuda 3000	19	18	8

8.6.1 Metoda severozapadnog ugla

Plan transporta određujemo počevši od polja (1,1) - severozapadni ugao tabele. Transport na tom polju maksimizujemo u odnosu na uslove zadatka. U našem primeru, maksimalan transport $x_{11} = 3000$, jer smo ograničeni ponudom od 3000. Ovim transportom je zadovoljen prvi proizvođač, dok prvi potrošač zahteva još 500 jedinica robe. Da bismo i njega zadovoljili na polju (2,1) određujemo transort $x_{21} = 500$. Stalno vodimo računa o zahtevima ponude i potražnje, i spuštamo se u pravcu severozapada, popunjavajućci polja sa maksimalnim dozvoljenim transportom. Dalji redosled popunjavanja je: $x_{22} = 2600$, $x_{32} = 2400$, $x_{33} = 100$, $x_{43} = 4400$ i $x_{53} = 3000$.

8.6.2 Početni plan transporta dobijen metodom SZ-ugla

metoda SZ-ugla	potražnja 3500	6000	7500
ponuda 3000	7 **3000**	7	4
ponuda 3100	14 **500**	16 **2600**	14
ponuda 2500	8	16 **2400**	23 **100**
ponuda 4400	10	12	9 **4400**
ponuda 3000	19	18	8 **3000**

8.6.3 Vogelova metoda

Drugi naziv za Vogelovu metodu je metoda najvećih razlika između najmanjih koeficijenata cena. Vogelovom metodom prvo odredimo **kazne** za vrste i kolone. Kaznu za vrstu (kolonu) računamo kao razliku između dve najmanje cene transporta u vrsti (koloni). Izračunate vrednosti predstavljaju najmanje "kazne" koje plaćamo u ukupnoj ceni transporta ako robu ne prevezemo po najnižoj ceni u vrsti ili koloni. Zatim, odredimo najveću kaznu. Ako ih ima više biramo onu koja ima minimalnu cenu transporta.

Početni plan transporta dobijen Vogelovom metodom

	3500	6000	7500	1.k.	2.k.	3.k.	4.k.	5.k
3000	7	7	4 **3000**$_3$	3	3	3	–	–
3100	14	16 **3100**$_7$	14	0	0	0	0	2
2500	8 **2500**$_2$	16	23	8	**8**	–	–	–
4400	10 **1000**$_5$	12 **1900**$_6$	9 **1500**$_4$	1	1	1	1	2
3000	19	18	8 **3000**$_1$	**10**	–	–	–	–
1. k.	1	5	4	K	A	Z	N	E
2. k.	1	5	5	A				
3. k.	3	5	**5**	Z				
4. k.	4	4	**5**	N				
5. k.	**4**	4	–	E				

U koloni ili vrsti izabrane maksimalne kazne odredimo polje (i, j) sa minimalnom cenom transporta, i u njemu odredimo maksimalan dozvoljen transport $x_{ij} = min\{a_i, b_j\}$. Time će zahtevi ili i-tog proizvođača ili j-tog potrošača biti ispunjeni. U skladu sa tim, izbacićemo ili i-tu vrstu ili j-tu kolonu. Ceo postupak ponovimo za promenjene uslove: odredimo kazne, maksimalnu kaznu, odgovarajući transport, vrstu ili kolonu koju izbacujemo. Postupak ponavljamo dok ne završimo plan transporta.

Šest koraka je bilo dovoljno da se odredi početni plan Vogelovom metodom. Maksimalne kazne su zatamnjene vrednosti u tabeli. Bazične vrednosti transporta (takođe su zatamnjene) u tabeli su indeksirane brojevima od 1 do 7, i ti indeksi predstavljaju redosled određivanja plana transporta Vogelovom metodom.

U prvom koraku maksimalna kazna je 10 i određena je za petu vrstu, u kojoj je minimalna cena 8, na polju (5,3). Na polju (5,3) maksimalan transport je 3000, i to je prva bazična vrednost, posle čijeg upisivanja 5-tu vrstu možemo izbaciti. Maksimalna kazna u drugom koraku je 8, i dodeljena je 3. vrsti. Polje sa minimalnom cenom u 3. vrsti je (3,1) i maksimalan transport na tom polju je 2500. Zatim izbacujemo treću vrstu.

U trećem koraku maksimalna kazna je dodeljena 3. koloni. U njoj je minimalna cena na polju (1,3). Maksimalan transport na tom polju je 3000, nakon čega možemo da izbacimo 1. vrstu. Na sličan način postupak se nastavlja.

Posle 5. koraka ostaju samo dva polja u drugoj koloni: (2,2) i (4,2). Transport na tim poljima određujemo u skladu sa preostalom ponudom i potražnjom.

8.6.4 MODI metoda

Jednostavne transportne probleme sa dva-tri skladišta i dva-tri potrošača možemo da rešimo geometrijskom metodom, kao što je i pokazano u uvodnom primeru. U opštem slučaju, klasičan transportni problem je LP problem, i može da se reši simpleks metodom. Međutim, simpleks metoda nije najjednostavniji način rešavanja transportnog problema (dugo traje rešavanje). Postoje bar dve metode specijalizovane za rešavanje TP, koje su brže od simpleks metode. To su metoda skakanja s kamena na kamen i MODI metoda. Kako su ove metode prilično slične (imaju više od pola jednakih koraka) izabrana je MODI metoda u kojoj su početni koraci jednostavnije osmišlljeni.

Algoritam MODI metode

MODI metoda je iterativna metoda. U prvom koraku se odredi početni plan transporta, koji treba da bude **dopustiv** i nedegenerisan. Plan transporta je dopustiv ako ispunjava sva ograničenja (zahteve ponude i potražnje). U svakoj iteraciji se računa novi plan transporta koji je jeftiniji od prethodnog. Iteracije se vrše sve dok se ne dođe do plana koji ne može da se popravi (pojeftini). To je **optimalan** plan transporta, tj. optimalno rešenje TP. Ukoliko postoji više optimalnih rešenja, sve njih računamo iz poslednje tabele MODI metode. Sledi algoritam metode.

Algoritam

Treba da rešimo klasičan zatvoren transportni problem. Neka su oznake iste kao u poglavlju "Klasična postavka TP".

Dodatni pojmovi su: Polje (i, j) nekog plana transporta je **prazno** ako nema transporta od A_i do B_j, tj. transport $x_{ij} = 0$.
Zauzeta polja imaju transport različit od 0 u aktuelnom planu transporta. U tabelarnom prikazu prazna polja sadrže samo cenu transporta (naknadno im se upisuje i ocena izračunata MODI metodom) dok zauzeta polja imaju upisan i transport.

Prva dva koraka su početna, vrše se samo jednom. Niz od 3. do 10. koraka predstavlja jednu iteraciju MODI metode.

1. Napravimo početnu tabelu sa svim podacima TP: potražnje potrošača, ponude proizvođača i cene transporta.

2. Izaberemo, npr. metodom severozapadnog ugla, jedno nedegenerisano dopustivo rešenje, početni plan transporta.

3. Izračunamo **ocene za vrste** v_i i **ocene za kolone** k_j, tako da za sva zauzeta polja važi:
   $c_{ij} = v_i + k_j$.
   Vrednosti v_i i k_j određujemo tako što slobodno izaberemo jednu vrstu ili kolonu i ocenimo je sa 0. Najbolje je da vrstu ili kolonu sa najviše zauzetih polja ocenimo sa 0, jer se tada ostale ocene lakše računaju. Ako ih ima više proizvoljnoj od njih dodelimo ocenu 0. Zatim, naizmenično računamo ocene kolona (k-ove) i vrsta (v-ove), na jedinstven način, poštujući prethodni uslov.

4. Odredimo ocene svih praznih polja u tabeli; **prazno polje** (i, j) dobija ocenu o_{ij}:
   $o_{ij} = c_{ij} - v_i - k_j$.
   Ocene upisujemo u levi donji ugao praznog polja.

5.a Ako nema negativnih ocena praznih polja, aktuelan plan transporta je optimalan i računanje je završeno.

5.b Ako ima negativnih ocena praznih polja, aktuelan plan transporta može da se popravi. Popravku vršimo koracima 6-10.

6. Pronađemo polje koje je ocenjeno sa po apsolutnoj vrednosti najvećim negativnim brojem.

7. Za ovo polje pronalazimo u tabeli najmanji **poligonalni put** čija su temena samo neka zauzeta polja i izabrano prazno polje.

8. Na ovom putu, na neparnim zauzetim poljima, nađemo polje sa najmanjim brojem (transportom).

9. Taj broj prenesemo u prazno polje i u skladu sa uslovima TP popunimo sva polja na putu. (popunjavanje je jednoznačno)

10. Tako dobijamo novi plan transporta koji treba da bude nedegenerisan i za njega izračunamo cenu transporta i napravimo novu tabelu koju procesiramo počevši od 3. koraka algoritma.
    Cenu transporta pišemo na početku tabele.

Drugi korak algoritma, nalaženje početnog plana transporta, možemo odraditi metodom severozapadnog ugla ili Vogelovom metodom.

Ilustrujmo iteracije MODI metode na primeru na kom smo ilustrovali nalaženje početnog plana transporta.

Primer. Prva iteracija MODI metode, sa izborom početnog plana transporta metodom severozapadnog ugla je prikazana tabelom:

Cena transporta za početni plan transporta je
$7 \cdot 3000 + 14 \cdot 500 + 2600 \cdot 16 + 2400 \cdot 16 + 100 \cdot 23 + 4400 \cdot 9 + 3000 \cdot 8 = 173900.$

Temena poligonalnog puta u poljima tabele su označena sa $\circ$.

173900	3500	6000	7500	v_i
3000	7 **3000**	7 -2	4 -12	16
3100	14 **500**	16 **2600**	14 -9	23
2500	8 -6	16 **2400**	23 **100**	23
4400	10 10	12 10	9 **4400**	9
3000	19 20	18 17	8 **3000**	8
k_j	-9	-7	0	

U polju (1,3) je najmanja ocena -12, stoga će to polje biti novo bazično polje. Poligonalni put po kome ćemo izvršiti promenu plana ima redom temena u poljima: (1,3), (1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3). Najmanji transport na neparnim poljima poligonalnog puta iznosi 100=min$\{100, 2600, 3000\}$ jedinica robe i nalazi se na polju (3,3). U novom rešenju je $x_{13} = 100$. Zatim, transport po poligonalnom putu, uskladimo sa zahtevima ponude i potražnje, sledećim redom: $x_{11} = 2900$, $x_{21} = 600$, $x_{22} = 2500$, $x_{32} = 2500$, $x_{33} = 0$.

172700	3500	6000	7500	v_i
3000	7 **2900**	7 -2	4 **100**	4
3100	○ 14 **600**	○ 16 **2500**	14 3	11
2500	○ 8 -6	○ 16 **2500**	23 12	11
4400	10 -2	12 -2	9 **4400**	9
3000	19 8	18 5	8 **3000**	8
k_j	3	5	0	

Cena transporta za novi plan transporta je
$7 \cdot 2900 + 14 \cdot 600 + 2500 \cdot 16 + 2500 \cdot 16 + 100 \cdot 4 + 4400 \cdot 9 + 3000 \cdot 8 = 172700$. Drugi plan transporta ima za 1200 novčanih jedinica nižu cenu od početnog plana.

Druga iteracija MODI metode prikazana je tabelom:

U polju (3,1) je najmanja ocena -6. To polje će biti novo bazično polje. Poligonalni put je četvorougao sa temenima u poljima: (3,1), (2,1), (2,2), (3,2). Najmanji transport na neparnim poljima poligonalnog puta iznosi $600 = \min\{600, 2500\}$ jedinica robe, i nalazi se na polju (2,1). Dakle, u novom rešenju je $x_{31} = 600$, a ostatak transporta po poligonalnom putu je: $x_{21} = 0$, $x_{22} = 3100$, $x_{32} = 1900$.

Cena transporta za treći plan transporta je
$2900 \cdot 7 + 600 \cdot 8 + 3100 \cdot 16 + 1900 \cdot 16 + 100 \cdot 4 + 4400 \cdot 9 + 3000 \cdot 8 = 169100$.

Treći plan transporta ima za 3600 novčanih jedinica nižu cenu od drugog plana. Koliko je smanjena cena transporta možemo da odredimo i bez računanja ukupne cene transporta. Dovoljno je da izračunamo za koliko smo popravili transport: 600 j.r. smo transportovali po ceni od 8 n.j. umesto po ceni od 14 n.j, znači ušteda je $600 \cdot 6 = 3600$. Slično, u prethodnom koraku je ušteda bila $100 \cdot 12$ (100 j.r. smo transportovali po ceni od 4 umesto po ceni od 23 n.j.). Ovi alternativni načini za računanje koliko je popravljeno rešenje koriste za proveru računa cele iteracije.

Popravka je jednaka proizvodu minimalne ocene polja i minimalne vrednosti transporta na neparnim poljima poligonalnog puta.

Treća iteracija MODI metode prikazana je tabelom:

169100	3500	6000	7500	v_i
3000	○ 7 **2900**	○ 7 -8	4 **100**	4
3100	14 6	16 **3100**	14 9	5
2500	○ 8 **600**	○ 16 **1900**	23 18	5
4400	○ 10 -2	12 -8	○ 9 **4400**	9
3000	19 8	18 -1	8 **3000**	8
k_j	3	11	0	

Imamo dve minimalne ocene -8, na poljima (1,2) i (4,2). Za bazično biramo polje (1,2), jer ima manju cenu transporta. Poligonalni put promene ima temena u poljima: (1,2), (1,1), (3,1) i (3,2). Minimalni transport na neparnim poljima je 1900 (min$\{1900, 2900\}$) na polju (3,2).

Novi transport je: $x_{12} = 1900$, $x_{11} = 1000$, $x_{31} = 2500$ i $x_{32} = 0$. Cena transporta za četvrti plan transporta je smanjena za $1900 \cdot (-8) = -16200$. Nova cena transporta je $169100 - 16200 = 153900$.

153900	3500	6000	7500	v_i
3000	○ 7 **1000**	7 **1900**	○ 4 **100**	0
3100	14 -2	16 **3100**	14 1	9
2500	8 **2500**	16 8	23 18	1
4400	○ 10 -2	12 0	○ 9 **4400**	5
3000	19 8	18 7	8 **3000**	4
k_j	7	7	4	

Minimalne ocene su -2 na poljima (2,1) i (4,1). Izabrano je polje (4,1) zbog manje cene transporta. Poligonalni put je po poljima: (4,1), (1,1), (1,3) i (4,3). Minimum od $\{1000, 4400\}$ je 1000 na polju (1,1). Novi transporti su $x_{41} = 1000$, $x_{11} = 0$, $x_{13} = 1100$ i $x_{43} = 3400$. Cena transporta za peti plan transporta je smanjena za $1000 \cdot (-2) = -2000$. Nova cena transporta je $153900 - 2000$=151900, a nova tabela MODI metode je i optimalna:

151900	3500	6000	7500	v_i
3000	7 2	○ × 7 **1900**	○ × 4 **1100**	4
3100	○ 14 0	○ 16 **3100**	14 1	13
2500	8 **2500**	16 6	23 16	7
4400	○ 10 **1000**	× 12 0	○ × 9 **3400**	9
3000	19 10	18 7	8 **3000**	8
k_j	1	3	0	

Nema negativnih ocena polja, što implicira da se radi o optimalnom planu transporta, čija je minimalna ukupna cena transporta jednaka 151900 n.j.

Kako su polja (2,1) i (4,2) ocenjena sa 0, postoje još dva alternativna optimalna rešenja.

Ako polje (2,1) izaberemo za bazično poligonalni put ima temena u poljima: (2,1), (4,1), (4,3), (1,3), (1,2), (2,2). Najmanji transport na neparnim poljima je 1000 =min$\{100, 1100, 3100\}$ na polju (4,1) i novo optimalno rešenje je

151900	3500	6000	7500
3000	7	7 **2900**	4 **100**
3100	14 **1000**	16 **2100**	14
2500	8 **2500**	16	23
4400	10	12	9 **4400**
3000	19	18	8 **3000**

Ako polje (4,2) izaberemo za bazično poligonalni put ima temena (označena su sa $\times$) u poljima: (4,2), (4,3), (1,3), (1,2). Najmanji transport na neparnim poljima je na polju (1,2) i iznosi $1900 = \min\{3400, 1900\}$. Treće optimalno rešenje je:

151900	3500	6000	7500
3000	7	7	4 **3000**
3100	14	16 **3100**	14
2500	8 **2500**	16	23
4400	10 **1000**	12 **1900**	9 **1500**
3000	19	18	8 **3000**

Ovo optimalno rešenje se poklapa sa početnim planom transporta dobijenim Vogelovom metodom. Znači, da je za početni plan izabran plan dobijen Vogelovom metodom, samo jedna iteracija MODI metode bismo dala optimalno rešenje, dok je sa početnim planom po severozapadnom uglu bilo potrebno 6 iteracija.

8.7 Teorijska pitanja

8.5. Trivijalna ograničenja za promenljive $x_1, x_2...x_n$ su: $x_i = 0,\ i = 1, 2...n$.	$\perp$
8.6. Trivijalna ograničenja za promenljive $x_1, x_2...x_n$ su: $x_i \geq 0,\ i = 1...n$.	$\top$
8.7. Trivijalna ograničenja za promenljive $x_1, x_2...x_n$ su: $x_i > 0,\ i = 1, 2...n$.	$\perp$
8.8. Trivijalna ograničenja su zahtevi da sve promenljive budu pozitivne.	$\perp$
8.9. Problem linearnog programiranja sa 4 nepoznate nema smisla rešavati geometrijskom metodom.	$\top$
8.10. Domen problema linearnog programiranja čine sve tačke koje zadovoljavaju sva ograničenja.	$\top$
8.11. Dopustivi skup (domen) problema linearnog programiranja čine sva njegova rešenja.	$\top$

8.12. Postoji problem LP sa neograničenim domenom i linearnom funkcijom cilja koja dostiže minimum u nekoj tački i maksimum u nekoj drugoj tački domena.	$\top$
8.13. Važi da je na nepraznom domenu $D \subset \mathcal{R}^3$ nekog problema LP $\min\limits_D(x-2y+3z) = \max\limits_D(-x+2y-3z)$.	$\perp$
8.14. Važi da je na svakom nepraznom i ograničenom domenu $D \subset \mathcal{R}^3$ nekog problema LP $\min\limits_D(x-2y+3z) = -\max\limits_D(-x+2y-3z)$.	$\top$
8.15. Za svaki domen $D \subset \mathcal{R}^2$ problema LP važi ako je $\min\limits_D(-x+y) = -5$, onda je $\max\limits_D(-x+y) = 5$.	$\perp$
8.16. Za svaki domen $D \subset \mathcal{R}^3$ problema LP važi ako je $\min\limits_D(-2x+6y-3z) = -5$, onda je $\max\limits_D(2x-6y+3z) = 5$.	$\top$
8.17. Dopustivi skup svakog problema linearnog programiranja je konveksan skup tačaka.	$\top$
8.18. U ravni možemo konstruisati petougao koji nije konveksan skup tačaka.	$\top$
8.19. Postoji četvorougao koji nije domen niti jednog problema LP.	$\top$
8.20. Bilo koji trougao može biti domen nekog problema LP.	$\top$
8.21. Poligon sa temenima (0,2), (−1,2) i (2,0) može biti domen nekog problema LP	$\top$
8.22. Poligon sa temenima (0,0), (−1,1), (−2,0), (0,−2), (2,0) i (1,1) može biti domen nekog problema linearnog programiranja. (proverite konveksnost)	$\perp$
8.23. Poligon sa temenima (0,0), (−1,1),(−2,0), (0,−2),(2,0) i (1,1) ne može biti domen nekog problema LP.	$\top$
8.24. Poligon sa temenima (0,3), (1,1),(3,0), (1,−1), (0,−3), (−1,−1), (−3,0) i (−1,1) ne može biti domen nekog problema linearnog programiranja.	$\top$
8.25. Poligon sa temenima (0,0), (−1,1), (−2,−2), (0,−2), (2,0) i (1,1) ne može biti domen nekog problema linearnog programiranja.	$\top$
8.26. Poligon sa temenima (0,2), (−1,2),(−2,0), (0,−2) i (2,0) može biti domen nekog problema LP.	$\top$
8.27. U simetričnom obliku problema LP se zahteva maksimum funkcije cilja.	$\perp$
8.28. I u standardnom i u simetričnom obliku problema linearnog programiranja zahteva se maksimum funkcije cilja.	$\perp$
8.29. U standarnom obliku problema LP sva netrivijalna ograničenja su jednačine.	$\top$
8.30. I u standardnom i u simetričnom obliku problema LP se zahteva trivijalno ograničenje za sve promenljive.	$\top$
8.31. Svaki neograničen dopustivi skup problema LP je konveksan.	$\top$
8.32. Kružni isečak može i ne mora da bude konveksan skup tačaka.	$\top$
8.33. Na neograničenom domenu svakog problema linearnog programiranja funkcija cilja ne dostiže maksimum.	$\perp$
8.34. Ekstremne tačke poliedra su njegova temena.	$\top$
8.35. Ekstremne tačke kruga su tačke njegove kružne linije.	$\top$

8.36. Ekstremne tačke duži su krajnje tačke duži.	$\top$
8.37. I u standardnom i u simetričnom obliku problema LP se zahteva minimum funkcije cilja.	$\top$
8.38. Postoji problem LP sa neograničenim domenom D i linearnom funkcijom cilja koja ima minimum, a nema maksimum na D.	$\top$
8.39. Problem linearnog programiranja sa 2 ili 3 nepoznate nema smisla rešavati geometrijskom metodom.	$\perp$
8.40. Na svakom neograničenom domenu problema LP svaka linearna funkcija cilja obavezno nema ni minimum ni maksimum.	$\perp$
8.41. Kada opšti problem linearnog programiranja sa m nezavisnih netrivijalnih ograničenja rešavamo simpleks metodom, u svakoj simpleks tablici imamo m baznih kolona.	$\top$
8.42. Bazična kolona ima jednu 1 i ostalo 0.	$\top$
8.43. Bazične promenljive imaju pridružene bazične kolone u simpleks tablici.	$\top$
8.44. U svakoj simpleks tablici problema sa 2 netrivijalna ograničenja ima 2 različite bazične kolone.	$\top$
8.45. U svakoj simpleks tablici problema sa 3 netrivijalna ograničenja i 7 nepoznatih pridruženo bazično rešenje ima bar 4 nule.	$\top$
8.46. Broj izravnavajućih promenljivih jednak je broju nejednačina u skupu netrivijalnih ograničenja.	$\top$
8.47. U svakoj simpleks tablici problema sa 3 netrivijalna ograničenja ima 3 bazične kolone.	$\top$
8.48. Veštačke promenljive uvodimo sa ciljem da dopunimo skup bazičnih kolona u simpleks tabeli.	$\top$
8.49. U svakoj simpleks tablici problema sa 10 netrivijalnih ograničenja ima 10 različitih bazičnih kolona.	$\top$
8.50. Broj veštačkih promenljivih problema linearnog programiranja može biti veći od broja bazičnih kolona.	$\perp$
8.51. Bazična kolona ima sve jedinice.	$\perp$
8.52. U svakoj simpleks tablici svi elementi u poslednjoj koloni sem poslednjeg su obavezno nenegativni.	$\top$
8.53. U svakoj simpleks tablici svi elementi u poslednjoj koloni sem poslednjeg su obavezno veći ili jednaki 0.	$\top$
8.54. U svakoj simpleks tablici problema sa 3 netrivijalna ograničenja i 7 nepoznatih pridruženo bazično rešenje ima tačno 4 nule.	$\perp$
8.55. U svakoj simpleks tablici problema sa 5 netrivijalnih ograničenja ima 5 bazičnih kolona.	$\top$
8.56. Broj izravnavajućih promenljivih jednak je broju jednačina u skupu netrivijalnih ograničenja.	$\perp$
8.57. Bazičnim promenljivama iz simpleks tablice u bazičnom rešenju dodeljujemo 0.	$\perp$
8.58. Bazično rešenje problema linearnog programiranja sa 3 netrivijalna ograničenja i 6 nepoznatih ima bar 3 nule.	$\top$

8.59. Bazično rešenje pridruženo simpleks tablici sa m baričnih kolona ima najviše $n-m$ nula (n je broj promenljivih). $\perp$

8.60. Nebazičnim promenljivama iz simpleks tablice u baričnom rešenju dodeljujemo suprotnu vrednost iz poslednje kolone u vrsti u kojoj je bazična 1. $\perp$

8.61. Vrednost funkcije cilja u bazičnom rešenju pridruženom simpleks tablici jednaka je suprotnoj vrednosti u donjem desnom uglu tablice. $\top$

8.62. Opšti problem linearnog programiranja treba svesti na simetričan oblik sa nenegativnim slobodnim koeficijentima da bismo smo mogli da primenimo simpleks metodu. $\perp$

8.63.
$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 30 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -40 \end{array}$$
Ova tablica je završna simpleks tablica sa optimalnim rešenjem (20,0,0,10,30) u kojem je maksimum funkcije cilja jednak 40. $\perp$

8.64.
$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 8 \end{array}$$
Ova tablica je simpleks tablica sa optimalnim rešenjem (4,0,0,0,2) u kojem je minimum funkcije cilja jednak -8. $\perp$

8.65. Sledeći problem linearnog programiranja je u obliku za koji, bez dodatnih transformacija, imamo pridruženu simpleks tablicu.
$$\min(5x_1-2x_2)$$
$$x_1-x_2+x_5=0,\quad 2x_1+x_2+x_4\geq 5,$$
$$-2x_1+3x_2+x_3=2,\quad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0$$
$\perp$

8.66. Sledeći problem linearnog programiranja je u obliku za koji, bez dodatnih transformacija, imamo pridruženu simpleks tablicu.
$$\min(7x_3-7x_4)$$
$$x_2+x_3+2x_4=1, x_1-x_3+2x_4=0$$
$$x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4$$
$\top$

8.67. Domenu problema LP iz predhodnog zadatka pripada tačka (1,0,1,0). $\top$

8.68. Sledeći problem linearnog programiranja je u obliku za koji, bez dodatnih transformacija, imamo pridruženu simpleks tablicu.
$$\max(-x_1-3x_2)$$
$$x_1+2x_2+3x_3=0,$$
$$-4x_1+5x_2+6x_4=1$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$
$\perp$

8.69. Sledeći problem linearnog programiranja je u simetričnom obliku.
$$\min(x_1+2x_2+3x_3+4x_4)$$
$$x_2+x_4\geq -2,\quad -2x_1+x_3\geq 1,$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$
$\perp$

8.70. Sledeći problem linearnog programiranja je u standardnom obliku.
$$\min(x_1+2x_2+3x_3+4x_4)$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=2,$$
$$-x_1+2x_2-x_3+2x_4=1$$
$\perp$

8.71. Ova tablica
$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$
je simpleks tablica. $\perp$

8.72. Ova tablica
$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$
je simpleks tablica. $\top$

8.73. Ova tablica $\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}$ je simpleks tablica. $\perp$

8.74. Sledeća tablica je simpleks tablica pridružena optimalnom rešenju. $\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{array}$ $\perp$

8.75. Tablica $\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 30 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -40 \end{array}$ je završna simpleks tablica sa optimalnim rešenjem (20,0,0,−10,30) u kojem je minimum funkcije cilja jednak 40. $\perp$

8.76. Tablica $\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 30 \\ \hline 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 40 \end{array}$ je završna simpleks tablica sa optimalnim rešenjem (20,0,0,10,30) u kojem je minimum funkcije cilja jednak −40. $\perp$

8.77. Tablica $\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}$ je simpleks tablica sa bazičnim rešenjem (0,7,0,1,5) u kojem je vrednost funkcije cilja jednaka −3. $\perp$

8.78. Tablica $\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}$ je završna simpleks tablica sa bazičnim rešenjem (3,0,7,0,1,5) u kojem je vrednost funkcije cilja jednaka 3. $\perp$

8.79. Tablica $\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 10 \\ \hline 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & -40 \end{array}$ je završna simpleks tablica sa optimalnim rešenjem (20,0,0,30,10) u kojem je minimum funkcije cilja jednak −40. $\perp$

8.80. Tablica $\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 10 \\ \hline 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 40 \end{array}$ je završna simpleks tablica sa optimalnim rešenjem (20,0,0,10,30) u kojem je minimum funkcije cilja jednak −40. $\perp$

8.81. Sledeći problem LP je u standardnom obliku.

$$\begin{gathered} \min(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4 \end{gathered}$$

$\top$

8.82. Sledećoj simpleks tablici je pridruženo bazično rešenje (0,0,0,0,2) u kom je vrednost funkcije cilja jednaka 2. $\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}$ $\top$

8.83. Sledećem domenu problema linearnog programiranja pripada tačka (1,1,1,−1).

$$\begin{gathered} x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 0 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 \leq 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4 \end{gathered}$$

$\perp$

8.84.	Domenu sledećeg problema LP pripada tačka (1,0,−1,0).	$\min(7x_3-7x_4)$ $x_2+x_3+2x_4=0,\quad x_1-x_3+2x_4=2$ $x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4$	$\perp$
8.85.	Dopustivom skupu sledećeg problema LP pripada tačka (1,0,−1,0).	$\min(7x_3-7x_4)$ $x_2+2x_4=0,\quad x_1-x_3+2x_4=2$ $x_i\ge 0,\ i=1,2,4$	$\top$
8.86.	Sledećem dopustivom skupu nekog LP pripada tačka (1,0,1,1).	$x_2+x_3-2x_4\le 0,\quad x_1-x_3+2x_4\ge 2$ $x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4$	$\top$
8.87.	Ova tablica $\begin{array}{rrrrr\|r} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 4\\ \hline 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 10 \end{array}$	je završna simpleks tablica, u kojoj je minimum funkcije cilja jednak −10.	$\top$
8.88.	Sledeći problem linearnog programiranja je u obliku za koji, bez dodatnih transformacija, imamo pridruženu simpleks tablicu.	$\min(2x_1+3x_2)$ $2x_1+x_2+x_3=0$ $-x_1+2x_2+x_4=1$ $x_1,x_2\ge 0$	$\perp$
8.89.	Sledeći problem linearnog programiranja je u obliku za koji, bez dodatnih transformacija, imamo pridruženu simpleks tablicu.	$\min(x_1+2x_2)$ $x_1+x_2+x_3=-2$ $-x_1+2x_2+x_4=1$ $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$	$\perp$
8.90.	Sledećoj simpleks tablici je pridruženo bazično rešenje (0,0,0,3,4) u kom je vrednost funkcije cilja jednaka 1.	$\begin{array}{rrrrr\|r} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4\\ -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3\\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{array}$	$\top$
8.91.	Optimalno rešenje pridruženo simpleks tablici je (0,4,0,2,1), i pri tom je minimum funkcije cilja jednak 5.	$\begin{array}{rrrrr\|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4\\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \end{array}$	$\top$
8.92.	Sledećoj simpleks tablici je pridruženo bazično optimalno rešenje (0,0,0,0,2) u kojem je vrednost funkcije cilja jednaka 2.	$\begin{array}{rrrrr\|r} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}$	$\top$
8.93.	Sledeći problem linearnog programiranja je u obliku za koji, bez dodatnih transformacija, imamo pridruženu simpleks tablicu.	$\max(x_1+2x_2)$ $x_1+x_2+x_3=2,\quad -x_1+2x_2+x_4=1$ $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$	$\perp$
8.94.	Sledeći problem linearnog programiranja je u obliku za koji bez dodatnih transformacija imamo pridruženu simpleks tablicu.	$\min(x_1+2x_2)$ $x_1+x_2+x_3=-2$ $-x_1+2x_2+x_4=1$	$\perp$
8.95.	Sledećoj simpleks tablici je pridruženo bazično rešenje (0,0,0,0,5) u kojem je vrednost funkcije cilja jednaka −5.	$\begin{array}{rrrrr\|r} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5\\ -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -5 \end{array}$	$\perp$
8.96.	Transportni problem je specijalan slučaj problema linearnog programiranja.		$\top$
8.97.	Nedegenerisani početni plan transporta sa m potrošača i n proizvođača ima tačno $m+n+1$ vrednost transporta različitu od 0.		$\perp$

