

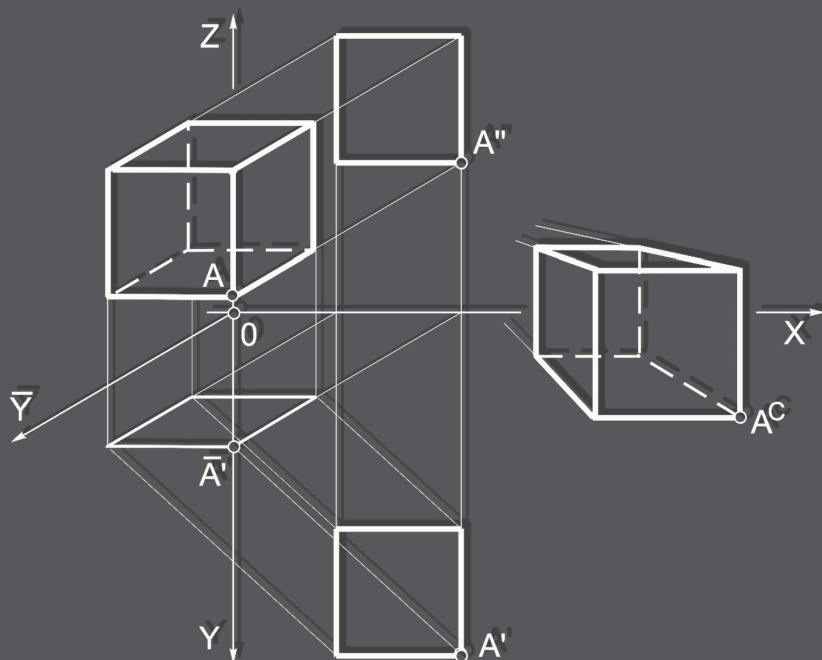


UNIVERZITET U NOVOM SADU  
POLJOPRIVREDNI FAKULTET

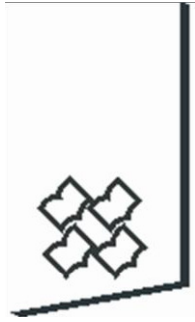
# NACRTNA GEOMETRIJA

primena

Prof. dr Radojka Gligorić

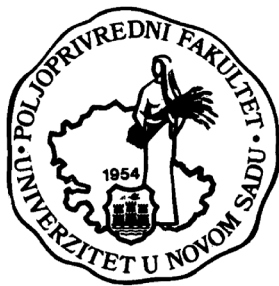






# **NACRTNA GEOMETRIJA** **primena**

**Prof. dr Radojka Gligorić**



**UNIVERZITET U NOVOM SADU**  
**POLJOPRIVREDNI FAKULTET**

---

Novi Sad, 2020.

## **EDICIJA „OSNOVNI UDŽBENIK“**

### **Osnivač i izdavač Edicije:**

*Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu  
Trg Dositeja Obradovića 8  
21000 Novi Sad*

### **Godina osnivanja:**

*1954.*

### **Glavni i odgovorni urednik Edicije:**

*Dr Nedeljko Tica, redovni profesor,  
dekan Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu*

### **Članovi Komisije za izdavačku delatnost:**

*Dr Ljiljana Nešić, vanredni profesor*

*Dr Branislav Vlahović, redovni profesor*

*Dr Milica Rajić, redovni profesor*

*Dr Nada Plavša, vanredni profesor*

Udžbenik je odobren odlukom Nastavno-naučnog veća Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, 2020. god. Sva prava zadržava izdavač.

CIP - Katalogizacija u publikaciji  
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

---

514.18(075.8)

#### **ГЛИГОРИЋ, Радојка, 1949-**

Nacrtna geometrija : primena / Radojka Gligorić. - Novi Sad :  
Poljoprivredni fakultet, 2020 (Novi Sad : Perins inženjering). - 307 str. :  
ilustr. ; 30 cm. - (Edicija Osnovni udžbenik)

Tiraž 20. - Bibliografi ja.

ISBN 978-86-7520-511-1

a) Нацртна геометрија

COBISS.SR-ID 26822409

**Autor:**

Dr Radojka Gligorić, redovni profesor,  
Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu

**Glavni i odgovorni urednik:**

Dr Nedeljko Tica, redovni profesor,  
Dekan Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

**Urednik:**

Dr Milan Tomić, redovni profesor,  
direktor Departmana za poljoprivrednu tehniku

**Tehnički urednik:**

Dr Milan Tomić, redovni profesor,  
Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu

**Izrada crteža i unos teksta:**

Dr Radojka Gligorić, redovni profesor,  
Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu

**Recenzenti:**

Dr Ratko Obradović, redovni profesor,  
Fakultet tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu

Dr Milan Tomić, redovni profesor,  
Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu

**Izdavač:**

Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet

**Zabranjeno preštampavanje i fotokopiranje. Sva prava zadržava izdavač.**

**Štampanje odobrila:**

Komisija za izdavačku delatnost  
Poljoprivrednog fakulteta u Novom Sadu

**Tiraž:**

20 komada

**Mesto i godina izdavanja:**

Novi Sad, 2020. god.



## PREDGOVOR

Udžbenik NACRTNA GEOMETRIJA - primena prvenstveno je namenjen studentima osnovnih akademskih studijskih programa Pejzažna arhitektura i Uređenje, korišćenje i zaštita voda, Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, za predmet Nacrtna geometrija.

Ovaj udžbenik predstavlja treće izdanje udžbenika istog naziva koji je publikovan 2006. i 2015. godine. Za razliku od prethodnih izdanja proširena su neka poglavlja sa više primera i ispravljene su uočene greške.

Knjiga sadrži 17 poglavlja u kojima je obuhvaćeno celokupno gradivo predviđeno nastavnim programom, počev od ortogonalnih projekcija tačke, prave, ravni, tela, preseka i prodora tela, kotirane projekcije sa praktičnom primenom, ortogonalnog i aksonometrijskog crteža, perspektive i šematskih crteža u pejzažnoj arhitekturi.

Težnja je bila da se ovo, ne tako lako gradivo, izloži na što jednostavniji i studentima prihvatljiv način, te su, iza teorijskog dela svakog poglavlja i tematskih jedinica, dati rešeni primeri sa potrebnim objašnjenjima, kao i manji broj nerešenih zadataka.

Koncepcija udžbenika, gde su teorijska objašnjenja "protkana" rešenim zadacima, usvojena je na osnovu dugogodišnjeg iskustva u radu sa studentima i saznanja da se teorijski deo nacrtna geometrije najbrže uči kroz izradu konkretnih zadataka. Ovakav pristup izlaganju materije omogućava studentima lakše i jednostavnije samostalno učenje. Uložen je trud da se nađe mera pri objašnjavanju pojmova i zadataka, tako da onima koji u prethodnom školovanju nisu imali nacrtnu geometriju bude razumljivo, a onima koji su je već slušali, da ne bude preopširno.

Veliku zahvalnost za izdavanje knjige dugujem recezentima ove knjige kao i recezentima knjiga koje sam ranije objavila iz tehničkog crtanja i nacrtna geometrije, posebno prof. dr Radovanu Popovu. Njihove sugestije i primedbe sam sa zahvalnošću prihvatila, kao što ću prihvatiti i sve druge koje će unaprediti sledeće izdanje. Osim toga, zahvaljujem se i ostalim kolegama i saradnicima koji su na bilo koji način doprineli da ova knjiga bude što bolja.

Novi Sad, 09.06.2020. god.

Prof. dr Radojka Gligorić

# SADRŽAJ

## PREDGOVOR

<b>0. UVODNE NAPOMENE</b>	1
0.1. KRATAK ISTORIJAT RAZVOJA	2
0.2. PRIBOR ZA CRTANJE	4
0.2.1. Klasičan pribor za crtanje	4
0.2.2. Računar kao pribor (alat) za crtanje	6
0.3. FORMATI I SAVIJANJE CRTEŽA	6
0.4. ZAGLAVLJA	8
0.5. TEHNIČKO PISMO	8
0.6. VRSTE LINIJA	10
0.7. POSTUPAK PRI CRTANJU I TUŠIRANJU CRTEŽA	11
<b>1. UVOD</b>	12
1.1. PROJICIRANJE	12
1.2. OKTANTI	14
<b>2. ORTOGONALNE PROJEKCIJE TAČKE</b>	16
2.1. SPECIJALNI POLOŽAJI TAČKE	18
<b>3. ORTOGONALNE PROJEKCIJE PRAVE (DUŽI)</b>	21
3.1. SPECIJALNI POLOŽAJI PRAVE	21
3.2. UZAJAMNI ODNOS DVE PRAVE	22
3.3. TAČKA NA PRAVOJ	23
3.4. PRODORI PRAVE KROZ PROJEKCIJSKE RAVNI	23
3.4.1. Vidljivost projekcija prave	25
3.4.2. Određivanje oktanata kroz koje prava prolazi	25
<b>4. ORTOGONALNE PROJEKCIJE RAVNI</b>	28
4.1. PROIZVOLJNI POLOŽAJ RAVNI U PROSTORU	28
4.2. SPECIJALNI POLOŽAJ RAVNI	29
4.3. ODREĐIVANJE TRAGOVA RAVNI	31
4.3.1. Tragovi ravni koju određuju dve prave koje se seku	31
4.3.2. Tragovi ravni koju određuju dve paralelne prave	32
4.3.3. Tragovi ravni koja je zadata sa pravom i tačkom van nje ili sa tri tačke	32
<b>5. MEĐUSOBNI ODNOS TEČKE, PRAVE I RAVNI</b>	34
5.1. PRAVA NA RAVNI	34
5.1.1. Proizvoljna prava na ravni (ravan kroz pravu)	34
5.1.2. Specijalne prave na ravni	34
5.2. TAČKA NA RAVNI	38
5.3. PARALELNE RAVNI	39
5.4. PROIZVOLJNE RAVNI (PRESEČNICA RAVNI)	42
5.5. PRAVA IZVAN RAVNI	44
5.5.1. Prava u proizvoljnom položaju izvan ravni (Prodor prave kroz ravan)	44
5.5.2. Prava upravna na ravan (normala $n$ ) i obrnuto	51



5.5.3. Prvi i drugi nagibni triedar	53
5.5.4. Prava paralelna sa ravni i obrnuto	54
5.6. UPRAVNE RAVNI	54
5.7. REZIME MEĐUSOBNOG ODNOSA TAČKE, PRAVE I RAVNI	56
<b>6. TRANSFORMACIJA</b>	<b>57</b>
6.1. TRANSFORMACIJA TAČKE	59
6.2. TRANSFORMACIJA PRAVE (DUŽI)–PRAVA VELIČINA PRAVE (DUŽI)	60
6.2.1. Određivanje projekcija duži kada je zadata prava veličina (transformacijom)	62
6.2.2. Najkraće rastojanje između prave i tačke postupkom transformacije	63
6.2.3. Crtanje međusobno upravnih prava postupkom transformacije	63
6.2.4. Najkraće rastojanje između paralelnih prava postupkom transformacije	64
6.2.5. Najkraće rastojanje između mimoilaznih prava i ugla između njih, postupkom transformacije	65
6.3. TRANSFORMACIJA RAVNI	65
6.3.1. Transformacija ravni zadate tačkama	66
6.3.2. Transformacija pravilnih geometrijskih tela	67
<b>7. ROTACIJA</b>	<b>70</b>
7.1. ROTACIJA TAČKE	70
7.2. ROTACIJA PRAVE (DUŽI) – PRAVA VELIČINA PRAVE (DUŽI)	70
7.2.1. Određivanje projekcija duži kada je zadata prava veličina (rotacijom)	72
7.3. OBARANJE (ROTACIJA) RAVNI	73
7.3.1. Obaranje (rotacija) ravni oko prvog traga	73
7.3.2. Obaranje (rotacija) ravni oko drugog traga	74
7.3.3. Obaranje (rotacija) ravni oko sutražnjica	77
<b>8. METRIČKI PROBLEMI (PRAVE VELIČINE MEĐUSOBNIH ODNOSA TAČKE, PRAVE I RAVNI)</b>	<b>79</b>
8.1. RASTOJANJE TAČKE OD PRAVE	79
8.2. RASTOJANJE TAČKE OD RAVNI	80
8.3. RASTOJANJE DVE PARALELNE PRAVE	81
8.4. RASTOJANJE DVE MIMOILAZNE PRAVE	81
8.5. RASTOJANJE IZMEĐU DVE PARALELNE RAVNI	82
8.6. UGAO IZMEĐU DVE PRAVE KOJE SE SEKU	83
8.7. UGAO PRAVE PREMA RAVNI	84
8.8. PRAVA POD ZADATIM UGLOM PREMA PROJEKCIJSKIM RAVNIMA	84
8.9. UGAO RAVNI PREMA PROJEKCIJSKIM RAVNIMA	86
8.10. RAVAN POD ZADATIM UGLOM PREMA PROJEKCIJSKIM RAVNIMA	86
8.11. UGAO RAVNI PREMA KOORDINATNIM OSAMA	88
8.12. ORTOGONALNE PROJEKCIJE KRUŽNIH POVRŠINA (KRUŽNICA)	88
<b>9. ORTOGONALNE PROJEKCIJE PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TELA</b>	<b>94</b>
9.1. ROGLJASTA TELA	94
9.1.1. Kocka	94
9.1.2. Prizma	98
9.1.3. Piramida	100
9.1.4. Tetraedar	102

9.1.5. Oktaedar	104
9.2. ROTACIONA TELA	107
9.2.1. Valjak	107
9.2.2. Kupa (konus)	108
9.2.3. Lopta	112
<b>10. PRESECI PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TELA I RAVNI</b>	<b>116</b>
10.1. KOLINEACIJA I AFINITET	116
10.2. PRESEK PRIZME I RAVNI	118
10.3. PRESEK PIRAMIDE I RAVNI	126
10.4. PRESEK VALJKA I RAVNI	128
10.5. PRESEK KUPE I RAVNI	132
10.5.1. Presek kupe i ravni po elipsi	132
10.5.2. Presek kupe i ravni po paraboli	134
10.6. PRESEK LOPTE I RAVNI	135
<b>11. MEĐUSOBNI PRODORI PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TELA</b>	<b>138</b>
11.1. MEĐUSOBNI PRODORI ROGLJASTIH TELA	138
11.1.1. Međusobni prodor dveju piramida	138
11.1.2. Međusobni prodor dveju prizmi	142
11.1.3. Međusobni prodor prizme i piramide	144
11.2. MEĐUSOBNI PRODORI OBLIH TELA	150
11.2.1. Međusobni prodor valjka i kupe	150
11.2.2. Međusobni prodor dva valjka	151
<b>12. KOTIRANA PROJEKCIJA</b>	<b>156</b>
12.1. RAZMERA CRTANJA (OZNAČAVANJE DIMENZIJA)	156
12.2. KOTIRANA PROJEKCIJA TAČKE	157
12.3. KOTIRANA PROJEKCIJA PRAVE (DUŽI)	158
12.3.1. Graduiranje prave	159
12.3.2. Određivanje tačke na pravoj	159
12.3.3. Interval prave “i”	160
12.3.4. Pad prave “p”	160
12.3.5. Kotirana projekcija presečnih, mimoilaznih i paralelnih prava	162
12.4. KOTIRANA PROJEKCIJA RAVNI	163
12.4.1. Nagibni ugao “ $\varphi_\beta$ “, interval “ $i_\beta$ “ i pad “ $p_\beta$ “ ravni $\beta$	164
12.4.2. Prava i tačka na ravni	165
12.4.3. Presek dveju ravni	166
12.4.4. Prodor prave kroz ravan	166
12.4.5. Prava na ravni sa određenim padom	167
12.4.6. Ravan određenog pada kroz pravu	168
12.5. PRIMENA KOTIRANE PROJEKCIJE	169
12.5.1. Određivanje i crtanje nasipa i useka	169
<b>13. ORTOGONALNI CRTEŽI</b>	<b>188</b>
13.1. POSTUPAK DOBIJANJA ORTOGONALNOG CRTEŽA	188
13.2. RASPORED PROJEKCIJA (POGLEDA)	190
13.2.1. Evropski raspored projekcija	190
13.2.2. Američki raspored projekcija	192
13.3. POVEZANOST ORTOGONALNIH PROJEKCIJA	194

13.4. DOVOLJAN BROJ PROJEKCIJA (POGLEDA)	198
13.5. KARAKTERISTIKE GLAVNOG "A" POGLEDA	199
13.6. SPECIJALNI ORTOGONALNI POGLEDI	202
13.7. PRESECI NA ORTOGONALNIM CRTEŽIMA	203
13.8. DIMENZIONISANJE	208
13.8.1. Osnovna pravila dimenzionisanja	211
13.8.2. Načini dimenzionisanja	214
13.8.3. Opšti principi dimenzionisanja	214
<b>14. AKSONOMETRIJSKI CRTEŽI</b>	217
14.1. ORTOGONALNA AKSONOMETRIJA	217
14.2. KOSA AKSONOMETRIJA (KOSA PROJEKCIJA)	218
14.3. CRTANJE KRUŽNIH POVRŠINA NA AKSONOMETRIJSKOM CRTEŽU	219
14.4. POSTUPAK IZRADE AKSONOMETRIJSKOG CRTEŽA	221
14.5. PREDNOSTI I NEDOSTACI AKSONOMETRIJSKOG CRTEŽA	225
14.6. IZBOR METODA AKSONOMETRIJE	224
14.7. ČITANJE ORTOGONALNIH CRTEŽA	228
14.7.1. Metoda rasčlanjavanja na sastavne površine	228
14.7.2. Metoda odsecanja od osnovnog tela	229
14.7.3. Kombinovana metoda	230
<b>15. POVEZANOST ORTOGONALNIH PROJEKCIJA I AKSONOMETRIJE</b>	233
15.1. KOSA PROJEKCIJA TAČKE	233
15.2. KOSA PROJEKCIJA PRAVE	233
15.3. KOSA PROJEKCIJA TELA	234
15.4. AKSONOMETRIJSKA PROJEKCIJA TELA	234
<b>16. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA)</b>	239
16.1. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA) TAČKE	241
16.1.1. Transformacija tačke	242
16.1.2. Bisektrisno projiciranje tačke	242
16.1.3. Obaranje u likoravan pomoću distantnih tačaka	244
16.2. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA) PRAVE	244
16.3. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA) RAVNI	246
16.4. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA) TELA	248
16.4.1. Metode perspektive	248
16.5. FRONTALNA PERSPEKTIVA	249
16.5.1. Metoda prodora	250
16.6. PERSPEKTIVA SA UGLA	252
16.6.1. Metoda nedogleda i prodora	252
16.7. RAZMERA I PRENOŠENJE DUŽI	254
16.8. IZBOR METODE CRTANJA, POLOŽAJA PREDMETA I OČNE TAČKE	259
16.9. PREDNOSTI I NEDOSTACI PERSPEKTIVE	262
<b>17. ŠEMATSKI CRTEŽI U PEJZAŽNOJ ARHITEKTURI</b>	272
17.1. ŠEMATSKI CRTEŽI	272
17.1.1. Grafički prikazi za elemente zelenih površina	271
17.1.2. Grafički simboli za elemente zelenih površina	283
17.1.3. Grafički simboli za ostale elemente pejzažnih prostor	287

17.2. CRTEŽI POSTOJEĆIH PEJZAŽNIH PROSTORA	292
17.3. CRTEŽI IDEJNIH REŠENJA	294
17.4. IZVOĐAČKI CRTEŽI	296
17.5. CRTEŽI IZVEDENIH (UREĐENIH) PEJZAŽNIH PROSTORA	297
17.6. SKICE I FOTOGRAFIJE	301
17.7. MARKETINŠKI CRTEŽI	302
17.8. CRTEŽI NACRTANI RUKOM	303
17.9. CRTEŽI NACRTANI POMOĆU RAČUNARA	304
17.10. KOMBINOVANI NAČIN CRTANJA	305
<b>LITERATURA</b>	<b>307</b>

## 0. UVODNE NAPOMENE

Stručna komunikacija među ljudima odvija se preko crteža, jednačina, grafikona, tabela itd. i stoga crteži treba da su precizni, jasni i jednoznačni. Svaka konstruktivna zamisao i ideja, pre realizacije, prikazuje se i pojašnjava crtežima. Stoga je osnovni cilj nacrtne geometrije da izučava različite načine crtanja predmeta, odnosno da daje osnovu za izradu različitih vrsta crteža: po sadržini, načinu prikazivanja, mestu korišćenja i nameni.