8.98. Nedegenerisani plan transporta za 3 potrošača i 5 proizvođača ima 7 transporta većih od 0. $\top$

8.99. Transportni problem je zatvoren ako je ponuda jednaka potražnji. $\top$

8.100. Nedegenerisani plan transporta za 5 potrošača i 5 proizvođača ima 10 transporta većih od 0. $\bot$

8.101. Degenerisani plan transporta za 5 potrošača i 5 proizvođača nema 9 transporta većih od 0. $\top$

8.102. Ako su u nekom koraku Modi metode sve ocene praznih polja nenegativne, aktuelni plan transporta je optimalan. $\top$

8.103. Transportni problem je otvoren ako je ponuda različita od potražnje. $\top$

8.104. Metoda SZ-ugla u transportnom problemu ne vodi računa o cenama transporta. $\top$

8.105. Nedegenerisani plan transporta za 3 potrošača i 5 proizvođača ima 8 transporta jednakih 0. $\top$

8.106. Vogelova metoda u transportnom problemu teži da početni plan bude blizu optimalnog. $\top$

8.107. Nedegenerisani plan transporta za 4 potrošača i 4 proizvođača ima 9 transporta jednakih 0. $\top$

8.108. U svakom koraku Modi metode cena transporta aktuelnog plana transporta je manja nego u prethodnom planu transporta. $\top$

8.109. Tabelom je dat početni plan transporta dobijen metodom SZ-ugla. $\bot$

	20	15	25	30
40	**15**	**20**	**5**	
50			**20**	**30**

8.110. Tabelom je dat nedegenerisan plan transporta. $\bot$

	15	20	25	30
40	**15**	**10**	**5**	
60		**10**	**20**	**30**

8.111. Tabelom je dat početni plan transporta dobijen metodom SZ-ugla. $\top$

	15	20	25	30
40	**15**	**20**	**5**	
50			**20**	**30**

8.112. Prethodni transportni problem je otvoren. $\bot$

8.113. Tabelom je dat degenerisan plan transporta. $\top$

	15	20	25	30
40	**15**		**25**	
50		**20**		**30**

8.114. Tabelom je dat početni plan transporta dobijen metodom SZ-ugla. $\bot$

	25	20	15	30
45	**25**	**15**	**5**	
45		**5**	**10**	**30**

8.115. Tabelom je dat degenerisan početni plan transporta dobijen metodom SZ-ugla. $\top$

	15	20	25	25
35	**15**	**20**		
50			**25**	**25**

8.116. Tabelom je dat degenerisan plan transporta dobijen metodom SZ-ugla. $\bot$

	15	20	25	30
40	**15**		**25**	
50		**20**		**30**

8.117. Tabelom je dat optimalan plan transporta. $\top$

	10	20	30
40	1 **10**	2 **20**	3 **10**
20	4	3	2 **20**

8.118. Transportni plan dat tabelom je početni plan dobijen Vogelovom metodom. $\top$

	15	20	25	30
20	20	9	15 **20**	8
35	3 **15**	8 **20**	14	17
35	16	11	17 **5**	7 **30**

8.119. Transportni plan dat tabelom je početni plan dobijen Vogelovom metodom.

	15	20	25	30
20	20 **15**	9 **5**	15	8
35	3	8 **15**	14 **20**	17
35	16	11	17 **5**	7 **30**

$\perp$

8.120. Transportni plan dat tabelom je nedegenerisan optimalan plan.

	15	20	25	30
20	2 **15**	9 **5**	15	18
35	3	8 **15**	14 **20**	17
35	16	11	17 **5**	7 **30**

$\top$

Glava 9.

9 Neki modeli (celobrojnog) LP u privredi

Minimizacija transportnih troškova, problem koji je već izložen, interesantan je za sve grane privrede i agrobiznisa kao njenog sastavnog dela. Ukoliko se zahteva uslov celobrojnost nepoznatih to usložnjava nalaženje optimalnog rešenja, ali je on ipak često neizbežan uslov pri modeliranju. Na primer ako se optimizuje broj osnovnih i(ili) pomoćnih mašina, broj pojedinih stočnih grla i(ili) živine na farmi teško je izbeći celobrojnost. U radu [20] u kome se optimizuje organizacija rada kombajna za vreme žetve pšenice, uljane repice i ječma na velikom gazdinstvu (oko 1500 ha) i iznajmljivanje istih kombajna na okolnim malim imanjima je uspešno izbegnuta celobrojnost. Cilj ovog poglavlja je da se studenti osposobe za modelovanje jednostavnijih agronomskih modela. U nastavku će biti izloženi problemi koji su specifični u pojedinim granama poljoprivrede.

9.1 Primena u ratarstvu i voćarstvu

Optimalan plan podele obradive površine na kulture u cilju maksimizovanja zarade, pri ograničenom broju radnika, rešava se u prvom primeru.

Primer. Šta i koliko sejati?
Neka k kultura želimo posejati na obradivu površinu koja ima p ha. Donju i gornju granicu površine koju želimo da posejemo i-tom kulturom ($i = 1...k$) označimo sa p'_i i p''_i. U svrhu formulacije problema uvedimo dodatne oznake:

- x_i nepoznata površina koju treba zasejati i-tom kulturom,
- b_j broj radnika[29] kojima raspolaže poljoprivredno dobro u j-tom periodu[30], $j = 1...m$,
- r_{ij} broj radnika potreban u j-tom periodu za i-tu kulturu,
- c_i očekivana dobit od i-te kulture po jedinici površine.

$$\max(\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot x_i)$$

Ograničene obradive površine zahtevaju:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = p, \qquad p'_i \le x_i \le p''_i,\ i = 1...k.$$

[29] Zbog korišćenja sezonske radne snage broj radnika po periodima može da se razlikuje.

[30] Periodi pokrivaju jednu godinu i ne moraju biti jednaki. Na primer, zima može biti jedan period, a proleće može da se podeli na tri perioda.

Potrebe za radnom snagom i njihov ograničen broj fomulisan je sledećim nejednačinama:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot r_{ij} \leq b_j, \qquad j = 1...m.$$

Poljoprivredna tehnika kojom raspolaže gazdinstvo nije uzeta za ograničavajući faktor. Problem se može preformulisati tako da se razmatraju i radna snaga i mehanizacija.

Individualni poljoprivredni proizvođači ponekad ne kupuju semensku robu nego koriste umesto nje seme iz prethodne godine. Problem koji sledi analizira takvu situaciju.

Primer. Sejati ili prodati seme?
Napravimo optimalan plan setve iz tri uzastopne žetve. Pred prvu setvu imamo A kg semena. Prodajna cena semena je p_0. Koeficijenat prinosa za žetve je λ. Očekuje se da će zarada po kg u I žetvi biti p_1, u II žetvi p_2, u III p_3 dinara. Pretpostavka je da se svake godine seme ili prodaje ili seje, ne skladišti se.
Rešenje. Neka je u prvoj godini posejano x_1 kilograma ($x_1 < A$). Znači prodato je po ceni p_0, $A - x_1$ kg semena. Prinos prve žetve je λx_1. Neka je u drugoj godini posejano x_2 kilograma ($x_2 < \lambda x_1$). Ostatak od $\lambda x_1 - x_2$ je prodat po ceni p_1.

Prinos druge žetve je λx_2. Neka je u trećoj godini posejano x_3 kilograma ($x_3 < \lambda x_2$). Ostatak od $\lambda x_2 - x_3$ je prodat po ceni p_2. Konačno, prinos od treće žetve λx_3 je prodat po ceni p_3. Ukupni prihod za tri godine je:
$p_0(A - x_1) + p_1(\lambda x_1 - x_2) + p_2(\lambda x_2 - x_3) + p_3 \lambda x_3$,
i njega treba maksimzirati:

$$\max(p_0 A + \lambda \sum_{i=1}^{3} p_i x_i - \sum_{i=0}^{2} p_i x_{i+1})$$

uz ograničenja:

$$\begin{array}{c} 0 \leq x_1 \leq A \\ 0 \leq x_2 \leq \lambda x_1 \\ 0 \leq x_3 \leq \lambda x_2 \end{array} .$$

9.1.1 Izbor mehanizacije i transport

U okviru izbora mehanizacije imamo bar dva tipa optimizacionog problema:

A naći optimalan plan nabavke nove mehanizacije (ili iznajmljivanja stare mehanizacije) sa ciljem da se izvrše planirani poslovi u planiranom vremenu,

B naći optimalan plan (sa maksimalnom zaradom) proizvodnje različitih vrsta proizvoda na postojećim tipovima mašina pri vremenskom ograničenju rada.

Takođe, različite situacije nastaju kada:

a sve operacije (svi proizvodi) mogu da se u celosti realizuju na svim tipovima mašina,

b svaki proizvod (operacija) mora da prođe obradu na svim tipovima mašina redom.

Na primer, operacije oranja, tanjiranja i sejanja mogu da se izvrše na svim tipovima traktora sa odgovarajućim tipovima priključaka. S druge strane, hoblarica, glodalica, šlajferica i bušilica su obavezne mašine u proizvodnji raznih komada nameštaja od punog drveta. Slično, zamrznuto povrće (grašak, boranija, španat...) zahtevaju: branje, transport, pranje, pasterizaciju, pakovanje, zamrzavanje i skladištenje.

Primer Aa. Na posedu treba obaviti dva posla P_1 i P_2. Svaki posao može obaviti ili mašina M_1 ili M_2. P_1 treba obaviti za 10 dana, a zatim treba obaviti P_2 za 5 dana. Zna se da M_1 obavi P_1 za 60 dana, P_2 za 50 dana, dok M_2 obavi P_1 za 90 dana, P_2 za 25 dana. Koliko mašina treba minimalno nabaviti, a da se poslovi obave na vreme?

Rešenje. Ako sa x_1 označimo potreban broj mašina M_1 i sa x_2 potreban broj mašina M_2 treba rešiti sledeći LP problem:

$$\min(x_1 + x_2)$$
$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{9} \geq 1, \qquad \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{5} \geq 1,$$
$$x_1, x_2 \in \mathcal{N} \cup \{0\}.$$

Jednom mašinom tipa M_1 se za 10 dana obavi šestina posla P_1, a za 5 dana desetina posla P_2. Jednom mašinom tipa M_2 se za 10 dana obavi devetina posla P_1, a za 5 dana petina posla P_2. Poslovi u celosti treba da se obave u predviđenom roku. Problem može da se reši geometrijskom 2D−metodom. Rešite! Optimalno rešenje je $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$.

Primer Bb. Postaviti matematički model za optimalnu proizvodnju 4 artikla A_1, A_2, A_3 i A_4 u tri udružena preduzeća P_1, P_2 i P_3. Sva preduzeća imaju po dva tipa mašina M_1 i M_2. Svi artikli zahtevaju obradu na oba tipa mašina. U prvoj tabeli je dat broj mašina po preduzećima, a u drugoj je dato vreme u satima potrebno za realizaciju jednog artikla po preduzećima.

	M_1	M_2
P_1	2	6
P_2	2	3
P_3	5	2

	A_1	A_2	A_3	A_4
P_1	(4,2)	(5,1)	(3,3)	(2,1)
P_2	(4,3)	(4,1)	(2,3)	(2,2)
P_3	(5,2)	(6,2)	(3,4)	(3,2)

Iz tabele vidimo da preduzeće P_3 ima najlošiji učinak. U istom preduzeću realizuje se i prvi i drugi deo obrade artikla. Mašine rade po ceo dan (24h). Napravite model za mesečni optimalan plan proizvodnje ako su zarade po jedinici artikla i maksimalna mesečna prodaja dati u sledećoj tabeli.

	A_1	A_2	A_3	A_4
zarada	600	800	500	300
maks. plasman	1000	800	1400	2000

Rešenje.

Neka je x_{jk} broj j-tih artikala u k-tom preduzeću. Neme indekse i (1-2), j (1-4) i k (1-3) ćemo redom rezervisati za mašine, artikle i preduzeća. Treba maksimizovati zaradu

$$\max\left(600\cdot(\sum_{k=1}^{3}x_{1k})+800\cdot(\sum_{k=1}^{3}x_{2k})+500\cdot(\sum_{k=1}^{3}x_{3k})+300\cdot(\sum_{k=1}^{3}x_{4k})\right)$$

Netrivijalna ograničenja koja su posledica gornje granice maksimalne mesečne prodaje su:

$$\sum_{k=1}^{3}x_{1k}\le 1000,\qquad \sum_{k=1}^{3}x_{2k}\le 1400,$$
$$\sum_{k=1}^{3}x_{3k}\le 800,\qquad \sum_{k=1}^{3}x_{4k}\le 2000.$$

Maksimalno mesečno vreme rada (jedinica mere je h) ako u mesecu ima 22 radna dana je $22\cdot 24=528$. Označimo to vreme sa T. Vremenska ograničenja koja su posledica broja mašina po preduzećima su:

$4x_{11}+5x_{21}+3x_{31}+2x_{41}\le 2T,\quad 2x_{11}+x_{21}+3x_{31}+x_{41}\le 6T,$
$4x_{12}+4x_{22}+2x_{32}+2x_{42}\le 2T,\quad 3x_{12}+x_{22}+3x_{32}+2x_{42}\le 3T,$
$5x_{13}+6x_{23}+3x_{33}+3x_{43}\le 5T,\quad 2x_{13}+2x_{23}+4x_{33}+2x_{43}\le 2T.$

U prvoj koloni su vremenska ograničenja za prvi tip, a u drugoj koloni za drugi tip mašine. Po vrstama su vremenska ograničenja za prvo, drugo i treće preduzeće, redom.

Trivijalna ograničenja su takođe prisutna.

Zadatak. Neka su ispunjeni svi zadati uslovi iz prethodnog primera. Dodatno neka tržište u toku meseca može da apsorbuje 200 komada složenog proizvoda. On se sastoji od: 2 A_1, 1 A_2 i 3 A_4. Dodatno vreme za sklapanje složenog proizvoda nije potrebno. Zarada po jedinici složenog proizvoda je 3500 novčanih jedinica, što je više nego kada se pojedinačno prodaju artikli koji su u sastavu složenog proizvoda. Preradite prethodni model tako da se maksimizuje zarada uzimajući u obzir i složeni proizvod.

Transport poljoprivrednih proizvoda Pretpostavimo da imamo m mesta (polja, parcele, staklenici, voćnjaci, vinogradi...) proizvodnje i n mesta prerade ili potrošnje (sušare, skladišta, pijace, fabrike prerade voća i povrća, hladnjače...) jednog[31] poljoprivrednog proizvoda. Označimo mesta proizvodnje sa $A_1, A_2...A_m$ i mesta potrošnje sa $B_1, B_2...B_n$. Tipovi transportnih sredstava jednog poljoprivrednog gazdinstva razlikuju se po nosivosti, brzini kretanja, eksploatacionim karakteristikama i troškovima prevoza po jedinici robe. Neka gazdinstvo raspolaže sa p_k prevoznih sredstava k-tog tipa $k=1...s$. Označimo sa:

- a_i količina proizvodnje u A_i,
- b_j količina potrošnje u B_j,
- d_k nosivost k-tog tipa prevoznog sredstva,
- c_{ik} trošak usled dolaska praznog prevoznog sredstva k-tog tipa iz garaže do mesta utovara A_i,

[31] Može biti i više poljoprivrednih proizvoda koji dospevaju u isto vreme.

- c'_{jk} trošak usled dolaska praznog prevoznog sredstva k-tog tipa iz mesta istovar B_j do garaže,
- c''_{ijk} trošak usled prevoza poljoprivrednog proizvoda prevoznim sredstvom k-tog tipa iz mesta utovara A_i do mesta istovara B_j,
- x_{ijk} broj prevoznih sredstava k-tog tipa, kojima će biti izvršen prevoz poljoprivrednog proizvoda od A_i do B_j,

pri čemu: $i = 1...m, \;\; j = 1...n \;$ i $\; k = 1...s$.

Dodatno ograničenje je da svako prevozno sredstvo koje koristimo možemo upotrebiti, usled dužine puta, najviše jednom i da pri tom prelazi celokupnu maršrutu: garaža - mesto proizvodnje - mesto potrošnje - garaža.

Matematički model koji odgovara ovom poljoprivrednom transportu ima za cilj da se odrede promenljive x_{ijk} tako da budu optimalno rešenje sledećeg LP problema:

$$\min(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}(c_{ik} + c'_{jk} + c''_{ijk}) \cdot x_{ijk})$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} d_k \cdot x_{ijk} = a_i, \quad i = 1...m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} d_k \cdot x_{ijk} \leq b_j, \quad j = 1...n,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leq p_k, \quad k = 1...s,$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad \text{za sve} \;\; i, j \text{ i } \; k.$$

Prvih m jednačina zahteva da sve što se ubere mora i da se uskladišti, preradi ili proda. Prvih m ograničenja mogu da budu nejednačine tipa $\leq$, ukoliko su na primer transportna sredstva skromna pa ne može sav rod da se preveze u jednoj turi nego se transport vrši u više navrata. U tom slučaju bismo poslednjih s netrivijalnih ograničenja bile jednačine (morali bismo koristiti sva raspoloživa prevozna sredstva).

Druga grupa od n nejednačina znači da su mesta potrošnje B_j ograničenog kapaciteta b_j i da mogu da prime svu proizvedenu robu.

Napomena. Od tri grupe netrivijalnih ograničenja moramo imati bar jednu grupu jednačina. U suprotnom, ako bismo sva netrivijalna ograničenja bila nejednačine tipa $\leq$ optimalan plan transporta bismo bio trivijalno rešenje - svi x_{ijk} su 0, odnosno nema transporta i minimalni troškovi su jednaki 0. To naravno nema smisla.

Zadatak. Razmislite koji polazni problem transporta poljoprivrednih proizvoda, pri istim oznakama, bismo imao matematički zapis koji bismo se od prethodnog razlikovao po tome da je prva grupa ograničenja bila tipa $\leq$, a druga grupa su jednačine. Da li je u tom slučaju proizvodnja veća od "potrošnje"?

Minimizacija vremena transporta

Za vreme sezonske kampanje žetve pšenice, berbe kukuruza (voća, povrća, cveća...), bitna komponenta kvaliteta transporta je utrošeno vreme.

Označimo sa t_{ij} vreme utrošeno na transport robe od polja berbe (žetve, proizvodnje...) A_i do mesta skladištenja (prodaje...) B_j. U A_i obrano je a_i jedinica robe $i = 1...m$, dok u skladištu B_j može da se uskladišti b_j jedinica robe $j = 1...n$.

Treba odrediti onaj plan transporta robe x_{ij}, $i = 1...m$, $j = 1...n$, za koji će vreme najdužeg prevoza biti minimalno, odnosno

$$\min_{x_{ij}} \max\{t_{ij} | i = 1...m,\ j = 1...n\},$$

pri netrivijalnim ograničenjima

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1...m, \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, \qquad j = 1...n.$$

Prvih m jednačina zahteva da sve što se ubere mora i da se uskladišti (transportuje). Preostalih n nejednačina su posledica ograničenih kapaciteta skladišta. Trivijalna ograničenja nenegativnosti $x_{ij} \geq 0$ se i u ovom transportnom problemu podrazumevaju.

Ovako formulisan zadatak zbog nelinearne funkcije cilja nije problem LP. Za rešavanje ovakvih zadataka koriste se poznate, ali složenije metode koje ovde nećemo izlagati.

9.2 Jedan model optimizacije profita u stočarstvu

U stočarstvo imamo za cilj da maksimizujemo proizvodnju mesa, mleka, jaja. Takođe, interesantno je minimizovati troškove ishrane, a da pri tom bude zadovoljavajući kvalitet stočne hrane.

Primer. Kokoške i jaja
Napravite linearan program za sledeći problem: Jedna kokoška ima za tri nedelje dve mogućnosti: ili da položi 12 jaja ili da izleže 4 pileta. Posmatra se proizvodni period od 12 nedelja (4 ciklusa od po 3 nedelje). Nakon toga se sva živina prodaje: pilići iz prvog ciklusa i kokoške po ceni od K dinara, pilići iz drugog i trećeg ciklusa po ceni od P dinara po komadu, a jaja po ceni od J dinara po komadu (K>P>J). Treba optimizovati zaradu. U proizvodnju ulazimo sa 100 kokošaka i 100 jaja.

Rešenje.

	I ciklus	II ciklus	III ciklus
nosilje	$100-k_1$	$100-k_2$	$100-k_3$
kvočke	k_1	k_2	k_3
stara jaja	100	$100-4k_1$	$1300-52k_1-4k_2$
nova jaja	–	$12(100-4k_1)$	$12(100-4k_2)$
uk. jaja	100	$1300-52k_1$	$2500-52(k_1+k_2)$

	IV ciklus
nosilje	$100-k_4$
kvočke	k_4
stara jaja	$2500-52(k_1+k_2)-4k_3$
nova jaja	$12(100-4k_3)$
uk. jaja	$3700-52(k_1+k_2+k_3)$

Znamo da se više isplati (ako je K i P više nego tri puta veće od J, što obično i jeste ispunjeno) da kokoške legu piliće nego da nose jaja. Međutim, imamo ograničenu količinu jaja. U prvom ciklusu najviše 25 kokošaka može da leže piliće. U narednim ciklusima proizvodnje je slično, broj kokošaka-kvočki je ograničen brojem jaja. Označimo sa k_i broj kokošaka koje ležu piliće u i-tom ciklusu proizvodnje (i = 1,2,3,4). Kako gornja granica za k_i zavisi isključivo od broja jaja u i-tom ciklusu, u tabeli analiziramo koliko ukupno ima jaja u ciklusima:

Na početku IV ciklusa imamo $3700 - 52(k_1 + k_2 + k_3)$ jaja. U toku IV ciklusa će se potrošiti $4k_4$ jaja za nove piliće, i proizvešće se $12(100 - k_4)$ novih jaja. Tako na kraju 12 nedelja imamo $4900 - 52(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$ jaja.

Zaradu koju dobijamo kada prodamo sve kokoške, piliće i preostala jaja na kraju IV ciklusa je:
$K(100 + 4k_1) + 4P(k_2 + k_3 + k_4) + J(4900 - 52(k_1 + k_2 + k_3 + k_4))$. Konstantne sabirke možemo izbaciti a da se optimalan plan proizvodnje ne promeni, te je funkcija cilja:

$$\max(4Kk_1 + 4P(k_2 + k_3 + k_4) - 52J(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)).$$

Ograničenja za broj kvočaka, redom po ciklusima su:

$$\begin{gathered} 0 \leq 4k_1 \leq 100, \\ 0 \leq 4k_2 \leq 1300 - 52k_1, \\ 0 \leq 4k_3 \leq 2500 - 52(k_1 + k_2), \\ 0 \leq 4k_4 \leq 3700 - 52(k_1 + k_2 + k_3). \end{gathered}$$

Dodatan uslov celobrojnosti k_i, $i = 1, 2, 3, 4$, se takođe zahteva.

Optimizacija količine stoke, u zavisnosti od zaliha stočne hrane sa kojima raspolaže farma, sa ciljem ostvarivanja maksimalne dobiti, je modelirana u sledećem primeru.

Primer. Uprava farme je odlučila da gaji v vrsta stoke. Na zalihama ima h osnovnih sastojaka stočne hrane u količinama od k_i, $i = 1...h$. U svrhu matematičkog modeliranja problema uvedimo dodatne oznake:

- x_j nepoznati broj stoke j-te vrste $j = 1...v$,
- m_j minimalan broj stoke j-te vrste, $j = 1...v$, ispod koga se ne isplati gajiti stoku j-te vrste,
- b_{ij} potrebna minimalna količina i-tog osnovnog sastojka stočne hrane po jedinici stoke j-te vrste, $i = 1...h$, $j = 1...v$,
- c_j očekivana cena po grlu stoke j-te vrste.

Rešenje. Funkcija cilja je

$$\max(\sum_{j=1}^{v} c_j \cdot x_j).$$

Kvalitet stočne hrane zahteva ispunjenje sledećih nejednačina.

$$\sum_{j=1}^{v} b_{ij} \cdot x_j \leq k_i, \qquad i = 1...h.$$

Nepoznate x_j su prirodni brojevi čija je donja granica m_j:

$$x_j \geq m_j, \quad x_j \in \mathcal{N}, \qquad j = 1...v.$$

9.3 Primeri primene LP van agrobiznisa

Primena linearnog programiranja je široko rasprostranjena u svim oblastima privrede, saobraćaja, trgovine, vojne industrije, energetike... U knjizi [17] profesora Jovana Petrića, pionira operacionih istraživanja na našim prostorima, detaljno su izložene veoma raznolike primene LP u vrlo različitim oblastima.

Navodima dva primera iz ugostiteljstva i jedan iz proizvodnje ambalaže:

Primer 1. Problem stolnjaka
U restoranu treba obezbediti čiste stolnjake u toku m uzastopnih dana. Za i-ti dan je potrebno m_i čaršava. Cena jednog stolnjaka je b dinara. Pranje u servisu I u roku od 1 dana košta c dinara, pranje u servisu II u roku od 3 dana staje d dinara ($b > c > d$ se podrazumeva). Stolnjak isprljan u ponedeljak uveče ako ide na pranje u servis I može da se koristi u utorak, a ako se pere u servisu II tek u četvrtak. Treba napisati model za minimizaciju ukupnih troškova za stolnjake za m dana.

Rešenje. Označimo nepoznate sa:

x broj kupljenih novih stolnjaka (sve što planiramo da kupimo, kupimo odmah),

y_i broj stolnjaka koji su poslani na pranje u servis I i-tog dana,

z_i broj stolnjaka koji su poslani na pranje u servis II i-tog dana.

U tabeli je analizirano stanje stolnjaka u toku prvih 5 dana:

na raspolaganju	iz I	iz II	treba
x	-	-	m_1
$x - m_1$	y_1	-	m_2
$x - m_1 + y_1 - m_2$	y_2	-	m_3
$x - m_1 + y_1 - m_2 + y_2 - m_3$	y_3	z_1	m_4
$x - m_1 + y_1 - m_2 + y_2 - m_3 + y_3 + z_1 - m_4$	y_4	z_2	m_5

Ograničenje za prvi dan i ograničenja celobrojnosti su:

$$x \geq m_1, \quad x, y_i, z_j \in \mathcal{N} \cup \{0\},\ i = 1...m-1\ j = 1...m-3.$$

Ograničenja za 2. i 3. dan u kojima mogu da se koriste i stolnjaci (promenljive y_1, y_2) oprani u servisu I su:

$$x + y_1 - m_1 \geq m_2, \qquad x + y_1 + y_2 - m_1 - m_2 \geq m_3.$$

Od 4. do m-tog dana u restoran dodatno stižu oprani stolnjaci iz servisa II (promenljive z_i) te su ograničenja:

$$x + \sum_{i=1}^{d-1} y_i + \sum_{i=1}^{d-3} z_i \geq \sum_{i=1}^{d} m_i,\ d = 4...m.$$

Funkcija cilja je

$$\min(bx + c\sum_{i=1}^{m-1} y_i + d\sum_{i=1}^{m-3} z_i).$$

Primer 2. Kelneri
U jednom non-stop restoranu potrebe za kelnerima se menjaju u toku dana kao što je dato u tabeli:

r. vreme	kelneri
0 - 4	3
4 - 8	2
8 - 12	10
12 - 16	14
16 - 20	8
20 - 24	10

Odredite minimalan broj kelnera, čije radno vreme je 8 uzastopnih časova, tako da potrebe restorana u toku celog dana budu zadovoljene.
Rešenje. Označimo sa k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 i k_6, broj kelnera koji počinju da rade u 0, 4, 8, 12, 16 i 20 časova. Znači treba rešiti

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\min(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6)} \\ k_1 + k_6 \geq 3, & k_2 + k_1 \geq 2, \\ k_3 + k_2 \geq 10, & k_4 + k_3 \geq 14, \\ k_5 + k_4 \geq 8, & k_6 + k_5 \geq 10, \\ \multicolumn{2}{c}{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 \in \mathcal{N} \cup \{0\}.} \end{array}$$

Kako je u pitanju problem celobrojnog programiranja, zadatak ćemo rešiti direktnom analizom.

Ako saberemo prvu kolonu nejednačina dobijemo izvedeno ograničenje da je ukupan broj kelnera veći ili jednak 21, ako saberemo drugu kolonu nejednačina dobijamo da je ukupan broj kelnera veći ili jednak 26. Kada saberemo sve nejednačine imamo da je dvostruki broj kelnera veći ili jednak od 47, odnosno da je ukupan broj kelnera veći ili jednak od 24. Znači, najoštrije ograničenje je da kelnera mora biti bar 26. Pokušajmo da sa 26 kelnera obezbedimo potrebe restorana. Najmanji broj kelnera treba od 4-8 h, stoga u odgovarajućem ograničenju $k_1 + k_2 = 2$, k_1 može biti 0 ili 1 ili 2. Ako je $k_1 = 0$ onda je $k_2 = 2$. Iz $k_3 + k_2 = 10$ je $k_3 = 8$, te je iz preostalih ograničenja $k_4 = 6$, zatim $k_5 = 2$, $k_6 = 8$. Ovo bismo zaista bilo optimalno rešenje (0,2,8,6,2,8) jer ukupno mora biti bar 26 kelnera, a upravo sa 26 kelnera su sva ograničenja sem prvog (ima 5 kelnera više od potrebe) zadovoljena sa donjom granicom potreba.
Zadatak. Nađeno rešenje nije jedino optimalno rešenje, odredite bar još jedno optimalno rešenje sa 26 kelnera.

Primer 3. Pakovanje
U kvadar čije su dimenzije x dužina, y širina i z visina, treba smestiti 1 m^3 rastresite materije. Treba napraviti kvadar tako da cena ambalaže bude minimalna. Za dno i bočne strane materijal je besplatan ali ga ima u ograničenim količinama, 4 m^2. Materijal za prednju i zadnju stranu ima cenu C_1, a materijal za gornju stranu ima cenu C_2. Napisati

model za minimizaciju troškova proizvodnje kvadra, tj. postaviti model za nalaženje idealnih dimenzija ambalaže.

Rešenje Napisati matematički model za ovaj problem pakovanja nije teško, ali ga je teško rešiti, jer se radi o nelinearnim ograničenjima i nelinearnoj funkciji cilja:

$$\min(2C_1xz + C_2xy)$$

$$xyz = 1, \qquad xy + 2yz \leq 4,$$

$$x, y, z \geq 0.$$

9.3.1 Zadaci

[32]

9.1. Meso sadrži 20% belančevina i 2% ugljenih hidrata, a krompir 1% belančevina i 20% ugljenih hidrata. Jedan kg mesa košta 210 din, a krompir je 15 din. Koliko mesa i krompira treba kupiti da bismo dobili najmanje 4,6 dkg belančevina i najmanje 40,26 dkg ugljenih hidrata a da pri tom potrošimo najmanje novca?

Rešenje. (13 dkg,200 dkg; 62,5 dinara)

9.2. Kilogram hleba košta 30 din i sadrži 2000 kalorija i 50 g belančevina; a kilogram sira je 125 din i sadrži 4000 kalorija i 200 g belančevina. Koliko hleba i sira treba kupiti da bismo u obe namirnice zajedno bilo najmanje 3000 kalorija i najmanje 100 g belančevina, a da bismo potrošili najmanje novca?

Rešenje. 1 kg hleba, 0,25 kg sira; 56,25 din

9.3. Prva namirnica sadrži 3 jedinice prvog i 1 jedinicu drugog sastojka. Druga namirnica sadrži 1 jedinicu prvog i 4 jedinice drugog sastojka. Cena prve namirnice je 2, a druge 1 novčanu jedinicu. Kupovinom namirnica želimo dobiti najmanje 6 jedinica prvog i 13 jedinica drugog sastojka. Koliko od svake namirnice treba kupiti da zadovoljimo zahteve i da utrošimo najmanje novca?

Rešenje. (1,3;5)

9.4. Napišite sledeći problem LP. Koliko jabuka, krušaka, kajsija, bresaka, malina i banana treba uzeti za voćnu salatu (za 4 osobe) a da bismo u voćnoj salati imali bar 40mg vitamina C, bar 2,4 mg B_3, bar 0,45 mg B_1 i bar 2,4 mg gvožđa a da kalorijska vrednost voćnog kupa bude minimalna. U tabeli su dati podaci o sadržaju ovih vitamina, gvožđa i kalorija u 100gr voća.

(mg)	C	B_1	B_3	Fe	Kalorije
jabuka	9	0,04	0,3	0,35	57
kruška	5	0,02	0,1	0,4	62
kajsija	8	0,04	0,7	1	50
breskva	8	0,03	0,9	0,5	50
malina	20	0,03	0,3	0,9	44
banana	8	0,1	0,6	0,6	94

Problem postavite i odredite prvu tabelu simpleks metode.

9.5. Proizvodni pogon sa dva tipa mašina, obrađuje 2 tipa proizvoda. Komad prvog proizvoda se obrađuje na obe mašine po 2 jedinice vremena; komad drugog proizvoda

[32] Zadaci delimično preuzeti iz [25].

obrađuje se na prvoj mašini 3, a na drugoj 1 jedinicu vremena. Pogon ima na raspolaganju za prvu mašinu 8, a za drugu 4 jedinice vremena. Vrednost prvog proizvoda je 4, a drugog 3 novčane jedinice. Kako da preduzeće programira obradu da bismo dobit od prodaje proizvoda bila što veća?
Rešenje. (1, 2; 10)

9.6. Preduzeće proizvodi dva tipa proizvoda za čiju proizvodnju su potrebna 4 tipa sirovina. Za jedinicu prvog proizvoda redom je potrebno 5, 19, 31 i 21 jedinica sirovina, dok je za drugi proizvod potrebno 16, 26, 22 i 5 jedinica sirovina. Preduzeće ima na raspolaganju po 1296, 2454, 3942 i 1785 jedinica sirovina. Prvi proizvod se prodaje po 6, a drugi po 2 n.j. Kako isplanirati proizvodnju tako da se dobije maksimalan prihod od prodaje robe?
Rešenje. (80, 21; 521)

9.7. Preduzeće proizvodi dva tipa proizvoda za čiju proizvodnju su potrebne 3 sirovine. Za jedinicu prvog proizvoda potrebna je po 1 jedinica svake sirovine. Za drugi proizvod potrebno je 3 jedinice prve i 1 jedinica druge sirovine. Preduzeće ima na raspolaganju po 15, 7 i 5 jedinica prve, druge i treće sirovine. Prvi proizvod se prodaje po 2, a drugi po 1 n.j. Kako isplanirati proizvodnju tako da se dobije maksimalan prihod od prodaje robe?
Rešenje. (5, 2; 12)

9.8. Dva tipa vitamina A i B možemo kupiti u dva tipa tableta P i Q. Tableta P sadrži 4 jedinice vitamina A i 3 jedinice vitamina B; tableta Q sadrži jednu jedinicu vitamina A i 4 jedinice vitamina B. Tableta P košta 17, a tableta Q 14 novčanih jedinica. Potrebno nam je najmanje 7 jedinica vitamina A i 15 jedinica vitamina B. Koliko tableta svakog tipa treba kupiti da bismo se zahtevi za vitaminima ispunili, a cena bila minimalna?
Rešenje. (1,3;59)

9.9. Radnu grupu čine 200 poljoprivrednih radnika i 100 zidara. Za rad na polju potrebno je 170, a za zidarske radove 130 radnika. Poljoprivredni radnik stvori na polju 100, a na gradilištu 70 jedinica dohotka; zidar na polju stvori 80, a na gradilištu 110 jedinica dohodka. Odredi razmeštaj radnika za koji je ukupni dohodak grupe najveći?
Rešenje. ((170,30), (0,100); 30100)

9.10. Na šahovskom turniru na 10 tabli, domaća ekipa ima 3 velemajstora i 7 majstora. Protivnička ekipa ima 6 velemajstora i 4 majstora. Ako domaći velemajstor igra sa velemajstorom očekuje se u proseku 0,4 poena, a sa majstorom 0,9 poena; ako domaći majstor igra sa velemajstorom očekuje se 0,1, a sa majstorom 0,5 poena. Protivnik je rasporedio velemajstore na prve, a majstore na poslednje table. Odredi najpovoljniju i najnepovoljniju postavu domaćina.
Rešenje. ((0,3),(6,1); 3,8) i ((3,0),(3,4); 3,5).

9.11. U preduzeću sa tri organizacione celine, prva radi sa 30%, druga sa 10% a treća sa 40% profita. Ukupna investiciona sredstva, koja iznose 40 novčanih jedinica, treba u celosti podeliti tako da prva jedinica ne dobije manje od 8 novčanih jedinica, druga ne manje od 10 i treća ne više od druge. Kako rasporediti investiciona sredstva tako da preduzeće ostvari najveći profit?
Rešenje. (20, 10, 10; 11)

9.12. Nađite optimalno rešenje za problem linearnog programiranja:

$$\begin{gathered}\max(x_1 - 5x_2)\\ 3x_1 - x_2 \leq -1\\ 2x_1 + x_2 \geq 3\\ x_1, x_2 \geq 0\end{gathered}$$

1. geometrijskom metodom;
2. simpleks metodom.

9.13. Rešite: Tri osnovne komponente K_1, K_2, K_3 za smešu stočne hrane su prisutne na tržištu. U tabeli je data cena komponenti i procentualna zastupljenost satojaka A, B i C u pojedinim komponentama.

komponente	K_1	K_2	K_3
cena	100	110	150
A	10%	10%	20%
B	80%	70%	70%
C	10%	20%	10%

Odredite koliko treba da bude zastupljena pojedina komponenta u smesi stočne hrane tako da dobijemo najjeftiniju smesu kod koje je zadovoljeno da sadrži: 15% sastojka A, 70% sastojka B i 15% sastojka C.

9.14. Jedan traktor tipa A za jedan dan uzore 5 hektara kukuruzišta ili 7 hektara kupusišta. Jedan traktor tipa B za isto vreme uzore 6 hektara kukuruzišta i 10 hektara kupusišta. Preduzeće raspolaže sa 5 traktora tipa A i 3 traktora tipa tipa B. Da li je moguće za tri dana uzorati 100 hektara kukuruzišta i 150 hektara kupusišta? Pretpostavka je da traktori koji se prvog dana pošalju na jedan tip parcela rade na istom tipu parcela sva tri dana.

9.15. Dva proizvođača isporučuju robu za dva potrošača. Prvi proizvođač proizvodi 22, drugi 28 jedinica robe. Prvom potrošaču je potrebno 20, drugom 30 jedinica robe. Troškovi prevoza su po jedinici robe: od prvog proizvođača do prvog potrošača 35, do drugog potrošača 30 novčanih jedinica; od drugog proizvođača do prvog potrošača 25, do drugog potrošača 22 novčane jedinice. Sastavi tabelu za taj transportni problem! Kako da proizvođači isporuče robu da bismo ukupni troškovi prevoza bili najmanji?

Rešenje: (0,22,20,8;1336)

9.16. Rešite problem transporta koji je dat tabelom.

Početna TP tabela	Klanice		10 t
	K_1	K_2	
Farma F_1	2	3	8
Farma F_2	4	7	5
kapacitet / 10t	4	9	13

Rešenje: (0,8,4,1;47)

9.17. Odredite optimalno rešenje TP problema zadatog tabelom:

1	2	9
3	4	16
6	19	25

Rešenje: (Svi mogući transporti su optimalni;76)

9.18. Nađite plan transporta sa minimalnim troškom.

Početna TP tabela	Mlinovi M_1	M_2	10 t
Silos S_1	6	4	15
Silos S_2	5	8	20
kapacitet / 10t	25	10	35

Rešenje: (5,10,20,0;170)

9.19. Odredite optimalan transport ako su podaci dati tabelom.

Početna TP tabela	Šumska gazd. A_1	A_2	A_3	kapac. 100m^3
stovarište B_1	3	5	4	9
stovarište B_2	5	2	6	6
količ. ogreva	4	6	5	15

Rešenje: (4,0,5,0,6,0;44)

9.20. Proizvođači A i B sa ponudom od 7 i 6 jedinica robe snabdevaju tri trgovine P, Q i R, čije su potražnje redom 4, 6 i 3 jedinice robe. Troškovi prevoza po jedinici robe od A do P iznose 5, do Q 3 i do R 6, od B do P 4, do Q 3 i do R 2 novčane jedinice. Odredi optimalan transport

a) 2D-geometrijskom metodom;
b) simpleks metodom.

Rešenje: (1,6,0,3,0,3;41)

9.21. Koliki su minimalni transportni troškovi za sledeći problem transporta šećerne repe?

Početna TP tabela	Potrošači A_1	A_2	A_3	kapac. 100m^3
proizvođač B_1	2	2	2	6
proizvođač B_2	3	3	3	7
kapacitet	6	4	3	13

Rešenje: (svi transporti su optimalni;33)

9.22. Rešite:

Početna TP tabela	Rafinerije A_1	Rafinerije A_2	s. nafta 1000 t
Bušotina B_1	10	8	2
Bušotina B_2	11	8	10
Bušotina B_3	9	12	8
kapacitet / 1000t	7	13	20

Rešenje: (0,2,0,10,7,1;171)

9.23. Postavite problem i nađite optimalno rešenje. Rolne selotejpa duge su 33 cm. Treba nam 19 traka selotejpa od 7 cm i 8 traka dužine 3 cm. Koliko najmanje rolni treba kupiti?

Rešenje. Jedinstveno optimalno rešenje je 5 rolni. Od 4 rolne sečemo 4 trake po 7 cm i 1 traku po 3 cm. Petu rolnu sečemo: 3 trake po 7 i 4 po 3 cm.

9.24. Preduzeće "Borovi", za prevoz robe poseduje 3 kamiona nosivosti 10t u garaži G, 5 kamiona nosivosti 5t u mestu A, i 10 kamiona nosivosti 2t u mestu B. Poznato je da se cene transporta po km odnose u razmeri 3:2:1 (cena prevoza kamiona od 2t po kilometru je 3 puta jevtinija od cene prevoza kamionom od 10t i 2 puta jevtinija od prevoza kamionom od 5t). Potrebno je izvršiti transport 50t robe iz mesta A u mesto B. Rastojanje između mesta A i B je 40 km, između A i G je 30 km i rastojanje između B i garaže je 15 km. Nakon obavljenog transporta svi kamioni moraju da se vrate u garažu. Cena prevoza praznih kamiona je duplo jevtinija od cene prevoza natovarenih kamiona. Kako pod datim uslovima izvršiti transport na najjevtiniji način?

Rešenje. (x, y, z)=(3,4,0) funkcija cilja je $(197,5x + 95y + 67,5z)c$, gde je c cena transporta kamionom od 2t

9.25. Napisati linearan program za problem: U garaži G imamo 10 kamiona nosivosti 2 t, 4 nosivosti 5 t, i 2 nosivosti 10 t. Treba preneti 10 t iz mesta B u A i 20 t iz C u A. U tabelama su data: rastojanja između mesta i cene transporta po km.

km	A	B	C
G	50	40	35
A		60	20

cene/km	2t	5t	10t
prazan	60	100	180
pun	100	200	450

Neka je teret zrnast i može da se usitni i neka je transport hitan pa se odvija na relacijama G-B-A-G i G-C-A-G.

9.26. Rešite MODI metodom sledeći problem transporta.

	15	10	7	13
6	2	9	15	18
15	3	8	14	17
5	5	7	12	15
19	16	11	17	7

Ponuda i potražnja su u prvoj koloni i prvoj vrsti, a cene transporta su u preostalim poljima tabele.

Početni plan transporta odredite:

- metodom SZ-ugla,
- Vogelovom metodom.

Rešenje. (6, 0, 0, 0; 9, 6, 0, 0; 0, 0, 5, 0; 0, 4, 2, 13; 316) i (6, 0, 0, 0; 9, 4, 2, 0; 0, 0, 5, 0; 0, 6, 0, 13; 316)

9.27. Iz tri centra u kojima ima 20, 12 i 50 jedinica robe, razvozimo robu u tri odredišta sa potražnjom od 23, 19 i 40. Transportne cene po jedinici robe od prvog centra ponude su 54, 60 i 61, od drugog 56, 62 i 63 i od trećeg centra 60, 66 i 69 novčanih jedinica. Kako organizovati prevoz a da bismo ukupni troškovi transporta bili minimalni?
Rešenje. (0, 0, 20; 0, 0, 12; 23, 19, 8; 5162)

9.28. Iz tri fabrike u kojima ima 6, 10 i 9 jedinica proizvoda, razvozimo robu u četiri skladišta sa kapacitetom od 4, 6, 7 i 8 jedinica. Transportne cene po jedinici od prve fabrike do skladišta su 20, 26, 46 i 36, od druge fabrike 22, 48, 32 i 38 i od treće fabrike 50, 28, 30 i 40 novčanih jedinica. Kako organizovati prevoz a da bismo ukupni troškovi prevoza bili minimalni?
Rešenje. (3,3,0,0; 0,3,7,0; 1,0,0,8; 758) i (0,3,0,3; 0,3,7,0; 4,0,0,5; 758).

9.29. Rešite MODI metodom problem transporta zadat tabelom.

	446	503	737	534
524	62	51	86	84
293	23	32	41	54
775	31	73	44	72
322	64	22	52	34
306	85	63	53	61

Ponuda i potražnja su u prvoj koloni i prvoj vrsti, a cene transporta su u preostalim poljima tabele.
Rešenje. (21, 503, 0, 0; 293, 0, 0, 0; 132, 0, 643, 0; 0, 0, 0, 322; 0, 0, 94, 212; 94 940)

Glava 10.

10 Realne funkcije jedne realne promenljive

10.1 Granična vrednost funkcije

Da bismo definisali graničnu vrednost funkcije podsetimo se niza i njegove granične vrednosti (poglavlje 1.6).

Brojni nizovi su funkcije koje preslikavaju skup prirodnih brojeva u skup realnih brojeva.

Tako su nizovi funkcije $a, b, c : \mathcal{N} \to \mathcal{R}$, definisane redom sa

$a(n) = (-1)^n, \qquad b(n) = \dfrac{1}{n^3}, \qquad c(n) = \sin\, n,$ [33]

za svaki prirodan broj n. U daljem tekstu ćemo funkciju koja je niz označavati sa masnim slovima kao **a**, **b**, **c**, ...

Uređenost i prebrojivost skupa prirodnih brojeva nam omogućuje da redom slike niza **a** [34] poređamo u niz

$$a(1),\quad a(2),\quad a(3),\quad a(4),\quad a(5),\quad ...$$

realnih brojeva. Stoga je uobičajeno da se umesto redom $a(1), a(2), a(3), ...$ piše $a_1,\ a_2,\ a_3, ...$ Tako zapisujemo i **opšti član niza a** sa $a_n,\ n \in \mathcal{N}$. Nizovi se najčešće zadaju njihovim opštim članom.

Tako, na primer, sledeći niz brojeva (označimo ga sa **a**)

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{10},\ ...$$

ima opšti član oblika $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathcal{N}$. Njegovi članovi su redom $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{3}$, ...

Geometrijski i aritmetički niz se često pojavljuju u jednostavnijim problemima. Zato su detaljnije obrađeni u poglavlju 1.6.1. Formula za određivanje zbira prvih n članova geometrijskog niza je već korištena u uvodnom odeljku privrednog računa (4.2.1), međutim na zanimljivije pitanje da li postoji zbir *svih* članova nekog niza, odgovor se može naći na primer u [9].

Kod geometrijskog i aritmetičkog niza, članove niza smo redom označili sa

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad ...$$

Znači, prvi član niza je a_0, drugi je a_1, treći a_2,... Stoga su oni preslikavanje proširenog skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva $a : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{R}$, a ne $\mathcal{N} \to \mathcal{R}$. Razlozi su tehničke prirode i mogu se izbeći.

Neki nizovi su takvi da im je svaki sledeći član veći od prethodnog. Njih zovemo **rastući** nizovi. Slično, **opadajući** nizovi su oni kod kojih je svaki sledeći član manji od prethodnog.

---

[33] sin računamo u radijanima

[34] Za niz **a** u literaturi se koriste i oznake $(a)_{n\in\mathcal{N}}$ [9], $\{a_n\}$ [10] ili (a_n) [16].

Niz je **konvergentan** ukoliko članovi niza *teže* (*konvergiraju*) ka *fiksnom* realnom broju, kada indeks niza n teži ∞ (neograničeno raste). Taj broj zovemo *granica* (limes) niza.

Članovi niza **b** : $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, ...$ su svi pozitivni, manji od 1 i prilično brzo se smanjuju, pa je jasno da kada n teži ∞ opšti član niza **b** teži ka 0. Sa druge strane, članovi niza **a** se isto ponašaju, bez obzira na vrednost indeksa n: 1, -1, 1, -1, ... i očigledno ne teže jednom fiksnom realnom broju. Za niz **c**, sa opštim članom $c_n = \sin n,\ n \in \mathcal{N}$, nije jednostavno utvrditi da li ima granicu ili ne.

Niz **a konvergira** ka **granici** g, što označavamo sa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g, \quad \text{ili sa} \quad a_n \to g \text{ kad } n \to \infty,$$

ako za svaki pozitivan realan broj ϵ, postoji indeks niza $n_0 \in \mathcal{N}$, tako da svi članovi niza sa indeksom većim od n_0 pripadaju intervalu $(g-\epsilon, g+\epsilon)$, tj. $|g - a_n| < \epsilon,\ \forall n \geq n_0$.

Ukoliko je rastući niz **ograničen odozgo**, što znači da su svi članovi niza manji od nekog broja, on je i konvergentan.

Jedan takav konvergentan (rastući i ograničen odozgo) niz je niz **e** sa opštim članom oblika: $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathcal{N}$. Posebna interesantnost ovog niza je što je potreba za njegovim proučavanjem proistekla iz bankarstva. Lako je izračunati (proverite) da su članovi ovog niza, redom, sledeći realni brojevi:
$e_1 = 2,\ e_2 = 2,25,\ e_3 = 2,\dot{3}\dot{7},\ e_4 = 2,4414,\ e_5 = 2,48832...\ e_{100} = 2,70481...\ e_{10000} = 2,71825...$

Što je veći indeks niza **e** to je odgovarajući član niza bliže iracionalnom broju e=2,71828182846... koji je granica niza. Znači, važi da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Problem određivanja granice niza **e** je postavio poznati švajcarski matematičar Jakov Bernuli na osnovu sledećeg "zelenaškog" zadatka:
Ako kreditor da izvesnu sumu novca na zajam sa kamatom, pod uslovom da se u svakom pojedinom trenutku proporcionalni deo godišnje kamate dodaje kapitalu, koliko će mu se dugovati na kraju godine?

Analizirajmo problem na pojednostavljenim parametrima. Neka pozajmljen kapital iznosi 1 dinar i neka je godišnja kamata 100%. Tada bi uz mesečno ukamaćivanje dug na kraju godine bio $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$, dok bi sa dnevnim ukamaćivanjem dug na kraju godine bio $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$. Neprekidnim (kontinuiranim) ukamaćivanjem (svakog trenutka se dug uvećava za kamatu), ukupan dug na kraju godine bi bio

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{dinara.}$$

Napomena. Broj e je iracionalan. Drugi, veoma poznat iracionalan broj je π. On je povezan sa merama (površina, obim kruga...) geometrijskih objekata i otkriven je mnogo ranije od iracionalnog broja e.

Granična vrednost realne funkcije

Da bismo sa granice niza (specijalne realne funkcije), prešli na granicu opšte realne funkcije, potrebno je da uvedemo pojam tačke nagomilavanja.

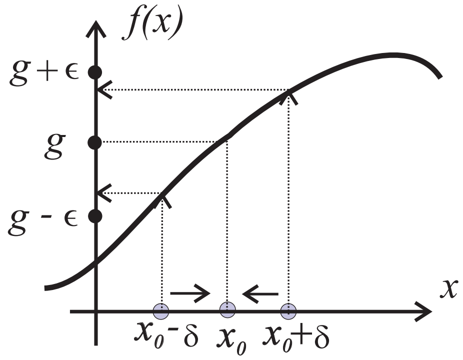
Realan broj x_0 je **tačka nagomilavanja** *skupa D ako u svakom otvorenom intervalu oko tačke x_0 postoji bar jedan element skupa D, različit od x_0, odnosno, ako*

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in D, x \neq x_0)\ |x - x_0| < \delta.$$

Prethodna definicija ima za posledicu: ako je tačka x_0 tačka nagomilavanja skupa D onda je u svakom otvorenom intervalu oko tačke x_0 bezbroj elemenata skupa D. Naime, ako posmatramo proizvoljno $\delta_1 > 0$, po definiciji tačke nagomilavanja, postoji tačka $x_1 \in D$, tako da je $x_1 \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Zatim izaberemo $0 < \delta_2 < |x_0 - x_1|$ tako da tačka $x_1 \notin (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$, međutim, mora postojati nova tačka x_2 iz skupa D tako da $x_2 \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Tačka x_2 pripada i prvom intervalu jer je $\delta_2 < \delta_1$. Izborom novih, sve manjih $\delta_i > 0$ i novih tačaka x_i koje bi pripadale i početnom intervalu, početni interval bi sadržao bezbroj tačaka iz skupa D.

Primeri.

1. Tačke nagomilavanja otvorenog intervala $(1, 2)$ su sve tačke zatvorenog intervala $[1, 2]$.
2. Tačke nagomilavanja skupa $\{\frac{(-1)^n \cdot n}{n+1},\ n \in \mathcal{N}\}$ su -1 i 1.
3. Jedina tačka nagomilavanja skupa $\{\frac{1}{n^2},\ n \in \mathcal{N}\}$ je 0.



Slika 10. Funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0

Neka je realna funkcija f definisana sa $f : D \to R$, na domenu $D \subset \mathcal{R}$. Neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa D. Tada kažemo da funkcija f ima **graničnu vrednost** g **u tački** *x_0 ako za svaki pozitivan broj ϵ postoji pozitivan broj δ (δ zavisi od x_0 i od ϵ, $\delta(\epsilon, x_0)$) tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in D)(\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \epsilon\ ).$$

Tada pišemo da je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

i čitamo limes funkcije f kad x teži x_0 je broj g.

Na sl. 10 je data ilustracija $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$. Uočimo da je bitan detalj da za svaki interval (proizvoljno mali) oko tačke g, postoji interval oko tačke x_0 tako da su slike svih tačaka iz tog intervala, unutar intervala oko g.

Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena D realne funkcije f. Tada funkcija f ima **desnu graničnu vrednost** d **u tački** x_0 *ako je zadovoljeno da za svaki pozitivan broj ϵ postoji pozitivan broj δ tako da važi implikacija $(\forall x \in D)(\ 0 < x - x_0 < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - d| < \epsilon\ )$, što zapisujemo sa*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = d.$$

Kod desne granične vrednosti posmatramo šta se dešava kada se približavamo tački x_0 preko brojeva većih od x_0.

Leva granična vrednost funkcije nastaje kada težimo tački x_0 preko brojeva koji su manji od x_0:

Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena D realne funkcije f. Tada funkcija f ima **levu graničnu vrednost** l **u tački** x_0 *ako je zadovoljeno da za svaki pozitivan broj ϵ postoji pozitivan broj δ tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in D)(\ 0 < x_0 - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon\ ),$$

što zapisujemo sa

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = l.$$

Neka domen D realne funkcije f sadrži interval $(-\infty, a)$ (odn. $(b, +\infty)$), tada f ima **graničnu vrednost** g **u** $-\infty$ *(odn.* **u** $+\infty$*) ako je zadovoljeno da za svaki pozitivan broj ϵ postoji pozitivan broj M tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in D)(\ x < -M\ \ (odn.\ x > M)) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \epsilon\ ),$$

što zapisujemo sa

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g \quad (odn.\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = g\ ).$$

Jedna od najdirektnijih primena granične vrednosti funkcije je određivanje asimptota grafika funkcija.

10.1.1 Asimptote grafika funkcije

Prava sa jednačinom $y = kx + n, \quad k, n \in \mathcal{R}$, je asimptota grafika funkcije f ukoliko se funkcija u beskonačnosti "ponaša" isto kao i prava, odnosno ako je

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0.$$

Odnosno, prava $y = kx + n$ je asimptota funkcije f ako se rastojanje između odgovarajućih tačaka $(x, f(x))$ i $(x, kx + n)$ njihovih grafika neograničeno smanjuje (teži 0) kada argument x ovih funkcija neograničeno raste (teži $+\infty$) ili opada (teži $-\infty$).

U odnosu na položaj asimptote prema koordinatnim osama razlikujemo tri tipa prava **horizontalne** za $k = 0$ i **vertikalne i kose** za $k \neq 0$.

Horizontalna asimtota $y = a$, nastaje kada postoji konačna granična vrednost funkcije u beskonačnosti:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \vee \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a\ , \quad a \in \mathcal{R}.$$

Kako $f(x)$ može da teži a ili preko brojeva većih od a, tj. da teži a^+ ili preko brojeva manjih od a, tj. da teži a^- imamo dve ekskluzivno disjunktne situacije za ponašanje vrednosti funkcije. Dakle kada $x \to \pm\infty$ ako $f(x) \to a^+$ tada je grafik funkcije iznad horizantalne asimptote $y = a$, a ispod asimptote ako $f(x) \to a^-$. Kao i kod vertikalne asimptote i kod horizontalne imamo 8 različitih situacija za položaj grafika funkcije u odnosu na asimptotu. Skicirajte ih.

Kosa asimptota $y = kx + n$, $\;k \neq 0$, u $+\infty$ ili $-\infty$, nastaje kada postoji granična vrednost

$$0 \neq k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \text{ Zatim određujemo i } n, \quad n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$$

Ukoliko je prvi limes jednak 0 onda funkcija f nema kosu asimptotu. Slični alternativni zahtevi za egzistenciju kose asmptote treba da budu ispunjeni ili kad $x \to -\infty$ ili kad $x \to \pm\infty$. Dodatno, postoje dve isključive mogućnosti za ponašanje funkcije $\dfrac{f(x)}{x}$ u prvom limesu - ili teži ka k^+ ili ka k^-. U prvom slučaju grafik funkcije $f(x)$ je iznad, a u drugom ispod grafika asimptote $y = kx + n$ u asimptotskom ponašanju funkcije. Dakle naveli smo 6 suštinski različitih načina za egzistenciju kose asimptote. Skicirajte ih.

Moguća su još dva dodatna uslova za ekzistenciju kose asimptote:

- $$0 \neq k^- = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad k^+ = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x};$$
- $$0 \neq k^+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad k^- = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Pogledajte grafik prve funkcije f na slici 11. Ova funkcija ima kosu asimptotu za koju je ispunjen drugi od upravo navedenih uslova, grafik je iznad kose asimptote kad $x \to +\infty$, a ispod kad $x \to -\infty$. Ukoliko je $f(x)$ neprekidna na celom domenu u ova dva slučaja grafik f mora da seče kosu asimptotu. U primeru na sl. 11 to nije slučaj jer je funkcija sa prekidom u tački 1.

Vertikalna asimtota $x = x_0$, nastaje kada je:

$$(\lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty \ \underline{\vee}\ \lim_{x \to x_0+} f(x) = -\infty) \ \vee (\lim_{x \to x_0-} f(x) = +\infty \ \underline{\vee}\ \lim_{x \to x_0-} f(x) = -\infty).$$

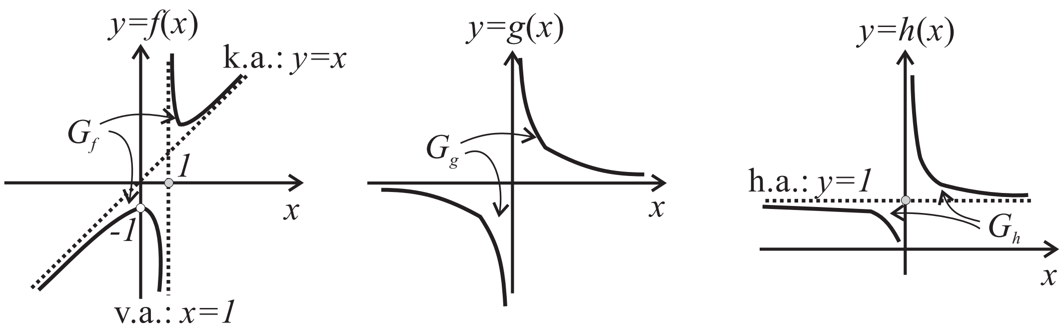
Tačka x_0 je najčešće tačka u kojoj funkcija f nije definisana, ali je tačka nagomilavanja domena funkcije.