Nacrtna geometrija je nauka koja izučava metode, principe i postupke crtanja predmeta. Ona predstavlja osnovu za izradu crteža i stručne dokumentacije iz svih oblasti ljudske delatnosti, a posebno tehničke: mašinstva, građevine, arhitekture, elektrotehnike, slikarstva itd. S pravom se može reći da je nacrtna geometrija temelj i azbuka tehničkog crtanja.

Osim toga, zadatak nacrtne geometrije je i da razvija sposobnost grafičkog zamišljanja i osećaja da se predmeti “vide” u prostoru i da se zatim nacrtaju tako da ih na isti način vide i korisnici crteža. Priroda materije, koju proučava nacrtna geometrija je složena i potrebno je strpljenje da se savlada, naročito za one koji nemaju prirodnog dara za prostor i crtanje. Međutim, ako se shvate suštinski principi na kojima počiva, ova materija postaje mnogo jednostavnija i pristupačnija.

Posebnu teškoću predstavlja pisanje i izlaganje ove materije da bi bilo koncizno, precizno i prihvatljivo sa samostalno učenje, za koje je dovoljno elementarno srednjoškolsko znanje geometrije. Teškoća je u tome što je potrebno mnogo reći da se opiše i objasni nešto što se crtežom može jednostavno pokazati.

Autor se trudio da detaljno izloži principe crtanja, a tek potom postupak i tehniku crtanja i da već objašnjeno ponavlja se samo u onoj meri, koliko je potrebno da se studenti podsete i da se ukaže na povezanost celokupne materije. Ako bi se detaljno, do kraja, kroz celu knjigu, kroz praktične primere (zadatke) ponovo izlagala ista materija, knjiga bi bila preopširna sa objašnjenjima i ponavljanjima. Drugim rečima, nacrtna geometrija se ne može učiti “na preskok” već postupno, od samog početka i to crtajući, a ne gledajući.

Da bi se lakše pratio tok izlaganja materije ili tok rešavanja zadataka, obeležavanja su imala prirodni sled: 1, 2, 3... ili A, B, C... ili I, II, III, itd. Kad god je to bilo moguće, pri rešavanju zadataka, sa 1 ili projekcijama broja 1 obeležen je prvi korak, sa 2 drugi korak itd. Osim toga, tok postupka crtanja je najčešće označavan strelicama.

Korišćene su tri debljine linija. Najdebljom linijom nacrtano je ono što je krajnji cilj zadatka, a najtanjom pomoćne linije, spone itd. Ono što je zadatkom zadato, nacrtano je linijom srednje debljine. Kada se duž ili ravan vidi u pravoj veličini, nacrtana je osnom linijom (crta-tačka-crta). Isprekidanom linijom srednje debljine nacrtane su zaklonjene ivice tela. Na primer, u zadatku 9.5, sl. 9.7 debelom linijom nacrtane su vidljive konture prizme, sa tanjom isprekidanom linijom nevidljive konture, a sa najtanjom pomoćne linije i prava veličina bazisa (šestougaoNIK). Sa srednjom debljinom linije nacrtani su i tragovi ravni  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , jer je ravan bila zadata. Kod složenijih zadataka nisu sve pomoćne linije nacrtane (zbog preglednosti), već su prekinute ili nisu uopšte nacrtane, kao na sl. 11.7. Slike su naslovljene tako da uglavnom govore o predmetu crtanja, principu i postupku rešavanja zadatka.

Posle teorijskog izlaganja pojedinih delova urađeni su i objašnjeni zadaci kojima se utvrđuje izloženo gradivo i tek tako dabija se celina svake tematske jedinice. Na kraju svakog poglavlja, dati su i nerešeni zadaci na kojima studenti treba samostalno da provere znanje.

Rešenje svakog zadatka staje na jedan A4 formatu (210x297 mm). Stoga je početak zadataka određen položajem koordinatnog početka 0, npr. 0(5;9) znači da se koordinatni početak 0 nalazi 5 cm horizontalno i 9 cm vertikalno od gornjeg levog ugla A4 formata. Sve

koordinate date su u cm, osim kod kotirane projekcije u m. Svi zadaci nacrtani su u razmeri 1:1, sem onih iz kotirane projekcije i perspektive pored kojih stoji oznaka korišćene razmere.

Da bi se sa što manje reči precizno i jednoznačno objasnili principi, metode i postupci crtanja korišćene su sledeće oznake:

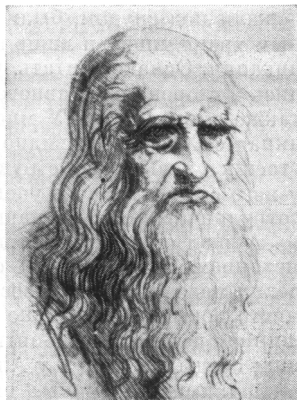
- A, B... ili 1, 2... ili I, II... - tačke,
- a, b... - prave i duži,
- AB, BC... – duži,
- $\alpha, \beta...$  ili  $\pi_1, \pi_2...$  - ravni,
- ABC, EFGD... - ravni zadate tačkama,
- H, V(F), P - horizontalna, vertikalna (frontalna) i profilna projekcijska ravan,
- X, Y,  $Y^\circ, \bar{Y}, Z$  - koordinatne ose,
- x, y, x - koordinate tačaka (odstojanja od projekcijskih ravni u cm ili m),
- ' (prim) - prva projekcija,
- " (sekund) - druga projekcija,
- ''' (terca) - treća projekcija,
- $^\circ$  (oboreno) - prava veličina (oznaka za oboreni položaj),
- A - tačka u prostoru,
- A' - prva projekcija tačke A,
- A'' - druga projekcija tačke A,
- A''' - treća projekcija tačke A,
- $\bar{A}'$  - prva kosa projekcija tačke A,
- $A_r$  - zarotiran položaj tačke A,
- $A_r'''$  - treća projekcija zarotiranog položaja tačke A,
- $A^\circ$  - oboren položaj tačke A,
- $A^{\circ'}$  - prva projekcija zarotirane tačke A,
- $A_\alpha$  - tačka na ravni  $\alpha$  pridružena tački A,
- A'(4) ili A(4) - kotirana projekcija tačke A,
- $A^C$  – centralan projekcija (perspektiva) tačke A
- L – likoravan
- $L^\circ$  - očna ravan
- ${}_1X_3$  - osa po kojoj se seku ravni  $\pi_1$  i  $\pi_3$ ,
- $\Delta$  - razlika koordinata,
- /, //, ///,  $\approx$  - paralelnost,
- = - podudarnost,
- $\neq$  - nepodudarnost,
- $\perp$  - upravnost,
- $\perp\!\!\!\perp$  - oznaka za upravnost između dve linije kada se vidi prava veličina ugla od  $90^\circ$  i
- $\triangleleft$  - oznaka za upravnost između dve linije kada se ne vidi prava veličina ugla od  $90^\circ$ ,
- R
- $\Rightarrow$  - oznaka za sledi u razmeri.

Osim ovih oznaka korišćene su i druge koje su pokazane na crtežima.

## 0.1. KRATAK ISTORIJAT RAZVOJA

Način tehničkog crtanja predmeta menjao se tokom razvoja ljudske civilizacije. Najstariji način je **likovni način** tehničkog crtanja. Ovakav, likovni način tehničkog crtanja jasan je bio, uglavnom, samo autoru crteža.

**Tehnički crteži se moraju crtaju tako, da su jednoznačni i jasni svim stručnim licima.**



Prvi veliki doprinos razvoju tehničkog crtanja dao je, i to nesvesno, **Leonardo da Vinči**. Bio je izrazito talentovan za slikarstvo i imao je savršen dar za crtanje prostora. Na osnovu analize njegovih umetničkih slika, mnogo godina kasnije posle njega, stvorena su pravila koja danas koristimo za crtanje centralne projekcije (perspektive).

*Leonardo da Vinči (1452-1519. god.)*



Osnivač Nacrtna geometrije, kao nauke je francuz **Gaspar Monž**. Njegova je ideja da se predmeti crtaju ortogonalnim projekcijama, što je unelo potpunu revoluciju u tehničkom crtanju i izradi tehničke konstrukcione dokumentacije iz svih oblasti: mašinstva, arhitekture, građevinarstva, saobraćaja, pejzažne arhitekture, melioracija itd.

Njemu u čast Nacrtnu geometriju nazivamo i **MoNGometrija**. Pod istim nazivom **MoNGometrija** u Srbiji se svake druge godine održava međunarodni naučni skup koji se bavi razvojem Nacrtna geometrije.

*Gaspard Monge (1746-1818. god.)*

Razvojem nacrtne geometrije u Srbiji prvi se bavio profesor **Emilijan Josimović** (1820-1897. god.) redovni profesor matematike i arhitekture i rektor Visoke škole u Beogradu. Porodica Emilijana Josimovića potiče iz okoline Majdanpeka, rođen je u Rumuniji, a živio je u Beogradu i Sokobanji. Napisao je prve udžbenike iz Nacrtna geometrije u Srbiji:

- Emilijan Josimović, **Praktična geometrija, Beograd, 1862.** i
- Emilijan Josimović, **Osnove nacrtne geometrije i perspektive, Beograd 1874. god.**



Udžbenik **Osnove nacrtne geometrije i perspektive** je jedan od prvih udžbenika na Visokoj školi u Beogradu. U ovoj knjizi Josimović je definisao mnoge termine iz ove oblasti koji se i danas koriste. Emilijan Josimović je izradio i sproveo prvi urbanistički plan Beograda. Smatra se prvim srpskim urbanistom. U znak priznanja, u Beogradu, na početku Knez Mihajlove ulice, nalazi se spomen ploča Emilijanu Josimoviću. I jedna ulica u centru Beogradu nosi njegovo ime.

Osnivačem pejzažne arhitekture, kao profesije smatra se **Frederik Law Olmsted**, koji je rođen 26 aprila 1822. godine u Americi u Hartwordu. Njemu u čast mesec april, zbog datuma njegovog rođenja, u celom svetu slavi se kao mesec pejzažne arhitekture, a 22. april je dan planete zemlje. Uveo je termin „pejzažna arhitektura“ (landscape architecture) koji se zvanično počeo da koristi od 1863 godine. Njegov najveći doprinos je u tome da se zalagao da

čovekovo okruženje bude što prirodnije sa zelenilom. Definirao je osnovne principe pejzažne arhitekture na principima ekologije. Projektovao je i izgradio velike javne parkove sa sistemom zelenila koji do tada nisu u Americi postojali. Njegovo najvažnije delo je Centralni park u Njujorku, kao i još stotinak sličnih.



*Frederik Law Olmsted (1822 – 1903. god.) prvi pejzažni arhitekta i Centralni park u Njujorku koji je projektovao i izgradio*

Danas se **Nacrtna geometrija** intenzivno bavi teško rešivim problemima:

- Kako predmet koji ima tri dimenzije nacrtati na papiru (monitoru) koji ima dve dimenzije?
- Kako predmet na crtežu da bude jednoznačno definisan?
- Kako da crtež bude razumljiv širokom krugu korisnika?
- Kako predmet na crtežu da deluje prirodno i prostorno, približno onako kako ga vidi naše oko?

Da bi se rešili navedeni zahtevi koriste se različite vrste tehničkih crteža. Nacrtna geometrija je teorijski osnov svih vrsta tehničkih crteža.

Pojava računara i njihova dostupnost širokom krugu korisnika utiče na brz razvoj metoda i postupaka za tehničko crtanje predmeta. Na osnovu Bulove algebre i postupka transformacije projekcijskih ravni razvila se računarska inženjerska grafika. Primenom računara i računarskih softvera ubrzan je proces izrade tehničkih crteža i projektne dokumentacije

## 0.2. PRIBOR ZA CRTANJE

Da bi se nacrtao crtež neophodno je korišćenje odgovarajućeg pribora za crtanje. Pribor za crtanje može biti klasičan, kada se crta rukom pomoću klasičnog pribora za crtanje i savremen, računarom. Pri odlaganju i čuvanju, tehnička dokumentacija se mikrofilmuje pomoću uređaja za mikrofilmovanje. Kada se za crtanje koristi računar, za njihovo odlaganje i čuvanje koriste se diskovi, diskete, kompakt diskovi - CD i druge mogućnosti računarske tehnologije.

### 0.2.1. Klasičan pribor za crtanje

U neophodan klasičan pribor za crtanje spada: tabla za crtanje, papir, olovke, garnitura šestara, trouglovi, pera za tuširanje, tuš, pribor za brisanje, lepljiva traka (selotejp) i krivuljari. Osim toga mogu se koristiti: pera za ispisivanje, lenjiri, šabloni, razmernici itd.

Tabla za crtanje služi da se na nju postavi papir za crtanje. Izrađuju se od drveta ili plastične mase. Mogu biti različite veličine, prikladne za pisaci sto ili namenjene konstrukcionim biroima.

Koristi se više vrsta papira:

- Hamer - nazvan po proizvođaču ove vrste bele deblje hartije za crtanje - koristi se za crtanje originalnih crteža tušem ili olovkom;
- Paus je providna tanka hartija, koristi se za crtanje originalnih crteža tušem;



- Bankpost je trgovački naziv za belu tanku kvalitetnu hartiju A4 ili A3 formata. Koristi se za pisanje proračuna tušem, olovkom, pisaćom mašinom ili štampačem. Osim toga koristi se i za šematske crteže i skice;
- Bela hartija - služi za pripremu crteža i za skice koje se rade olovkom;
- Hartija za kopiranje. Postoje različite vrste ove hartije i u različitim bojama i koriste se za kopiranje crteža;
- Milimetarska hartija je ona na kojoj je odštampana kvadratna milimetarska mrežica. Može biti urađena na pausu ili na nekoj beloj hartiji itd.

Olovke mogu biti obične ili tehničke olovke, a izrađuju se u sledećim stepenima tvrdoće: 9H, 8H... 2H, H, F, HB, B, 2B... i 7B. Olovke oznake H su sa tvrdim grafitnim jezgrom (veći broj - veća tvrdoća), a B su sa mekim grafitnim jezgrom (veći broj - mekše jezgro). Olovke oznake F i HB su sa srednjom tvrdoćom jezgra. Debljina grafitnog jezgra za tehničke olovke može biti: 0,3; 0,5; 0,8 i 1 mm. Crteži se prvo nacrtaju tankom tvrdom olovkom. Tako se grafitno jezgro ne razmazuje po papiru, a crtež je preciznije nacrtan i uredniji je. Nakon toga olovkom sa mekim jezgrom podebljavaju se linije koje treba da su debele.

Neophodna su dva ili tri šestara: osnovni, "nultaš" i prenosnik. Na osnovni šestar dodaje se deo sa grafitnim uloškom, deo sa iglom ili deo za tuširanje. Nultaš ima deo sa grafitnim uloškom i deo za tuširanje. Koristi se za crtanje malih krugova prečnika od 0,6 do 12 mm. Šestar prenosnik koristi se za prenošenje rastojanja.

Trouglovi mogu biti izrađeni od drveta ili plastične mase, sa ravnim ili skošenim ivicama (za tuširanje), različitih veličina. Za crtanje su neophodna dva pravouga trougla čije su hipotenuze pod uglom od 45° i 30° (60°). Najpogodnije su veličine trouglova čija je hipotenuza oko 30 cm.

Za tuširanje se koriste rapidograf pera, koja su praktična i jednostavna za korišćenje. Svako pero je određene standardne debljine: 0,18; 0,25; 0,35; 0,50; 0,70; 1,0; 1,4; 2,0; ... mm. Liniju debljine od 0,18 mm treba izbegavati zbog kopiranja i mikrofilmovanja crteža. Sa četiri debljine rapidograf pera: 0,25; 0,30, 0,50 i 0,70 mm mogu da se zadovolje sve potrebe tuširanja tehničkih crteža i tehničke dokumentacije. Ova pera se koriste i za pisanje.

Postoje različite vrste tuševa, prema kvalitetu i nameni. U tehničkom crtanju koristi se crni tuš. Treba koristiti samo tuševe onog kvaliteta, koji su namenjeni za rapidograf pera.

U pribor za brisanje spadaju: gumice za brisanje, žilet i koreks (belilo). Gumice mogu biti: tvrde, meke i veoma meke. Tvrde gumice se koriste za brisanje tuširanih linija sa hamera i pauza, meke za brisanje linija nacrtanih olovkom, a vrlo meke za čišćenje crteža nakon tuširanja. Za brisanje linija nacrtanih tušem na pausu uspešno se koristi žilet. Žiletom se pažljivo sastruže pogrešno nacrtana linija, zatim se to mesto, pre ponovnog tuširanja, izglučava grafitnom olovkom. Na taj način tuš se neće razliti.

Za pričvršćivanje papira za tablu ili sto koriste se specijalni ekserčići ili lepljiva traka, "selotejp".

Krivuljari se koriste za crtanje i tuširanje pravilnih i nepravilnih krivih linija. Mogu biti vrlo različitih oblika i veličina. Kriva linija treba da bude tako nacrtana da nema naglih prelaza, da je "kontinualna". To se postiže tako što se svaki put pri pomeranju krivuljara, delimično krivuljarem obuhvati već nacrtani deo krive linije.

Lenjiri se koriste za crtanje dužih pravih linija. Postoje razne veličine i oblici lenjira: običan lenjir, T lenjir (glavaš), razmernik itd.

U prodaji se mogu naći različite vrste šablona za crtanje krugova, delova krugova, elipsi, šestougaoanih navrtki itd, kao i šabloni za pisanje tehničkih slova. Početnicima se ne preporučuju, što se posebno odnosi na šablone za pisanje, jer inženjeri tehničkih struka moraju lepo pisati i bez šablona.

Odlaganje, čuvanje i pretraživanje velikog broja tehničkih crteža može da predstavlja problem. Danas se za ove potrebe koriste računar i mikrofilmovi. Čuvanje tehničke

dokumenatcije na mikrofilmovima ima niz prednosti u odnosu na čuvanje na papiru. Novu dimenziju mikrografiji daje povezivanje računarske i mikrofilmske tehnike.

### 0.2.2. Računar kao pribor (alat) za crtanje

Računar kao pribor za tehničko crtanje predstavlja savremenu opremu, koja će se u budućnosti uglavnom koristiti. Osim računara, za crtanje tehničke dokumentacije potrebni su: ploter, štampač, digitajzer, svetleća olovka, tabla, "miš", skener itd. Da bi se ova računarska oprema uopšte mogla koristiti potreban je odgovarajući softver (korisnički program).

Ploter predstavlja "tablu" na kojoj se prenosi crtež nacrtan pomoću računara. Štampač je uglavnom, predviđen za štampanje teksta, a mogu se odštampati i crteži. Digitajzer je deo za uvećanje sitnih detalja crteža. Pri tome se detalji crteža mogu ispravljati ili do crtavati. Svetleća olovka služi da se njome slobodnom rukom crta na specijalnoj tabli, što se prenosi na monitor. "Miš" se koristi radi jednostavnijeg biranja željenih komandi. Skenerom se snima već nacrtan crtež. Pri tome se skeniran crtež može, pre štampanja korigovati, do crtati itd.

U momentu pisanja ove knjige najviše se koristi softver AutoCAD u vrlo različitim verzijama zavisno od vrste crteža i njegove namene. Popularan je zbog mogućnosti korišćenja u svim strukama i zbog brojnih specijalizovanih alata i dodatnih modula koji se koriste u proračunima i pri crtanju. Sadrži komandni prozor u kojem se pojavljuju uputstva i sugestije pri crtanju. Ovaj softver je složen za korišćenje, ali je nezamenljiv za projektovanje, proračune, izbor optimalnog rešenja i simulaciju rada, prvenstveno u tehnicima.

Danas na tržištu postoji više softvera koji su slični AutoCAD-u: ProEngineer, CATIA, Mechanical Desktop itd.

Najpoznatiji profesionalni program za pejzažno projektovanje je LandCAD, koji omogućava izradu tehničke dokumentacije, proračune zemljanih radova, izbor biljaka i td.

Međutim, treba imati na umu da je računar samo brza mašina koja ne ume da misli, niti da procenjuje da li je crtež pravilno nacrtan. Svi pristupačni softvereri za crtanje podrazumevaju da onaj ko ga koristi zna pravila crtanja, i nema u tom smislu edukativni značaj.

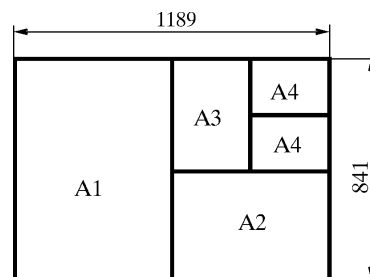
Inženjeri pejzažne arhitekture treba da znaju, svojom rukom, da brzo i precizno skiciraju postojeće stanje, da zamisao lepo nacrtaju, da crtež bude vizuelno i likovno dopadljiv naručiocu, bar onoliko koliko će biti lepo zamišljeno rešenje pejzažnog prostora. Stoga na početku učenja, treba biti obazriv i ne koristiti isključivo računar, već kombinovati savremen i klasičan način crtanja.

### 0.3. FORMATI I SAVIJANJE CRTEŽA

U tehničkom crtanju koristiti se papir određene veličine i oblika (format A), što je definisano standardom SRPS A.A0.104 i SRPS A.A0.105. Osnovne veličine formata date su u tabeli 0.1. Najveći format je A0, koji ima površinu  $1 \text{ m}^2$ , sa odnosom strana  $1:\sqrt{2}$ . Dimenzije ovog formata su  $1189 \times 841 \text{ mm}$ . Ako se format A0 prepolovi dobijaju se dva A1 formata, ako se prepolovi A1 dobijaju se dva A2 formata itd. Na isti način dobijaju se i ostali formati do A4, kako je to prikazano na sl. 0.1.

Tabela 0.1: Osnovne veličine formata

Oznake formata osnovnih veličina	Mere (mm)
A0	841 x 1189
A1	594 x 841
A2	420 x 594
A3	297 x 420
A4	210 x 297

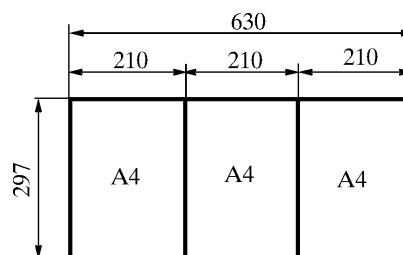


Sl. 0.1: A formati za tehničke crteže

Za crtanje dugačkih i uskih predmeta koriste se produžene veličine formata prema tabeli 0.2. Ovi formati dobijaju se produženjem kraće strane formata do dužina koji su umnošci te kraće strane. Takva mogućnost produženog A4 formata data je na sl. 0.2. Za crtanje veoma dugačkih predmeta, objekata i sl. mogu se koristiti i drugačija produženja osnovnih formata.

Tabela 0.2: Produžene veličine formata

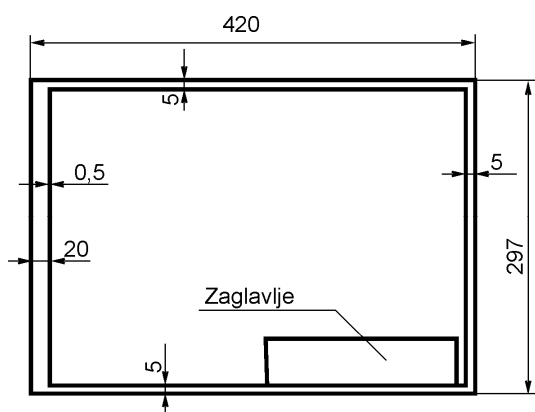
Oznake formata produženih veličina	Mere (mm)
A3 x 3	420 x 891
A3 x 4	420 x 1189
A4 x 3	297 x 630
A4 x 4	297 x 841
A4 x 5	297 x 1051



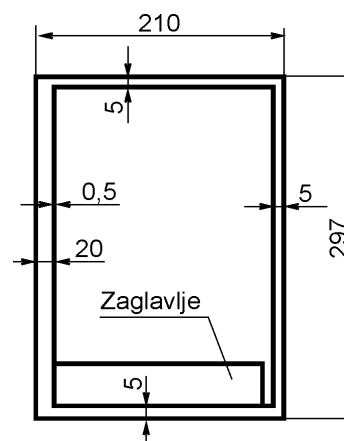
Sl. 0.2: Produžen A4 format

Na papiru datog formata, pre nego što se predmet počne crtati, prvo se nacrtaju okvir i zaglavlje, što je prikazano na sl. 0.3 i 0.4. Linija okvira treba da je debela najmanje 0,5 mm. Veličina margine sa leve strane zavisi od veličine formata i od toga kako će se crtež odlagati. Može da bude 7, 10 i 20 mm.

Svi formati veći od A4, savijaju se na A4 format (210 x 297 mm). Način savijanja takođe, zavisi od načina odlaganja crteža i veličine crteža. Osnovni princip je, da je "lice" crteža (ono što se prvo vidi kada se crtež uzme li otvori fascikla), deo crteža sa zaglavljem. Ako se format A3 odlaže u fasciklu bez poveza savija se na pola, kao na sl. 0.5.

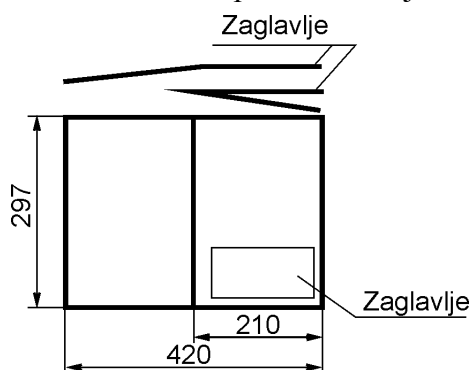


Sl. 0.3: Okvir i zaglavlje na A3 formatu

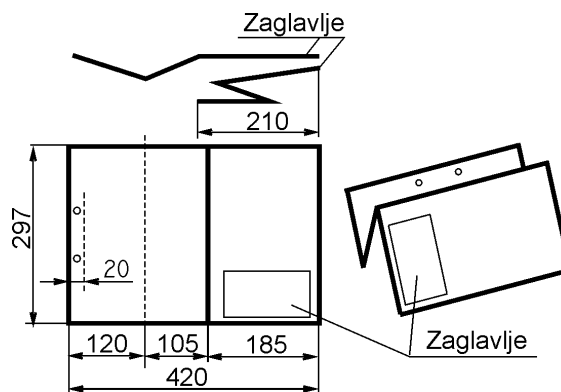


Sl. 0.4: Okvir i zaglavlje na A4 formatu

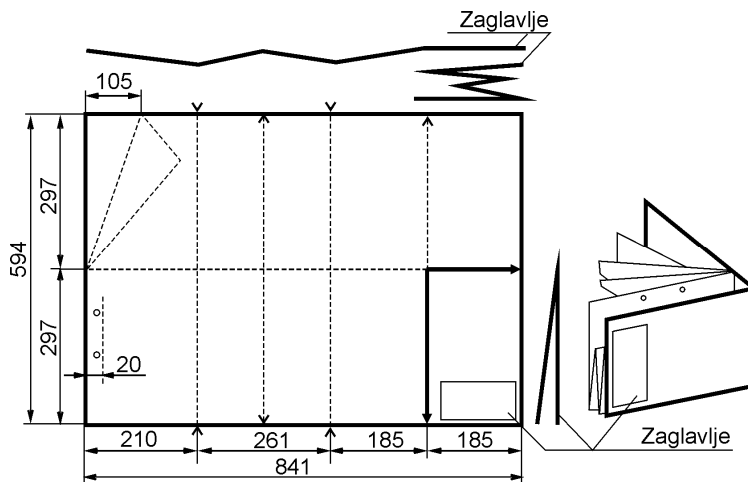
Kada se A3 format odlaže u fasciklu sa povezom savija se kao na sl. 0.6. Kota 20 predstavlja slobodnu marginu potrebnu za povez fascikle. Način savijanja A1 formata kada se odlaže u fasciklu sa povezom dat je na sl. 0.7.



Sl. 0.5: Savijanje A3 formata



Sl. 0.6: Savijanje A3 formata za fasciklu sa povezom



Sl. 0.7: Savijanje A1 formata kada se odlaže u fasciklu sa mehanizmom

#### 0.4. ZAGLAVLJA

Na svakom crtežu treba da bude odgovarajuće zaglavlje. Zaglavlje predstavlja uokvireni deo na crtežu, koji se nalazi u donjem desnom uglu formata. U zaglavlju se upisuju podaci koji su bitni za identifikaciju i korišćenje crteža. Ti podaci su i tehničke i pravne prirode i tek crtež sa popunjenim zaglavljem predstavlja tehnički dokument.

Zaglavlja za crteže mogu biti različita po svom obliku i sadržaju, zavisno od namene i vrste crteža, mesta korišćenja itd. Mogu biti prilagođena potrebama proizvođača, privrednih organizacija, škola i ustanova.

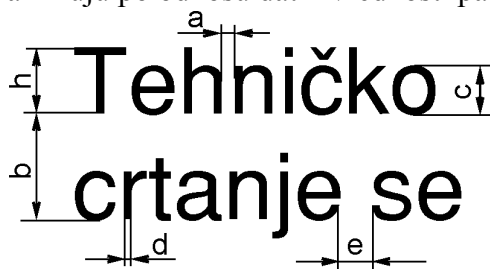
Podaci koji treba da stoje u zaglavlju su: naziv crteža, vlasnik crteža, ime, prezime i datum onog koje crtao, ime, prezime i datum onog koje kontrolisao i overio tačnost crteža i podataka na njemu, razmera crtanja i drugi bitni podaci.

#### 0.5. TEHNIČKO PISMO

Tehnički crteži i sva ostala tehnička dokumentacija ispisuje se tehničkim pismom koje je definisano našim nacionalnim i međunarodnim standardima. Ovo pismo je tako oblikovano da je precizno, jasno, čitko, ujednačeno i pogodno za sve vidove reprodukcije i snimanja na mikrofilm.

Tehnički crteži i ostala tehnička dokumentacija moraju biti ispisani tako da, čak i u slučaju manjeg oštećenja ne sme doći do bilo kakve konfuzije. Mora se jasno razlikovati npr. nula (0) od slova O. Tehnička slova se pišu rukom, šablonima, mašinom, računatom ili nekim drugim postupkom.

SRPS standard je definisao latinično, ćirilično i grčko tehničko pismo. U okviru ovih pisama definisani su arapski i rimski brojevi, znaci interpunkcije, oznake računskih radnji, matematičke oznake itd. Tehničko pismo može biti vertikalno (uspravno) i koso (pod uglom od 75° prema horizontali). Parametri koji definišu veličinu i međusobne odnose tehničkog pisma dati su na sl. 0.8. Osim toga tehničko pismo može biti tipa A i B. Međusobno se razlikuju po odnosu datih vrednosti parametara sa sl. 0.8.



Sl. 0.8: Parametri koji definišu tehničko pismo  
 $h$  - visina slova;  $c$  - visina malih slova;  
 $a$  - rastojanje između slova i brojki u istoj reči;  
 $b$  - minimalno rastojanje između dva susedna reda;  
 $e$  - rastojanje između dve susedne reči;  $d$  - debljina linije

Osnovni parametar je visina slova  $h$  (visina velikih slova i brojeva). Vrednost visine slova može biti iz sledećeg niza: 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20... mm. Sledeći broj ovog niza je dvostruka vrednost prethodnog ( $14 \times 2 = 28$  itd.). Visina malih slova  $c$  je iz istog niza za jedan stepen manja od visine  $h$ . Na primer, ako su velika slova visoka 10, mala su 7 mm; ako su velika visoka 7, mala su 5 mm itd. Debljina slova  $d$  je iz istog niza umanjenog za 10 puta, odnosno debljina  $d$  može biti: (0,18); 0,25; 0,35; 0,50; 0,70; 1,4 i 2 mm. Koja će vrednost parametra  $d$  biti zavisi od visine  $h$  i tipa slova. Kod slova tipa A odnos  $d/h$  je  $1/14$ , a kod tipa B je  $1/10$ . To znači da su slova tipa A uža, a tipa B šira, za istu visinu. Vrednosti svih parametara pisma tipa A i B date su u tabelama 0.3 i 0.4.

Tabela 0.3: Vrednosti parametara slova tipa A (SRPS M.A0.101)

(Mere u mm)

Karakteristike	Oznaka	Mere						
Visina velikih slova	h	2,5	3,5	5	7	10	14	20
Visina malih slova (bez drške ili repa)	c	–	2,5	3,5	5	7	10	14
Rastojanje između slova/brojki u jednoj reči	a	0,35	0,5	0,7	1	1,4	2	2,8
Minimalno rastojanje između dva reda	b	3,5	5	7	10	14	20	28
Minimalno rastojanje između reči	e	1,05	1,5	2,1	3	4,2	6	8,4
Debljina linija	d	0,18	0,25	0,3	0,5	0,7	1	1,4

Tabela 0.4: Vrednosti parametara slova tipa B (SRPS M.A0.101)

(Mere u mm)

Karakteristike	Oznaka	Mere						
Visina velikih slova	h	2,5	3,5	5	7	10	14	20
Visina malih slova (bez drške ili repa)	c	–	2,5	3,5	5	7	10	14
Rastojanje između slova/brojki u jednoj reči	a	0,5	0,7	1	1,4	2	2,8	4
Minimalno rastojanje između dva susedna reda	b	3,5	5	7	10	14	20	28
Minimalno rastojanje između reči	e	1,5	2,1	3	4,2	6	8,4	12
Debljina linija	d	0,25	0,35	0,5	0,7	1	1,4	2

Širina slova je vrlo različita. Oblik slova, brojeva i svih ostalih oznaka pisma definisan je mrežicom, a širina brojem kolona u mrežici (sl. 0.9 i 0.10). Mrežica je sa rastojanjem  $d$ . Na primer: slovo B, tipa slova A (latinično, ćirilično, uspravno i koso) široko je 8 kolona mrežice. To znači za ovo slovo (B) visine 10 mm, debljina slova je  $d=0,7$  mm, širina je 5,6 mm ( $8 \times 0,7 = 5,6$ ). Debljina svih slova je ista. Visina za  $h$  i  $c$  ne sme biti manja od 2,5 mm i usvaja se prema raspoloživom prostoru za tekst. Rastojanje  $a$  se može smanjiti za polovinu, ako se na taj način postiže bolji vizuelni efekat, kao npr. LA, TV itd. Tada je rastojanje  $a=d$ .

A B C D E F G H I J K L M N O

P Q R S T U V W X Y Z Č Ć

Đ Š Ž

a b c d e f g h i j k l m n o p q r

s t u v w x y z č ć đ š ž

[(!?,;"'=-+x:√%&)]φ1°

0123456789 IVX

Sl. 0.9: Tehničko pismo, latinično,  
tipa B, vertikalno

А Б В Г Д Ђ Е Ж З И Ј К Л

Љ М Н Њ О П Р С Т Ћ У Ф

Х Ц Ч Ш

а б в г д ђ е ж з и ј к л љ м н

њ о п р с т ћ у ф х ц ч ш

[(!?,;"'=-+x:√%&)]φ1°

0123456789 IVX




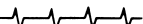


Sl. 0.10: Tehničko pismo, ćirilično  
tipa B, vertikalno

## 0.6. VRSTE LINIJA

U tehničkom crtanju koriste se tačno određene linije po debljini i obliku. Debljina linija je iz istog niza kao i debljina tehničkih slova, odnosno: 0,18; 0,25; 0,35; 0,50; 0,70; 1; 1,4 i 2 mm. Linija debljine 0,18 mm izbegava se, jer je suviše tanka za snimanje na mikrofilm (ne vidi se). Na crtežu mogu biti dve debljine: debela i tanka. Odnos između debele i tanke linije mora biti najmanje 2:1. Znači, ako je debela linija 0,7 mm, tada je tanka 0,35 ili 0,25 mm. Linije mogu biti različitih oblika (tabela 0.5).