Ima 8 različitih situacija u kojima je ispunjena prethodna formula oblika

$$(p \ \underline{\vee}\ q) \ \vee \ (r \ \underline{\vee}\ s).$$

Dovoljno je da jedan od četiri limesa bude tačan (4 mogućnosti: $(v(p), v(q), v(r), v(s)) \in \{(\top, \bot, \bot, \bot), (\bot, \top, \bot, \bot), (\bot, \bot, \top, \bot), (\bot, \bot, \bot, \top), \}$) ili po dva limesa, jedan sa jedne a drugi sa druge strane "obične" disjunkcije (4 mogućnosti: $(v(p), v(q), v(r), v(s)) \in \{(\top, \bot, \top, \bot), (\bot, \top, \top, \bot), (\top, \bot, \bot, \top), (\bot, \top, \bot, \top), \}$). Naskicirajte 8 grafika funkcija koje bi redom ispunjavale ovih 8 različitih situacija za vertikalnu asimptotu $x = x_0$.[35] Kod vertikalne asimptote leva i desna granična vrednost mogu biti različite u tački x_0.
Primeri. Odredimo asimptote za sledeće tri funkcije $f(x), g(x)$ i $h(x)$.[36]

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1},\ x \neq 1$	2. $g(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$	3. $h(x) = e^{\frac{1}{x}},\ x \neq 0$
$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0+} h(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0-} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0-} h(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^{\pm}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 1^{\pm}$
$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1^{\pm}$ $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) =$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 0$



Slika 11. Grafici funkcija $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ i $\quad h(x) = e^{\dfrac{1}{x}}$

Funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = 1$ i kosu asimptotu $y = x$. Koordinatne ose su horizontalna i vertikalna asimptota druge funkcije $g(x)$. Treća funkcija, h, ima vertikalno asimptotu $x = 0$ (što je y-osa) i horizontalnu asimptotu $y = 1$. Na slici 11 su dati grafici ovih funkcija.

Uočimo da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^{\pm}$ znači $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^{+}$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0^{-}$. U prvom slučaju broju 0 se približavamo preko brojeva većih a u drugom preko brojeva manjih od 0. Videti drugi grafik na sl. 11.

[35] Disjunkcija - $\vee$ i ekskluzivna disjunkcija - $\underline{\vee}$ su definisane u poglavlju 1.2.1.

[36] Oznaka $x \to \infty$, znači da su oba limesa kad $x \to +\infty$ i kad $x \to -\infty$ jednaka. Specijalno, kod granice niza, $n \to \infty$, znači da $n \to +\infty$. Kada pod limesom pišemo $x \to \pm\infty$, to znači da smo oba limesa zajedno posmatrali, ali da postoje neke razlike u ponašanju funkcije, koje želimo da naglasimo.

10.1.2 Teoreme o graničnim vrednostima funkcija

Funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0, ako i samo ako ima i levu i desnu graničnu vrednost u tački x_0 i one se poklapaju.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x) = g = \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

Neka su funkcije f i g definisane na (c,d), $f,g:(c,d)\to R$, i neka je x_0 tačka nagomilavanja intervala (c,d). Ako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ tada postoje i sledeće granične vrednosti u tački x_0:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a\pm b;$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a\cdot b;$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b} \quad za \quad b\neq 0.$

Neka su funkcije f i g definisane na (c,d), $f,g:(c,d)\to R$, i neka je x_0 tačka nagomilavanja domena (c,d). Ako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ i ako je $(\forall x\in(c,d))\ \ f(x)\le g(x)$, tada je i $a\le b$.

*(**Stav o uklještenju**) Neka su funkcije f, g i h definisane na (c,d), $f,g,h:(c,d)\to R$, i neka je x_0 tačka nagomilavanja domena (c,d). Ako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ i ako je $(\forall x\in(c,d))\ \ f(x)\le h(x)\le g(x)$, tada postoji i granična vrednost funkcije h, u tački x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.*

Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Tada je

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n = a^n, \quad n\in\mathcal{N}$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{a}, \quad n\in\mathcal{Z}$
  (ako je n paran broj potrebno je da je $f(x)>0$) ;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\log f(x)) = \log(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)) = \log a, \quad za\ f(x)\ge 0$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = e^a$.

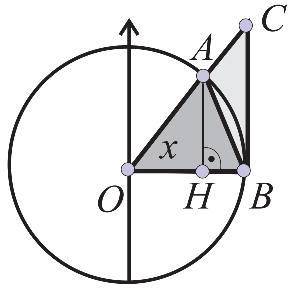
Predhodne teoreme važe i kad $x\to+\infty$ ili kad $x\to-\infty$ umesto kad $x\to x_0$ pod pretpostavkom da domen funkcije sadrži interval $(-\infty,a)$ ili $(b,+\infty)$ i da odgovarajuće granične vrednosti u pretpostavkama teoreme postoje.

Neki poznati limesi

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} \qquad\qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

Da postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ i da je jednaka 1 nije jednostavno direktno zaključiti jer i brojilac i imenilac funkcije teže 0, kad x teži 0. Pokazaćemo da su leva i desna granična vrednost funkcije $\dfrac{\sin x}{x}$ u 0 jednake 1, tada sledi da postoji granična vrednost i da je i ona jednaka 1.

Pokažimo prvo da je $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.



Slika 12.

Posmatrajmo jediničnu kružnicu na slici 12, i ugao x u radijanima, tako da važi $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Jasno je da je površina P_1 trougla OAB manja od površine P_2 kružnog isečka nad lukom AB koja je manja od površine P_3 trougla OBC. Kako su duži OA i OB jedinične sledi da su dužine visine AH trougla OAB i katete pravouglog trougla OBC redom jednake $AH=\sin x$ i $BC=\operatorname{tg} x$. Površina kružnog isečka jednaka je polovini proizvoda, kvadrata poluprečnika i ugla. Sledi da je
$P_1=\frac{1}{2}AH\cdot OB=\frac{1}{2}\sin x$, $P_2=\frac{1}{2}OA^2\cdot x=\frac{1}{2}\,x$, $P_3=\frac{1}{2}OB\cdot BC=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Nejednakost površina je ekvivalentna sa
$P_1\le P_2\le P_3 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x\le x\le \operatorname{tg} x$. Pošto je $\sin x$ na intervalu $(0,\pi/2)$ pozitivan, deljenjem prethodne nejednakosti sa $\sin x$ dobijamo da je:
$1\le\dfrac{x}{\sin x}\le\dfrac{1}{\cos x}$. Recipročne vrednosti su tada u odnosu:

$$1\ge\frac{\sin x}{x}\ge\cos x,\qquad \text{za svako}\quad x\in(0,\pi/2).$$

Kako je 0 tačka nagomilavanja intervala $(0,\pi/2)$ i kako postoje i jednake su sledeće granične vrednosti: $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x=1=\lim\limits_{x\to 0+}1$, po stavu o uklještenju sledi da je $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Leva granična vrednost je takođe jednaka $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=1$, jer je funkcija $\dfrac{\sin x}{x}$, parna. Kako su leva i desna granična vrednost funkcije $\dfrac{\sin x}{x}$ u tački $x=0$ jednake 1 sledi da je granična vrednost jednaka 1, tj. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Pokažimo da je $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$. Poznato je da je realan broj e granica niza $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

Ako sa $[x]$ označimo najveći ceo deo [37] od x, može se pokazati da je

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \leq (1+\frac{1}{x})^{x} \leq (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}.$$

Kako su, redom, granične vrednosti $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$, i $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$ jednake graničnim vrednostima $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n} = e$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$, na osnovu stava o uklještenju je i $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e$.

Sa druge strane, nakon smene $x=-y$ imamo
$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = \lim\limits_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} = \lim\limits_{y\to+\infty}((\frac{y-1}{y})^{-1})^{y} = \lim\limits_{y\to+\infty}(\frac{y}{y-1})^{y}$
$= \lim\limits_{y\to+\infty}(\frac{y-1+1}{y-1})^{y} = \lim\limits_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y}$. Poslednja granična vrednost je nakon smene $t=y-1$ jednaka $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t} \cdot \lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t}) = e\cdot 1$, što je i trebalo pokazati da bismo zaključili da je $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e$.

U sledeća tri primera ćemo pokazati kako se može koristiti prethodna granična vrednost za nalaženje novih graničnih vrednosti.

Primer 1. $\lim\limits_{t\to0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = e$

Dovoljna je smena $x=\frac{1}{t}$ koja teži ∞ kad t teži 0.

$\lim\limits_{t\to0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+1)^{x} = e.$

Primer 2. Pokažimo sad da je $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$

Uvedimo smenu $t=e^x-1$, kad x teži 0 tada t teži takođe 0, dok je $x=\ln(t+1)$. Sledi
$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\ln(t+1)} = 1/(\lim\limits_{t\to0}\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}) = 1/(\ln(\lim\limits_{t\to0}(t+1)^{\frac{1}{t}})) = \frac{1}{\ln e} = 1.$

Primer 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^{-x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^{-x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^{3} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^{x}}\cdot 1 =$
$\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}((\frac{1}{2x}+1)^{2x})^{1/2}} = \frac{1}{(\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}+1)^{2x})^{1/2}} = \frac{1}{(\lim\limits_{y\to\infty}(\frac{1}{y}+1)^{y})^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Koristili smo smenu $y=2x$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0.$

10.1.3 Neprekidnost funkcije

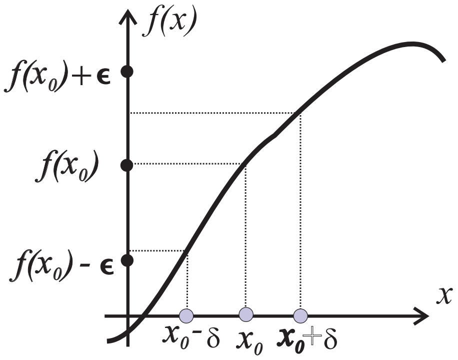
Neprekidnost funkcija će nam omogućiti da jednostavnije primenjujemo granične procese nad njima.

Neka je realna funkcija f definisana sa $f: D \to R$. Neka tačka $x_0 \in D$. Tada kažemo da je funkcija f **neprekidna** *u* **tački** x_0 *ako za svaki pozitivan broj ϵ postoji pozitivan broj*

[37] Na primer, [6,7]=6, [6,2]=6, [-2,36] =-3, ...

δ (δ zavisi od x_0 i od ϵ, $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$) tako da važi implikacija

$$(\forall x \in D)(\ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\ ).$$



Slika 13. Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0

Funkcija $f : [a, b] \to \mathcal{R}$, je neprekidna u tački $x_0 \in [a, b]$, ako i samo ako postoji granična vrednost u tački x_0 i jednaka je $f(x_0)$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Neka je funkcija $f : D \to R$.

Funkcija f je **neprekidna na otvorenom intervalu** $(a, b) \subset D$ *ako je neprekidna u svakoj tački intervala.*

Funkcija f je **neprekidna na zatvorenom intervalu** $[a, b] \subset D$ *ako je*

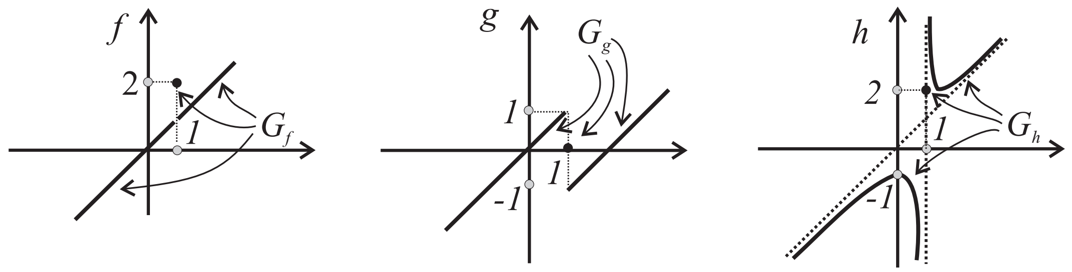
- *neprekidna u svakoj tački otvorenog intervala (a, b);*
- $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$;
- $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

Funkcija f je **prekidna u tački** $x_0 \in D$ *ako nije neprekidna u tački x_0.*

Postoje tri vrste prekida funkcije u tački, koje ćemo ilustrovati na primerima tri funkcije f, g i h čiji grafici su ilustrovani na sl. 14. Ove funkcije su definisane na celom skupu realnih brojeva, a imaju različite tipove prekide u tački $x = 1$. Funkcija $f(x)$ ima otklonjiv ili prividni prekid, funkcija $g(x)$ ima prekid prve vrste, a funkcija $h(x)$ ima prekid druge vrste. Grafici ovih funkcija G_f, G_g i G_h su iz tri dela (dva dela su neograničena a treći je jedna tačka) na koje ukazuju strelice na sl. 14.

Tipovi prekida funkcije f u tački $x_0 \in D$

prividan prekid	**prekid prve vrste**	**prekid druge vrste**
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq f(x_0)$	$\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a_1 \neq a_2 = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$	inače
$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$	$h(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$	$\lim\limits_{x \to 1+} g(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 1-} g(x) = -1$	$\lim\limits_{x \to 1+} h(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1-} h(x) = -\infty$



Slika 14. Redom su dati grafici funkcije f sa prividnim prekidom, funkcije g sa prekidom prve i funkcije h sa prekidom druge vrste u tački 1

Sa druge strane, funkcija $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, jeste neprekidna na celom domenu definisanosti $\mathcal{R} \setminus \{0\}$.

10.1.4 Teoreme o neprekidnosti funkcija

Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x_0 tada je:

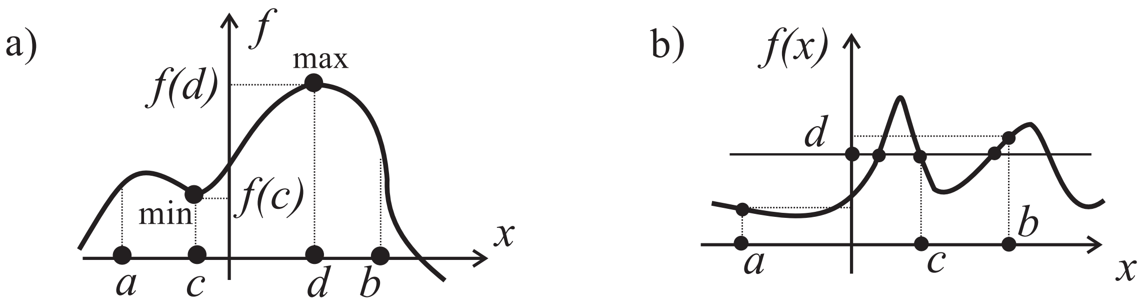
- *zbir (razlika) $f(x) \pm g(x)$ neprekidan u x_0;*
- *proizvod $f(x) \cdot g(x)$ neprekidan u x_0;*
- *količnik $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ neprekidan u x_0, za $g(x_0) \neq 0$.*

Sledeća teorema kaže da neprekidna funkcija na zatvorenom i ograničenom intervalu dostiže svoju maksimalnu i minimalnu vrednost.

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b] \subset D_f$ tada postoje tačke c i d koje pripadaju $[a, b]$ tako da je: $\forall x \in [a, b]$ $f(c) \geq f(x)$ i $f(d) \leq f(x)$, što znači da je $f_{max} = f(c)$ i $f_{min} = f(d)$.

Na sl. 15.a maksimalna vrednost funkcije f na $[a, b]$ je $f(c)$ a minimalna vrednost je $f(d)$.

Ako je funkcija f linearna, primetimo da ona svoju maksimalnu i minimalnu vrednost postiže na krajevima zatvorenog intervala, mada znamo da linearna funkcija nema globalni minimum i maksimum na $\mathcal{R}$.



Slika 15. Osobine neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu

Ako je funkcija f *neprekidna na intervalu* $[a, b] \subset D_f$ *i* $f(a) < f(b)$ *tada za svaku vrednost* d, *takvu da* $f(a) \leq d \leq f(b)$ *postoji tačka* c *koja pripada* $[a, b]$ *tako da je:* $f(c) = d$.

Jedinstvenost tačke c u prethodnoj teoremi se ne tvrdi, već samo egzistencija, tako, na primer, na sl. 15.b imamo tri kandidata za tačku c.

Direktna posledica prethodne teoreme je:

Ako je funkcija f *neprekidna na intervalu* $[a, b] \subset D_f$ *i* $f(a) \cdot f(b) < 0$ *tada postoji tačka* c *koja pripada* (a, b) *tako da je:* $f(c) = 0$.

Tačke u kojima funkcija ima vrednost nula se nazivaju **nule** funkcije. Potreban uslov da funkcija ima nulu na intervalu daje prethodna teorema. Ukoliko neka funkcija zadovoljava uslove teoreme možemo primeniti *metodu polovljenja* za eksplicitno nalaženje nule te funkcije.

Metoda polovljenja

Neka funkcija f zadovoljava uslove prethodne teoreme na intervalu $[a, b]$. Jedan jednostavan algoritam za nalaženje tačke $c \in (a, b)$, koja je nula funkcije f, sastoji se u iterativnom nalaženju sve užih i užih intervala $[a_i, b_i]$, $i = 1, ..., n$ oko tačke c. Novi interval se dobija polovljenjem prethodnog intervala. Početni interval je interval $[a, b] = [a_1, b_1]$. Iterativni postupak polovljenja intervala se zaustavlja u n-tom koraku kada je na primer, aktuelni interval dovoljno mali, tj. $b_n - a_n < \epsilon_1$, ili je vrednost funkcije u središnjoj tački intervala dovoljno bliska nuli $f(\frac{a_n + b_n}{2}) < \epsilon_2$. Tada uzimamo da je $c \approx \frac{a_n + b_n}{2}$. Vrednosti ϵ_1 i ϵ_2 se zadaju kao ulazne veličine, u zavisnosti od željene preciznosti, to su na primer, 10^{-7}, 10^{-5},... U algoritmu koji dajemo uzeli smo da je $\epsilon_1 = \epsilon_2$ i kombinovali smo oba uslova zaustavljanja iteracija.

Algoritam metode polovljenja

- **Ulaz:** Funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, $a_1 = a$, $b_1 = b$. Zadaje se vrednost greške ϵ, odnosno preciznost.
- **Izlaz:** Tačka c za koju je $f(c) \approx 0$.
- **Koraci:** za svako $i = 1, 2, 3, ...$

  1. odredimo sredinu $\frac{a_i + b_i}{2}$ aktuelnog intervala i ako je

$\max\{|f(\frac{a_i+b_i}{2})|, b_i - a_i\} < \epsilon$ zaustavljamo iteracije i uzimamo približno da je $c \approx \frac{a_i+b_i}{2}$, inače prelazimo na korak 2.

2. ako je $f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot f(a_i) < 0$ tada za novi interval biramo $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ pri čemu je $a_{i+1} = a_i$ i $b_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$, zatim idemo na korak 1., u suprotnom idemo na korak 3.
3. ako je $f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot f(b_i) < 0$ tada za novi interval biramo $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ pri čemu je $b_{i+1} = b_i$ i $a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$, zatim idemo na korak 1. u suprotnom, idemo na korak 4.
4. ako je $f(\frac{a_i+b_i}{2}) = 0$ iteracije zaustavljamo, i dobijamo tačnu vrednost $c = \frac{a_i+b_i}{2}$.

Primetimo da se korak 4. u praksi retko događa. On nastaje kada je za neko i nula funkcije baš u sredini $\frac{a_i+b_i}{2}$ aktuelnog intervala.

10.1.5 Zadaci

[38]

10.1. Odrediti sledeće granične vrednosti:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$; $b)$ $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-x-12}$;

$c)$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$; $d)$ $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1})$.

Rešenje. $a)$ 6 $b)$ $\frac{4}{7}$ $c)$ 3 $d)$ 2 .

10.2. Naći sledeće granične vrednosti:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; $b)$ $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$;

$c)$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$; $d)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{x}$.

Rešenje. $a)$ $\frac{1}{6}$ $b)$ $\frac{1}{6}$ $c)$ 4 $d)$ $-\frac{1}{2}$.

10.3. Ako znamo da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ odrediti granične vrednosti:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; $b)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 5x}$;

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; $d)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin 2x}$.

Rešenje. $a)$ 1 $b)$ $\frac{2}{5}$ $c)$ $\frac{1}{2}$ $d)$ $\frac{1}{4}$.

[38] Zadaci u ovom odeljku su detaljno urađeni u zbirci rešenih zadataka [23].

10.4. Znajući da je $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ odrediti granične vrednosti:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}};\qquad b)\ \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-1})^x;$

$c)\ \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+3}{2x+2})^{x+2};\quad d)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}.$

Rešenje. $a)$ e $b)$ e^2 $c)$ $e^{\frac{1}{2}}$ $d)$ 1. (Koristite smenu $t = e^x - 1$.)

10.5. Nađite sve asimptote sledećih funkcija:

$a)\ f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-9};\qquad b)\ f(x) = x - \dfrac{1}{x^2};$

$c)\ f(x) = x - \dfrac{3x}{x^2-1};\quad d)\ f(x) = x\cdot e^{-\frac{1}{x^2}};$

$e)\ f(x) = (1-x^2)e^{-2x};\quad f)\ f(x) = x - \dfrac{x(x+1)}{x^2+1}.$

Rešenje. Asimptote su prave: $a)$ $x = 3,\ x = -3,\ y = 0;$ $b)$ $x = 0,\ y = x;$ $c)$ $x = 1,\ x = -1,\ y = x;$ $d)$ $x = 0,\ y = x-1;$ $e)$ $y = 0;$ $f)$ $y = 1$.

10.2 Diferencijabilnost funkcije

U ovom odeljku uvodimo pojam izvoda realne funkcije. Izvodi funkcije imaju višestruke primene. Neke od njih će biti date u pododeljcima ovog odeljka. Sem toga i u fizičkom svetu izvodi funkcija se sreću kao egzaktne veličine (brzina, ubrzanje, jednačine nekih hemijskih procesa, kretanje nebeskih tela, ...).

Posmatrajmo dve “bliske” vrednosti argumenta funkcije f: x i $x+\Delta x$, koje se razlikuju za Δx. Njihovu razliku Δx nazivamo **priraštaj argumenta**. Ako u tim tačkama, x i $x+\Delta x$, posmatramo razliku vrednosti funkcije f: $\Delta y\ = f(x+\Delta x) - f(x)$, govorimo o **priraštaju funkcije**. Kod neprekidnih funkcija male promene argumenta uzrokuju male promene vrednosti funkcije. Na primer, za $f(x) = x^2$, je $f(1,01) = 1,0201$ i $f(1,02) = 1,0404$, znači $\Delta x = 0,01$, a $\Delta y = 0,0203$. Međutim male promene argumenta mogu da dovedu do većih promena vrednosti funkcije. Na primer, za funkciju $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ mala promena argumenta x za 0,01 sa vrednosti $x = 1,01$ na vrednost $x = 1,02$ dovodi do promene funkcije za -7500. Zaista, razlika vrednosti funkcije u ove dve bliske tačke je $\dfrac{1}{(1-1,02)^2} - \dfrac{1}{(1-1,01)^2} = \dfrac{1}{(2\cdot 10^{-2})^2} - \dfrac{1}{(10^{-2})^2} = \dfrac{10^4 - 4\cdot 10^4}{4} = -0,75\cdot 10^4$. Ovakve situacije nastaju kada se približavamo tački u kojoj funkcija ima prekid ili vertikalnu asimptotu. Za navedeni primer to je tačka $x = 1$.

U graničnom slučaju, kada Δx teži 0, količnik priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, posmatramo u sledećoj definiciji.

U graničnom slučaju kada Δx teži 0, količnik priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, posmatramo u sledećoj definiciji.

Neka $f\ : (a,b)\to\mathcal{R}$ *i neka* $x_0\ \in (a,b)$. **Prvi izvod funkcije** f **u tački** x_0 *se definiše kao*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ako ovaj limes postoji.

Izvod u tački x_0 može da se definiše i na druge ekvivalentne načine, kao na primer,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

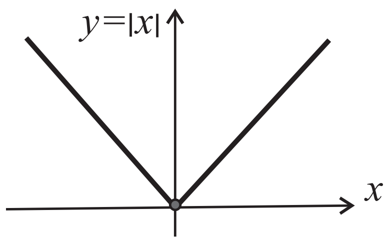
Funkciju f *nazivamo* **diferencijabilnom** *u tački* x_0 *ukoliko postoji izvod* $f'(x_0)$ *u toj tački.*

Ako na intervalu (a, b) *koji je domen funkcije* f *postoji prvi izvod funkcije* f *u svakoj tački intervala* (a, b) *onda definišemo funkciju* $f' : (a, b) \to \mathcal{R}$*, koja svako* $x \in (a, b)$ *preslikava u* $f'(x)$*, i ovu funkciju nazivamo* **prvi izvod funkcije** f *na* (a, b)*.*

Ako u nekoj tački funkcije postoji izvod tada je funkcija i neprekidna u toj tački. Međutim, obrnuto ne važi.

Na primer, funkcija $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ je neprekidna u tački 0, jer je $\lim\limits_{x \to 0+} |x| = \lim\limits_{x \to 0+} x = 0$ i $\lim\limits_{x \to 0-} |x| = \lim\limits_{x \to 0-} -x = 0$. Grafik ove funkcije je dat na slici 16. Sa druge strane, kada potražimo prvi izvod u 0 vidimo da on ne postoji jer se odgovarajuća leva i desna granična vrednost razlikuju:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \ \text{ i } \ \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$



Slika 16. Neprekidna funkcija koja nema prvi izvod u 0.

Jedan primer izvoda

Pokazaćemo da brzina predstavlja prvi izvod funkcije pređenog puta. Posmatrajmo funkciju $s(t)$, $t \geq 0$, koja predstavlja ukupnu dužinu puta koji je pređen do vremena t (od početnog trenutka $t = 0$). Na primer, ako smo put od 75 km, Novi Sad - Beograd, prešli za sat vremena, prosečna brzina je bila 75 km/h. Znamo, da srednja brzina kretanja u vremenskom intervalu $(t_1, t_1 + \Delta t)$ predstavlja količnik:
dužina pređenog puta kroz utrošeno vreme, tj. jednaka je $\dfrac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$.

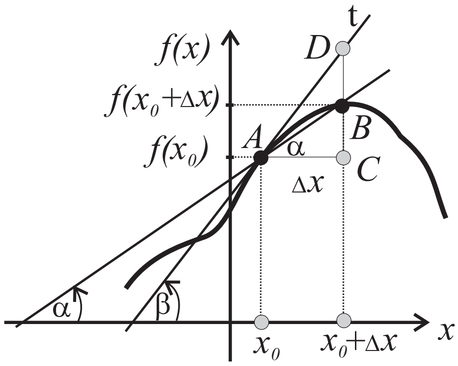
Ukoliko nas interesuje trenutna brzina $v(t_1)$, u trenutku t_1, jasno je da bi srednja brzina na itervalu $(t_1, t_1 + \Delta t)$ kada dužina intervala Δt teži 0, težila trenutnoj brzini, u trenutku t_1, odnosno bila bi jednaka $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$. Ukoliko poslednja granična vrednost postoji ona je jednaka (uporedite sa definicijom prvog izvoda funkcije f u tački x_0) prvom izvodu funkcije dužine pređenog puta u trenutku (tački) t_1: $s'(t_1) = v(t_1)$.

10.2.1 Diferencijal funkcije i geometrijski smisao izvoda funkcije u tački

Prvi izvod funkcije $f(x)$ u tački x_0 smo definisali kao graničnu vrednost količnika $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ kada priraštaj argumenta Δx, teži nuli. Ako analiziramo sliku 17, uočavamo da je količnik $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ zapravo tangens ugla α, koji prava AB (sečica grafika funkcije) zaklapa sa pozitivnim delom x-ose. Međutim, kada priraštaj nezavisne promenljive Δx teži 0, tačka B teži tački A preko grafika funkcije f, a sečica AB teži tangenti t u tački A grafika. Stoga, u graničnom slučaju, nagib sečice teži nagibu tangente u tački A:

$$\operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\ .$$

Geometrijski smisao prvog izvoda funkcije f u tački x_0, je da predstavlja **tangens ugla** koji tangenta u tački $A=(x_0, f(x_0))$, grafika funkcije, zaklapa sa pozitivnim delom x-ose.



Slika 17. Prvi izvod funkcije u tački x_0

Diferencijal funkcije

Diferencijal nezavisne promenljive *dx je jednak priraštaju nezavisne promenljive Δx, dok je* **diferencijal funkcije** *dy (ili df) približno jednak priraštaju funkcije $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$. Preciznije,*

- $dx = \Delta x$
- $dy = f'(x)dx$

Priraštaj funkcije $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ na slici 17 jednak je dužini duži BC, dok je diferencijal funkcije dy jednak dužini duži DC. Diferencijal funkcije može biti i veći i manji od priraštaja funkcije. Priraštaj funkcije je funkcija od priraštaja nezavisne promenljive, i može da se izrazi na sledeći način
$\Delta y(\Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + g(\Delta x)\cdot\Delta x$,
gde funkcija $g(\Delta x)$ teži 0 kada argument Δx teži 0. Na ovaj način, diferencijal funkcije predstavlja linearan deo priraštaja funkcije u posmatranoj tački x.

Na primer, diferencijali funkcija $f(x) = e^x + \sin x$ i $g(t) = t^3$ su redom $df = (e^x + \cos x)dx$ i $dg = 3t^2 dt$ (prve izvode pogledati u tabeli izvoda elementarnih funkcija).

Levi izvod funkcije f **u tački** x_0 *se definiše kao*

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} ,$$

ako ovaj limes postoji. Dakle, Δx *teži nuli preko negativnih vrednosti.*

Slično, **desni izvod funkcije** f **u tački** x_0 *se definiše kao*

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} ,$$

ako ovaj limes postoji.

Potreban i dovoljan uslov da funkcija f ima izvod u tački $x = x_0$ je da postoje i levi i desni izvod u tački x_0 i da su jednaki, tj. $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Tako na primer funkcija $f(x) = |x|$, data na sl. 16, nema prvi izvod u 0 jer su u 0 levi i desni izvod različiti.