Linije iz tabele 0.5. su prvenstveno namenjene za crtanje konstrukcione dokumentacije iz tehnike, međutim koriste se i za sve ostale crteže.

Tabela 0.5: Vrste linija na tehničkim crtežima

Naziv i izgled linije	Primena
Puna, debela 	Vidljive ivice i konture predmeta.
Puna, tanka 	Za pomoćne linije na crtežu (označavanje dimenzija – kota, pozicione linije, šrafurne linije i sl. ).
Puna, tanka, izvučena slobodnom rukom 	Za označavanje skraćenog pogleda kada se crta rukom.
Puna, tanka (prava) sa cikcakom 	Za označavanje skraćenog pogleda kada se crta računarom.
Isprekidana, tanka i debela  	Zaklonjene (nevidljive) ivice i konture predmeta.

Crta-tačka-crta, tanka - - - - -	Osne linije i simetralne linije, za putanje i sl.
Crta-tačka-crta, debela - . - . - . - . - . - .	Za linije i površine kojima se postavljaju specijalni zahtevi.
Crta-tačka-crta, tanka, zadebljana na krajevima i na mestima promena pravca - - - - -	Za označavanje tragova ravni presecanja.
Crta-dve tačke-crta, tanka - - - - -	Za konture susednih delova, za specijalne zahteve i sl.

## 0.7. POSTUPAK PRI CRTANJU I TUŠIRANJU CRTEŽA

Da bi crtež bio pravilno nacrtan, tehnički uredan i korektan, treba se, uz sva pravila, držati i određenog postupka i redosleda pri crtanju. Ovde neće biti reči o metodama i načinu crtanja, već ukratko o tehnici izrade crteža.

### Crtež nacrtan olovkom

Crtež se potpuno nacrtat tankom tvrdom olovkom, tipa H, koristeći se svim potrebnim priborom. Pribor (trouglovi, lenjiri, krivuljari, šabloni itd) mora biti čist, da ne bi prljao crtež. Prvo se nacrtaju simetralne i osne linije. Zatim se crtaju krive linije (krugovi, polukrugovi, elipse itd.) odnosno to što je "teže" nacrtati i na kraju se crtaju prave linije. Ako će crtež ostati nacrtan olovkom, tada se mekšom olovkom, tipa B, podebljaju debele linije, dok tanke linije ostaju prvobitno nacrtane. Ako je crtež zvaničan tehnički dokument, a može da bude nacrtan olovkom, tada se mora istuširati: zaglavlje i sve što se ispisuje u njemu, kote, kotne strelice i sav tekst na crtežu.

### Crtež nacrtan tušem

Ako se crtež crta tušem, postupak je sličan kao i kad se crta olovkom. Znači, tvrdom tankom olovkom nacrtat se ceo crtež sa svim projekcijama, kotama, oznakama, zaglavljem itd. Tada se pristupa tuširanju. Prvo se tuširaju sve debele linije i to ovim redosledom: krive linije, krugovi, radijusi, zaobljenja i sve to što je "teže" za tuširanje i na kraju, prave linije. Nakon toga se tuširaju sve tanke linije istim redosledom kao i debele. Zatim se tušem ispisuje sav tekst, kote, strelice i sve ostale oznake. Kada je crtež kompletno istuširan, ceo se prebriše mekom gumicom.

### Crtež nacrtan računaram

Pojavom računara i njegova pristupačnost svakom pojedincu razvio se veliki broj različitih računarskih programa (softvera) koji ubrzavaju proces projektovanja i crtanja tehničke dokumentacije iz svih oblasti. Na računaru mogu se nacrtati dvodimenzionalni (2D) u trodimenzionalni (3D) crteži za potrebe projekata iz pejzažne arhitekture. Međutim, kako je pejzažna arhitektura spoj umetnosti i nauke, teško je na računaru nacrtatu tako lepo drvo ili cvet kako izgleda u prirodi, onako kako ga može nacrtati naša ruka.

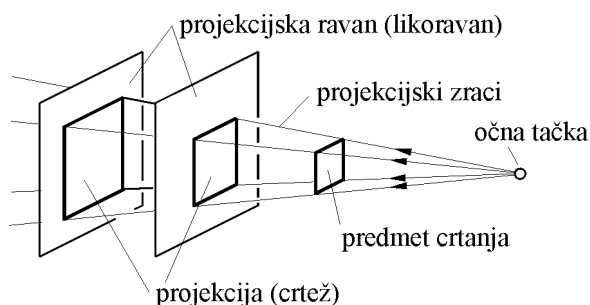
Zapravo treba koristi i kombinovati sve mogućnosti i tehnike pri izradi crteža pejzažnih prostora.

## 1. UVOD

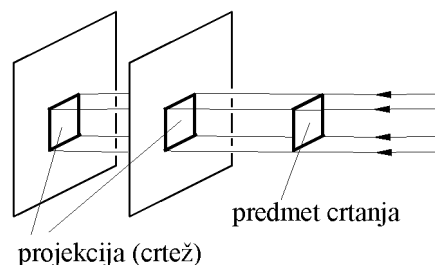
Nacrtna geometrija je nauka koja se bavi teorijom grafičkog predstavljanja predmeta, zamisli i ideja, odnosno iznalaženjem različitih načina da se predmet koji ima tri dimenzije predstavi na papiru sa dve dimenzije. Nacrtna geometrija predstavlja osnovu tehničkog crtanja, za izradu tehničke i ostale dokumentacije iz oblasti mašinstva, arhitekture, građevinarstva, saobraćaja, pejzažne arhitekture, melioracija itd.

### 1.1. PROJICIRANJE

Projiciranje je postupak dobijanja slike predmeta na papiru, odnosno postupak dobijanja crteža predmeta. Crtež (projekcija, slika predmeta) se dobija tako što se predmet crtanja "obavije" projekcijskim zracima (projekcijskim pravama) i tamo gde oni prodiru (probijaju) projekcijsku ravan (ravan crtanja, papir) dobija se slika predmeta, projekcija ili crtež. Projekcijski zraci mogu se seći u jednoj (očnoj) tački i mogu biti paralelni. Kada se projekcijski zraci seku u jednoj ili u dvema tačkama, veličina projekcije zavisi od udaljenosti projekcijske ravni od predmeta crtanja. Ovakav način projiciranja naziva se centralnim projiciranjem (sl. 1.1). Kada su projekcijski zraci međusobno paralelni (paralelno projiciranje) veličina projekcije ne zavisi od položaja projekcijskih ravni u odnosu na predmet crtanja (sl. 1.2).

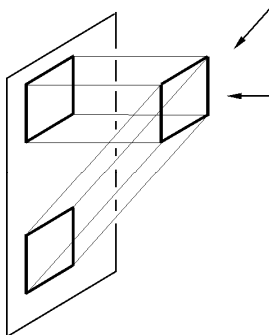


Sl. 1.1: Postupak dobijanja crteža: projekcijski zraci se seku - centralno projiciranje

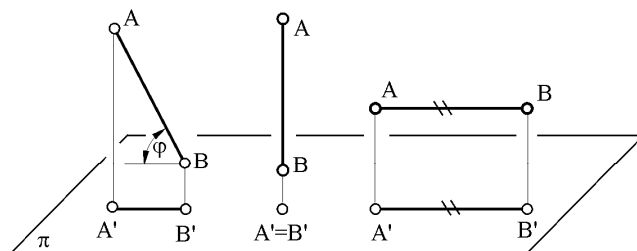


Sl. 1.2: Paralelni projekcijski zraci - paralelno projiciranje

Paralelni projekcijski zraci mogu biti upravni (ortogonalni) na projekcijsku ravan (pod uglom od  $90^\circ$ ) ili pod nekim proizvoljnim uglom (kosi). Bez obzira na ugao paralelnih projekcijskih zraka prema projekcijskoj ravni, dobijena projekcija se ne menja (sl. 1.3). Kada su projekcijski zraci upravni na ravan crtanja dobija se ortogonalna projekcija (sl. 1.4), a kada su pod proizvoljnim uglom kosa projekcija (sl. 1.3).



Sl. 1.3: Ortogonalni i kosi projekcijski zraci



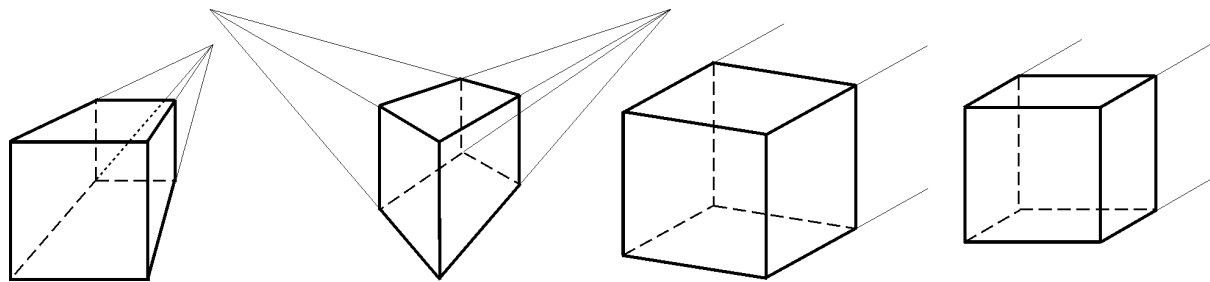
Sl. 1.4: Položaj predmeta crtanja u odnosu na projekcijsku ravan  $\pi$



Predmet crtanja (površine i ivice predmeta) može biti različito postavljen u odnosu na projekcijsku ravan: pod proizvoljnim uglom, upravno na projekcijsku ravan ili paralelno sa projekcijskom ravni. Kada je npr. duž AB (kao ivica predmeta) pod proizvoljnim uglom  $\varphi$  prema projekcijskoj ravni  $\pi$ , projekcija na ravan  $\pi$  je deformisana (kraća) od duži AB (sl. 1.4). Deformacija duži zavisi od vrednosti ugla  $\varphi$ , porastom vrednosti od 0 do  $90^\circ$  veća je i deformacija. Ako je duž AB upravna na ravan  $\pi$ , projekcija se maksimalno deformiše, odnosno projicira se kao tačka. Kada je duž AB paralelna sa ravni  $\pi$  njena projekcija predstavlja pravu nedeformisanu veličinu duži ( $AB=A'B'$ ).

Kada se projekcijski zraci seku u jednoj tački dobija se slika predmeta u perspektivi (sl. 1.5). Dobijena projekcija je deformisana slika predmeta (kocke). Stepenn deformacije zavisi od međusobne udaljenosti tačke sečenja projekcijskih zraka, predmeta i projekcijske ravni. Ovaj način projiciranja koristi se u građevinarstvu, arhitekturi, pejzažnoj arhitekturi, dok u tehnici nema primenu.

Kada su projekcijski zraci upravni na projekcijske ravni i kada se na jednom pogledu vide ivice predmeta paralelne sa osom X, Y i Z dobija se ortogonalna aksonometrija (sl. 1.6), a ako su projekcijski zraci paralelni i pod proizvoljnim uglom u odnosu na jednu projekcijsku ravan dobija se slika predmeta u kosoj projekciji (sl. 1.7). Dobijeni crteži su deformisani u odnosu na predmet (kocku). Ortogonalna aksonometrija i kosa projekcija se koriste u tehnici.



Sl. 1.5: Kocka u perspektivi

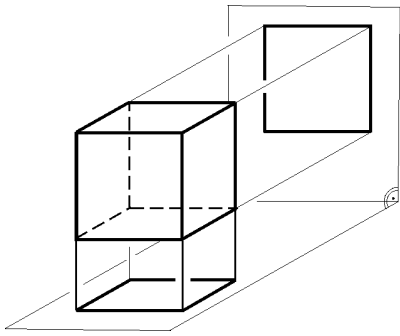
Sl. 1.6: Kocka u aksonometriji

Sl. 1.7: Kocka u kosoj projekciji

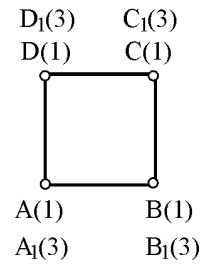
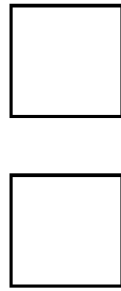
Korišćenjem paralelnih projekcijskih zraka pod uglom od  $90^\circ$  prema projekcijskoj ravni dobija se slika predmeta u ortogonalnoj projekciji. Takođe, i ortogonalna projekcija predmeta je deformisana u odnosu na predmet, jer samo površine predmeta koje su paralelne sa projekcijskim ravnima projiciraju se nedeformisano, odnosno vide se u pravoj veličini. Stoga se kod ortogonalnog projiciranja koriste više međusobno upravni projekcijski ravni koje su paralelne sa površinama predmeta. Na sl. 1.8 prikazane su dve ortogonalne projekcije kocke, na horizontalnu i vertikalnu projekcijsku ravan. Da bi se crtež dobio na jednoj projekcijskoj ravni obara se horizontalna projekcijska ravan na dole za  $90^\circ$ , dok se ne dovede na vertikalnu projekcijsku ravan, a zajedno sa njom i projekcija. Ortogonalni crtež kocke bi imao dve ortogonalne projekcije, koje u stvari predstavljaju pogled odozgo (upravno na horizontalnu projekcijsku ravan – prva projekcija) i pogled spreda (upravno na vertikalnu projekcijsku ravan – druga projekcija). Ortogonalne projekcije predstavljaju osnovni način crtanja u tehnici.

Ako se tačkama (temenima) kocke na prvoj projekciji daju vrednosti vertikalnih odstojanja od horizontalne projekcijske ravni (kote) dobija se kotirana projekcija (sl. 1.9). Kotirana projekcija koristi se za prikazivanje zemljišta, puteva, kanala itd.

Na primeru kocke prikazani su različiti načini crtanja predmeta. Koji će se način crtanja koristiti zavisi od toga za koje potrebe će se crtež koristiti, od složenosti predmeta, od stručnosti korisnika crteža itd.



Sl. 1.8: Kocka u paru ortogonalnih projekcija



Sl. 1.9: Kotirana projekcija kocke

## 1.2. OKTANTI

Bez obzira na to koji se projekcijski zraci pri crtanju koriste, kakav je predmet crtanja i koju vrstu crteža crtamo, predmet se pre crtanja zamišljeno postavi u jedan od oktanata.

Oktanti predstavljaju prostor omeđen sa tri međusobno upravne ravni: horizontalnom, vertikalnom i profilnom. Označavaju se sa:

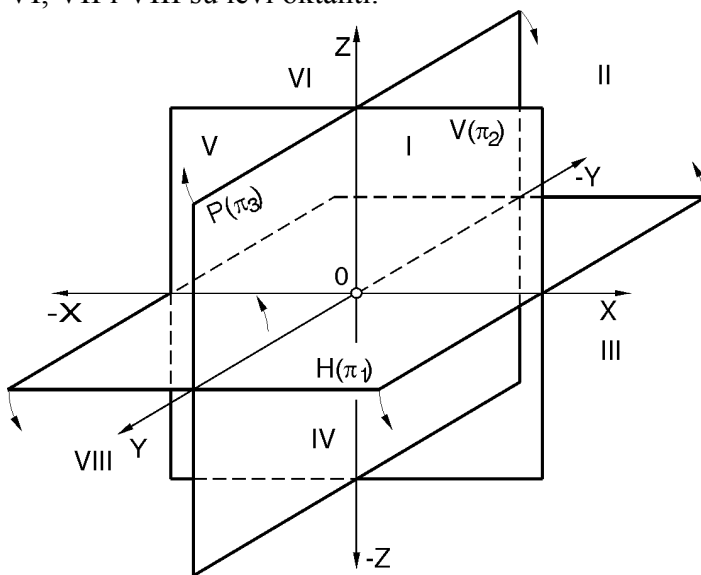
H - horizontalna (horizontalnica) ili prva projekcijska ravan ili ravan  $\pi_1$ ,

V(F) - vertikalna (vertikalnica), frontalna (frontalnica) ili druga projekcijska ravan ili ravan  $\pi_2$  i

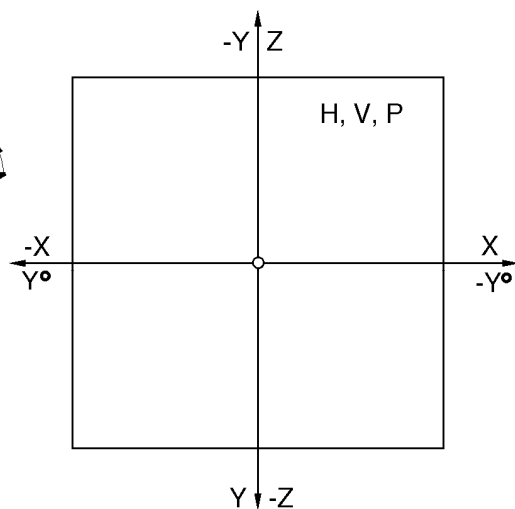
P - profilna (profilnica) ili treća projekcijska ravan ili ravan  $\pi_3$ .

Ove tri ravni dele prostor na osam oktanata i seku se po osama X, Y, Z u koordinatnom početku u tački 0, koje su međusobno upravne (sl. 1.10). Ose mogu biti pozitivnog i negativnog usmerenja. Granica predznaka osa je koordinatni početak 0. Horizontalna projekcijska ravan (H) određena je osama X, Y, vertikalna (V) sa X, Z, a profilna (P) sa Y, Z ili kratko zapisano: H(X;Y), F(X;Z), P(Y;Z). Oktanti su definisani sledećim osama: I(X;Y;Z) II(X;-Y;Z) III(X;-Y;-Z) IV(X;Y;-Z) V(-X;Y;Z) VI(-X;-Y;Z) VII(-X;-Y;-Z) i VIII(-X;Y;-Z).

Oktanti I, II, V i VI su gornji oktanti (nalaze se iznad H); III, IV, VII i VIII donji; I, IV, V i VIII su prednji (ispred V); II, III, VI i VII su zadnji; I, II, III i IV su desni (desno su od P) i V, VI, VII i VIII su levi oktanti.