Diferencijabilnost na intervalu

U opštem slučaju funkciju f nazivamo *diferencijabilnom* na:

- otvorenom intervalu (a, b) akko ima izvod u svakoj tački intervala;
- zatvorenom intervalu $[a, b]$ akko
  - funkcija ima izvod u svim unutrašnjim tačkama intervala (a, b);
  - postoje desni izvod $f'_+(a)$ u tački a;
  - postoji levi izvod $f'_-(b)$ u tački b.

Funkciju koja ima neprekidan izvod na intervalu nazivamo *neprekidno diferencijabilnom* ili *glatkom* na intervalu. Kada govorimo o prvom izvodu funkcije $f(x)$, ravnopravno ćemo koristiti oznake $f'(x)$ i f'_x ili samo f' ako se zna po kojoj nezavisnoj promenljivoj vršimo diferenciranje.

10.2.2 Izvodi elementarnih funkcija

Izvode složenijih funkcija koje predstavljaju zbir, razliku, proizvod, količnik ili kompoziciju nekih jednostavnijih funkcija, možemo dobiti na osnovu pravila datih u sledećem odeljku, uz dodatno poznavanje izvoda jednostavnijih funkcija. Stoga, izvode elementarnijih funkcija $f(x)$, $x \in D$ dajemo u tabeli [39] niže. Međutim, svaki od izvoda datih u tabeli mogli smo da izračunamo po definiciji izvoda funkcije. Slede neki primeri:

Na osnovu definicije prvog izvoda funkcije u tački $x \in \mathcal{R}$ naćićemo $(x^n)'$, $n \in \mathcal{N}$, $(\sin x)'$ i (e^x)'.

[39] Ukoliko je domen D funkcije f neki pravi podskup skupa $\mathcal{R}$ to je u tabeli naznačeno, sem u drugoj vrsti, gde domen zavisi od parametra α.

1. $(x^n)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$ Po binomnom obrascu to je ekvivalentno sa:
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + ... + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x^{n-2}\Delta x + ... + \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}.$

2. Kako je $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ imamo
$(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + 0.5\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + 0.5\Delta x) =$
$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + 0.5\Delta x) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$
Koristili smo smenu $t = \Delta x/2$.

3. $(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$.

Tabela izvoda elementarnih funkcija

1. $(K)' = 0$, K je realna konstanta
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$, $a \neq 1, a > 0, x > 0$
5. $(e^x)' = e^x$,
6. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$
9. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,
11. $(\sin x)' = \cos x$
12. $(\cos x)' = -\sin x$
13. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$
14. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$

10.2.3 Pravila diferenciranja

Ako su funkcije f, g i h diferencijabilne, tada važe sledeća pravila:

1. $(K \cdot f(x))' = K \cdot f'(x)$, gde je K proizvoljna konstanta ;
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
4. $(\dfrac{f(x)}{g(x)})' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ za $g(x) \neq 0$;
5. Ako je $y = f(u)$ i $u = g(x)$ tada je

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \text{ odnosno } y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Slično, ako su $y = f(u)$, $u = g(v)$, i $v = h(x)$ tada je

$$f(g(h(x)))' = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x) \text{ odnosno } y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x \ .$$

Ovo dva pravila za kompoziciju dve i tri funkcije se nazivaju *pravilima smene*. Slično važi i za kompoziciju više od tri funkcije.

Ilustrovaćemo neka od pravila diferenciranja na primerima:

pravilo 2.: Prvi izvod funkcije $y = f(x) = 5x - \cos x + e^x + 9$ je $y'(x) = 5(x)' - (\cos x)' + (e^x)' + (9)' = 5 + \sin x + e^x$.

pravilo 3.: Izvod proizvoda funkcija $3x^2$ i $\sin x$ je $(3x^2 \cdot \sin x)' = 3(x^2)' \cdot \sin x + 3x^2 \cdot (\sin x)' = 6x \cdot \sin x + 3x^2 \cdot \cos x$.

pravilo 4.: Izvod količnika funkcija $3x^2$ i $\sin x$ je $(\dfrac{3x^2}{\sin x})' = \dfrac{3(x^2)' \cdot \sin x - 3x^2 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{6x - 3x^2 \cdot \operatorname{ctg} x}{\sin x}$, $x \neq k\pi, k \in \mathcal{Z}$.

pravilo 5.: Ako je funkcija $y(x)$ kompozicija funkcija $y = f(u) = \ln u$ i $u = g(x) = x^5$ tada je $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = \dfrac{1}{u} 5x^4 = \dfrac{5x^4}{x^5} = \dfrac{5}{x}$.

10.2.4 Izvodi višeg reda

Neka je $f'(x)$, $x \in (a,b)$, izvodna funkcija diferencijabilne funkcije f. Tada **drugi izvod funkcije** *f u tački x_0 definišemo kao prvi izvod (ukoliko postoji) izvodne funkcije f' u tački x_0:*

$$(f')'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} \ .$$

Drugi izvod funkcije f u tački x_0 označavamo sa $f''(x_0)$. Ukoliko je funkcija f' diferencijabilna na nekom skupu A, sa f'' označavamo izvodnu funkciju funkcije f', koja svaki element $x \in A$ preslikava u $f''(x)$. Funkciju $f'' : A \to \mathcal{R}$ nazivamo drugi izvod funkcije f.

Opštije, na sličan način, definiše se i n-ti izvod $f^{(n)}$, $n > 1$, funkcije f, ukoliko postoji $(n-1)$-vi izvod $f^{(n-1)}(x)$ funkcije f i ako je on diferencijabilna funkcija:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \ .$$

Mnoge funkcije imaju n-ti izvod za svako $n \in \mathcal{N}$ u svakoj tački njihovog domena definisanosti. Na primer, za $n \in \mathcal{N}$, zadovoljeno je $(e^x)^{(n)} = e^x$, kao i

$$\sin^{(n)} x = \begin{cases} \sin x, & n = 4k \\ \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3 \end{cases} \qquad \cos^{(n)} x = \begin{cases} \cos x, & n = 4k \\ -\sin x, & n = 4k+1 \\ -\cos x, & n = 4k+2 \\ \sin x, & n = 4k+3 \end{cases} ,$$

za $k \in \mathcal{N}_0$.

U fizičkim i hemijskim procesima se izvodi funkcija često pojavljuju. Ubrzanje je na primer, drugi izvod funkcije pređenog puta u zavisnosti od vremena.

10.2.5 Lopitalovo pravilo

Ako postoje $f'(x)$ i $g'(x)$, tada je često jednostavnije naći neke granične vrednosti oblika $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ korišćenjem sledećih teorema:

Lopitalovo pravilo
1. Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne na intervalu (a,b), pri čemu je $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$. Neka $c\in[a,b]$ i neka su ispunjena sledeća dva uslova

- *kada x teži c, obe funkcije $f(x)$ i $g(x)$ teže ili ka 0 ili ka ∞,*
- *postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Tada je

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

Lopitalovo pravilo
2. Neka su funkcije f i g diferencijabilne na intervalu $(a,+\infty)$ (odnosno, $(-\infty,b)$), pri čemu je $g'(x)\neq 0$, za $x\in(\alpha,+\infty)$ za neko $\alpha\geq a$ (odnosno, za $x\in(-\infty,\beta)$ za neko $\beta\leq b$). Neka su ispunjena sledeća dva uslova

- *kada x teži $+\infty$ (odnosno $-\infty$), obe funkcije $f(x)$ i $g(x)$ teže ili ka 0 ili ka ∞,*
- *postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (odnosno $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$).*

Tada je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad (\textit{odn.}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)})\ .$$

Neodređeni izrazi

U Lopitalovim pravilima se pojavljuju neodređeni izrazi koji su oblika "$\dfrac{0}{0}$", "$\dfrac{\infty}{\infty}$". Osim, ovih neodređenih izraza, postoje i sledećih 6 neodređenih izraza: "$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "0^0", "∞^0", "0^∞" i "1^∞" koji mogu manjim transformacijama da dobiju oblik pogodan za primenu Lopitalovog pravila.

Primeri.

1. Neodređeni izraz oblika "$0\cdot\infty$" jednostavno svodimo na bilo koji od neodređenih izraza "$\dfrac{\infty}{\infty}$" ili "$\dfrac{0}{0}$". Koji od njih ćemo izabrati zavisi od jednostavnosti odgovarajućih prvih izvoda. Na primer,

$$\lim_{x\to0+}x^2\ln x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-2/x^3}=\lim_{x\to0+}\frac{-x^2}{2}=0.$$

2. Neodređeni izraz oblika "$\infty-\infty$" svodimo na oblik "$0/0$", pogodan za primenu Lopitalovog pravila:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

Sada možemo koristiti poznatu graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, a zatim primenjujemo četiri puta prvu Lopitalovu teoremu dok se ne eliminiše nula u imeniocu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\cdot(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x})^2=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cdot\cos x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{24}=\frac{1}{3}.$$

3. Kako je $x^x=(e^{\ln x})^x=e^{x\cdot\ln x}$, možemo neodređeni izraz $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$ oblika "0^0" svesti na oblik "$\dfrac{\infty}{\infty}$" na sledeći način:

$$\lim_{x\to 0+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}},$$ pri čemu smo koristili Teoremu 5.

Na eksponent sada možemo direktno primeniti Lopitalovo pravilo

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}-x=0.$$

Konačno, imamo da je $\lim\limits_{x\to 0+}x^x=e^0=1$.

4. Neodređeni izraz oblika "∞^0" svodimo na neodređeni izraz "$\dfrac{\infty}{\infty}$", tako što prvo logaritmujemo izraz i svedemo ga na oblik "$0\cdot\infty$", a zatim postupimo kao u primeru 1. Recimo, graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}$, nalazimo tako što prvo nađemo graničnu vrednost logaritma podlimesne funkcije

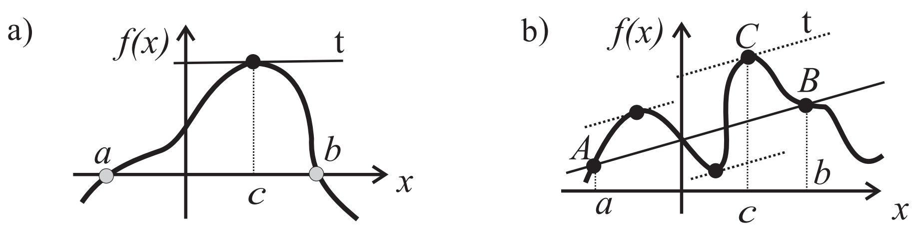
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(e^{3x}-5x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{27e^{3x}}{9e^{3x}}=3.$$

Sledi da je $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}=e^3$.

10.2.6 Teoreme o srednjoj vrednosti za izvode

Rolova teorema

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a,b]$, diferencijabilna na intervalu (a,b), i ako je $f(a)=f(b)=0$ tada postoji tačka c koja pripada (a,b) tako da je: $f'(c)=0$.



Slika 18. Ilustracija Rolove i Lagranžove teoreme

Kako geometrijski prvi izvod u tački predstavlja nagib tangente kroz odgovarajuću tačku grafika funkcije, to znači da Rolova teorema tvrdi da postoji tačka $(c,f(c))$ na grafiku funkcije f kroz koju je tangenta na grafik paralelna sa x-osom (slika 18.a). Tačka c ne mora biti jedina tačka na intervalu (a, b) u kojoj je prvi izvod funkcije f jednak nuli.

Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti
Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na intervalu (a, b) tada postoji tačka c koja pripada (a, b) tako da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Kako količnik $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (slika 18.b) predstavlja nagib sečice AB (koordinate tačaka su: $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$), sledi, po Lagranžovoj teoremi, da postoji bar jedna tačka c na intervalu (a, b), takva da je tangenta u tački $C(c, f(c))$ paralelna sa sečicom AB (sl. 18.b).

Rolova teorema je specijalan slučaj Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti kada je $f(a) = f(b)$.

Tejlorova teorema o srednjoj vrednosti
Ako funkcija f ima neprekidne sve izvode do n-tog reda na intervalu $[a, b]$ i ima izvod $f^{(n+1)}$ na intervalu (a, b), za $n \in \mathcal{N}$, tada postoji tačka c koja pripada (a, b) tako da je za svako $x \in [a, b]$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n}{n!} + R_n$$

gde je R_n ostatak i može da se zapiše u Lagranžovom obliku:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \cdot (x - a)^{n+1} .$$

Primetimo da je Tejlorova teorema o srednjoj vrednosti uopštenje Lagranžove teoreme. Lagranžova teorema nastaje u slučaju kada je $n = 0$ u Tejlorovoj teoremi i $x = b$. Tada je $f(b) = f(a) + R_0$ i $R_0 = \dfrac{f'(c)(b - a)}{1!}$.

Tejlorov razvoj funkcije f

Ako su tačke x i x_0 iz intervala (a, b), tada direktnom primenom Tejlorove teoreme imamo Tejlorov razvoj funkcije f sa ostatkom:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + ...+$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Ukoliko je zadovoljeno da je $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$, tada se red koji dobijamo naziva *Tejlorov razvoj funkcije f u tački x_0.*

Primetimo da se u prethodnoj teoremi vrši razvoj funkcije f u polinomnu funkciju u tački x_0.

Ako je specijalno $x_0 = 0$, tada govorimo o **Maklorenovom razvoju funkcije**.

Na primer, Maklorenov razvoj funkcije e^x je

$$e^x = e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

Maklorenov razvoj funkcije $\sin x$ je

$$\sin x = \sin 0 + \cos 0\ x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + ... =$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

Maklorenov razvoj funkcije $\cos x$ je

$$\cos x = \cos 0 - \sin 0\ x + \frac{-\cos 0}{2!}x^2 + \frac{\sin 0}{3!}x^3 + ... =$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Vrednosti trigonometrijskih funkcija $\sin x$, $\cos x$, ... na digitronima i računarima upravo i dobijamo tako što u zavisnosti od potrebne preciznosti aproksimiramo funkcije sa odgovarajućim brojem sabiraka u Maklorenovom polinomnom razvoju ovih funkcija (npr. $\sin x \approx x - x^3/6$, $\cos x \approx 1 - x^2/2 + x^4/24$) i zatim računamo vrednosti tih polinoma.

10.3 Primena izvoda na ispitivanje osobina funkcija

Neke osobine funkcije $f : A \to B$, kao što su:

- f je **parna** ako je $f(-x) = f(x)$, za sve $x \in A$, A simetričan skup;
- f je **neparna** ako je $f(-x) = -f(x)$, za sve $x \in A$, A simetričan[40] skup;
- f je **periodična** sa osnovnim periodom p, ako je p minimalan pozitivan realan broj tako da je
  $$(\forall\ x, x + p \in D)\quad f(x + p) = f(x)$$
- f **raste** (**opada**) na intervalu $[a, b]$ ako je za svako $x_1, x_2 \in [a, b]$ zadovoljena implikacija $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

utvrđujemo direktnom proverom. Parne funkcije (na primer, parabole sa temenom na y-osi, $\cos x$), imaju grafik simetričan u odnosu na y-osu, dok su neparne funkcije ($x^3, \frac{1}{x}, \sin x$,...) centralno simetrične u odnosu na koordinatni početak. Trigonometrijske funkcije su periodične, i njih je dovoljno ispitivati samo na intervalu $(0, p)$ [41]. Rast i opadanje funkcije je nešto teže ispitivati direktnom proverom.

Rast i opadanje funkcije i prvi izvod funkcije

Ako je funkcija diferencijabilna na intervalu (a, b) tada rast i opadanje funkcije možemo ispitati i na osnovu znaka prvog izvoda na intervalu. Preciznije, važi sledeće tvrđenje:

Neka je funkcija f diferencijabilna na (a, b). Tada važe sledeće implikacije:

1. *Ako je f rastuća na (a, b), sledi da je $f'(x) \geq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

[40] Skup A je simetričan ako važi da ako $x \in A$ sledi $-x \in A$.

[41] gde je p njihov osnovni period.

2. *Ako je f opadajuća na (a,b), sledi da je $f'(x) \leq 0$ za svako $x \in (a,b)$.*

3. *Ako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in (a,b)$, sledi da je $f(x)$ rastuća na (a,b).*

4. *Ako je $f'(x) < 0$ za svako $x \in (a,b)$, onda je f opadajuća na (a,b).*

Dokazaćemo samo implikacije **1.** i **3.**, jer se implikacije **2.** i **4.** slično dokazuju.
Dokaz 1. Neka su $x, x+\Delta x \in (a,b)$ i neka je $\Delta x > 0$ tada je zbog rasta funkcije f, $f(x+\Delta x) - f(x) > 0$, što implicira da je i količnik
$\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Slično, ako je $\Delta x < 0$ tada je zbog rasta funkcije f, $f(x+\Delta x) - f(x) < 0$, pa je opet $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Zato u graničnom slućaju kada $\Delta x \to 0$ i preko brojeva većih i preko brojeva manjih od 0, važi da je
$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$ $\square$
Dokaz 3. Neka su $x_1, x_2 \in (a,b)$ i neka je $x_1 < x_2$. Kako su uslovi Lagranžove teoreme zadovoljeni i na intervalu $[x_1, x_2]$ sledi da postoji tačka $c \in (x_1, x_2] \subset (a,b)$ tako da je $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Pošto su i $f'(c) > 0$ i $x_2 - x_1 > 0$ to je i $f(x_2) - f(x_1) > 0$, što je i trebalo dokazati. $\square$

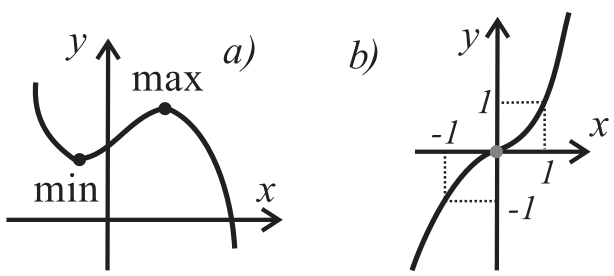
Ekstemne vrednosti i izvodi funkcije

Neka postoji $(a,b) \subset D$ tako da tačka $x_0 \in (a,b)$, gde je D domen funkcije f. Tada je $f(x_0)$

- **lokalni minimum** *funkcije f ako je $\forall x \in (a,b)$ $f(x) \geq f(x_0)$;*
- **lokalni maksimum** *funkcije f ako je $\forall x \in (a,b)$ $f(x) \leq f(x_0)$,*

odnosno kažemo da funkcija f ima **ekstrem** u tački x_0.

Ekstremne vrednosti (**ekstremi**) funkcije f su svi lokalni minimumi i maksimumi funkcije na celom domenu definisanosti. Globalni **maksimum** (**minimum**) funkcije f je njena najveća (najmanja) vrednost na celom domenu (oblasti definisanosti).



Slika 19. Primeri funkcija sa i bez ekstrema

Jasno je da bi u nekoj tački neprekidna funkcija imala ekstremnu vrednost (sl. 19.a) mora iz rasta da pređe u opadanje (maksimum) ili iz opadanja da pređe u rast (minimum). Kako rast funkcije prati pozitivan (a opadanje negativan) prvi izvod, za očekivati je da je potreban uslov za ekstrem u tački x_0 da je $f'(x_0) = 0$. Međutim, to nije i dovoljan uslov: recimo, u 0 funkcija x^3 ima prvi izvod jednak 0, ali nema ekstemnu vrednost. Na slici 19.b vidimo da funkcija $y = x^3$ nema ekstremnih vrednosti jer na celom domenu definisanosti $\mathcal{R}$ stalno raste.

Sledeće dve teoreme daju potrebne i dovoljne uslove da funkcija u tački $x_0 \in (a,b)$ ima lokalni ekstrem:

Neka je funkcija f diferencijabilna na (a,b) tada je potreban uslov da u tački $x_0 \in (a,b)$ funkcija f ima ekstrem,
1. $f'(x_0) = 0$.
Ako je dodatno zadovoljeno i
2. $f'(x)$ *menja znak u okolini tačke* x_0,
to je dovoljno da u tački x_0 funkcija f ima ekstrem.

Preciznije, ako je u nekom intervalu levo od x_0, $f'(x) < 0$, a u nekom intervalu desno od x_0 $f'(x) > 0$, tada je $f(x_0)$ lokalni minimum, u suprotnom radi se o lokalnom maksimumu.

Ipak prethodnom teoremom nisu obuhvaćeni svi slučajevi. Na primer, funkcija $f(x) = |x|$ jeste neprekidna na celom skupu realnih brojeva, i diferencijabilna u svim tačkama sem u 0. Uslov *2.* prethodne teoreme u okolini tačke 0 jeste zadovoljen, uslov *1.* nije, a $f(0)$ je minimum funkcije f. Ova situacija može da se uopšti za neprekidne i diferencijabilne funkcije na otvorenom intervalu u svim tačkama sem u tački u kojoj se postiže ekstrem, pri čemu je ispunjen uslov *2.* prethodne teoreme.

Ako funkcija dodatno ima i drugi izvod možemo da koristimo sledeće tvrđenje.

Neka je funkcija f neprekidna i dva puta diferencijabilna na (a,b), i neka je u tački $x_0 \in (a,b)$ $f'(x_0) = 0$ (uslov 1 prethodne teoreme). Tada je dovoljan uslov da funkcija f ima ekstrem u tački x_0 da je

$$f''(x_0) \neq 0 \ .$$

Preciznije, ako je $f''(x_0) > 0$, tada u x_0 funkcija f ima lokalni minimum, dok, u suprotnom, ako je $f''(x_0) < 0$, tada funkcija u x_0 ima lokalni maksimum.

10.3.1 Konkavnost, konveksnost i prevojne tačke

Funkcija f je **konkavna** ili ispupčena[42] na intervalu (a,b) (sl. 20.b) ako je za svako $x \in (a,b)$ grafik funkcije *ispod* bilo koje tangente na grafik u okviru razmatranog intervala. **Konveksnost** ili udubljenost funkcije znači da je grafik funkcije *iznad* tangente (sl. 20.a).

Na primer, funkcija $\sin x$ je konkavna na intervalu $(0,\pi)$, a konveksna na intervalu $(\pi, 2\pi)$.

Tačka prevoja funkcije je tačka u kojoj funkcija prelazi iz konkavnosti u konveknost ili obrnuto. Recimo, π je jedna od prevojnih tačaka za funkciju $\sin x$.

Ove dve definicije konkavnosti i konveksnosti su geometrijski jasne, ali nisu jednostavne za ispitivanje, što nije slučaj sa sledećom ekvivalentnom definicijom:

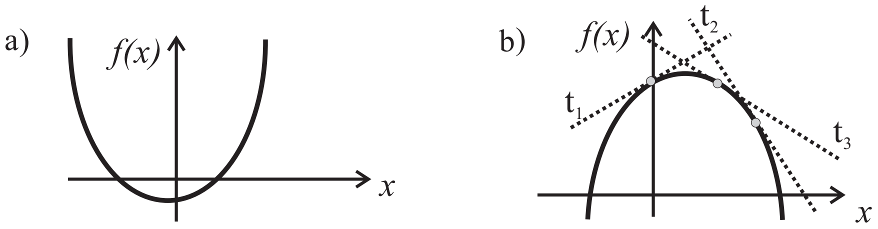
Diferencijabilna funkcija f je **konkavna** *na intervalu (a,b) ako za svako $x_1, x_2 \in (a,b)$ važi*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\frac{x_1 + x_2}{2}).$$

[42] U fizici je suprotno, ispupčena sočiva su konveksna.

Diferencijabilna funkcija f je **konveksna** *na intervalu (a,b) ako za svako $x_1, x_2 \in (a,b)$ važi*

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1+x_2}{2}).$$



Slika 20. Konveksna i konkavna funkcija

U narednoj teoremi koristimo drugi izvod funkcije za utvrđivanje konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka funkcije.
Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na (a,b).

- *Ako je $(\forall x \in (a,b))\ \ f''(x) > 0$, tada je f* **konveksna** *(udubljena tj. oblika $\smile$) na (a,b).*
- *Ako je $(\forall x \in (a,b))\ \ f''(x) < 0$, tada je f* **konkavna** *(ispupčena tj. oblika $\frown$) na (a,b).*
- *Ako je funkcija f konveksna na (a,c), a konkavna na (c,b), ili obrnuto, za neko $c \in (a,b)$, tada je c* **tačka prevoja** *funkcije f.*
- *Uslov $f''(c) = 0$ je potreban a ne i dovoljan da tačka $(c, f(c))$ bude prevojna tačka grafika funkcije f.*

Na primer, funkcija $f(x) = x^2$ ima drugi izvod $f''(x) = 2,\ x \in \mathcal{R}$ i ona jeste udubljena (= konveksna) na celom domenu, dok funkcija $g(x) = -x^2$ ima drugi izvod negativan, i ona je konkavna. Funkcija $h(x) = x^3$ ima drugi izvod $h''(x) = 6x$. Za $x < 0$, $h''(x) < 0$ i funkcija je konkavna, a za $x > 0$, $h''(x) > 0$, i funkcija je konveksna (videti sliku 10.b u prethodnom odeljku). Tačka (0,0) je prevojna tačka grafika.

Primetite da udubljenost (konveksnost) i ispupčenost (konkavnost) ne moraju da budu jasno uočljive na grafiku kao što je slučaj na slici 20. Na primer na slici 19.b funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (0, +\infty)$ i konkavna ($\frown$) za $x \in (-\infty, 0)$, a udubljenost za $x > 1$ i ispupčenost za $x < -1$ jedva da je uočljiva na grafiku.

10.4 Teorijska pitanja

10.4.1 Definicije osobina funkcija

10.6. Preslikavanje podskupa skupa $\mathcal{R}$ u skup $\mathcal{R}$ je funkcija akko svakom originalu odgovara tačno jedna slika.	$\top$
10.7. Funkcija t na simetričnom domenu D je parna akko je $t(x) = t(-x)$, za sve $x \in D$.	$\top$

10.8. Funkcija $h(x)=\dfrac{5}{x-3}$ je hiperbola.	$\top$
10.9. Funkcija $h(x)=5x^2+50x+500$ je hiperbola.	$\perp$
10.10. Funkcija $h(x)=ax^2+bx+c$, gde su $a,b,c\in\mathcal{R}$ i $a\neq 0$ je opšti oblik parabole.	$\top$
10.11. Funkcija $h(u)$, $u\in D$, ima prevojnu tačku u a iz D akko postoje tačke c i b tako da je $h(u)$ konveksna na $(c,a)\subset D$, a konkavna na $(a,b)\subset D$, ili obrnuto.	$\top$
10.12. Funkcija $g(u)$, $u\in D$, ima lokalni maksimum u tački $m\in D$ akko postoji $(a,b)\subset D$, $m\in(a,b)$, tako da za svako $u\in(a,b)$ važi $g(u)\leq g(m)$.	$\top$
10.13. Funkcija $h(u)$, $u\in D$, ima lokalni maksimum u tački $c\in D$ akko postoji $(a,b)\subset D$, $c\in(a,b)$, tako da za svako $u\in(a,b)$ važi $h(u)\geq h(c)$.	$\perp$
10.14. Funkcija $h(u)$, $u\in D$, opada na $(a,b)\subset D$ akko za svako $u_1,u_2\in(a,b)$ važi $u_1<u_2\Rightarrow h(u_1)<h(u_2)$.	$\perp$
10.15. Funkcija $g(u)$, $u\in D$, je konveksna na $(a,b)\subset D$ akko za svako $u_1,u_2\in(a,b)$ važi $g(\dfrac{u_1+u_2}{2})\leq\dfrac{g(u_1)+g(u_2)}{2}$.	$\top$
10.16. Funkcija $h(u)$, $u\in D$, raste na $(a,b)\subset D$ akko za svako $u_1,u_2\in(a,b)$ važi $u_1<u_2\Rightarrow h(u_1)<h(u_2)$.	$\top$
10.17. Funkcija $g(u)$, $u\in D$, je konkavna na $(a,b)\subset D$ akko za svako $u_1,u_2\in(a,b)$ važi $\dfrac{g(u_1)+g(u_2)}{2}\geq g(\dfrac{u_1+u_2}{2})$.	$\perp$
10.18. Funkcija $g(u)$, $u\in D$, ima lokalni minimum u tački $m\in D$ akko postoji $(a,b)\subset D$ i $m\in(a,b)$, tako da za svako $u\in(a,b)$ važi $g(m)\leq g(u)$.	$\top$

10.4.2 Parnost funkcije

10.19. Neparnu funkciju je dovoljno ispitati samo za nenegativne vrednosti iz domena.	$\top$
10.20. Funkcija $f(x)=-x^{1999}$ je parna.	$\perp$
10.21. Funkcija $h(x)=x$ nije ni parna ni neparna.	$\perp$
10.22. Funkcija $t(x)=\dfrac{x}{x^3-7x^7}$ je parna.	$\top$
10.23. Funkcija $t(x)=\dfrac{x^2}{x^3-7x^7}$ je parna.	$\perp$
10.24. Funkcija $g(x)=-\dfrac{x^2+2007}{x^3-7x^7}$ je neparna.	$\top$
10.25. Funkcija $t(x)=\dfrac{\sin x}{x^4}$ je neparna.	$\top$
10.26. Funkcija $f(x)=-x^{2006}+x^2$ je centralno simetrična u odnosu na O(0,0).	$\perp$
10.27. Parna je funkcija $f(x)=\cos x\cdot\sin x$.	$\perp$

10.28. Funkcija $f(x) = -x^{2004}$ je parna.	$\top$
10.29. Neparna je funkcija $h(t) = t^{-5}$.	$\top$
10.30. Funkcija $y = \dfrac{2001 \cdot x^3 - x^5}{\sin x}$ je neparna.	$\perp$
10.31. Osno simetričan u odnosu na t-osu je grafik funkcije $y(t) = t^{2006} + t^2$.	$\perp$
10.32. Funkcija $y(t) = t^{2006} + t^2$ je osno simetrična u odnosu na y-osu.	$\top$
10.33. Grafik funkcije $y = x \cdot \cos x$ je centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.	$\top$
10.34. Funkcija $f(x) = 2006x^3 - 2005x$ je centralno simetrična u odnosu na koordinatni početak.	$\top$
10.35. Grafik funkcije $y = \sin x \cdot \cos x$ je osno simetričan u odnosu na y-osu.	$\perp$
10.36. Funkcija $y(x) = \cos x \cdot \sin x$ je centralno simetrična u odnosu na koordinatni početak.	$\top$
10.37. Funkcija $y(x) = x \cdot (1 + x)$ je centralno simetrična u odnosu na koordinatni početak.	$\perp$
10.38. Funkcija $y(x) = x^{2007} + x$ je osno simetrična u odnosu na y-osu.	$\perp$
10.39. Grafik funkcije $h(u) = u^2$ je osno simetričan u odnosu na pravu $u = 0$.	$\top$
10.40. Funkcija $f(x) = -x^{1998}$ je parna.	$\top$
10.41. Funkcija $f(x) = -x^{2006} + x^2$ je parna.	$\top$
10.42. Funkcija $f(x) = x^{2006} + x$ je parna.	$\perp$
10.43. Funkcija $y(x) = x^{2006} + x^{-2006}$ je osno simetrična u odnosu na y-osu.	$\top$
10.44. Grafik funkcije $h(u) = u^2$ je osno simetričan u odnosu na pravu $h = 0$.	$\perp$
10.45. Funkcija $f(x) = (-x^{2006} + x^2) \cdot x$ je centralno simetrična u odnosu na O(0,0).	$\top$
10.46. $f(x) = -x^{2005}$ je neparna funkcija.	$\top$

10.4.3 Definisanost, znak, nule i inverzna funkcija

10.47. Funkcija $g(x) = e^{x-3}$ je pozitivna na celom domenu.	$\top$
10.48. Funkcija $g(x) = 2^{-x}$ je pozitivna na celom domenu.	$\top$
10.49. Na celom domenu funkcija $g(x) = e^{-x-3}$ je pozitivna.	$\top$
10.50. Funkcija $g(x) = e^x - 3$ je pozitivna na celom domenu.	$\perp$
10.51. Funkcija $g(x) = e^{-2006x}$ je pozitivna na celom domenu.	$\top$
10.52. Funkcija $g(x) = e^{-x}$ je pozitivna na celom domenu.	$\top$
10.53. Na intervalu (0,2) funkcija $f(x) = -x^2 + 2x$ je pozitivna.	$\top$
10.54. Na celom domenu funkcija $g(x) = -2^x$ je negativna.	$\top$
10.55. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x-1}$ nije definisana u tački x=1.	$\top$

10.56. Funkcija $f(x) = \ln x$ nije definisana u tački x=1.	$\perp$
10.57. Funkcija $f(x) = \ln x$ nije definisana u tački x=0.	$\top$
10.58. Nula funkcije $f(x) = \ln x$ je u tački x=1.	$\top$
10.59. Funkcija $f(x) = \ln x$ nije definisana u tački $x = -1$.	$\top$
10.60. Funkcija $f(x) = \sqrt{x+1}$ nije definisana u tački $x = -1$.	$\perp$
10.61. Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ nije definisana u tački $x = -1$.	$\top$
10.62. Funkcija $f(x) = \sqrt{-x}$ je definisana u tački $x = -4$.	$\top$
10.63. Funkcija $f(x) = \sqrt{-x}$ nije definisana za pozitivne realne brojeve.	$\top$
10.64. Kvadratna funkcija uvek ima dve realne nule.	$\perp$
10.65. Ako su dve funkcije definisane na celom skupu $\mathcal{R}$ tada je funkcija njihovog zbira, razlike, proizvoda i kompozicije takođe definisana na $\mathcal{R}$.	$\top$
10.66. Dve međusobno inverzne funkcije imaju grafike osno simetrične u odnosu na pravu koja je simetrala I i III kvadranta.	$\top$
10.67. Funkcije $y_1(x) = \ln x$ i $y_2(x) = e^x$ imaju grafike osno simetrične u odnosu na pravu $y = x$.	$\top$
10.68. Funkcije $y_1(x) = 2x - 2$ i $y_2(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ imaju grafike osno simetrične u odnosu na pravu $y = x$.	$\top$
10.69. Linearne funkcije $f(x) = x-2$ i $g(x) = x+2$ su međusobno inverzne funkcije.	$\top$
10.70. Trigonometrijske funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ su međusobno inverzne funkcije.	$\perp$

10.4.4 Rast i opadanje - monotonost

10.71. Funkcija $f(x) = -2005x + 2004$ na celom domenu raste.	$\perp$
10.72. Funkcija $h(x) = x^2 + 2x + 1$ raste na intervalu $(-1, +\infty)$.	$\top$
10.73. Na celom domenu funkcija $f(x) = -25 + 25x$ raste.	$\top$
10.74. Funkcija $h(x) = x^2 + 2007$ opada na intervalu $(0, +\infty)$.	$\perp$
10.75. Funkcija $g(x) = x^{2007}$ raste na celom domenu.	$\top$
10.76. Na celom domenu funkcija $h(x) = x^{-3}$ opada.	$\top$
10.77. Funkcija $h(x) = -2x^{-3}$ na celom domenu opada.	$\perp$
10.78. Funkcija $t(x) = (2005 + x)^2$ opada na intervalu $(-\infty,-2005)$.	$\top$
10.79. Na intervalu $(-\infty, -1)$ funkcija $h(x) = 5x^2 + 10x + 500$ opada.	$\top$
10.80. Funkcija $h(x) = -5x^2 + 10x + 500$ opada na intervalu $(-\infty, 1)$.	$\perp$
10.81. Na intervalu $(-\infty, 5)$ funkcija $h(x) = -x^2 + 10x + 500$ raste.	$\top$
10.82. Funkcija $h(x) = 5x^2 - 10x + 500$ raste na intervalu $(-\infty, 1)$.	$\perp$

10.83. Funkcija $h(x) = -2x^3$ na celom domenu opada.	$\top$
10.84. Funkcija $h(x) = x^2 + 2x + 1$ raste na intervalu $(-1, +\infty)$.	$\top$
10.85. Funkcija $h(x) = -x^2 - 2x - 2$ raste na intervalu $(-1, +\infty)$.	$\perp$
10.86. Funkcija $y = -\sin x$ opada na intervalu $(0,\pi/2)$.	$\top$
10.87. Funkcija $t(x) = (2005 + x)^2$ opada na intervalu $(-\infty,-2005)$.	$\top$

10.4.5 Ekstremi i prevoji

10.88. U nuli funkcija $a(x) = -\lvert x\rvert$ ima minimum.	$\perp$
10.89. Tačka $(0, 0)$ je prevojna tačka za grafik funkcije $f(x) = x^2$.	$\perp$
10.90. Funkcija $-x^2$ u tački $x = 0$ ima lokalni minimum.	$\perp$
10.91. Funkcija $h(x) = \lvert x - 2\rvert$ u tački x=2 ima lokalni maksimum.	$\perp$
10.92. U tački $x = 0$ funkcija $f(x) = x^2$ ima maksimum.	$\perp$
10.93. Funkcija $y = 2\cos(2x)$ ima maksimum u tački π.	$\top$
10.94. Funkcija $y = 2\sin(2x)$ ima maksimum u $\pi/2$.	$\perp$
10.95. Svi minimumi funkcije $\cos x$ su u tačkama sledećeg oblika $-\pi - 2k\pi$, $k \in Z$.	$\top$
10.96. Svi ekstremi funkcije $\sin x$ su oblika $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$.	$\perp$
10.97. Sve prevojne tačke funkcije $\sin x$ su oblika $k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$.	$\top$
10.98. Kvadratna funkcija $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ima minimum.	$\perp$
10.99. Parabola $f(x) = 25x - 25x^2$ ima minimum.	$\perp$
10.100. Funkcija $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ima prevojnu tačku.	$\perp$
10.101. Tačka $(0, 0)$ je prevojna tačka za grafik funkcije $f(x) = x^3$.	$\top$
10.102. U tački $x = 0$ funkcija $f(x) = x^2$ ima minimum.	$\top$
10.103. Parabola $f(x) = 25x^2 - 25x$ ima minimum.	$\top$
10.104. U tački $x = 0$ funkcija $f(x) = -x^2 + 200000$ ima maksimum.	$\top$
10.105. Funkcija $f(x) = -25x^2$ ima lokalni minimum.	$\perp$
10.106. Parabola $f(x) = 2006x^2 - 2005$ na celom domenu opada i ima minimum.	$\perp$
10.107. Funkcija $f(x) = \lvert x - 1\rvert$ u tački x=1 ima lokalni minimum.	$\top$
10.108. U tački $x = 1$ funkcija $f(x) = -x^2 + 2x$ ima maksimum.	$\top$
10.109. Tačka $(0, 0)$ je prevojna tačka za grafik funkcije $\cos x$.	$\perp$
10.110. Funkcija $-\sin x$ u tački $x = \pi/2$ ima lokalni minimum.	$\top$
10.111. U tački $x = 100000$ funkcija $f(x) = -x^2 + 200000 \cdot x$ ima maksimum.	$\top$
10.112. Funkcija $f(x) = -25 - 25x$ ima minimum.	$\perp$
10.113. U tački $x = 0$ funkcija $f(x) = 2006x^3 - 2005x$ ima prevoj.	$\top$

10.4.6 Konveksnost i konkavnost

10.114. Kvadratna funkcija $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ je konveksna.	$\perp$
10.115. Funkcija $y = -\cos x$ je konveksna na intervalu $(0,\pi/2)$.	$\top$
10.116. Funkcija $y = -\sin x$ je konveksna na intervalu $(0,\pi/2)$.	$\top$
10.117. Funkcija $h(x) = -x^4 + 1$ je konveksna na celom domenu.	$\perp$
10.118. Hiperbola $y = \dfrac{1}{x+5}$ na celom domenu raste i konveksna je.	$\perp$
10.119. Hiperbola $y = \dfrac{1}{-x+5}$ na celom domenu raste i konkavna je.	$\perp$
10.120. Funkcija $f(x) = x^{-2}$ je konkavna na celom domenu.	$\perp$
10.121. Funkcija $h(x) = -x^4 + x^2$ je konveksna na celom domenu.	$\perp$
10.122. Na intervalu $(0, \pi)$ funkcija $\sin x$ raste i konkavna je.	$\perp$
10.123. Parabola $g(x) = x^2 + x$ je konveksna na celom domenu.	$\top$
10.124. Parabola $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ je konveksna na celom domenu.	$\perp$
10.125. Kvadratna funkcija $f(x) = x^2 + 2x + 3$ je konkavnana celom domenu.	$\perp$
10.126. Funkcija $h(x) = x^{2006}$ je konveksna na celom domenu.	$\top$
10.127. Na celom domenu funkcija $f(x) = x^{-4}$ je konkavna na celom domenu.	$\perp$
10.128. Funkcija $h(x) = -x^4 + 1$ je konveksna na celom domenu.	$\perp$
10.129. Na celom domenu funkcija $h(x) = -x^{2006}$ je konveksna.	$\perp$

10.4.7 Izvodi funkcije

10.130. Treći izvod funkcije $(x^3)''' = 6$.	$\top$
10.131. Treći izvod funkcije $(x^2)''' = 2$.	$\perp$
10.132. U tački $x = 0$ funkcija $f(x) = 2006x^3 - 2005x$ ima prevoj.	$\top$
10.133. Drugi izvod funkcije $y(x) = e^{9x}$ je $y''(x) = e^{9x}$.	$\perp$
10.134. Prvi izvod funkcije $y(x) = x^2 - x^4$ je $y'(x) = 2x - 4x^3$.	$\top$
10.135. Peti izvod funkcije $(x^4)^{(5)} = 0$.	$\top$
10.136. Deseti izvod funkcije $y(x) = x^9$ je $y^{(10)}(x) = 0$.	$\top$
10.137. Stopeti izvod funkcije x^{100} je jednak 0.	$\top$
10.138. Peti izvod funkcije e^x je jednak e^x.	$\top$
10.139. Funkcija $g(x) = e^{-x}$ ima stoprvi izvod jednak e^{-x}.	$\perp$
10.140. Stoti izvod e^x u tački 1 je jednak e.	$\top$
10.141. U tački $x = 0$ funkcija $f(x) = e^{-x}$ ima hiljaditi izvod jednak -1.	$\perp$
10.142. Treći izvod funkcije $(\sin(x))''' = -\sin x$.	$\perp$

10.143. Prvi izvod funkcije $y(x) = \ln(x^2 - x^4)$ je $y'(x) = \dfrac{2-4x^2}{x-x^3}$.	$\top$
10.144. U tački $x = \pi$ funkcija $f(x) = \sin x$ ima stoti izvod jednak 1.	$\perp$
10.145. U tački $x = 0$ funkcija $f(x) = \cos x$ ima stoti izvod jednak 1.	$\top$
10.146. Sledeća formula $(h(x) \cdot k(x))' = (h(x))' \cdot (k(x))'$ važi.	$\perp$
10.147. Za svaku diferencijabilnu funkciju h i k važi $(20 \cdot h(x) \cdot k(x))' = 20 \cdot k(x) \cdot (h(x))' + 20 \cdot (k(x))' \cdot h(x)$.	$\top$
10.148. Važi $(h(x) - k(x))' = (h(x))' + (k(x))'$ za sve diferencijabilne funkcije h i k.	$\perp$
10.149. Tačno je da postoje funkcije f i g za koje je $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.	$\top$
10.150. Tačno je da je $(-f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$ za svaku diferencijabilnu funkciju f i g.	$\perp$
10.151. Sledeća formula $\left(\dfrac{h(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{h'(x)}{g'(x)}$ važi za svaku funkciju h i g.	$\perp$
10.152. Važi $(h(x) \cdot k(x))' = (h(x))' \cdot k(x) - h(x) \cdot (k(x))'$ za svaku funkciju h i k.	$\perp$
10.153. Formula $(h(x) \cdot k(x) - f(x) \cdot k(x))' = (h(x) - f(x))' \cdot k(x) + (h(x) - f(x)) \cdot (k(x))'$ je tačna za svaku funkciju h, f i k koja ima prvi izvod na zajedničkom D.	$\top$
10.154. Važi $\left(-\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ za svaku funkciju f i g koja ima prvi izvod na zajedničkom domenu.	$\perp$
10.155. Ako je tangenta na grafik funkcije $g(t)$ u tački $(3,g(3))$ paralelna sa t-osom, to znači da je $g'(3) = 0$.	$\top$
10.156. Ako je $h'(6) = 0$, to znači da je tangenta u tački $T(6, h(6))$ na grafik funkcije $h(x)$ paralelna sa x-osom.	$\top$
10.157. Prvi izvod funkcije apsolutne vrednosti je $\lvert x\rvert' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.	$\top$
10.158. Prvi izvod funkcije apsolutne vrednosti je $\lvert x\rvert' = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$.	$\perp$

10.4.8 Primena izvoda

10.159. Ako je $f'(x) < 0$ na intervalu $(a, b) \subset D$, sledi opadanje $f(x)$ na (a, b).	$\top$
10.160. Ako je $s''(t) > 0$ na (t_1, t_2), onda funkcija s raste na (t_1, t_2).	$\perp$
10.161. Ako funkcija $f(x)$ ima prvi izvod u tački p jednak 0 i prvi izvod u okolini tačke p menja znak, tada u tački p funkcija f ima prevojnu tačku.	$\perp$
10.162. Potreban uslov da funkcija $f(x)$, $x \in D$, diferencijabilna na D u tački $x = 11 \in D$ ima lokalni ekstrem je $f'(11) = 0$.	$\top$

10.163. Ako je $g'(x) \geq 0$ za svako x iz (a,b) tada je $g(x)$ rastuća na intervalu (a,b). (Proverite za $g(x)=9$.)	$\perp$
10.164. Uslov $g'(a)=0$ za tačku $a \in D$ je dovoljan uslov za lokalni ekstrem u tački a funkcije $g(x)$.	$\perp$
10.165. Potreban uslov da u tački $1 \in D$ diferencijabilna funkcija f ima ekstremnu vrednost je $f'(1)=0$.	$\top$
10.166. Ako je $g'(x)>0$ za svako x iz $(a,b) \subset D$, tada je $g(x)$ rastuća na intervalu (a,b).	$\top$
10.167. Iz uslova $g''(11)<0$ i $g'(11)=0$ sledi da funkcija $g(x)$ ima u tački $11 \in D$ lokalni maksimum.	$\top$
10.168. Dovoljan uslov da u tački $x=11$ funkcija $f(x)$ ima prevoj je $f''(11)=0$.	$\perp$
10.169. Ako funkcija f ima drugi izvod u tački $b \in D$ različit, a prvi izvod jednak 0, tada u tački b funkcija f ima ekstremnu tačku.	$\top$
10.170. Uslov $g''(0)=0$ za dva puta diferencijabilnu funkciju g je potreban da u tački $0 \in D$ funkcija g ima prevojnu tačku.	$\top$
10.171. Potreban uslov da u tački $1 \in D$ dva puta diferencijabilna funkcija f ima prevoj je $f''(1)=0$.	$\top$
10.172. Dovoljan uslov da u tački 11 funkcija f ima lokalnu ekstremnu vrednost je $f'(11)=0$.	$\perp$
10.173. Ako je $g'(x) \leq 0$ za svako x iz (a,b), tada je $g(x)$ opadajuća na (a,b). (Proverite za $g(x)$=5.)	$\perp$
10.174. Ako prvi izvod funkcije menja znak u okolini tačke p i $p \in D$, onda funkcija u tački p ima ekstrem.	$\top$
10.175. Ako funkcija $f(x)$ ima prvi izvod u tački p jednak 0 i prvi izvod u okolini tačke p menja znak, tada u tački p funkcija f ima prevojnu tačku.	$\perp$
10.176. Ako drugi izvod dva puta diferencijabilne funkcije menja znak u okolini tačke p, onda funkcija u tački $p \in D$ ima prevoj.	$\top$
10.177. Ako prvi izvod menja znak u okolini tačke $e \in D$, onda funkcija u tački e ima lokalni ekstrem.	$\top$
10.178. Funkcija $h(u)$, $u \in D$, ima prevojnu tačku u tački a iz D akko postoje tačke c i b tako da je $h''(u)<0$ na $(c,a) \subset D$ i $h''(u)>0$ na $(a,b) \subset D$, ili obrnuto.	$\top$
10.179. Ako je f neparna funkcija i neka je $f'(x)<0$ i $f(x)>0$ za $x \in (-10,0) \subset D$, to znači da je $f(x)$ na intervalu $(0,10) \subset D$ negativna i opada.	$\top$
10.180. Ako je f parna funkcija i $f'(x)<0$ za $x \in (-5,0) \subset D$, to znači da $f(x)$ na intervalu $(0,5) \subset D$ raste.	$\top$
10.181. Ako je f neparna funkcija i $f'(x)>0$ za $x \in (-15,-5) \subset D$, to znači da $f(x)$ na intervalu $(5,15) \subset D$ opada.	$\perp$
10.182. Ako je f parna funkcija i ima lokalni minimum u tački $-10 \in (-15,-5) \subset D$, to znači da $f(x)$ ima lokalni minimum i u tački $10 \in (5,15) \subset D$.	$\top$

10.183. Ako je f parna funkcija i $f''(x) < 0$ za $x \in (-5,0) \subset D$, to znači da je $f(x)$ na intervalu $(0,5) \subset D$ konveksna.	$\perp$
10.184. Ako je f parna funkcija i $f''(x) > 0$ za $x \in (-5,0) \subset D$, to znači da je $f(x)$ na intervalu $(0,5) \subset D$ konkavna.	$\perp$

10.4.9 Neprekidnost, prekidi i diferencijabilnost

10.185. Funkcija $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ je neprekidna u tački x=1.	$\top$
10.186. U tački $x = 2$ funkcija $-\dfrac{\lvert 2x-4\rvert}{2}$ nema prvi izvod i ima minimum.	$\perp$
10.187. U tački $x = -1$ funkcija $a(x) = -\lvert x+1\rvert$ ima maksimum i nema prvi izvod.	$\top$
10.188. Funkcija $h(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ je neprekidna u tački $x = 0$.	$\top$
10.189. Funkcija $h(x)$ iz prethodnog zadatka ima prvi izvod u tački $x = 0$.	$\perp$
10.190. Funkcija $f(x) = \lvert x-1\rvert$ ima izvod u tački x=1.	$\perp$
10.191. Funkcija $f(x) = \lvert x-1\rvert$ je neprekidna u tački x=1.	$\top$
10.192. Funkcija $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > -2 \\ 0, & x \leq -2 \end{cases}$ je neprekidna na $[-3,0]$.	$\perp$
10.193. Funkcija $f(x)$ iz prethodnog zadatka je neprekidna na $[-3,-2]$.	$\top$
10.194. Funkcija $h(x) = \begin{cases} \lvert x-1\rvert, & x > -2 \\ 3, & x \leq -2 \end{cases}$ je neprekidna na $\mathcal{R}$.	$\top$
10.195. Prethodna funkcija $h(x)$ je diferencijabilna na $(-3{,}3)$.	$\perp$
10.196. Prividan prekid u tački $x = 0$ ima funkcija $g(x) = \begin{cases} 2x+2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.	$\top$
10.197. Otklonjiv (prividan) prekid u tački $x = 0$ ima funkcija $g(x) = \begin{cases} 2x+2, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$.	$\perp$
10.198. Funkcija je neprekidna u nekoj tački, ako i samo ako ima prvi izvod u toj tački.	$\perp$
10.199. Funkcija $h(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}$ je neprekidna na intervalu (0,1).	$\top$
10.200. Ako je funkcija neprekidna u nekoj tački, onda ima i prvi izvod u toj tački.	$\perp$
10.201. Otklonjiv (prividan) prekid u tački $x = 1$ ima funkcija $g(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.	$\top$

10.202. Otklonjiv (prividan) prekid u tački $x = 0$ ima funkcija $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.	$\top$
10.203. Prekid prve vrste u tački $x = 0$ ima funkcija $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.	$\perp$
10.204. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ima otklonjiv (prividan) prekid u tački $x = 0$.	$\perp$
10.205. Ako je funkcija diferencijabilna u nekoj tački, onda je u toj tački i neprekidna.	$\top$
10.206. Funkcija $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ ima u 1 prekid druge vrste.	$\top$
10.207. Funkcija $h(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ -x, & x > 1 \end{cases}$ je neprekidna na intervalu [0,1].	$\top$
10.208. Funkcija $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ ima u tački 1 prekid prve vrste.	$\perp$
10.209. Prekid prve vrste u tački $x = 2$ ima funkcija $g(x) = \begin{cases} 2x+2, & x < 2 \\ 2x-2, & x \geq 2 \end{cases}$.	$\top$
10.210. Funkcija $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ ima u 2 prekid prve vrste.	$\perp$
10.211. Funkcija $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ je neprekidna u tački $x = 0$.	$\top$
10.212. Prethodna funkcija $f(x)$ ima prvi izvod u tački $x = 0$.	$\perp$
10.213. Funkcija $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > -2 \\ 0, & x \leq -2 \end{cases}$ je neprekidna na $[-2, 0]$.	$\perp$
10.214. Funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+2}, & x \neq -2 \\ 0 & x = -2 \end{cases}$ nije neprekidna u tački $x = -2$.	$\top$
10.215. Funkcija $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ima prividan prekid u tački $x = 0$.	$\top$
10.216. Funkcija $h(x)$ iz prethodnog zadatka ima prvi izvod u tački $x = 0$.	$\perp$
10.217. Da bi neprekidna funkcija na intervalu imala nulu dovoljno je da na krajevima intervala menja znak. (metod polovljenja)	$\top$
10.218. Funkcija $f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x$ na intervalu $(-1{,}1)$ ima nulu.	$\top$
10.219. Funkcija $f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x + 8$ na intervalu $(-1{,}0)$ ima bar jednu nulu.	$\top$
10.220. Funkcija $f(x) = x^3 - 8x + 6$ na intervalu $(0{,}2)$ ima nulu.	$\top$

10.221. Funkcija $f(x) = x^3 - 8x + 6$ na intervalu (0,1) nema nulu.	$\perp$
10.222. Funkcija $f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x + 2$ na intervalu (−1,1) ima nulu.	$\top$
10.223. Funkcija $g(x) = (x-2)(x-1)e^x$ na intervalu (1,2) ima tačku u kojoj je njen prvi izvod jednak 0. (Pogledajte Rolovu teoremu)	$\top$
10.224. Funkcija $f(x) = (x-1)(x+2)e^x$ na intervalu (−2,1) ima tačku u kojoj je njen prvi izvod jednak 0. (Pogledati Rolovu teoremu)	$\top$
10.225. Za funkciju $p(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x + 3$ postoji c, $c \in (0,1)$, tako da je $p(c) = \sqrt{5}$. (Teorema o neprekidnoj funkciji na zatvorenom intervalu)	$\top$
10.226. Funkcija $g(x) = x^3 - x^2$ na intervalu (0,10) ima tačku u kojoj je prvi izvod jednak 90. (Lagranžova teorema)	$\top$
10.227. Za funkciju $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x + 3$ postoji c, $c \in (0,1)$, tako da je $f(c) = e$. (Teorema o neprekidnoj funkciji na zatvorenom intervalu)	$\top$
10.228. Za funkciju $f(x) = x^3 + 2x$ postoji tačka $a \in (0,1)$ tako da je $f(a) = \sqrt{5}$.	$\top$
10.229. Za funkciju $f(x) = x^3 + 2x$ postoji tačka $a \in (0,1)$ tako da je $f(a) = \sqrt{3}$.	$\top$
10.230. Za funkciju $f(x) = x^3 + 2x - 2$ postoji tačka $a \in (0,1)$ tako da je $f(a) = -\sqrt{3}$.	$\top$
10.231. Funkcija $g(x) = x^3 - 3x^2$ na intervalu (0,10) ima tačku u kojoj je prvi izvod jednak 70. (Lagranžova teorema)	$\top$

10.4.10 Asimptote

10.232. Funkcija $h(x) = \dfrac{1}{x}$ ima vertikalnu asimptotu $x = 0$.	$\top$
10.233. Funkcija $y(x) = \dfrac{1}{x}$ ima horizontalnu asimptotu $y = 0$.	$\top$
10.234. Funkcija $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ ima horizontalnu asimptotu $f = 0$.	$\perp$
10.235. Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ ima vertikalnu asimptotu $x = -1$ i horizontalnu $f = 0$.	$\top$
10.236. Ako važi da je $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, onda $g(x)$ ima horizontalnu asimptotu.	$\perp$
10.237. Ako važi da je $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$, onda $g(x)$ ima vertikalnu asimptotu.	$\top$
10.238. Ako važi da je $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, onda $g(x)$ ima x-osu za horizontalnu asimptotu.	$\top$
10.239. Ako važi da je $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 3^+$, onda $y(x)$ ima pravu $y = 3$ za horizontalnu asimptotu.	$\top$
10.240. Funkcija $f(x) = \cos x$ ima horizontalne asimptote $y = 1$ i $y = -1$.	$\perp$
10.241. Ako je $g(x) > 0$, $x \in D$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 14$, tada je $\lim\limits_{x\to\infty} \ln g(x) = \ln 14$.	$\top$

10.242. Funkcija h ima vertikalnu asimptotu $x=5$ akko važi da je (ili $\lim\limits_{x\to 5^+} h(x) = +\infty$ ili $\lim\limits_{x\to 5^+} h(x) = -\infty$) ili (ili $\lim\limits_{x\to 5^-} h(x) = +\infty$ ili $\lim\limits_{x\to 5^-} h(x) = -\infty$).	$\top$
10.243. Postoji 8 različitih načina da prava $y=3$ bude horizontalna asimptota neke funkcije po definiciji.	$\top$
10.244. Da bi funkcija $f(x)$ imala kosu asimptotu dovoljno je da postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.	$\perp$
10.245. Ako važi da je $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$, onda $g(x)$ ima horizontalnu asimptotu $x=1$.	$\perp$
10.246. Ako važi da je $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$, onda $g(x)$ ima vertikalnu asimptotu $x=1$.	$\top$
10.247. Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ima vertikalnu asimptotu $x=-1$ i horizontalnu x-osu.	$\perp$
10.248. Ako je $\lim\limits_{x\to 17} g(x) = 17$, tada je $\lim\limits_{x\to 17} g(x)^{17} = 17^{17}$.	$\top$

10.4.11 Neodređeni izrazi

10.249. U neodređene izraze se ubraja i izraz “$-\infty\cdot(-\infty)$”.	$\perp$
10.250. Izraz ”17^{∞}” je neodređen.	$\perp$
10.251. U neodređene izraze se ubraja i izraz “$\infty\cdot\infty$”.	$\perp$
10.252. ”0^1” je neodređen izraz.	$\perp$
10.253. ”0^0” je neodređen izraz.	$\top$
10.254. ”0^{∞}” je neodređen izraz.	$\top$
10.255. Izraz ”$\dfrac{17}{\infty}$” je neodređen.	$\perp$
10.256. Neodređen izraz nije izraz “$-\infty-\infty$”.	$\top$
10.257. ”1^0” je neodređen izraz.	$\perp$
10.258. U neodređene izraze se ubraja i izraz “$-\infty\cdot(+\infty)$”.	$\perp$
10.259. ” $-\infty+\infty$ ” je neodređen izraz.	$\top$
10.260. Lopitalovim pravilom rešavamo neku graničnu vrednost količnika funkcija koji teži neodređenom izrazu oblika “∞/∞” ili “$0/0$”.	$\top$

Glava 10.

11 Funkcije poslovne matematike

Označimo sa x (najčešće nezavisnu) promenljivu koja predstavlja **ukupnu količinu jedinica robe** (skraćeno j.r.). Sa p označimo **cenu** u novčanim jedinicama (skraćeno n.j.) po jedinici robe.

Potražnja robe x, od strane kupaca, zavisi od cene, sledi da je funkcija $x(p)$ funkcija **tražnje** (tj. **potražnje**). U zavisnosti od aktuelne cene p robe na tržištu zavisi i ukupna količina proizvoda y koji se prodaju. Ovu funkciju $y(p)$ zovemo funkcijom **ponude**. Tržište je u ravnoteži kada je ponuda jednaka potražnji, odnosno kada su funkcije potražnje i ponude robe jednake, tj. $x(p) = y(p)$. Cena za koju su ponuda i tražnja iste je dobro nivelisana.

Funkcija **ukupnih prihoda** P je direktno proporcionalna ukupnoj količini robe x i ceni p po jedinici robe:

$$P = p \cdot x.$$

Prihode možemo izraziti i samo preko cene ukoliko ih prikažemo kao proizvod cene i količine robe x:

$$P(p) = p \cdot x(p),$$

ili samo preko ukupne količine robe ako cenu izrazimo preko potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x.$$

Funkcija **ukupnih troškova** se označava sa $C(x)$, dok funkciju **ukupne dobiti** označavamo sa $D(x)$. Dobit je jednaka razlici između ukupnih prihoda i ukupnih troškova te je funkcija ukupne dobiti:

$$D(x) = P(x) - C(x),\ x \geq 0.$$

Funkcije **prosečnih troškova**, **prihoda** i **dobiti**, redom označavamo sa $\overline{C}(x), \overline{P}(x)$ i $\overline{D}(x)$, su definisane kao količnici funkcija ukupnih troškova, prihoda i dobiti sa ukupnom količinom robe x:

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}, \quad \overline{P}(x) = \frac{P(x)}{x} \quad \text{i} \quad \overline{D}(x) = \frac{D(x)}{x},\ x > 0.$$

Stoga je $\overline{C}(x)$ tršak po jedinici robe, $\overline{P}(x)$ prihod po jedinici robe a $\overline{D}(x)$ dobit po jedinici robe.

Primeri.