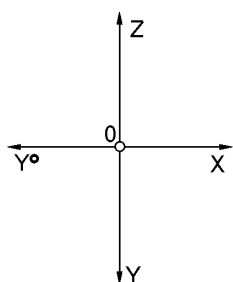


Sl. 1.10: Oktanti u prostoru



Sl. 1.11: Oktanti nakon obaranja

Da bi crtanje predmeta u ovako omeđenom prostoru bilo jednostavnije, odnosno da bi se prostor sveo na jednu ravan, tj. ravan papira, sve tri projekcijske ravni dovode se na jednu ravan tako što se obaraju H i P ravni na V projekcijsku ravan. To znači da je V ravan, ravan crtanja. Horizontalna projekcijska ravan zarotira se oko X ose sa prednjim krajem na dole; profilna zarotira se oko Z ose sa prednjim delom na levu stranu za  $90^\circ$ . Smerovi rotacije su stvar dogovora. Pri tome osa Y se "cepa" na dva dela; jedan deo odlazi sa H, a drugi sa P ravni. Deo Y ose koji odlazi sa P ravni zove se  $Y^\circ$  (Y oboreno). Nakon obaranja H i P ravni oktanti se crtaju kao na sl. 1.11.

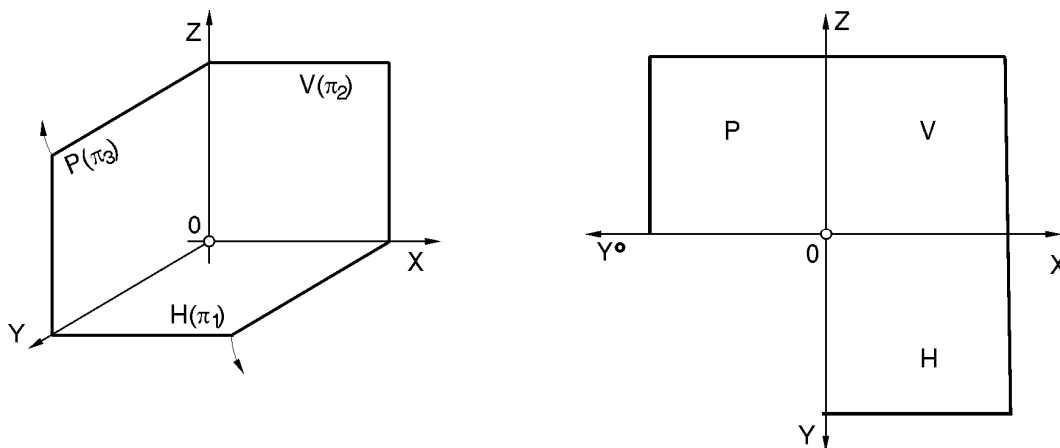


Sl. 1.12: Pojednostavljen prikaz oktanata nakon obaranja

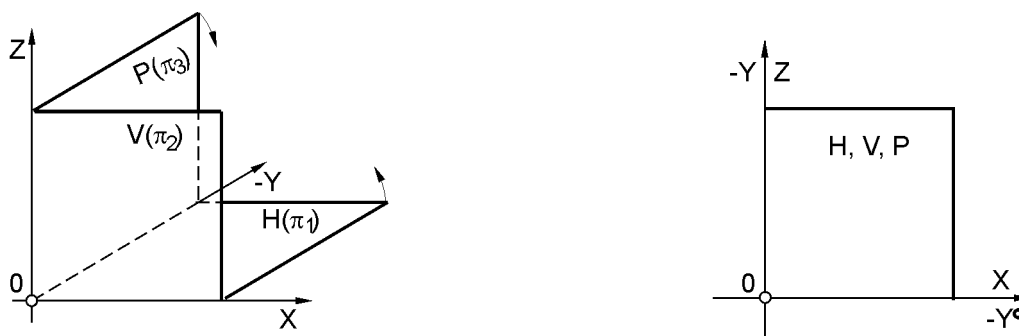
Veličina projekcijskih ravni nije bitna (smatraće se da su projekcijske ravni beskonačne - krajnji obrisi se ne crtaju), te se oktanti nakon obaranja predstavljaju sasvim pojednostavljeno, samo sa osama, kao na sl. 1.12. Pozitivno usmereni delovi osa su u pravcu strelica, a negativni na suprotnim stranama od koordinatnog početka 0, što važi i za  $Y^\circ$ .

Predmet crtanja se postavlja u neki od osam oktanata. Crtež je, uglavnom, najpregledniji kada je predmet u I oktantu (sl. 1.13), međutim može se postaviti i u bilo koji od osam oktanata.

Drugi oktant u prostoru i nakon obaranja ravni prikazan je na sl. 1.14. Sve tri projekcijske ravni nakon obaranja nalaze se na istom mestu, poklapaju se.



Sl. 1.13: Prvi oktant u prostoru i nakon obaranja ravni



Sl. 1.14: Drugi oktant u prostoru i nakon obaranja ravni

## 2. ORTOGONALNE PROJEKCIJE TAČKE

Tačka je elementarni deo prave, površine i tela. Obeležavaće se velikim slovima A, B, C... ili arapskim brojevima 1, 2, 3... Ortogonalne projekcije tačke dobijaju se korišćenjem projekcijskih prava (projekcijskih zraka):  $AA'$ ,  $AA''$ ,  $AA'''$ , koje su upravne (ortogonalne) na projekcijske ravni: H, V i P (sl. 2.1). Tačke prodora (prodori) projekcijskih prava kroz projekcijske ravni daju projekcije tačke i to:

$A'$  - prodor projekcijske prave kroz H ili prva projekcija tačke A,

$A''$  - prodor projekcijske prave kroz V ili druga projekcija tačke A i

$A'''$  - prodor projekcijske prave kroz P ili treća projekcija tačke A.

Oznaka  $A'$  se čita kao "A prim",  $A''$  kao "A sekund" i  $A'''$  kao "A terca". Prva projekcija  $A'$  prave A leži na H ravni, druga  $A''$  na V, a treća  $A'''$  na P ravni.

Na sl. 2.1. prikazane su ortogonalne projekcije tačke u I oktantu. Položaj tačke A u odnosu na projekcijske ravni određen je koordinatama x, y i z, što će se u daljem tekstu pisati kao  $A(x;y;z)$ . Koordinate tačke A predstavljaju:

x - rastojanje tačke A od P ravni,

y - rastojanje tačke A od V ravni i

z - rastojanje tačke A od H ravni.

Prvu projekciju  $A'$  tačke A, određuju koordinate x, y, drugu projekciju  $A''$  x, z i treću projekciju  $A'''$  y, z ili kratko zapisano:  $A'(x;y)$ ,  $A''(x;z)$  i  $A'''(y;z)$ .

Pri obaranju projekcijskih ravni obaraju se i projekcije tačke A kao i projekcijski zraci, tako da je tačka predstavljena sa svoje tri projekcije  $A'$ ,  $A''$  i  $A'''$  (sl. 2.1). Deo projekcijskog zraka, od tačke do njene projekcije, naziva se spona, i to:

$A'A''$  - vertikalna spona,

$A''A'''$  - horizontalna spona i

$A'A'''$  - izlomljena spona.

Može se zaključiti da se:

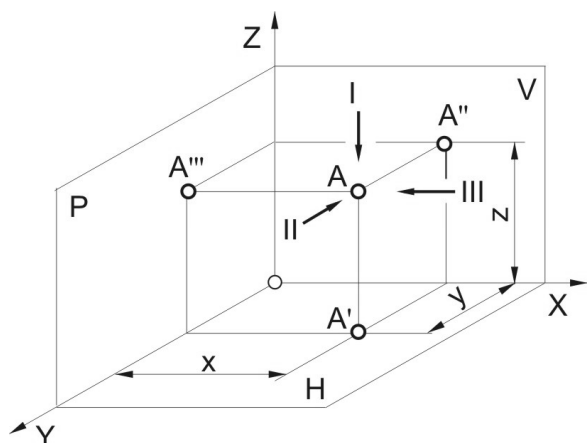
$A'$  i  $A''$  nalaze uvek na zajedničkoj vertikalnoj sponi,

$A''$  i  $A'''$  nalaze uvek na zajedničkoj horizontalnoj sponi i

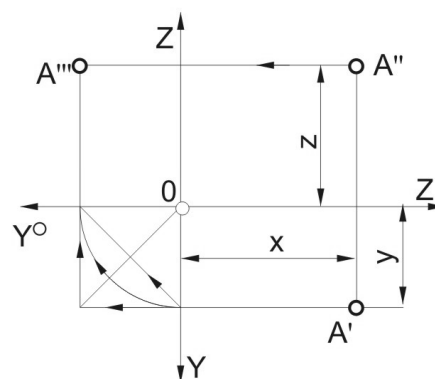
$A'$  i  $A'''$  nalaze uvek na zajedničkoj izlomljenoj sponi.

Treća projekcija  $A'''$  dobija se na osnovu poznatih dveju projekcija  $A'$  i  $A''$  pošto je određena koordinatama y i z, koje su već sadržane u tim projekcijama. Na jedan od prikazanih načina, na sl. 2.2 (šestarom, ili trouglom pod uglom od  $45^\circ$ ) prenese se koordinata y na osu  $Y^\circ$  na levu stranu pošto je y koordinata u I oktantu pozitivno usmerena. U preseku izlomljene spone iz prve projekcije  $A'$  (u pravcu strelice) i horizontalne spone iz druge projekcije  $A''$ , dobija se treća projekcija  $A'''$ .

Za jednoznačno definisanje tačke u prostoru dovoljne su bilo koje dve projekcije. Koristi se prva i druga projekcija koje se nazivaju par ortogonalnih projekcija ili pogleda.

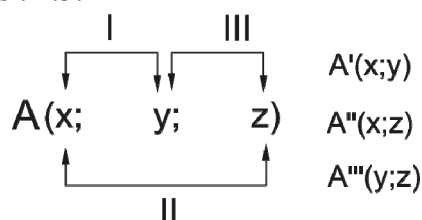


Sl. 2.1: Ortogonalne projekcije tačke  $A$  u I oktantu u prostoru



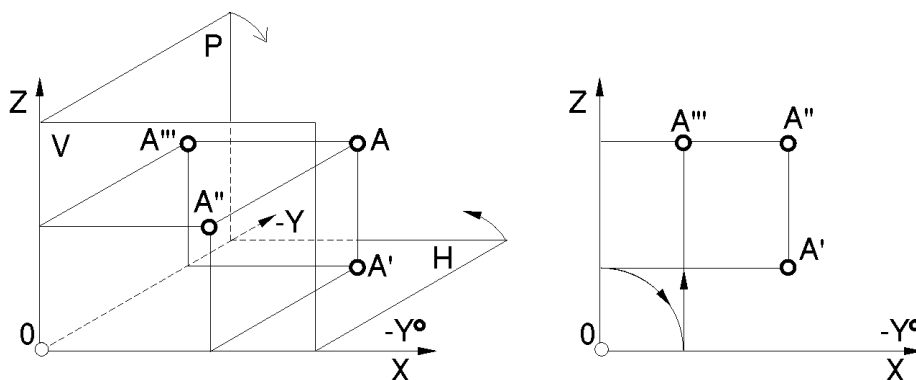
Sl. 2.2: Ortogonalne projekcije tačke  $A$  u I oktantu nakon obaranja projekcijskih ravni

Šematski prikaz dobijanja ortogonalnih projekcija tačke, bez obzira na to u kojem se oktantu nalazi, dat je na sl. 2.3.



Sl. 2.3: Šematski prikaz dobijanja ortogonalnih projekcija tačke

Kao što je već rečeno tačka se može postaviti u bilo koji od osam oktanta. Na sl. 2.4. prikazana je tačka  $A$  u II oktantu. Koordinate  $x$  i  $z$  su pozitivne, a koordinata  $y$  je negativna, odnosno šematski dato  $A(x; -y; z)$ . Nakon obaranja projekcijskih ravni sve tri projekcije tačke  $A$  su u istom kvadrantu, gornjem desnom. Pošto je  $y$  koordinata negativnog predznaka obara se na desnu stranu u pravcu  $-Y^\circ$ , što pokazuje strelica  $i$  u preseku ove izlomljene spona iz  $A'$  i horizontalne iz  $A''$  dobija se treća projekcija  $A'''$  tačke  $A$ .



Sl. 2.4: Ortogonalne projekcije tačke  $A$  u II oktantu u prostoru i nakon obaranja ravni

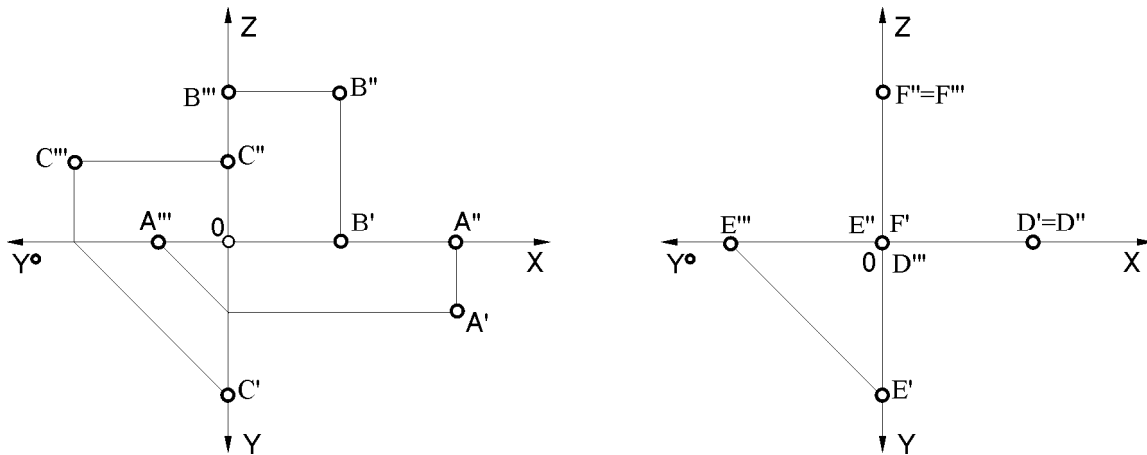
Prema šemi sa sl. 2.3 na osnovu poznatih vrednosti i predznaka koordinata  $x$ ,  $y$  i  $z$  po istom principu bi se odredile projekcije tačaka i u ostalim oktantima. Koordinate tačke  $A$  u svih osam oktanta su:

$$\begin{array}{llll} \text{I} - A(x; y; z) & \text{II} - A(x; -y; z) & \text{III} - A(x; -y; -z) & \text{IV} - A(x; y; -z) \\ \text{V} - A(-x; y; z) & \text{VI} - A(-x; -y; z) & \text{VII} - A(-x; -y; -z) & \text{VIII} - A(-x; y; -z). \end{array}$$

## 2.1. SPECIJALNI POLOŽAJI TAČKE

Tačka je u specijalnom položaju u prostoru ako se nalazi na nekoj od projekcijskih ravni ili na nekoj od osa. Neki od specijalnih položaja tačke dati su na sl. 2.5 i to tačkica:

- A na H (leži na H) između I i IV oktanta,
- B na V (leži na V) između I i II oktanta,
- C na P (leži na P) između I i V oktanta,
- D na X osi između I, II, III i IV oktanta,
- E na Y osi između I, IV, V i VIII oktanta i
- F na Z osi između I, II, V i VI oktanta.



Sl. 2.5: Specijalni položaji tačkica

### Zadatak 2.1.

a) 0(7;8). Crtati na A4 formatu. Položaj koordinatnog početka  $0(x;y)$  računati od gornjeg levog ugla papira i to  $x$  horizontalno ( $x=7$  cm), a  $y$  vertikalno na dole ( $y=8$  cm). Ovo važi za sve buduće primere i zadatke. Ugao  $Y$  ose je  $30^\circ$  bez srkaćenja (1:1). Veličina ravni u oktantu je 4,5 cm po svakoj osi. Nacrtati tri ortogonalne projekcije zadatih tačkica u prostoru i napisati u kojem se oktantu nalaze:  $A(-2;1;1)$ ;  $B(3;-2;-2)$ ;  $C(-3;2;-3)$ ;  $D(-0,5;-2,5;3)$ ;  $E$  je 2,5 cm desno od  $P$  ravni, 2,5 cm ispred  $V$  ravni i 3,5 cm ispod  $H$  ravni;  $F$  je 3,5 cm levo od  $P$  ravni, 3,5 cm iza  $V$  ravni i 1,5 cm ispod  $H$  ravni;  $G$  je na  $V$  ravni 1 cm desno od  $P$  ravni i 1,5 cm iznad  $H$  ravni; tačka  $H$  je na  $Z$  osi 3,5 cm iznad  $H$ ; tačka  $I$  je na  $P$  ravni 3 cm iza  $V$  ravni i 4 cm iznad  $H$  ravni i tačka  $J$  je na  $H$  ravni 4 cm levo od  $P$  ravni i 1,5 cm ispred  $V$  ravni.

b) 0(7;20). Za tačke iz prethodnog zadatka nacrtati tri ortogonalne projekcije nakon obaranja projekcijskih ravni.