1. Funkcija ukupnih prihoda je $P(x) = -5x^2 + 100x$. Naći funkcije tražnje i $P(p)$.

Kako je $p(x) = \frac{P(x)}{x} = -5x + 100$, sledi da je $x(p)$ kao inverzna funkcija $x(p) = -0.2p + 20$. Tako je $P(p) = p \cdot x(p) = -0.2p^2 + 20p$.

2. Ako je funkcija tražnje $x = \dfrac{400}{p+50}$ i prosečnih troškova $\overline{C}(x) = 2x - 5 + 100/x$, naći

prosečnu dobit.
Funkcija ukupnih troškova je $C(x) = x \cdot \overline{C}(x) = 2x^2 - 5x + 100$. Iz $p = 400x^{-1} - 50$ imamo $P(x) = x \cdot p(x) = 400 - 50x$. Funkcija ukupne dobiti je
$D(x) = P(x) - C(x) = 400 - 50x - 2x^2 + 5x - 100 = 300 - 45x - 2x^2$.

Jasno je da je vrlo bitno da se zna do koje granice smemo da smanjujemo ili povećavamo proizvodnju, a da preduzeće još uvek ostvaruje dobit. Sve one vrednosti količine proizvedene robe x za koju preduzeće ima pozitivnu dobit čine **interval rentabilnosti**.

Kada su poznate poslovne funkcije koje prate određenu proizvodnju ili trgovinu, važno je da znamo da izračunamo parametre proizvodnje koji će nam omogućititi efikasniju proizvodnju, odnosno trgovinu.

Neki od tih parametara su: **minimalni prosečni troškovi** $\overline{C}_{min}$, **maksimalni prihod** P_{max} u zavisnosti od cene p_{opt} ili u zavisnosti od količine robe x_{opt}, **maksimalna dobit** D_{max}, interval rentabilnosti robe (x_1, x_2). Ekstremne vrednosti (minimume ili maksimume) poslovnih funkcija možemo da izračunamo na način opisan u poglavlju 10.3. Nađimo nule prvog izvoda i proverimo promene znaka prvog izvoda.

Ilustrujmo računanje ovih važnih parametara proizvodnje na primerima:

Primeri:

1. Neka je funkcija tražnje $x = \sqrt{19200 - 4p}$. Naći cenu i količinu robe tako da ukupan prihod bude maksimalan i naći taj prihod.
Rešenje. Ako kvadriramo obe strane funkcije tražnje a zatim izrazimo p, dobija se $p = 4800 - 1/4 \cdot x^2$. Funkcija ukupnog prihoda je
$P = p \cdot x = 4800x - 1/4 \cdot x^3$.
$P'(x) = 4800 - 3/4 \cdot x^2$. Iz $P' = 0$ sledi $4800 - 3/4 \cdot x^2 = 0$, što je ekvivalentno sa $x^2 = 6400$.

Rešenja ove kvadratne jednačine su $x_1 = -80$ i $x_2 = 80$. Negativna količina proizvedene robe nema smisla pa dalje posmatramo samo rešenje $x = 80$. Proverimo po teoremi 17 da li se za količinu robe od $x = 80$ jedinica robe dobija maksimalan prihod.
$P''(x) = -3/2 \cdot x$, pa je $P''(80) = -120 < 0$, što znači da se maksimalan prihod P_{max} ostvaruje za $x_{opt} = 80$ jediniuca robe, i on iznosi $P_{max} = P(80) = 4800 \cdot 80 - 1/4 \cdot 80^3 = 256000$.

Tražena cena za maksimalan prihod je $p = 4800 - 1/4 \cdot 80^2 = 3200$ novčanih jedinica po jedinici proizvoda.

2. Neka su ukupni troškovi dati funkcijom $C(x) = 1/100 \cdot x^2 + 20x + 900$. Odrediti minimalne prosečne troškove kao i proizvodnju x tako da se oni postižu.
Rešenje. Funkcija prosečnih troškova je
$\overline{C}(x) = C(x)/x = 1/100 \cdot x + 20 + 900 \cdot x^{-1}$.
$\overline{C}'(x) = 1/100 - 900 \cdot x^{-2}$. Sledi
$\overline{C}'(x) = 0$ je ekvivalentno sa jednačinom $x^2 = 90000$, čija su rešenja $x_1 = 300$ i $x_2 = -300$ (neinteresantno rešenje).

Kako je $\overline{C}''(x) = 1800 \cdot x^{-3}$, sledi da je $\overline{C}''(300) > 0$, što po teoremi 17 znači da se za $x_{opt} = 300$ postižu minimalni prosečni troškovi koji su jednaki $\overline{C}_{min} = \overline{C}(300) = 26$ novčanih jedinica.

3. Data je funkcija ukupnih troškova za neki proizvod $C = 2x^2 + 2000000$, i funkcija tražnje tog proizvoda $x = 10000 - p/2$, gde je x količina robe, a p cena u dinarima. Odrediti:
a) cenu p pri kojoj će se ostvariti maksimalna dobit i odrediti je;

b) ukupan prihod u uslovima maksimalne dobiti;
c) interval rentabilnosti (proizvodnju za koju je dobit pozitivna).
Rešenje. Date su nam funkcija troškova i tražnje: $C = 2x^2 + 2000000$, $x = 10000 - p/2$. Kako je $D(x) = P(x) - C(x)$, i $P(x) = x \cdot p(x)$ treba nam još funkcija cene u zavisnosti o tražnje $p(x) = 20000 - 2x$.
$P(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (20000 - 2x) = 20000x - 2x^2$.
a) Odredimo prvo maksimalnu dobit D_{max}, u zavisnosti od količine proizvodnje.
$D(x) = P - C = 20000x - 2x^2 - 2x^2 - 2000000 = -4x^2 + 20000x - 2000000$.
$D'(x) = -8x + 20000$ sledi $D'(x) = 0$ za $x = 2500$. Kako je $D''(x) = -8$ sledi da je $D''(2500) = -8 < 0$, pa po Teoremi 17 u tački $x = 250$ dobit ima maksimalnu vrednost, tj,
$D_{max} = D(x_{opt}) = D(2500) = -4 \cdot 2500^2 + 20000 \cdot 2500 - 2000000 = 23000000$.

Cena koju imamo za proizvodnju od $x = 2500$ je $p(2500) = 20000 - 2 \cdot 2500 = 15000$. Znači, maksimalna dobit D_{max}= 23 000 000 se postiže pri ceni od $p_{opt} = 15000$.
b) Ukupan prihod u uslovima maksimalne dobiti
D_{max}= 23 000 000 =D(2500), se postiže za optimalnu proizvodnju od $x_{opt} = 2500$ i jednak je
$P(2500) = 20000 \cdot 2500 - 2 \cdot 2500^2 = 37500000$.
c) Nađimo granične količine proizvodnje x_1 i x_2 za koju je dobit nula, $D = 0$, tj. za koju su prihodi jednaki troškovima $P = C$:
$D(x) = -4x^2 + 20000x - 2000000 = 0$. Kada podelimo sa -4 dobijamo kvadratanu jednačinu:

$$x^2 - 5000x + 500000 = 0 \ ,$$

čija su rešenja $x_{1,2} = \dfrac{5000 \pm \sqrt{25000000 - 2000000}}{2} = \dfrac{500 \pm \sqrt{23000000}}{2} = \dfrac{5000 \pm 4800}{2}$,
$x_1 = 100$ i $x_2 = 4900$, pa je interval rentabilne proizvodnje $x \in (100, 4900)$.

Jedan od važnih pojmova koji doprinose objektivnom upoređivanju i analizi različitih poslovnih preduzeća je elastičnost odgovarajućih poslovnih funkcija.

11.1 Elastičnost funkcije

Priraštaj argumenta i funkcije su definisani u poglavlju 10.2. **Relativni priraštaji** funkcije f i argumenta u tački x su redom količnici $\dfrac{\Delta f}{f(x)}$ i $\dfrac{\Delta x}{x}$, pri čemu su Δf i Δx priraštaj funkcije i priraštaj argumenta.

Na primer, neka je funkcija $f(x) = 5x^2 - 10$ i neka je $x = 2$ i $\Delta x = 1$, tada je priraštaj funkcije $\Delta f = f(3) - f(2)$=35-10=25, relativni priraštaj funkcije u tački $x = 2$ je $\dfrac{25}{f(2)} = 2,5$, dok je relativni priraštaj argumenta $\dfrac{\Delta x}{x} = 0,5$.

Kada posmatramo relativni priraštaj funkcije i relativni priraštaj argumenta onda se gube jedinice mere u kojima su izražene nezavisna i zavisna promenljiva. Na taj način, posmatrajući samo relativne odnose možemo da upoređujemo funkcije izražene u različitim jedinicama mere. Na primer, jedna funkcija ukupnih troškova $C_1(x)$ za jedinicu mere nezavisne promenljive x može da ima 100 t, dok jedinica mere zavisne promenljive može biti u 1000 dinara, dok druga funkcija troškova $C_2(x)$ za odgovarajuće jedinice mere nezavisne i zavisne promenljive može imati metre i dolare. Jasno je da bi ovakve dve proizvodnje bilo teško uporedjivati bez prelaska na relativne odnose promenljivih.

Granična vrednost količnika relativnog priraštaja funkcije f i relativnog priraštaja nezavisne promenljive x, kad priraštaj nezavisne promenljive teži 0, naziva se **elastičnost** *funkcije $y = f(x)$ i označava sa $E_{y,x}$.*

Povezaćemo elastičnost funkcije sa prvim izvodom funkcije, ukoliko on postoji. Po definiciji elastičnosti imamo:

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot x}{\Delta x \cdot y} =$$

$$\frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Znači, elastičnost funkcije y ćemo nadalje računati kao funkciju

$$\boxed{E_{y,x} = \tfrac{x}{y} y'.}$$

Odgovarajuće formule za elastičnost funkcija: ukupnih prihoda u zavisnosti od cene, ukupnih prihoda u zavisnosti od količine robe, ukupnih troškova, ukupne dobiti, prosečnih prihoda, troškova i dobiti, kao i elastičnost tražnje i cene slede:

$$E_{P,p} = \frac{p}{P(p)} P'(p), \qquad E_{P,x} = \frac{x}{P(x)} P'(x),$$

$$E_{C,x} = \frac{x}{C(x)} C'(x), \qquad E_{D,x} = \frac{x}{D(x)} D'(x),$$

$$E_{\overline{P},x} = \frac{x}{\overline{P}(x)} \overline{P}'(x), \qquad E_{\overline{C},x} = \frac{x}{\overline{C}(x)} \overline{C}'(x), \qquad E_{\overline{D},x} = \frac{x}{\overline{D}(x)} \overline{D}'(x),$$

$$E_{x,p} = \frac{p}{x(p)} x'(p), \qquad E_{p,x} = \frac{x}{p(x)} p'(x).$$

Kada tumačimo elastičnost funkcije $y(x)$, $x \in D$, u tački x, ona predstavlja približno procenat relativnog priraštaja funkcije pri jednoprocentnom relativnom priraštaju nezavisne promenljive. Odnosno, ako se za 1% poveća x onda se ili za $E_{y,x}$% poveća y (kada je $E_{y,x} > 0$) ili za $E_{y,x}$% smanji y (kada je $E_{y,x} < 0$).

Pošto se radi o relativnom odnosu zavisne i nezavisne promenljive, elastičnost je pogodna za komparativnu analizu. Sledi primer.

Primer. Date su dve funkcije ukupnih prihoda:
$P_1(p) = -5p^2 + 100p, \quad P_2(p) = -10p^2 + 1000p.$

Gde nezavisna promenljiva p u P_1 predstavlja cenu po kg pšenice, dok promenljiva p u P_2 predstavlja cenu po kubnom metru građe. Za cenu od p=15 novčanih jedinica po jedinici robe uporediti odgovarajuće vrednosti elastičnosti $E_{P_1,p}$ i $E_{P_2,p}$.

Rešenje. Odredimo prvo funkcije elastičnosti:

$$E_{P_1,p} = \frac{p}{P_1(p)} P_1'(p) = \frac{p}{-5p^2 + 100p} \cdot (-10p + 100) = \frac{-2p + 20}{-p + 20}.$$

$$E_{P_2,p} = \frac{p}{P_2(p)} P_2'(p) = \frac{p}{-10p^2 + 1000p} \cdot (-20p + 1000) = \frac{-2p + 100}{-p + 100}.$$

Tako su za $p = 15$ n.j. po j.r, $E_{P_1,15} = -2$ i $E_{P_2,15} = 0,82353$, što znači: ako cenu povećamo za 1% pri trenutnoj ceni od 15 n.j., ukupni prihodi P_1, za prvo preduzeće će opasti za 2%, dok će ukupni prihodi P_2 za drugo preduzeće da se povećaju za približno 0,8%.

U sledećoj teoremi su date veze između elastičnosti poslovnih funkcija.

Elastičnosti poslovnih funkcija su u sledećim međuzavisnostima:

a) $E_{P,p} = 1 + E_{x,p}$; **b)** $E_{C,x} = 1 + E_{\overline{C},x}$;

c) $C'(x) = \overline{C}(x)(1 + E_{\overline{C},x})$; **d)** $P'(p) = x(1 - E_{x,p})$;

e) $E_{C,x} = \dfrac{C'(x)}{\overline{C}(x)}$;

Dokaz.

a) $P(p) = x(p) \cdot p$, sledi da je $E_{P,p} = \dfrac{p}{P}P' = \dfrac{p}{x(p) \cdot p}(x(p) \cdot p)'_p = \dfrac{x'(p) \cdot p + x(p)}{x(p)} = \dfrac{p}{x} \cdot x' + 1 = E_{x,p} + 1$;

b) $1 + E_{\overline{C},x} = 1 + \dfrac{x}{\overline{C}}\overline{C}' = 1 + \dfrac{x}{C/x}(C/x)' = 1 + \dfrac{x^2}{C} \cdot \dfrac{C' \cdot x - C}{x^2} = 1 + \dfrac{x}{C}C' - 1 = E_{C,x}$;

c) $\overline{C}(x)(1 + E_{\overline{C},x}) \overset{\mathbf{b)}}{=} \overline{C}(x)E_{C,x} = \dfrac{C}{x} \cdot \dfrac{x}{C}C'(x) = C'(x)$;

d) $x(1 - E_{x,p}) = x(1 - \dfrac{p}{x}x'(p)) = x - p \cdot x'(p) = (x(p) \cdot p)' = P'(p)$;

e) $\dfrac{C'(x)}{\overline{C}(x)} = \dfrac{C'(x)}{C/x} = \dfrac{x}{C}C'(x) = E_{C,x}$. □

Ilustrujmo na još dva primera ekonomska tumačenja elastičnosti poslovnih funkcija:

Primeri:

1. Data je funkcija tražnje $x(p) = \dfrac{400}{p + 50}$. Odrediti:

a) funkciju elastičnosti tražnje;
b) koeficijent elastičnosti za cenu p od 200 n.j.;
c) dati ekonomsko tumačenje dobijenog rezultata.

Rešenje:

a) Po definiciji elastičnosti, elastičnost funkcije tražnje je :
$E_{x,p} = \dfrac{p}{x(p)}x'$.
Prvi izvod x' tražimo po nezavisnoj promenljivoj p:
$x'(p) = (400(p + 50)^{-1})' = -400(p + 50)^{-2}$. Sledi
$E_{x,p} = \dfrac{p}{400(p + 50)^{-1}}(-400(p + 50)^{-2}) == -\dfrac{p}{p + 50}$.

b) $E_{x,200} = -\dfrac{200}{200 + 50} = -0,8$.

c) Rezultati pod b) ukazuju da pri ceni od 200 n.j., porast cene od 1% dovodi do smanjenja tražnje od približno $0,8\%$.

2. Data je funkcija prihoda $P(x) = -5x^2 + 100x$. Odrediti funkciju elastičnosti ukupnih prihoda u zavisnosti od količine proizvodnje x, kao i tumačenje za $E_{P,5}$ i za $E_{P,12}$.

Rešenje: Po formuli je

$E_{P,x} = \frac{x}{P(x)}P'(x) = \frac{x}{-5x^2+100x}\cdot(-10x+100) = \frac{-2x+20}{-x+20}$. Sledi

$E_{P,5} = \frac{-10+20}{-5+20} = \frac{2}{3} = 0,66$, dok je $E_{P,12} = \frac{-24+20}{-12+20} = -\frac{1}{2} = -0,5$.

To znači pri količini proizvedene robe od 5 j.r. pri povećanju proizvodnje od 1% približno se povećava ukupni prihod za $0,66\%$, dok se pri proizvodnji od 12 j.r. pri povećanju proizvodnje robe za 1% smanjuje prihod za 0,5%. Zaključak bi bio da je maksimalan prihod sa proizvodnjom negde između 5 i 12 jedinica robe.

Sledeća teorema povezuje optimalnu proizvodnju sa elastičnošću prosečnih troškova.

Optimalna proizvodnja x_{opt} je ona za koju su prosečni troškovi minimalni.

Formulom, ukoliko sa x_{opt} označimo optimalnu količinu proizvodnje, to može da se izrazi:

$$x_{opt} \text{ je optimalna proizvodnja } \Leftrightarrow \min_x \overline{C}(x) = \overline{C}(x_0).$$

Optimalna proizvodnja je ona za koju je elastičnost ukupnih troškova jednaka 1.

Preciznije, prethodna teorema tvrdi da za optimalnu proizvodnju x_0 važi:

$$x_{opt} \text{ je optimalna proizvodnja } \Leftrightarrow E_{C,x_{opt}} = 1.$$

U sledećim primerima ilustrujemo kako elastičnost i prethodne dve teoreme koristimo u zadacima:

Primeri:

1. Neka je funkcija ukupnih troškova oblika $C = 100e^{0,2x-4}$. Odredite količinu proizvoda x tako da koeficijent elastičnosti ukupnih troškova bude jednak 1. Zatim pokažite da za tu izračunatu vrednost x imamo optimalnu proizvodnju.

Rešenje: Prvi izvod troškova je $C' = 20e^{0,2x-4}$, pa je elastičnost

$E_{C,x} = \frac{x}{100e^{0,2x-4}}20e^{0,2x-4} = \frac{x}{5}$.

$E_{C,x} = 1$ znači da je $\frac{x}{5} = 1$, odnosno da je $x = 5$.

Da bi za 5 jedinica proizvoda proizvodnja bila optimalna potrebno je proveriti da su prosečni troškovi minimalni. To će biti tačno ako je:

$\overline{C}'(5) = 0$, i $\overline{C}''(5) > 0$ po teoremi 19.

$\overline{C}(x) = \frac{100e^{0,2x-4}}{x}$, sledi da izvodi prosečnih troškova

$\overline{C}'(x) = \frac{20e^{0,2x-4}(x-5)}{x^2}$,

$\overline{C}''(x) = (\frac{20e^{0,2x-4}(x-5)}{x^2})' =$

$\frac{(20\cdot 0,2e^{0,2x-4}(x-5) + 20e^{0,2x-4})x^2 - 2x\cdot 20e^{0,2x-4}(x-5)}{x^4} =$

$\frac{xe^{0,2x-4}(4x^2-20x+20x-40x+200)}{x^4} = \frac{e^{0,2x-4}(4x^2-40x+200)}{x^3}$.

Zaista,
$\overline{C}'(5) = 0$ i $\overline{C}''(5)\dfrac{e^{1-4}(4\cdot 5^2 - 40\cdot 5 + 200)}{5^3} = \dfrac{4}{5e^3} > 0.$

2. Neka je funkcija ukupnih troškova $C = 4x^2 - 60x + 10000$. Odrediti optimalnu proizvodnju i pokazati da je za tu proizvodnju koeficijent elastičnosti ukupnih troškova jednak 1.
Rešenje: Po teoremi 20, treba da odredimo minimalne prosečne troškove $\overline{C}$, a po teoremi 19 nam za to treba ona količina proizvodnje x_0 za koju je $\overline{C}'(x_0) = 0$ i $\overline{C}''(x_0) > 0$:
$\overline{C}(x) = \dfrac{C}{x} = 4x - 60 + 10000x^{-1},$
$\overline{C}'(x) = 4 - 10000x^{-2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2500 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm 50.$

Kako nas jedino pozitivna rešenja jednačine $\overline{C}'(x) = 0$ interesuju, ostaje još da proverimo da li je $\overline{C}''(50) > 0$:
$\overline{C}''(x) = 20000x^{-3}$, što implicira $\overline{C}''(50) > 0$.

Sada je potrebno naći koeficijent elastičnosti ukupnih troškova za $x = 50$ j.r.:
$$E_{C,x} = \frac{x}{C}C'(x) = \frac{x}{4x^2 - 60x + 10000}(8x - 60) = \frac{2x^2 - 15x}{x^2 - 15x + 2500}$$
$$E_{C,50} = \frac{2\cdot 50^2 - 15\cdot 50}{50^2 - 15\cdot 50 + 2500} = 1.$$

11.1.1 Zadaci

11.1. Naći prve izvode sledećih funkcija koristeći tablice i osnovna pravila za prvi izvod (a je konstanta, dok su x, t, y, s, u nezavisne promenljive):

$a)$ $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$; $b)$ $g(t) = \sqrt[3]{t^2} - \sqrt[4]{t} + 5\sqrt{t^3}$;
$c)$ $f(y) = 2^y - 4e^y + 2a^y$, ; $d)$ $h(x) = (\sin x + 5x)\cdot \ln x + 3\cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} x$;
$e)$ $f(s) = \dfrac{s^5 - 4s^3 + 2s - 3}{\cos s}$; $f)$ $s(u) = \dfrac{\ln u \cdot u^5 - 2\sqrt{u^5}}{\sin u + \cos u}$.

Rešenje.

$a)$ $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2$;
$b)$ $g'(t) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{t}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{t^3}} + \frac{5}{2}\sqrt{t}$;
$c)$ $f'(y) = 2^y \cdot \ln 2 - 4e^y + 2\ln a \cdot a^y,\ a \in \mathcal{R}$;
$d)$ $h'(x) = (\cos x + 5)\cdot \ln x + \dfrac{\sin x + 5x}{x} + 3\ln 3 \cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{3\cdot 3^x}{\cos^2 x}$;
$e)$ $f'(s) = \dfrac{(5s^4 - 12s^2 + 2)\cos s + (s^5 - 4s^3 + 2s - 3)\sin x}{\cos^2 s}$;
$f)$ $s'(u) = \dfrac{(u^4(1 + 5\ln u) - 3u^{3/2})(\sin u + \cos u) - (\cos u - \sin u)(u^5 \ln u - 2u^{5/2})}{(\sin u + \cos u)^2}$.

11.2. Naći prve izvode složenih funkcija:

$a)$ $f(x) = \sin((5 - 4x^3)\cdot \sin x)$; $b)$ $g(t) = \sqrt[3]{x^2 + x^3} + 5\sqrt{x^3 \cdot e^{-x}}$;
$c)$ $f(x) = 2^{x - 4e^x}$; $d)$ $h(x) = \ln(\sin^5 x + 5x) + \operatorname{tg}^2(2x - 5)$.

Rešenje.

$$a)\ f'(x) = \cos((5-4x^3)\cdot \sin x)\cdot(-12x^2\sin x + (5-4x^3)\cdot\cos x)\ ;$$
$$b)\ g'(t) = -2/3\sqrt[3]{(x^2+x^3)^{2}(2x+3x^2)} - 5/2\frac{3x^2\cdot e^{-x} - x^3e^{-x}}{\sqrt{x^3\cdot e^{-x}}}\ ;$$
$$c)\ f'(x) = \ln 2\cdot 2^{x-4e^x}\cdot(1-4e^x),\ ;$$
$$d)\ h'(x) = \frac{5\sin^4 x\cdot\cos x + 5}{\sin^5 x + 5x} + 4\frac{\operatorname{tg}(2x-5)}{\cos^2 x}\ .$$

11.3. [43] Odrediti sledeće granične vrednosti koristeći Lopitalovo pravilo:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 3x - 1}{2x}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}\ ;$$
$$c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}\ ;\quad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}\ ;$$
$$e)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ ;\quad f)\ \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}\ ;$$
$$g)\ \lim_{x\to 0}(2x+1)^{\operatorname{ctg} x}\ ;\quad h)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\ ;$$
$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\ ;\quad j)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\ .$$

Rešenje.

$$a)\ \frac{3}{2};\ b)\ \frac{1}{2};\ c)\ 3;\ d)\ 1;\ e)\ 0;\ f)\ 2;\ g)\ e^2;\ h)\ 2;\ i)\ 0;\ j)\ -\frac{1}{2}.$$

11.4. Ako su ukupni dnevni prihodi i ukupni dnevni troškovi redom jednaki $P = 12x - 3x^2,\ C = 2x^3$, odrediti najveću dnevnu dobit.

Rešenje. Funkcija dobiti je $D(x) = 12x - 3x^2 - 2x^3$, a njen maksimum je za proizvodnju od $x = 1$ jedinica robe i iznosi $D(1) = 7$ novčanih jedinica.

11.5. Neka su redom date funkcije ukupnog prihoda i ukupnih proizvodnih troškova: $P = -x^2 + 3000x$ i $C = 2x^2 - 9000x + 2000000$. Odrediti cenu p za koju će dobit biti najveća.

Rešenje. $p = 1000$ za $x = 2000$ j.r.

11.6. Data je funkcija ukupnih troškova $C = x^3 - 2x^2 + 3x$. Pokazati da su minimalni prosečni troškovi jednaki graničnim troškovima.

Rešenje. Minimum prosečnih troškova $\overline{C}$ se postiže za $x = 1$ i iznosi $\overline{C}(1) = 2$. a granični troškovi $C' = 3x^2 - 4x + 3$ za $x = 1$ su takođe 2.

11.7. Data je funkcija prosečnih troškova za neki proizvod $\overline{C} = 20 + \dfrac{100000}{x}$, i funkcija tražnje tog proizvoda $x = 80000 - 1000p$, gde je x količina robe u komadima, a p cena u dinarima. Odrediti:
a) cenu p pri kojoj će se ostvariti maksimalna dobit i odrediti je;
b) ukupan prihod u uslovima maksimalne dobiti;
c) interval rentabilnosti (proizvodnju za koju je dobit pozitivna).

Rešenje.
a) $p = 50$ dinara, maksimalna dobit je $D(30000)$=800000;
b) $P(30000)$= 1500000; c) $x \in (1716, 58284)$.

[43] Ovi zadaci su detaljno urađeni u zbirci rešenih zadataka [23].

11.2 Parcijalni izvodi

Do sada smo uglavnom razmatrali realne funkcije jedne realne promenljive. Međutim, vrlo često neke veličine zavise od više nezavisnih promenljivih. Na primer: energetska vrednost veštačkog đubriva zavisi od azota, fosfora i kalijuma; dobit u nekoj proizvodnoj firmi zavisi od troškova i prihoda; plate radnika bi trebalo da zavise od stručne spreme, dužine radnog staža i radnog učinka. Kako nam je cilj da obradimo minimum matematičkog aparata koji nam je potreban da možemo da nađemo ekstremne vrednosti (minimum i maksimum) funkcije više promenljivih obradićemo samo početne elemente diferencijalnog računa funkcija više promenljivih.

Parcijalne izvode definišemo kod funkcija sa *bar dve* realne promenljive. Na primer, funkcije $f(x,y) : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ i $g(u,v,w) : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$, definisane sa $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ i $g(u,v,w) = \sin w + 5u - v^3$, su realne funkcije sa dve odnosno tri realne promenljive. Grafike funkcija dve realne promenljive još uvek možemo da nacrtamo. U prostoru to su odgovarajuće površi. Tako je na primer, grafik $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, gornja (iznad xy ravni) kalota jedinične lopte (videti sliku 13). Ako funkcija ima više od dve promenljive, njen grafik ne možemo nacrtati.

Prvi parcijalni izvod po promenljivoj x funkcije $f(x,y)$ u tački (x_0, y_0) označavamo sa $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ i definišemo kao sledeći limes (ako postoji):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Prvi parcijalni izvod po promenljivoj y funkcije $f(x,y)$ u tački (x_0, y_0) označavamo sa $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ i definišemo kao

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Kada tražimo prvi parcijalni izvod po promenljivoj x funkcije $f(x,y)$, tada promenljivu y tretiramo kao konstantu i tražimo prvi izvod po x. Slično, ako tražimo prvi parcijalni izvod po y, nezavisnu promenljivu x tretiramo kao konstantu.

Sem oznake $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, za prvi parcijalni izvod po promenljivoj x u tački (x_0, y_0) koristimo ravnopravno i oznaku $f_x(x_0, y_0)$, odnosno $f_y(x_0, y_0)$, za prvi parcijalni izvod po promenljivoj y.

Sva pravila (izvod zbira, razlike, proizvoda funkcija, količnika i složene funkcije) koja važe za prvi izvod funkcije jedne promenljive važe u odgovarajućem obliku i za prve parcijalne izvode funkcija više realnih promenljivih.

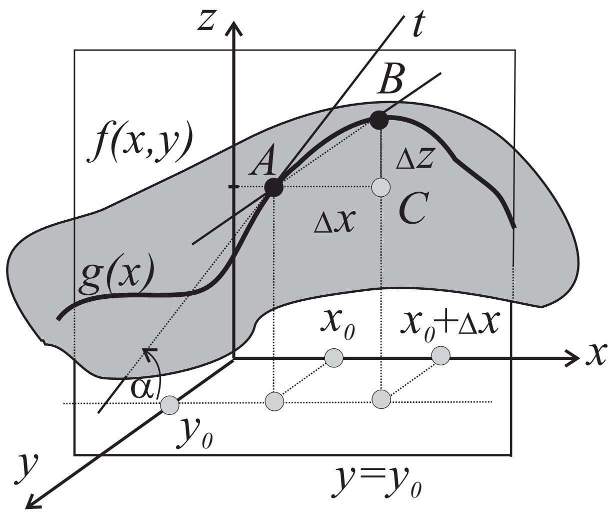
Primeri. Odredite sve prve parcijalne izvode funkcija $f(x,y) : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ i $g(u,v,w) : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$, definisanih sa $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ i $g(u,v,w) = u \cdot \sin w + 5u - v^3$.
Rešenja. $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y$, $\frac{\partial g}{\partial u} = \sin w + 5$, $\frac{\partial g}{\partial v} = -3v^2$, $\frac{\partial g}{\partial w} = u \cos w$.

Geometrijska interpretacija prvog parcijalnog izvoda funkcije $z = f(x,y)$

Podsetimo se da je prvi izvod funkcije $f(x)$ u tački x_0 ako postoji, bio jednak tangensu ugla β koji tangenta na grafik funkcije f, kroz tačku $(x_0, f(x_0))$, zaklapa sa pozitivnim krakom x-ose. Odnosno, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\beta$ (sl. 21). Sasvim sličnu situaciju imamo i sa prvim parcijalnim izvodima funkcije dve promenljive.