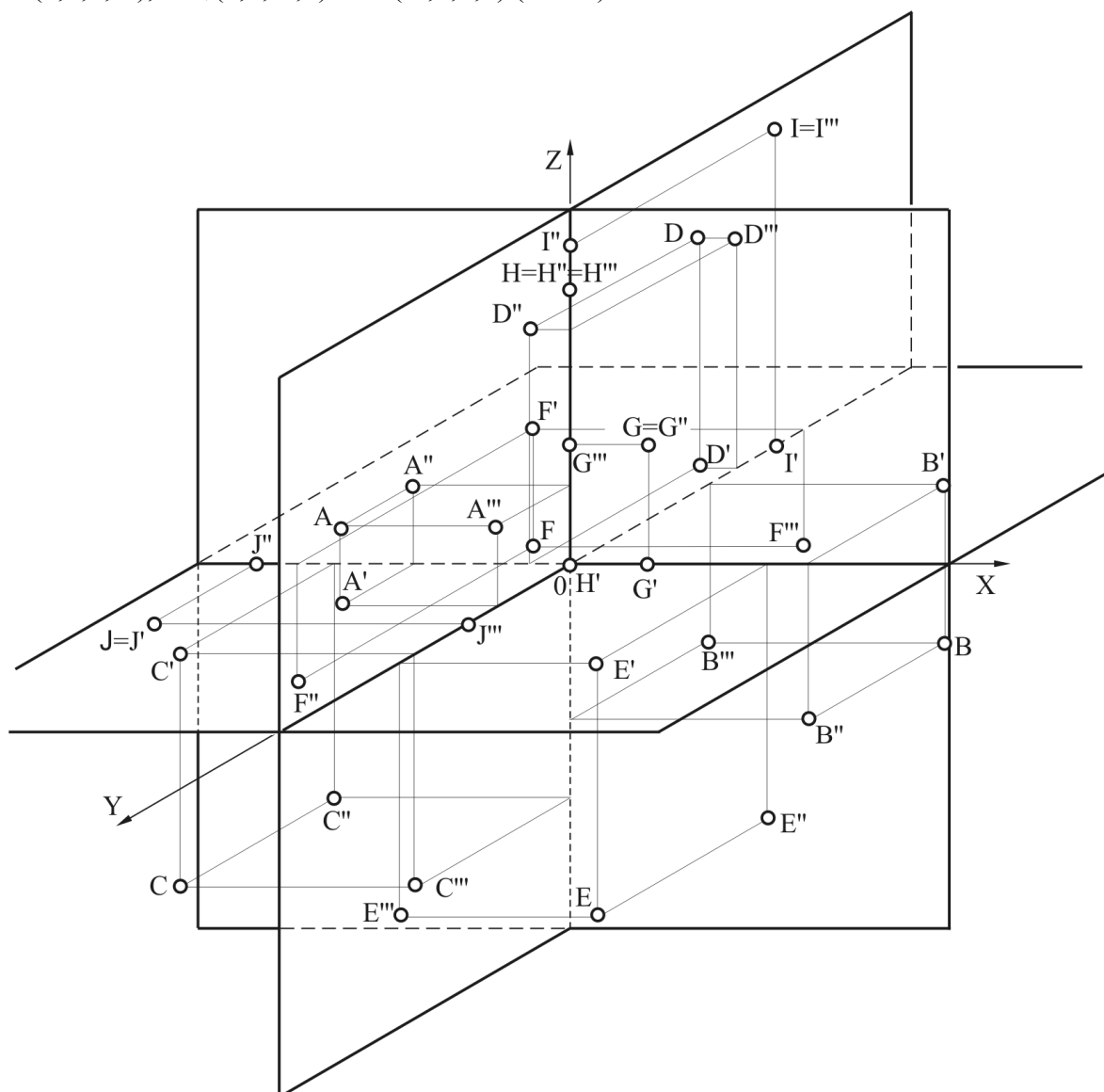
Tačka  $A$  je u  $V$ ,  $B$  u  $III$ ,  $C$  u  $VIII$  i tačka  $D$  u  $VI$  oktantu (sl. 2.6), što se zaključuje na osnovu zadatih koordinata. Pošto je tačka  $E$  2,5 cm desno od  $P$  ravni znači koordinata  $x=2,5$  cm; ispred  $V$  ravni je 2,5 cm znači da je koordinata  $y=2,5$  cm; ispod  $H$  ravni je 3,5 cm što znači da je koordinata  $z=-3,5$  cm. Znači da je tačka  $E$  definisana koordinatama  $E(2,5;2,5;-3,5)$  i nalazi se u  $IV$  oktantu. Na isti način dolazi se do koordinata ostalih tačkica. Tačka  $F$  je određena sa  $F(-3,5;-3,5;-1,5)$  i nalazi se u  $VII$  oktantu. Tačka  $G$  je na  $V$  ravni između  $I$  i  $II$  oktanta pošto ima koordinate  $G(1;0;1,5)$ . Tačka  $H$  sa koordinatama  $H(0;0;3,5)$  je na  $z$  osi između  $I$ ,  $II$ ,  $V$  i  $VI$  oktanta. Tačka  $I$  je na  $P$  ravni između  $II$  i  $VI$  oktanta pošto ima koordinate  $I(0;-3;4)$ . Tačka  $J$  sa koordinatama  $J(-4;1,5;0)$  je na  $H$  ravni između  $V$  i  $VIII$  oktanta.

Projekcije zadatih tačkica nakon obaranja prikazane su na sl. 2.7.

**Zadatak 2.2.**

0(6;6). Data je tačka  $A(1,5;2;1)$ . Nacrtati sve tri projekcije tačaka koje su joj ortogonalno simetrične u odnosu na H, V i P projekcijsku ravan.

Ortogonalno simetrična tačka  $A_H$  u odnosu na tačku A je ona tačka koja se nalazi na projekcijskom zraku koji prolazi kroz tačku A i koji je upravan (ortogonalan) na ravan H, na suprotnoj strani od tačke A i na istom rastojanju od ravni H. To se isto odnosi i na tačke simetrične u odnosu na ravni V i P. Koordinate ortogonalno simetričnih tačaka su:  $A_H(1,5;2;-1)$ ,  $A_V(1,5;-2;1)$  i  $A_P(-1,5;2;1)$  (sl. 2.8).

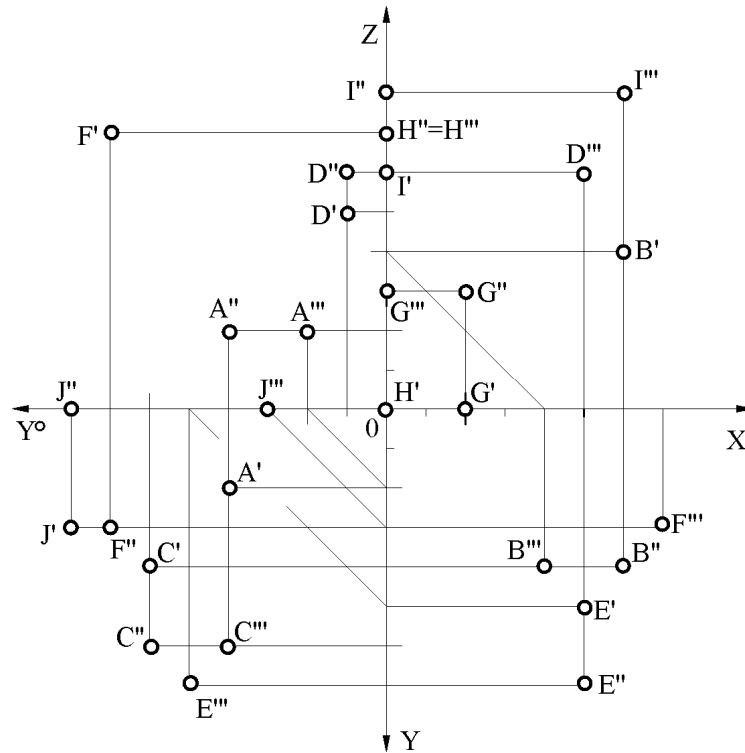


Sl. 2.6: Ortogonalne projekcije tačaka u prostoru (Zadatak 2.1,a.)

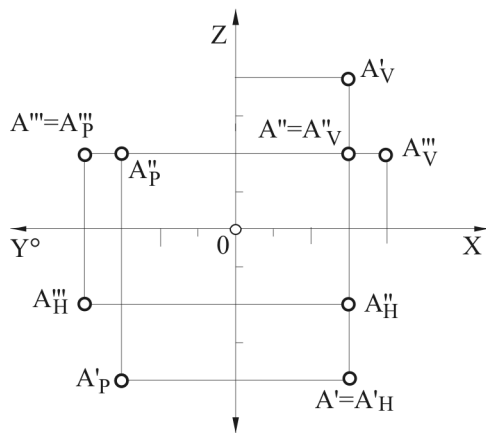
**Zadatak 2.3.**

Nacrtati sve tri projekcije trougla koji je zadat tačkama  $A(0,5;1;1)$ ,  $B(3,5;2,5;0,5)$  i  $C(2,5;0,5;2,5)$  ako se ravan P prvo obori oko Y ose na levu stranu za  $90^\circ$ , te zajedno sa H ravni oko X ose na dole, tako da se poklope sa ravni V.

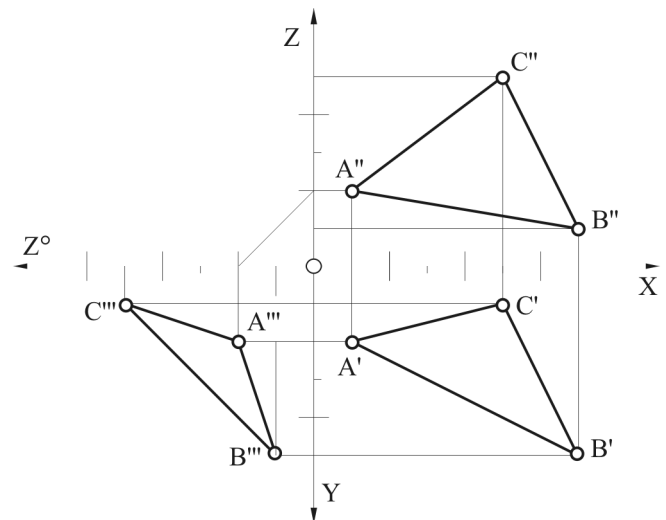
Pri ovakvom “nestandardnom” obaranju ravni P osa Z se “cepa” (a ne osa Y) te jedan deo ostaje sa vertikalnom ravni, a drugi deo  $Z^0$  je u pravcu  $-X$ . Sada se prva i treća projekcija nalaze na horizontalnim sponama, a druga i treća na izlomljenim (sl. 2.9).



Sl. 2.7: Ortogonalne projekcije tačka nakon obaranja projekcijskih ravni (Zadatak 2.1,b.)



Sl. 2.8: Ortogonalno simetrične tačke (Zadatak 2.2.)



Sl. 2.9: Obaranje P na H ravan, te zajedno na V ravan (Zadatak 2.3.)

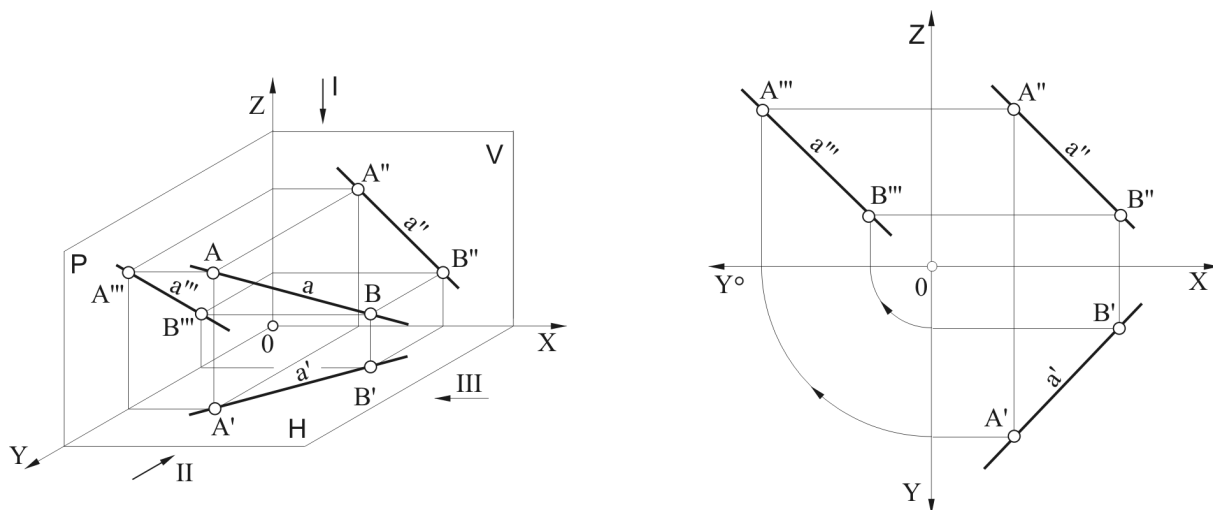
**Zadatak 2.4.**

0(9;9). Nacrtati sve tri ortogonalne projekcije tačaka: A(2;1;1); B(3,5;-1;-2,5); C(5;-3;4); D koja je u IV oktantu 2 cm udaljena od P ravni, 2 cm od V ravni i 2 cm od H ravni; E koja je u V oktantu 2 cm udaljena od H ravni, 1 cm od V ravni i 2 cm od P ravni; G koja je 5 cm levo od P ravni, 1,5 cm iza V ravni i 4,5 cm iznad H ravni; I koja je 2 cm ispod H ravni, 4,5 cm iza V ravni i 6,5 cm levo od P ravni; J koja je 3 cm ispod H ravni, 1 cm ispred V ravni i 6 cm levo do P ravni; K koja je na H ravni, 2 cm ispred V ravni i 2 cm levo od P ravni; L koja je na V ravni, 3,5 cm iznad H ravni i 3,5 cm desno od P ravni; M koja je na P ravni, 5 cm iza V ravni i 6 cm iznad H ravni; N koja je na X osi 4 cm levo od P ravni; R koja je na Y osi 4,5 cm ispred V ravni i S koja je na Z osi na 4 cm iznad H ravni.



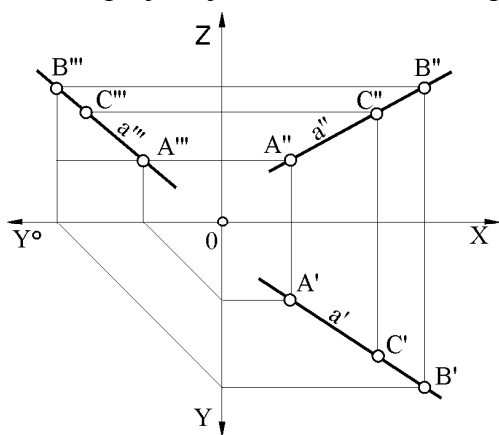
### 3. ORTOGONALNE PROJEKCIJE PRAVE (DUŽI)

Pravu određuju niz uzastopnih tačaka na istom pravcu. Potpuno je određena dvema tačkama. Prava se označava malim slovima latinice:  $a, b, c, \dots$ . Ako je prava  $a$  data dvema tačkama  $A$  i  $B$  kroz koje prolazi, tada će se projekcije prave  $a$  nalaziti na pravcu definisanom odgovarajućim istoimenim projekcijama tačaka  $A$  i  $B$ , odnosno  $a'$  je na  $A'B'$ ,  $a''$  je na  $A''B''$  i  $a'''$  je na  $A'''B'''$  (sl. 3.1). Prava je jednoznačno određena dvema projekcijama (kao i tačka) te se koristi prva i druga, a treća ređe.

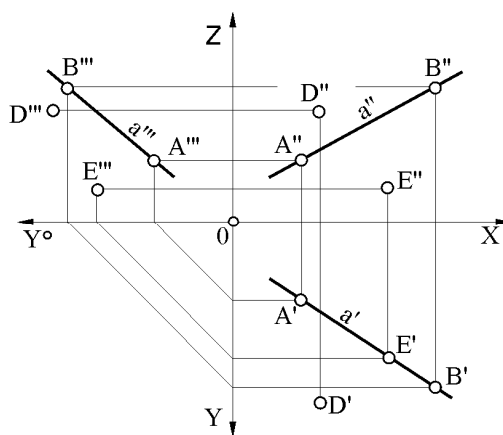


Sl. 3.1: Projekcije prave  $a$  zadate tačkama  $AB$  u prostoru i nakon obaranja projekcijskih ravni

Ako se tačka  $C$  nalazi na pravoj  $a$ , tada se sve tri projekcije tačke  $C$  nalaze na odgovarajućim projekcijama prave  $a$ , odnosno  $C'$  je na  $a'$ ,  $C''$  je na  $a''$  i  $C'''$  je na  $a'''$  (sl. 3.2). Tačke  $E$  i  $D$  sa sl. 3.3 ne leže na pravoj  $a$ , bez obzira na to što se prva projekcija  $E'$  tačke  $E$  nalazi na  $a'$ , jer  $E''$  ne leži na  $a''$  i  $E'''$  ne leži na  $a'''$ . Da bi tačka pripadala pravoj potrebno je da sve tri projekcije tačke leže na trima projekcijama prave.



Sl. 3.2: Tačka  $C$  na pravoj  $a$

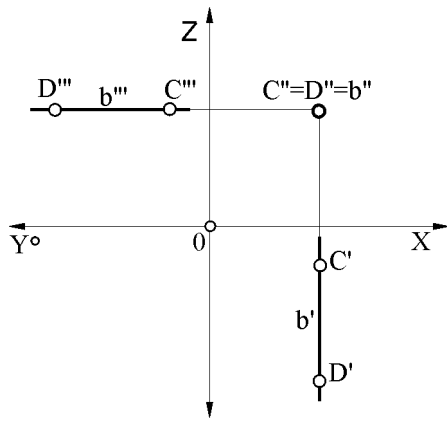


Sl. 3.3: Tačke  $D$  i  $E$  ne leže na pravoj  $a$

#### 3.1. SPECIJALNI POLOŽAJI PRAVE

Prava je u specijalnom položaju: ako se nalazi na nekoj od projekcijskih ravni, ako je sa nekom od njih paralelna, ako je upravna na projekcijsku ravan ili ako leži na nekoj od osa.

Na sl. 3.4 prikazana je prava  $b$  koja prolazi kroz tačke  $C$  i  $D$ , a paralelna je sa ravnima  $H$  i  $P$ . Ako je prava paralelna sa dvema, tada mora biti upravna na treću projekcijsku ravan. U ovom slučaju prava  $b$  je upravna na  $V$ , pošto je paralelna sa  $H$  i  $P$  ravnima.

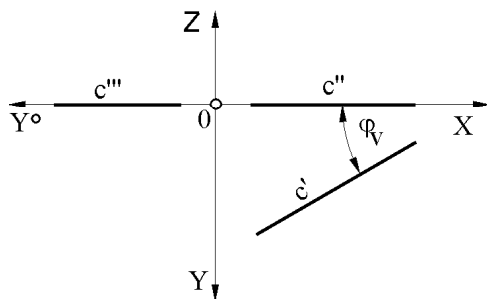


Sl. 3.4: Specijalni položaj prave  $b$ :  
 $b \parallel$  sa  $H$  i  $P$ ;  $b \perp V$

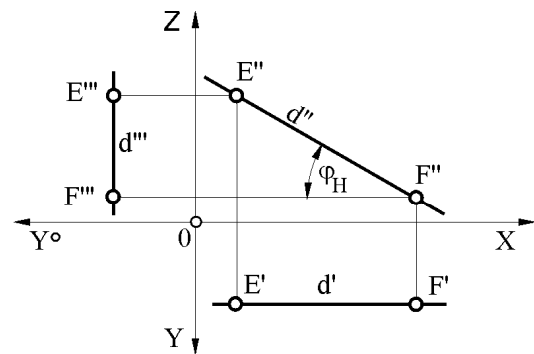
Kako je prava  $b$  paralelna sa  $H$  i  $P$  ravnima u prvoj i trećoj projekciji se vidi u pravoj veličini, a kako je upravna na  $V$  ravan, u drugoj projekciji se projicira kao tačka.

Kada prava  $c$  leži na horizontalnici (sl. 3.5), tada  $c''$  leži na osi  $X$ , a  $c'''$  na osi  $Y^\circ$ . Ugao između prve projekcije  $c'$  i  $X$  ose ( $\varphi_V$ ) predstavlja pravu veličinu ugla koji prava  $c$  zaklapa sa  $V$  ravni. Prava veličina prave  $c$  je na  $c'$ .

Kada je prava  $d$  paralelna sa vertikalnicom, tada je  $d'$  paralelna sa  $X$  osom, a  $d'''$  paralelna sa  $Z$  osom (sl. 3.6). Pravu  $d$  se projicira u pravoj veličini u drugoj projekciji. Pravu vrednost ugla  $\varphi_H$  prave  $d$  prema horizontalnici daju  $d''$  i  $X$  osa.



Sl. 3.5: Specijalni položaj prave  $c$ : leži na  $H$ , a sa  $V$  zaklapa ugao  $\varphi_V$



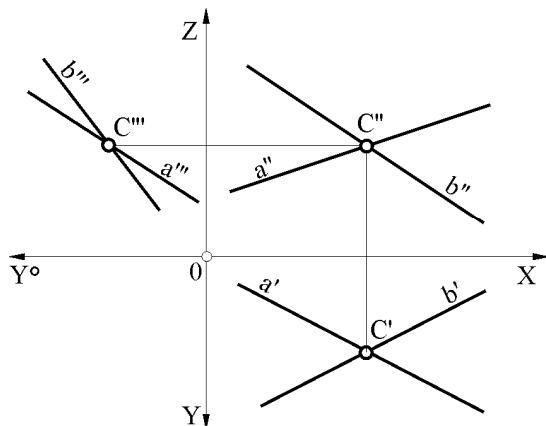
Sl. 3.6: Specijalni položaj prave  $d$ :  $\parallel$  sa  $V$ , a sa  $H$  zaklapa ugao od  $\varphi_H$

### 3.2. UZAJAMNI ODNOS DVE PRAVE

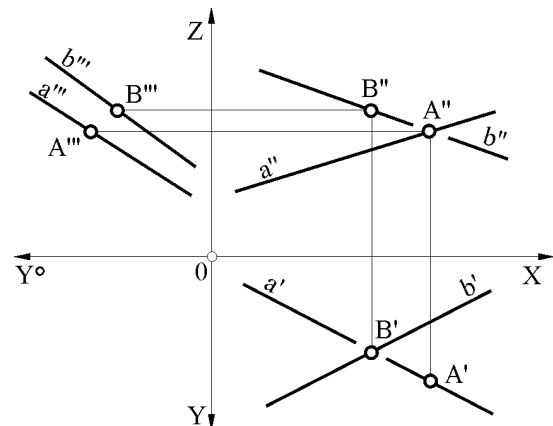
Dve prave u prostoru mogu da se seku, da se mimoilaze ili da su paralelne.

Ako se prave  $a$  i  $b$  seku (nazivaju se i presečne prave), tada se tačka sečenja  $C$  u sve tri projekcije  $C'$ ,  $C''$  i  $C'''$  poklapaju sa tačkom preseka projekcija prava i leže na istoj vertikalnoj, horizontalnoj i izlomljenoj sponi (sl. 3.7). Drugim rečima tačke sečenja prvih i drugih projekcija prava leže na istoj vertikalnoj sponi, a tačke sečenja drugih i trećih projekcija prava leže na istoj horizontalnoj sponi.

Dve prave se mimoilaze ako nemaju zajedničku presečnu tačku. Prave  $a$  i  $b$  sa sl. 3.8 se mimoilaze pošto se tačke preseka projekcija prava (tačke  $A'A''$  i  $B'B''$ ) ne nalaze na istoj vertikalnoj sponi.



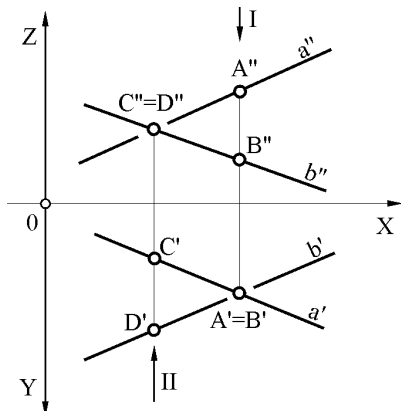
Sl. 3.7: Prave  $a$  i  $b$  se seku u tački  $C$



Sl. 3.8: Prave  $a$  i  $b$  se mimoilaze

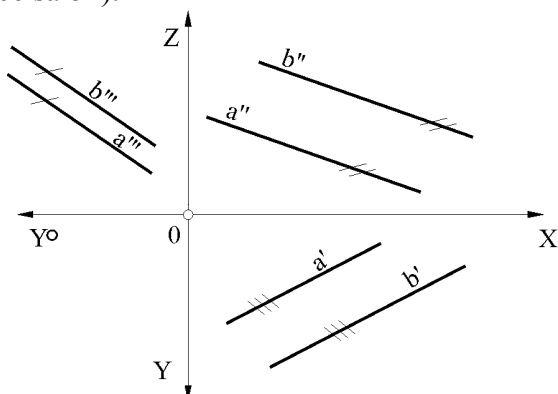
Kada se prave mimoilaze, jedna drugu zaklanjaju, pri čemu se jedna od njih ne vidi. Vidljivost mimoilaznih prava određuje se za svaku projekciju posebno.

Vidljivost u prvoj projekciji određuje se posmatranjem druge i obrnuto. Prave  $a$  i  $b$  u prvoj projekciji se seku u tački  $A'=B'$  (sl. 3.9). Prateći sponu do druge projekcije vidi se da je tačka  $A''$  koja je na pravoj  $a$  iznad tačke  $B''$  koja je na pravoj  $b$ . Kako se prva projekcija dobija posmatrajući prave odozgo (u pravcu strelice I), vidi se tačka  $A''$ , pošto je bliža posmatraču, a zaklonjena je tačka  $B''$ . S obzirom na to da je tačka  $A$  na pravoj  $a$ , tada će se  $a'$  videti, a  $b'$  neće (na tom mestu je  $b'$  „prekunjuta”). Vidljivost prava u drugoj projekciji određuje se analiziranjem položaja tačaka  $C$  i  $D$  zato što se poklapaju u drugoj projekciji. Druga projekcija se dobija kada se prave posmatraju spreda (u pravcu strelice II). Tačka  $D'$ , koja je na pravoj  $b'$ , bliža je posmatraču, te se u drugoj projekciji vidi, odnosno vidi se  $b''$ , dok se  $a''$  i  $C''$  ne vide (na tom mestu je  $a''$  „prekinuta”).

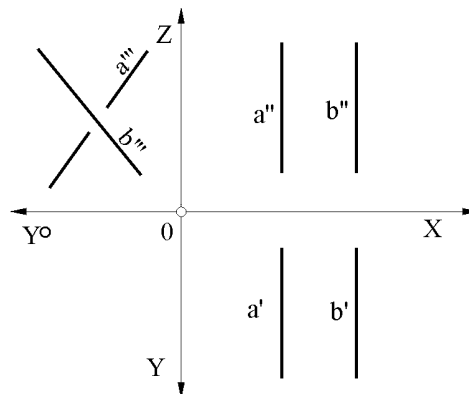


Sl. 3.9: Princip određivanja vidljivosti mimoilaznih prava

Dve prave su paralelne ako su im sve tri projekcije međusobno paralelne (sl. 3.10). Prave  $a$  i  $b$  sa sl. 3.11 nisu paralelne pošto im nisu sve tri projekcije međusobno paralelne ( $a'''$  se seče sa  $b'''$ ).



Sl. 3.10: Paralelne prave



Sl. 3.11: Prave  $a$  i  $b$  nisu paralelne

### 3.3. TAČKA NA PRAVOJ

Ako se tačka nalazi na pravoj tada se njene projekcije nalaze na projekcijama prave. Na sl. 3.8 tačka  $B$  se nalazi na pravoj  $b$ , zato što se  $B'$  nalazi na  $b'$ ,  $B''$  na  $b''$  i  $B'''$  na  $b'''$ . Tačka  $A$  sa iste slike pripada pravoj  $a$ , dok ne pripada pravoj  $b$  iako se  $A''$  nalazi na  $b''$ , pošto se  $A'$  i  $A'''$  ne nalaze na  $b'$  i  $b'''$ .

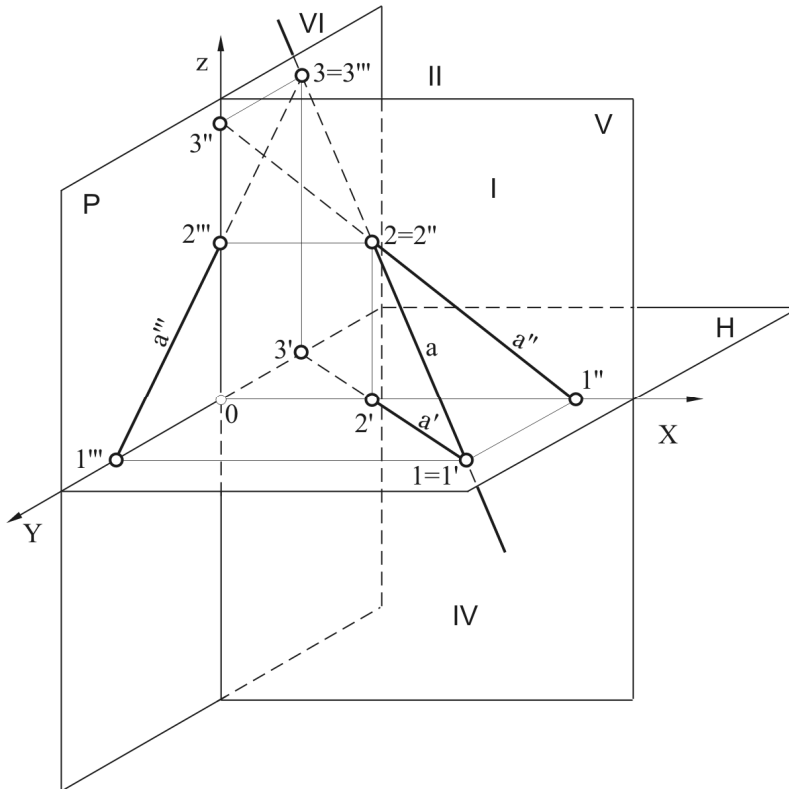
### 3.4. PRODORI PRAVE KROZ PROJEKCIJSKE RAVNI

Prava u proizvoljnom položaju u prostoru prodire (probija) sve tri projekcijske ravni  $H$ ,  $V$  i  $P$ . Tamo gde prava probija ravan  $H$  dobija se tačka prodora kroz  $H$  ili prvi prodor i obeležava se brojem 1. Gde prava probija  $V$  ravan dobija se drugi prodor i obeležava se brojem 2, a gde probija ravan  $P$  dobija se treći prodor i obeležava brojem 3. Tačke prodora (prodori) mogu se i drugačije obeležavati.

Prodor prave  $a$  kroz projekcijske ravni u prostoru prikazan je na sl. 3.12. Prodori se mogu definisati i kao tačke gde se seku prava i njene projekcije. Tamo gde se seku prava i njena prva projekcija dobija se prvi prodor, gde se seku prava i druga projekcija daju drugi prodor i gde se seku prava i treća projekcija daju treći prodor. Svaki prodor određen je sa svoje tri

projekcije, odnosno prvi 1 sa  $1'$ ;  $1''$ ;  $1'''$ , drugi  $2(2'; 2''; 2''')$  i treći  $3(3'; 3''; 3''')$ . Prvi prodor (1) leži na H, drugi (2) na V i treći (3) na P ravni. Tačka prvog prodora (njen položaj u prostoru) poklapa se sa prvom projekcijom prvog prodora. Drugi prodor se poklapa sa drugom projekcijom drugog prodora, a treći prodor se poklapa sa trećom projekcijom trećeg prodora. Prethodno rečeno o prodoru prave kroz projekcijske ravni jeste:

- prvi prodor ( $1=1'$ ) leži na ravni H, te je  $1''$  na X osi a  $1'''$  na Y osi;
- drugi prodor ( $2=2''$ ) leži na ravni V, te je  $2'$  na X osi a  $2'''$  na Z osi i
- treći prodor ( $3=3'''$ ) leži na P, te je  $3'$  na Y osi a  $3''$  na Z osi.

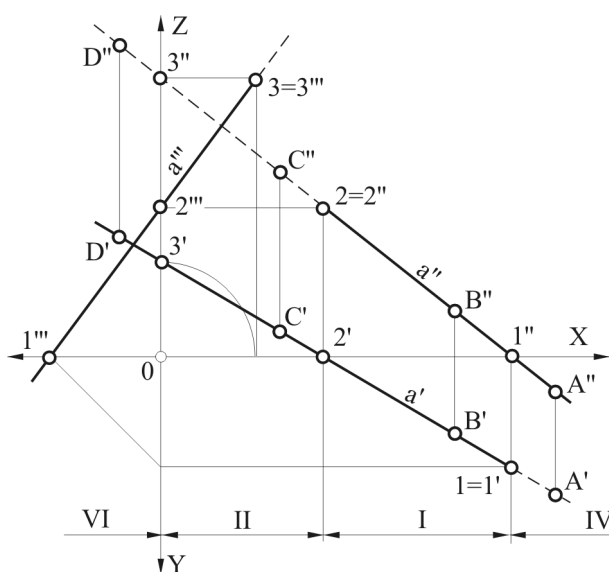


Sl. 3.12: Prodor prave a kroz ravni H, V i P u prostoru

Projekcije prodora leže na odgovarajućim projekcijama prave, odnosno:  
 $1', 2', 3'$  je na  $a'$ ;  
 $1'', 2'', 3''$  je na  $a''$  i  
 $1''', 2''', 3'''$  je na  $a'''$ .

Tačke prodora definišu položaj prave u prostoru i u projekcijama. Znači prvu projekciju  $a'$  određuju prve projekcije sva tri prodora, drugu projekciju  $a''$  druge projekcije sva tri prodora i treću projekciju  $a'''$  treće projekcije sva tri prodora.

Ako se projekcije prave shvate kao senke prave na projekcijske ravni, tada se prodori nalaze na mestima gde se prava spaja sa svojim senkama na H, V i P projekcijskim ravnima.



Sl. 3.13: Prodor prave a kroz ravni H, V i P nakon obaranja projekcijskih ravni

Iz prethodne analize proizilaze pravila na osnovu kojih se određuju prodori prave kroz projekcijske ravni:

- **Gde prva projekcija prave a seče X osu dobija se prva projekcija drugog prodora;**

- **Gde druga projekcija prave a seče X osu dobija se druga projekcija prvog prodora;**

- **Gde prva projekcija prave a seče Y osu dobija se prva projekcija trećeg prodora i**

- **Gde druga projekcija prave a seče Z osu dobija se druga projekcija trećeg prodora.**

Prodor prave a kroz projekcijske ravni, nakon obaranja (na ortogonalnim projekcijama) dat je na sl. 3.13.

### 3.4.1. Vidljivost projekcija prave

Vidljivost prave nacrtane u prostoru (sl. 3.12) određuje se na osnovu toga da se posmatrač nalazi u I oktantu. Samo deo prave koji se nalazi u I oktantu se vidi, dok se ostali deo ne vidi.

Vidljivost prave nacrtane u ortogonalnim projekcijama određuje posebno za prvu, posebno za drugu i posebno za treću projekciju (sl. 3. 13).

Pri tome se, takođe, posmatrač nalazi u I oktantu. Deo prave iznad H ravni se vidi, ispod se ne vidi; deo prave ispred V ravni se vidi, iza se ne vidi i deo prave desno od P ravni se vidi, levo se ne vidi. Granične tačke vidljivosti su prodori  $1=1'$ ,  $2=2''$  i  $3=3'''$  kroz H, V i P ravni.

Deo prave iznad ravni H u prvoj projekciji se vidi sve do prvog prodora  $1'$ ; deo prave ispred ravni V u drugoj projekciji se vidi sve do drugog prodora  $2''$ , i deo prave desno od ravni P u trećoj projekciji se vidi sve do trećeg prodora  $3'''$ .

Prava se u prvoj projekciji vidi kada prolazi kroz gornje oktante (tj. iznad H): I, II, V i VI, a ne vidi se kada prolazi kroz donje oktante (tj. ispod H): III, IV, VII i VIII. Granica vidljivosti je prvi prodor  $1=1'$ . Prava se u drugoj projekciji vidi kada prolazi kroz prednje oktante (tj. ispred V): I, IV, V, i VIII, a ne vidi se kada prolazi kroz zadnje oktante: II, III, VI i VII. Granica vidljivosti je drugi prodor  $2=2''$ . U trećoj projekciji prava je vidljiva kada prolazi kroz desne oktante (desno od P) I, II, III i IV, a nevidljiva je kada prolazi kroz leve oktante V, VI, VII i VIII. Granica vidljivosti je treći prodor  $3=3'''$ . Vidljivi deo prave se crta punom, a nevidljivi isprekidanom tanjom linijom (crta-crta-crta).

Određivanjem položaja tačaka prodora  $1'$ ,  $2''$  i  $3'''$  u oktantima iz prethodnog primera (sl. 3.13) određena je vidljivost. Vidljivost prave u projekcijama može se odrediti i tako što se prethodno odrede oktanti kroz koje prolazi.

### 3.4.2. Određivanje oktanata kroz koje prava prolazi

Da bi se odredili oktanti kroz koje prava prolazi treba analizirati položaj projekcija prave u odnosu na oktante i redosled prodora kroz H, V i P ravni. Ovi parametri ( $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$ ,  $1'$ ,  $2''$  i  $3'''$ ) posmatraju se sa desne na levu stranu ili obrnuto, svejedno (sl. 3.13). Da bi se lakše odredili oktanti kroz koje prava prolazi mogu se dodati neke proizvoljne tačke pre, između i posle prodora kroz projekcijske ravni (tačke A, B, C i D).

Tačka A se nalazi na pravoj a pre prodora koji se prvo nalazi gledano sa desne na levu stranu. U ovom primeru je to prvi prodor  $1=1'$ . Prema predznacima koordinata tačke  $A(x;y;-z)$  zaključuje se da se tačka A nalazi u IV oktantu, što znači da prava a dolazi iz tog oktanta. Tačka  $B(x;y;z)$  se nalazi u prvom oktantu, tačka  $C(x;-y;z)$  u drugom i tačka  $D(-x;-y;z)$  i šestom oktantu.

Takođe, prema položaju projekcija  $a'$ ,  $a''$  i  $a'''$ , gledano sa desna na levo do prvog prodora  $1=1'$ , zaključuje se da se prava a, na ovom delu, nalazi u IV oktantu odakle probija H u prvom prodoru u tački  $1'$ . Prema položaju, tačaka  $1'$ ,  $1''$  i  $1'''$  vidi se da se prvi prodor nalazi na H između I i IV oktanta, što potvrđuje prethodni zaključak da prava dolazi iz IV oktanta, probija H ravan u  $1'$  i ulazi u I oktant.