Posmatrajmo funkciju $f(x,y)$ i njen prvi parcijalni izvod po promenljivoj x u tački (x_0, y_0) (sl. 21). Prvi parcijalni izvod po x u tački (x_0, y_0), $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, kada suzimo posmatranje na ravan $y = y_0$, ima isto geometrijsko tumačenje kao i prvi izvod funkcije jedne realne promenljive u tački x_0.

Sa A i B smo redom označili tačke na površi $f(x,y)$ sa koordinatama $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ i $(x_0 + \Delta x, y_0, f(x_0 + \Delta x, y_0))$. Ove dve tačke su na grafiku krive $g(x)$ koju dobijamo u preseku ravni $y = y_0$ i površi $f(x,y)$.



Slika 21. Geometrijsko tumačenje prvog parcijalnog izvoda $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$

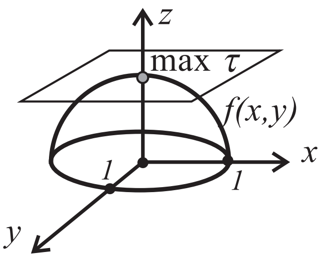
Ako sva posmatranja suzimo na ravan $y = y_0$, uočićemo da je količnik priraštaja funkcije $z = f(x,y)$ i priraštaja argumenta x $\dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ jednak tangesu ugla koji sečica AB krive g zaklapa sa pozitivnim krakom x ose[44]. U graničnom slučaju kada priraštaj promenljive x teži 0, $(\Delta x \to 0)$, sečica AB teži tangenti t u tački A na površ. Tako je prvi parcijalni izvod po x, $f_x(x_0, y_0)$ jednak tangensu ugla α koji tangenta t (u ravni $y = y_0$) na površ u tački A zaklapa sa pozitivnim krakom x ose.

Geometrijska interpretacija prvog parcijalnog izvoda po promenljivoj y bi na analogan način značila da je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\gamma$, gde je γ ugao koji nova tangenta na površ u tački A, ovog puta u ravni $x = x_0$ zaklapa sa pozitivnim krakom y ose.

11.2.1 Ekstremne vrednosti funkcije dve promenljive

Primetimo (zamislite loptu i ravan koja je dodiruje), da u opštem slučaju površ u tački površi tangira čitava ravan a ne samo jedna prava (sl. 21). Tu ravan nazivamo **tangencijalna ravan** (sl. 22).

[44] x-osa i sečica AB u opštem slučaju nisu u istoj ravni. Međutim, ugao koji AB zaklapa sa pravom $y = y_0$ (iz xy-ravni) je jednak uglu koji AB zaklapa sa pozitivnim krakom x-ose, jer je prava $y = y_0$ istog pravca kao i x osa.



Slika 22. Tangencijalna ravan τ u tački maksimuma gornje kalote

Geometrijski je očigledno, da je potreban uslov da neka tačka na površi bude ekstremna (lokalni minimum ili maksimum) da je tangencijalna ravan u toj tački na površ paralelna sa xy-ravni (sl. 22). Ovaj uslov je ispunjen ako su dve tangente iz tangencijalne ravni paralelne sa xy-ravni.

Ukoliko je tangenta t (sl 21), paralelna sa xy ravni ugao α će biti jednak 0 pa će i $\operatorname{tg}\alpha = 0$, odnosno prvi parcijalni izvod po x u (x_0, y_0) će takođe biti 0. Slično, kada je tangenta koja odgovara $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\gamma$ paralelna sa y osom, onda je ugao $\gamma = 0$, odnosno $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Znači, potreban uslov da tangencijalna ravan u tački $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ bude paralelna sa xy ravni je da su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ , \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \ .$$

To je potreban uslov da u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ ima ekstrem i takvu tačku nazivamo **stacionarnom**.

Da bismo dali i dovoljan uslov za postojanje ekstremne vrednosti na površi moramo definistai parcijalne izvode višeg reda.

Parcijalni izvodi višeg reda

Parcijalni izvodi prvih parcijalnih izvoda $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ nazivaju se **parcijalni izvodi drugog reda** funkcije f i označavaju se na neki od sledećih načina:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}.$$

Slično se definišu i označavaju parcijalni izvodi trećeg, četvrtog, ... reda.

Ako su mešoviti parcijalni izvodi drugog reda neprekidne funkcije onda su oni jednaki $f_{xy} = f_{yx}$. Uopšteno važi: ako su parcijalni izvodi koje treba izračunati neprekidne funkcije tada rezultat višestrukog diferenciranja ne zavisi od redosleda diferenciranja. Tako na primer, za funkciju $f(x, y) = 5x^2y - x^3y^3$ važi da su jednaki parcijalni izvodi trećeg reda $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$. Zaista:
$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(5x^2y + x^3y^3) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(10xy + 3x^2y^3) = \frac{\partial}{\partial y}(10y + 6xy^3) = 10 + 18xy^2$
$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(5x^2y + x^3y^3) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(10xy + 3x^2y^3) = \frac{\partial}{\partial x}(10x + 6x^2y^2) = 10 + 18xy^2$
$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(5x^2y + x^3y^3) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(5x^2 + 3x^3y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(10x + 9x^2y^2) = 10 + 18xy^2$

Već smo utvrdili da je slično, kao i kod funkcije jedne promenljive, potreban uslov da je tačka kandidat za ekstremnu vrednost, da su prvi parcijalni izvodi u toj tački jednaki nuli, odnosno da je tačka stacionarna. Sledeća teorema daje dovoljan uslov.

Potreban uslov za ekstrem $f(x, y)$, ako postoje prvi parcijalni izvodi, u (x_0, y_0) je da (x_0, y_0) bude stacionarna tačka funkcije, odnosno da je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Ako je dodatno ispunjeno da su drugi parcijalni izvodi neprekidne funkcije i da važi

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) > 0,$$

tada je to zajedno sa uslovom 1. ili uslovom 2. dovoljno da funkcija f ima ekstremnu vrednost u (x_0, y_0) i to:

1. **lokalni minimum** *ako je* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$;

2. **lokalni maksimum** *ako je* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$.

Ako je $D = 0$ ne može se ništa tvrditi, a za $D < 0$ u (x_0, y_0) funkcija f nema ekstremnu vrednost.

Primer: Neka je funkcija $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Nađimo njene stacionarne tačke i proverimo da li u njima $f(x, y)$ ima ekstrem.

Rešenje.

$f_x = 1/2(1 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

$f_y = 1/2(1 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cdot (-2y) = -\dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

$f_x = 0$ za $x = 0$ i $f_y = 0$ za $y = 0$, pa je jedina stacionarna tačka $(0, 0)$. Nađimo i druge parcijalne izvode.

$$f_{xx} = \frac{-1 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2} - (-x) \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}}{(\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2} =$$

$$\frac{-1 + x^2 + y^2 - x^2}{(1 - x^2 - y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{y^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}},$$

zbog simetričnosti nezavisnih promenljivih jasno je da

$f_{yy} = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}}$,

$f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial y} f_x = \dfrac{\partial}{\partial y}(-x(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}) =$

$1/2 \cdot x \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-3/2} \cdot (-2y) = \dfrac{xy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}}$.

Sledi, da su drugi parcijalni izvodi u stacionarnoj tački (0,0):
$f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = -1$ i $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 0$.

Tako je uslov da je broj $D = -1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1$ veći od 0 iz teoreme 21 zadovoljen pa je (0,0) tačka u kojoj funkcija dostiže ekstrem, a kako je uslov *2.* teoreme takođe zadovoljen ($f_{xx}(0, 0) = -1 < 0$), taj ekstrem je maksimum (sl. 13) funkcije.

11.2.2 Parcijalna elastičnost poslovnih funkcija

Parcijalna elastičnost je mera promene (u procentima) zavisne promenljive $y = f(x_1, x_2 ... x_n)$ kada se jedna od nezavisnih promenljivih promeni za 1%. Ako je y zavisna promenljiva, onda parcijalna elastičnost promenljive y po nezavisnoj promenljivoj x_i jednaka je po analogiji sa definicijom elastičnosti funkcije jedne nezavisne promenljive:

$$E_{y,x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y \cdot x_i}{\Delta x_i \cdot y} =$$

$$\frac{x_i}{y} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{y} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ... x_i + \Delta x_i, ... x_n) - f(x_1, ... x_i, ... x_n)}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{y} \cdot f_{x_i}.$$

Znači, parcijalnu elastičnost funkcije $y = f(x_1, x_2 ... x_n)$ po promenljivoj x_i ćemo nadalje računati kao funkciju

$$\boxed{E_{f,x_i} = \frac{x_i}{y} f_{x_i}.}$$

Kada posmatramo poslovnu funkciju više promenljivih, jedna od promenljivih je u nekom smislu dominatna. Tako, ako, na primer, gledamo tražnju nekog artikla, onda ćemo dominatnom promenljivom smatrati cenu tog istog artikla, dok cenu konkurentnog ili nacionalni dohodak nećemo smatrati dominantnim. Ako gledamo ukupne troškove, onda će dominantna promenljiva biti proizvedena količina, dok, na primer, cenu sirovine, cenu skladištenja, cenu zakupa lokala i sl. nećemo smatrati dominantnom. U suštini, dominantnom promenljivom ćemo smatrati onu po kojoj smo odgovarajuću funkciju proučavali kao funkciju jedne promenljive. Parcijalnu elastičnost po toj promenljivoj ćemo jednostavno nazivati elastičnost kao i ranije.

Što se tiče funkcije tražnje, za koju najčešće ispitujemo elastičnost, razlikovaćemo još dva tipa elastičnosti:

- Uzajamna elastičnost tražnje dva artikla (cross elasticity) je mera (u procentima) promene tražnje nekog arikla A_1 sa cenom p_1, ako se cena p_2 artikla A_2 promeni za 1%, dok se ostale promenljive ne menjaju.

- Elastičnost tražnje od nacionalnog dohotka je promena tražnje nekog artikla ako se nacionalni dohodak poveća za 1%, a ostale promenljive ne menjaju.

Dakle, da rezimiramo, ako je funkcija tražnje artikla A_1 $f = f(p_1, p_2, d)$, gde je p_1 cena artikla A_1, p_2 cena artikla A_2, a d nacionalni dohodak, onda je

- Elastičnost $E_{f,p_1} = \dfrac{p_1}{f} \cdot f_{p_1}$;

- Uzajamna elastičnost $E_{f,p_2} = \dfrac{p_2}{f} \cdot f_{p_2}$;

- Elastičnost tražnje od nacionalnog dohotka $E_{f,d} = \dfrac{d}{f} \cdot f_d$.

Primer. Neka je data funkcija tražnje čokolade xc, tako da zavisi od cene čokolade p_c, cene sladoleda p_s kao konkurentnog proizvoda i od nacionalnog dohodka d po sledećoj funkcionalnoj vezi

$$xc(p_c, p_s, d) = d - 20000 - 5p_c + 2p_s.$$

Naći funkcije elastičnosti, uzajamne elastičnosti i elastičnosti tražnje od nacionalnog dohotka pri ceni čokolade od 65 dinara, ceni sladoleda od 50 dinara i nacionalnom dohotku od 30 000 dinara.
Rešenje.

- Elastičnost tražnje čokolade $E_{xc(p_c,p_s,d),p_c}$:

$$\begin{aligned} E_{xc(p_c,p_s,d),p_c} &= \frac{p_c}{xc(p_c,p_s,d)} \cdot xc_{p_c} \\ &= \frac{p_c}{d-20000-5p_c+2p_s} \cdot (d-20000-5p_c+2p_s)_{p_c} \\ &= \frac{p_c}{d-20000-5p_c+2p_s} \cdot (-5) \\ &= \frac{-5\cdot 65}{30000-20000-5\cdot 65+2\cdot 50} \\ &= \frac{-325}{10000-325+100} = \frac{-325}{9775} \\ E_{xc(65,50,30000),p_c} &= -0,0333 \end{aligned}.$$

- Uzajamna elastičnost tražnje čokolade prema sladoledu $E_{xc(p_c,p_s,d),p_s}$ je:

$$\begin{aligned} E_{xc(p_c,p_s,d),p_s} &= \frac{p_s}{xc(p_c,p_s,d)} \cdot xc_{p_s} \\ &= \frac{p_s}{d-20000-5p_c+2p_s} \cdot (d-20000-5p_c+2p_s)_{p_s} \\ &= \frac{p_s}{d-20000-5p_c+2p_s} \cdot 2 \\ &= \frac{2\cdot 50}{30000-20000-5\cdot 65+2\cdot 50} = \frac{100}{9775} \\ E_{xc(65,50,30000),p_s} &= -0,010 \end{aligned}.$$

- Elastičnost tražnje od nacionalnog dohotka $E_{f,d} = \frac{d}{f} \cdot f_d$ u ovom primeru je:

$$\begin{aligned} E_{xc(p_c,p_s,d),d} &= \frac{d}{xc(p_c,p_s,d)} \cdot xc_d \\ &= \frac{d}{d-20000-5p_c+2p_s} \cdot (d-20000-5p_c+2p_s)_d \\ &= \frac{d}{d-20000-5p_c+2p_s} \cdot 1 \\ &= \frac{30000}{30000-20000-5\cdot 65+2\cdot 50} = \frac{30000}{9775} \\ E_{xc(65,50,30000),d} &= 3,069 \end{aligned}.$$

Možemo reći da je tražnja u odnosu na cenu čokolade, kao i u odnosu na cenu sladoleda, neelastična, i to u tolikoj meri da skoro da možemo da kažemo da je indiferentno elastična. Tumačenje ovih vrednosti bi bilo da je tržište stabilno podeljeno na one koji jedu čokoladu i na one koji jedu sladoled, tako da oscilacije u ceni ovih artikala ne utiču značajno na tražnju. Kod tražnje čokolade u odnosu na nacionalni dohodak, uočavamo izraženu elastičnost, to tumačimo da sa rastom primanja puno lakše i češće kupujemo čokoladu.

11.2.3 Zadaci

11.8. Poznato je da tražnja čokolade $x(d, p_c, p_s)$ zavisi od nacionalnog dohotka d, cene čokolade p_c, ali i od cene sećera p_s na sledeći način:

$$x(d, p_c, p_s) = 0,4d + 3203 - 10500p_c^2 + 92p_s$$

Ako čokolada košta 110 dinara, šećer 130 dinara, a nacionalni dohodak je 25000 dinara odrediti:
a) funkciju uzajamne elastičnosti tražnje čokolade u zavisnosti od cene šećera i njenu vrednost.
b) koliko iznosi elastičnost tražnje čokolade?

Rešenje.

a) Funkcija uzajamne elastičnosti je $E_{x(d,p_c,p_s),p_s} = \dfrac{92p_s}{0,4d + 3203 - 10500p_c^2 + 92p_s}$ pa je njena vrednost $E_{x(25000,110,130),130} = \dfrac{11960}{-127024837} = -9,4 \cdot 10^{-5}$. Tumačenje ove vrednosti bi bilo da je tržište indiferentno - neelastično na cenu šećera u odnosu na tražnju čokolade.

b) Elastičnost tražnje čokolade $E_{x(d,p_c,p_s),p_c} = \dfrac{-21000p_c^2}{0,4d + 3203 - 10500p_c^2 + 92p_s}$ što daje vrednost elastičnosti od $E_{x(25000,110,130),110} = \dfrac{-254100000}{-127024837} = 2$. Tražnja čokolade u odnosu na cenu čokolade, ima izraženu elastičnost, to tumačimo da sa rastom cene čokolade puno teže i ređe kupujemo čokoladu.

11.9. Tražnja maline $x(d, p_c, p_s)$ zavisi od nacionalnog dohotka d, cene maline p_m i cene višanja p_v na sledeći način:

$$x(d, p_m, p_v) = 0,25d + 1200 - 1123p_m + 3p_v^2$$

a) Odrediti funkciju uzajamne elastičnosti tražnje maline u zavisnosti od cene višanja.
b) Koliko iznosi elastičnost tražnje maline, ako kg malina košta 500 dinara, kg višanja 200 dinara, a nacionalni dohodak je 35000 dinara?

11.10. Poznato je da tražnja brazilske kafe zavisi od nacionalnog dohotka n, cene brazilske kafe p_k, ali i od cene indijskog čaja p_c:

$$x(n, p_k, p_c) = 0,1n + 2841 - 10000p_k^2 + 100p_c.$$

a) Odrediti funkciju uzajamne elastičnosti tražnje brazilske kafe u zavisnosti od cene indijskog čaja.
b) Koliko iznosi elastičnos tražnje brazilske kafe, ako kafa košta 1 500 dinara, indijski čaj 750 dinara, a nacionalni dohodak je 15 000 dinara?

11.3 Teorijska pitanja

11.11. Interval rentabilnosti čine one količine robe x za koju je razlika prihoda i troškova veća od 0.	$\top$
11.12. Količini robe x za koju je razlika prihoda i troškova jednaka 0 pridružen je interval rentabilnosti.	$\perp$

11.13. Interval rentabilnosti sadrži one količine robe x za koju je dobit manja od 0.	$\perp$
11.14. Interval rentabilnosti je ona količina proizvodnje za koju preduzeće ima dobit veću od nule.	$\top$
11.15. Tržište je u ravnoteži kada je ponuda jednaka potražnji.	$\top$
11.16. Funkcija ukupnih prihoda je direktno proporcionalna ceni robe.	$\top$
11.17. Funkcija potražnje za robom u zavisnosti od cene je rastuća funkcija.	$\perp$
11.18. Funkcija ponude robe u zavisnosti od cene je rastuća funkcija.	$\top$
11.19. Funkcija ponude robe $y(p)$ može biti oblika $\frac{1}{p^2}$.	$\perp$
11.20. Funkcija cene robe u odnosu na količinu robe $p(x)$ može da bude oblika $p(x) = 2 \cdot x^2$ (poznato je da cena pada pri većoj količini robe).	$\perp$
11.21. Funkcija cene robe u odnosu na količinu robe, $p(x)$, može da bude oblika $p(x) = 2000 + x^{-2}$.	$\top$
11.22. Funkcija tražnje $x(p)$ može biti oblika p^2.	$\perp$
11.23. Funkcija potražnje za robom u odnosu na cenu robe, $x(p)$, može da bude oblika $x(p) = 20 \cdot p$.	$\perp$
11.24. Cena za koju je tržište u ravnoteži je dobro nivelisana.	$\top$
11.25. Funkcija ukupnih prihoda je direktno proporcionalna ukupnoj količini robe.	$\top$
11.26. Funkcija ukupnih prihoda jednaka je proizvodu funkcije potražnje za robom i cene po jedinici robe.	$\top$
11.27. Funkcija cene robe u odnosu na količinu robe, $p(x)$, može da bude oblika $p(x) = 2000 - x$.	$\top$
11.28. Funkcija potražnje za robom može biti oblika $\frac{10000}{p^2}$.	$\top$
11.29. Funkcija cene robe u odnosu na količinu robe $p(x)$ može da bude oblika $p(x) = 2000 - x^2$.	$\top$
11.30. Ukupni troškovi su jednaki zbiru ukupne dobiti i ukupnih prihoda.	$\perp$
11.31. Ukupni troškovi su jednaki razlici ukupnih prihoda i ukupne dobiti.	$\top$
11.32. Funkcija ukupnih prihoda je jednaka zbiru funkcija ukupne dobiti i ukupnih troškova.	$\top$
11.33. Funkcija ukupne dobiti je razlika funkcije ukupnih prihoda i funkcije ukupnih troškova.	$\top$
11.34. Funkcija prosečnih prihoda jednaka je funkciji cene robe u odnosu na količinu robe $p(x)$.	$\top$
11.35. Funkcija dobiti je razlika funkcije prihoda i funkcije troškova.	$\top$
11.36. Količina tražene robe je obrnuto proporcionalna ceni robe.	$\top$

11.3.1 Elastičnost

11.37. Neka je elastičnost funkcije prosečnih prihoda $E_{\overline{P},x=50} = 2$, to znači da će se pri povećanju količine robe x sa 50 jedinica robe na 50,5 jedinica robe, prosečni prihodi povećati za 1%. $\perp$

11.38. Elastičnost funkcije prosečnih troškova, $E_{\overline{C},x=300} = 2$, znači da se povećavaju prosečni troškovi za 2%, pri povećanju količine robe x sa 300 jedinica robe na 301 j.r. $\perp$

11.39. Elastičnost funkcije prosečne dobiti $E_{\overline{D},x=1200} = 1,2$ znači da će se pri povećanju količine robe x sa 1200 jedinica robe na 1212 jedinica robe, prosečna dobit povećati za $1,2\%$. $\top$

11.40. $E_{P,x=100} = 9$ znači da ako pri proizvodnji od 100 j.r. povećamo proizvodnju za 1%, prihodi se povećavaju za 9%. $\top$

11.41. Elastičnost $E_{x,p=100} = -10,$ znači da ako se poveća cena sa 100 n.j. na 110 n.j., količina tražene robe će opasti za 10%. $\perp$

11.42. Neka je elastičnost prihoda $E_{P,x=1000} = 0,8$, to znači: ako se pri proizvodnji od 1000 jedinica robe proizvodnja poveća za 1%, prihodi će se povećati za 0,8%. $\top$

11.43. Pozitivna vrednost elastičnosti funkcije troškova predstavlja očekivani procenat povećanja troškova pri povećanju proizvodnje za 1%. $\top$

11.44. Neka je elastičnost $E_{x,p=100} = -1,$ to znači da ako se poveća cena sa 100 n.j. na 101 n.j. količina tražene robe će opasti za 1%. $\top$

11.45. Elastičnost funkcije prosečnih prihoda $E_{\overline{P},x=1000} = -2$ znači da će se pri povećanju količine robe x sa 1000 jedinica robe na 1001 jedinicu robe prosečni prihodi smanjiti za 2%. $\perp$

11.46. Elastičnost $E_{x,p=100} = -10,$ znači da ako se poveća cena sa 100 n.j. na 110 n.j., količina tražene robe će opasti za 10%. $\perp$

11.47. Neka je elastičnost troškova $E_{C,x=1000} = -0.5$, to znači ako se pri proizvodnji od 1000 jedinica robe proizvodnja poveća za 1%, troškovi se smanjuju za 0.5%. $\top$

11.48. Elastičnost funkcije ukupnih troškova za 1 je veća od elastičnosti funkcije prosečnih troškova. $\top$

11.49. Elastičnost funkcije prosečnih troškova za 1 je veća od elastičnosti funkcije ukupnih troškova. $\perp$

11.50. Elastičnost funkcije prosečnih troškova jednaka je elastičnosti funkcije ukupnih troškova. $\perp$

11.3.2 Funkcije dve nezavisne promenljive

11.51. Za funkciju $g(u,t) = ut^2 + u^2t$ je jedina stacionarna tačka $(0,0)$. $\top$

11.52. Za funkciju $g(u,v) = u + v + u^2 + v^2 + uv$ važi $g_u = g_v$. $\perp$

11.53. Za funkciju $f(x,y) = -2x - 2y + 2xy$ stacionarna tačka je (1,1). $\top$

11.54. Za funkciju $g(s,t)$ tačka (s_0,t_0) je stacionarna akko važi da je $0 = g_s(s_0,t_0) = g_t(s_0,t_0)$. $\top$

11.55. Za funkciju $g(u,v) = 2v - uv$ je tačka (0,2) stacionarna.	$\perp$
11.56. Funkcija $g(u,t) = ut + t$ nema stacionarne tačke.	$\perp$
11.57. Za funkciju $f(x,y) = 2x - 2y + 2xy$ stacionarna tačka je (1,−1).	$\top$
11.58. Za funkciju $g(u,t) = ut^4$ sve stacionarne tačke su oblika $(u,0)$, $u \in \mathcal{R}$.	$\top$
11.59. Funkcija $g(u,t) = ut$ nema stacionarnu tačku.	$\perp$
11.60. Uslov $g_u(1,2) = g_t(1,2) = 0$ znači da je tačka (1,2) stacionarna za funkciju $g(u,t)$.	$\top$
11.61. Za funkciju $g(u,t) = u + t$ je jedina stacionarna tačka $(1,1)$.	$\perp$
11.62. Ako su prvi parcijalni izvodi u nekoj tački jednaki 0 znači da je ta tačka stacionarna za funkciju.	$\top$
11.63. Za funkciju $g(s,t)$ tačka $(1,2)$ je lokalni minimum akko važi da je $0 = g_s(1,2) = g_t(1,2)$, $g_{ss}(1,2) \cdot g_{tt}(1,2) - g_{st}(1,2) \cdot g_{ts}(1,2) < 0$ i $g_{ss}(1,2) > 0$.	$\perp$
11.64. Za funkciju $g(s,t)$ tačka $(0,0)$ je lokalni minimum akko važi da je $0 = g_s(0,0) = g_t(0,0)$, $g_{ss}(0,0) \cdot g_{tt}(0,0) - g_{st}(0,0) \cdot g_{ts}(0,0) < 0$ i $g_{ss}(0,0) < 0$.	$\perp$
11.65. Za funkciju $g(s,t)$ tačka $(1,2) \in D \subset \mathcal{R}^2$ je lokalni maksimum akko važi da je $0 = g_s(1,2) = g_t(1,2)$, $g_{ss}(1,2) \cdot g_{tt}(1,2) - g_{st}(1,2) \cdot g_{ts}(1,2) > 0$ i $g_{ss}(1,2) < 0$.	$\top$
11.66. Za funkciju $z(u,v) = 2u^3v^5 + u^5v$ važi $z_{uvv} = z_{vuv} = z_{vvu} = 60uv^4 + 20u^3$.	$\perp$
11.67. Funkcija $g(u,v) = uv$ nema stacionarnu tačku.	$\perp$
11.68. Funkcija $g(u,t) = u + t$ nema stacionarnu tačku.	$\top$
11.69. Za funkciju $f(x,y) = -2x - 2y + 2xy$ stacionarna tačka je (−1,−1).	$\perp$
11.70. Uslov $f_x(1,2) = f_y(1,2) = 0$ znači da je tačka $(1,2) \in D \subset \mathcal{R}^2$ stacionarna za funkciju $f(x,y)$.	$\top$
11.71. Za funkciju $z(u,v) = 2u^3v^5 + u^5v$ važi $z_{uuv} = z_{uvu} = z_{vuu} = 60uv^4 + 20u^3$.	$\perp$
11.72. Za funkciju $f(x,y) = x^3 - 3x + 2y^2$ stacionarne tačke su (1,0) i (−1,0).	$\top$
11.73. Za funkciju $g(u,v) = 4 + 2u + 4v - 2uv$ je tačka (2,1) stacionarna.	$\top$
11.74. Funkcija $g(u,v) = -uv$ nema stacionarnu tačku.	$\perp$
11.75. Za funkciju $f(x,y) = x^3 - 3x + 2y^2 + 4y$ stacionarne tačke su (1,0) i (−1,0).	$\perp$
11.76. Za funkciju $z(u,v) = uv^5 + u^5v$ važi $z_{uvv} = z_{vuv} = z_{vvu} = 20v^3$.	$\top$
11.77. Diferencijal funkcije $g(u,v) = uv$ je $dg = u\ du + v\ dv$.	$\perp$
11.78. Diferencijal funkcije $g(u,v) = u + v$ je $dg = du + dv$.	$\top$
11.79. Diferencijal funkcije $g(u,v) = uv$ je $dg = v\ du + u\ dv$.	$\top$
11.80. Totalni diferencijal drugog reda funkcije $g(u,v) = uv$ je $d^2g = 2\ du\ dv$.	$\top$

Literatura

[1] Acketa M.D., Matić-Kekić S. *Kompjuterska geometrija i grafika,* Edicija Univerzitetski udžbenici 113, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2000. str 399.

[2] Bodroža-Pantić, O. *Kombinatorna geometrija* Edicija Univerzitetski udžbenici 132, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2000. str 194.

[3] Cvetković, M.D., Simić, K.S., *KOMBINATORIKA klasična i moderna*, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

[4] Elazar, M., *Privredna i finansijska matematika*, Savremena administracija, Beograd, 1961.

[5] Gajić, Lj., Munitlak, D., Vukasović, M. *Poslovna matematika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1996.

[6] Gajić, Lj., Lozanov-Crvenković Z., *Matematika za geografe*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1997.

[7] Pavlović, A., Gajić, Lj. *Poslovna matematika - zbirka zadataka*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet.

[8] Hadživuković, S., *Planiranje eskperimenata*, Privredni pregled, Beograd 1977.

[9] Hadžić, O., Takači, Đ., *MATEMATIKA za studente prirodnih nauka*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1998.

[10] Ljaško, I.I, Bojarčuk, A.K, Gaj, Ja. G, Golobač, G.P, *Spravočnoe posobie po matematičeskomu analizu,* "Visša škola", Kijev, 1984.

[11] Konjik, S., Dedović, N., MATEMATIKA zbirka zadataka za studente Poljoprivrednog fakulteta, Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2007.

[12] Matić-Kekić, S., PRIVREDNA MATEMATIKA za studente bioloških smerova, 2. izdanje, Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2006.

[13] Matić-Kekić, S., MATEMATIKA za studente agroekonomskog smera, Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2002.

[14] Mamuzić, P. Z., *Determinante, matrice, vektori, analitička geometrija*, Univerzitet u Beogradu, Građevinska knjiga, Beograd, 1977.

[15] Milić, S., *Elementi algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, 1984.

[16] Pap, E., Šešelja, B., Takači, A., *MATEMATIKA za biološke smerove*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, 1983.

[17] Petrić, J. *Operaciona istraživanja*, I knjiga, Economica - Beograd, 1972.

[18] Petrić, J. *Operaciona istraživanja*, II knjiga, Savremena administracija - Beograd, 1979.

[19] Petrić, J., Šarenac, L., Kojić, Z., *Operaciona istraživanja I*, zbirka, Naučna knjiga - Beograd, 1979.

[20] Savin, L., Matić-Kekić, S., Dedović, N., Tomić, M., Simikić, M., *Profit maximization algorithm including the loss of yield due to uncertain weather events during harvest*, Biosystems Engineering 123, 2014. pp 56-67.

[21] Stojaković, Z., *Linearna algebra*, Zavod za izdavanje udžbenika, Novi Sad, 1979.

[22] Spiegel, R.M., *Theory and Problems of Advanced Calculus*, New York Schaum Publ. Co. 1963., Shaum's Outline Series.

[23] Takači, Đ., Hadžić, O., *Zbirka rešenih zadataka iz DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, Novi Sad, 1992.

[24] Uzelac Zorica, Adžić Nevenka, Doroslovački R., *Priprema za prijemni ispit iz matematike,* Novi Sad, 2003.

[25] Vadnal, A. *Linearno programiranje*, Informator - Zagreb, 1972.

[26] Veljan, D., *KOMBINATORIKA s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[27] Zečević, T., *Operaciona istraživanja,* Naučna knjiga, Beograd, 1974.