Prava se u I oktantu nalazi sve do drugog prodora ( $2=2''$ ), gde probija ravan V. Položaj tačaka  $2'$ ,  $2''$  i  $2'''$  pokazuje da se drugi prodor nalazi između I i II oktanta, što znači da prava iz I ulazi u II oktant. Prava se nalazu u II oktantu sve do trećeg prodora, do tačke  $3=3'''$ . Prema položaju projekcija trećeg prodora  $3'$ ,  $3''$  i  $3'''$  zaključuje se da se prava nalazi na P ravni između II i VI oktanta, što znači da iz II ulazi u VI oktant. Prava a prolazi kroz IV, I, II i VI oktant.

Prva projekcija prave  $a'$  iznad  $1'$  vidi se jer je u gornjim oktantima, dok ispod  $1'$  se ne vidi jer je u donjim oktantima. Druga projekcija prave  $a''$  iznad  $2''$  ne vidi se jer je u zadnjim oktanima, dok se ispred  $2''$  (u smeru na dole) vidi, jer u prednjim oktantima. Treća projekcija  $a'''$  desno od  $3'''$  ne vidi se jer je prava u levim oktantima, a levo od  $3'''$  se vidi jer je u desnim oktantima.

**Zadatak 3.1.**

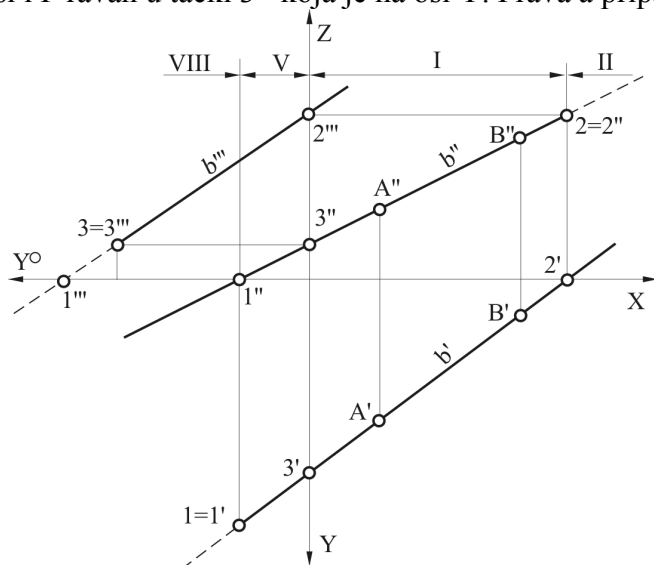
0(5;5). Odrediti prodore, vidljivost i oktante kroz koje prolazi prava  $b$  koja je određena tačkama  $A(1;2;1)$  i  $B(3;0;5;2)$ .

Gde prva projekcija  $b'$  prave  $b$  seče osu  $X$  dobija se prva projekcija drugog prodora,  $2'$ . Druga projekcija ove tačke,  $2''$  je na vertikalnoj sponi i na  $b''$ . Gde druga projekcija  $b''$  prave  $b$  seče osu  $X$  dobija se druga projekcija prvog prodora,  $1''$ . Prva projekcija ove tačke,  $1'$  je na vertikalnoj sponi i na  $b'$ . Gde prva projekcija  $b'$  prave  $b$  seče osu  $Y$  dobija se prva projekcija trećeg prodora,  $3'$ . Druga projekcija ove tačke,  $3''$  je na vertikalnoj sponi i na  $b''$ . Rešenje zadatka je na sl. 3.14.

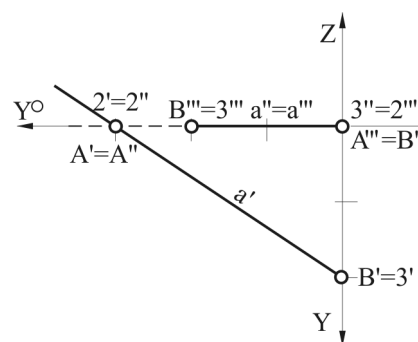
**Zadatak 3.2.**

0(5;3). Odrediti prodore, vidljivost i oktante kroz koje prolazi prava  $a$  koja je određena tačkama  $A(-3;0;0)$  i  $B(0;2;0)$ .

Prava  $a$  leži na  $H$  između  $V$  i  $VIII$  oktanta (sl. 3.15). Probija  $V$  ravan u tački  $2''$  koja je na  $-X$  osi i  $P$  ravan u tački  $3'''$  koja je na osi  $Y$ . Prava  $a$  pripada I, IV, V, VI, VII i VIII oktantu.



Sl. 3.14. Prodori prave  $b$  (Zadatak 3.1)



Sl. 3.15. Prodori prave  $a$  (Zadatak 3.2)

**Zadatak 3.3.**

0(4;3). Odrediti prodore, vidljivost i oktante kroz koje prolazi prava  $c$  koja je određena tačkama  $C(1;1;5;1)$  i  $D(2;5;0;5;1)$ .

Prava  $c$  je paralelna sa  $H$  ravni (pošto je  $c'' \parallel X$  osom,  $c''' \parallel Y$  osom) te nema prvi prodor (sl. 3.16). Kako se nalazi iznad  $H$  ravni, cela je vidljiva u prvoj projekciji. Na osnovu položaja drugog i trećeg prodora, tačaka  $2=2''$  i  $3=3''$  može se zaključiti da prava  $c$  dolazi iz II, ulazi u I i odlazi u V oktant.

**Zadatak 3.4.**

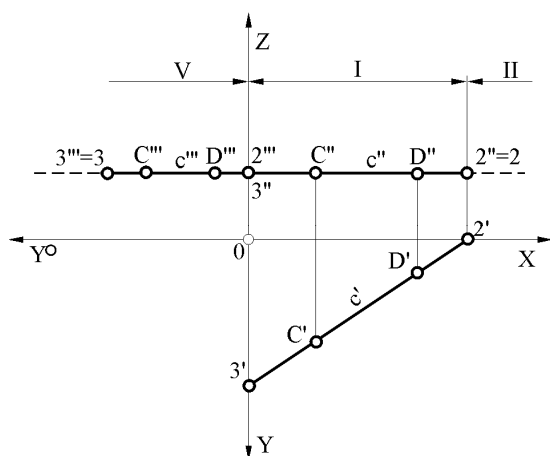
0(3;4). Odrediti prodore, vidljivost i oktante kroz koje prolazi prava  $d$  koja je određena tačkama  $E(1;5;1;1)$  i  $F(1;5;1;2;5)$ .

Iz nacrtanih projekcija se vidi da je prava  $d$  paralelna sa  $V$  i  $P$  ravnima a upravna je na  $H$  ravan, što znači da ima samo prvi prodor, dok drugi i treći nema (sl. 3.17). Prvi prodor,  $(1', 1'', 1''')$  nalazi se na  $H$  ravni između I i IV oktanta. Kako se prava  $d$  u prvoj projekciji projicira kao tačka ne može se naznačiti vidljivost, dok je u drugoj i trećoj projekciji vidljiva po celoj dužini.

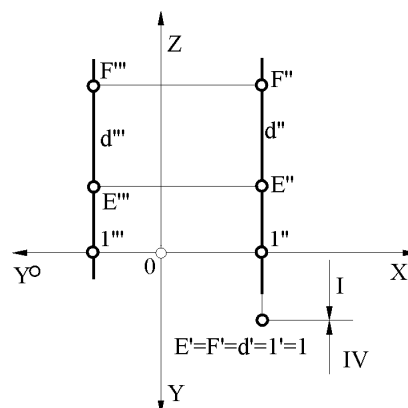
**Zadatak 3.5.**

0(5;7). Nacrtati u paru ortogonalnih projekcija: pravu  $a$  koja prolazi kroz tačku  $A(3;2;1;5)$ , paralelna je sa  $P$  ravni, a sa  $V$  ravni zaklapa ugao od  $45^\circ$ ; pravu  $b$  koja prolazi

kroz tačku  $B(1,5;2;5)$  paralelna je sa  $P$  ravni, a sa  $V$  ravni zaklapa ugao od  $60^\circ$ ; pravu  $c$  koja prolazi kroz tačku  $C(-2;3;?)$  leži na  $H$  ravni i paralelna je sa  $X$  osom; pravu  $d$  koja prolazi kroz tačku  $D(5;4;3,5)$  upravna je na ravan  $P$  i pravu  $e$  koja prolazi kroz tačku  $E(7;2,5;2,5)$  i upravna je na  $V$  ravan.



Sl. 3.16: Prodori prave  $c$  (Zadatak 3.3.)



Sl. 3.17: Prodori prave  $d$  (Zadatak 3.4.)

### Zadatak 3.6.

0(8;6). Nacrtati sve tri projekcije kvadrata  $ABCD$  koji je paralelan sa profilnicom ako je njegova dijagonala  $A(4;4;5)$ ,  $C(4;1,5;-3)$ .

### Zadatak 3.7.

0(3;5). Data je prava  $a$  tačkama  $A(1,5;2;3)$  i  $B(5;1;1,5)$ . Kroz tačku  $C(-1,5;5;2,5)$  nacrtati pravu  $b$  koja je paralelna sa pravom  $a$ .

### Zadatak 3.8.

0(6;6). Nacrtati sve tri projekcije prave  $a$  kroz tačku  $A(2;1,5;2)$  i upravna je na  $P$  ravan i prave  $b$  koja prolazi kroz tačku  $B(5,5;2,5;3)$  i upravna na  $H$  ravan.

### Zadatak 3.9.

0(8;6). Nacrtati sve tri projekcije prave  $c$  kroz tačku  $C(5;1,5;2,5)$  i upravna je na  $V$  ravan i prave  $d$  kroz tačku  $D(3;2;1,5)$  koja je paralelna sa  $H$ , a sa  $V$  ravni zaklapa ugao od  $60^\circ$ .

### Zadatak 3.10.

0(9;8). Nacrtati ortogonalne projekcije sva tri prodora prave  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(-2;6;5)$  i  $B(5;-1;6)$ . Odrediti vidljivost projekcija i oktante kroz koje prava  $a$  prolazi.

### Zadatak 3.11.

0(10;10) Pravu  $a$  iz prethodnog zadatka nacrtati u kosoj projekciji. Odrediti vidljivost prave i njenih projekcija i oktante kroz koje prolazi. Ugao između osa  $-XY=30^\circ$ , skraćenje 3:4. Veličina ravni u oktantu je 7 cm po svakoj osi.

### Zadatak 3.12.

0(5;7). Date su prave  $a$  tačkama  $A(1;2;2)$  i  $B(4;3,5;0,5)$  i  $b$  tačkama  $C(1;-5;-1,5)$  i  $D(4,5;-2;2)$ . Odrediti prodore, oktante kroz koje prolaze i naznačiti vidljivost. Da li se prave seku ili se mimoilaze?

#### 4. ORTOGONALNE PROJEKCIJE RAVNI

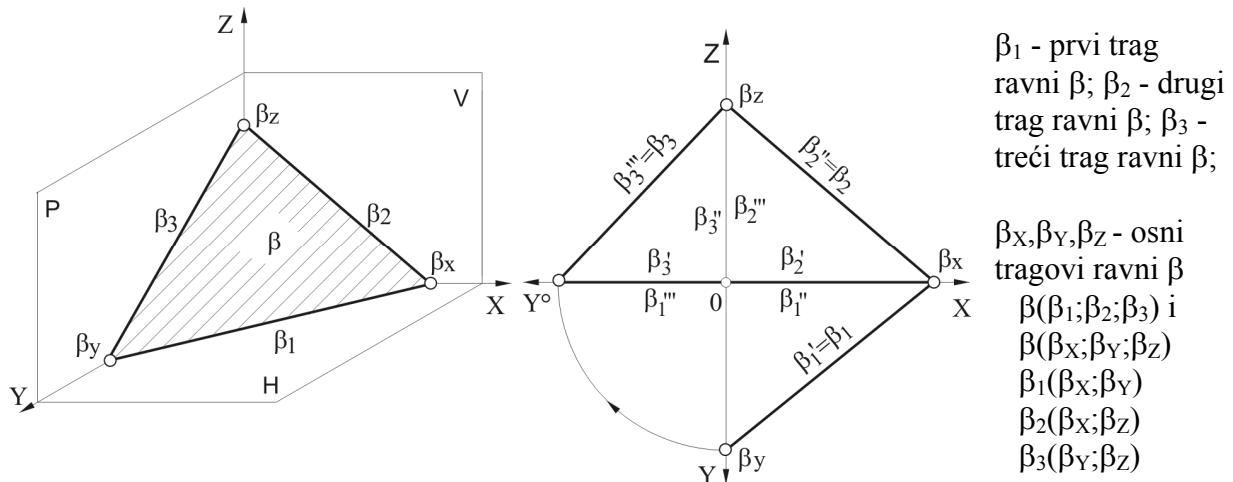
Ravan u prostoru (u odnosu na projekcijske ravni i oktante) može biti u proizvoljnom ili specijalnom položaju.

Ravan određuju: dve prave koje se seku, dve paralelne prave, tri nekolinearne tačke (koje nisu na istom pravcu) i jedna prava i tačka van nje.

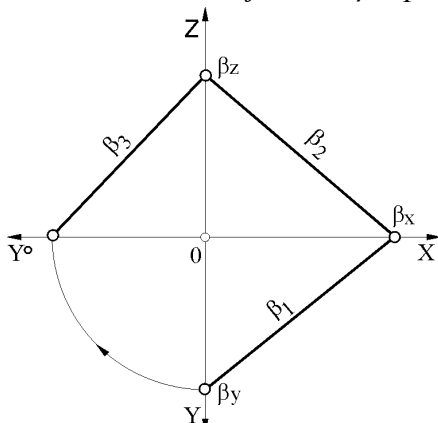
##### 4.1. PROIZVOLJNI POLOŽAJ RAVNI U PROSTORU

Proizvoljna ravan je ona ravan koja zaklapa proizvoljne uglove sa H, V i P ravni. Ravni će se označavati malim grčkim slovima:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ... Ravan seče projekcijske ravni po linijama koje se nazivaju tragovi ravni. Linija po kojoj ravan  $\beta$  seče H ravan naziva se prvi trag i obeležava sa  $\beta_1$ , gde seče V ravan, naziva se drugi trag  $\beta_2$  i gde seče P ravan je treći trag  $\beta_3$ . Znači da je ravan  $\beta$  u prostoru određena sa tri traga  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_3$ . Gde tragovi ravni  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_3$  seku ose X, Y i Z dobijaju se osni tragovi  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  i  $\beta_z$  koji, takođe definišu ravan, odnosno  $\beta(\beta_x; \beta_y; \beta_z)$ . Tragovi ravni su određeni osnim tragovima, odnosno  $\beta_1(\beta_x; \beta_y)$ ,  $\beta_2(\beta_x; \beta_z)$  i  $\beta_3(\beta_y; \beta_z)$  (sl. 4.1).

Obaranjem projekcijskih ravni obaraju se i tragovi ravni kao i osni tragovi. Svaki trag ravni određen je sa tri ortogonalne projekcije. Prvi trag  $\beta_1$  leži na ravni H, te se poklapa sa prvom projekcijom  $\beta_1 = \beta_1'$ . Druga projekcija prvog traga  $\beta_1''$  leži na osi X, a treća projekcija  $\beta_1'''$  na osi Y. Drugi trag  $\beta_2$  leži na V ravni te je  $\beta_2 = \beta_2''$ , prva projekcija drugog traga  $\beta_2'$  leži na osi X, a treća projekcija  $\beta_2'''$  na osi Z. Treći trag leži na ravni P te je  $\beta_3 = \beta_3'''$ , prva projekcija  $\beta_3'$  na osi Y, a druga  $\beta_3''$  na osi Z.



Sl. 4.1: Crtanje ravni  $\beta$  u prostoru i u ortogonalnim projekcijama

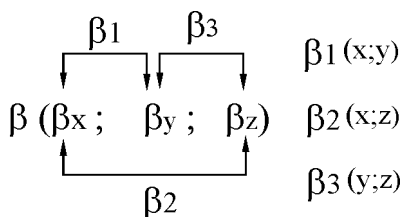


Sl. 4.2: Označavanje ravni  $\beta$  sa tragovima

Označavanje ortogonalnih projekcija ravni se pojednostavljuje, onako kako je dato na sl. 4.2. Označavaju se samo tragovi i osni tragovi, bez njihovih projekcija. Tragovi ravni leže na projekcijskim ravnima:  $\beta_1$  na H,  $\beta_2$  na V i  $\beta_3$  na P ravni, te se odgovarajuće projekcije tragova projiciraju na ose X, Y i Z.

Kako tragovi ravni leže na projekcijskim ravnima sve što se na njima nalazi vidi se u pravoj veličini.

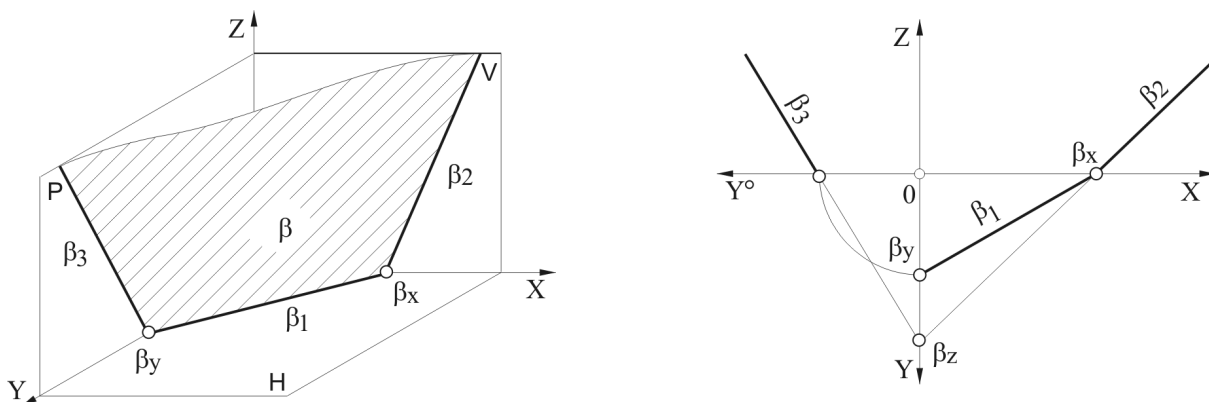




Ravan je definisana analogno, kako je definisana i tačka, koordinatama osnih tragova,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  i  $\beta_z$ , što se može šematski prikazati kao na sl. 4.3.

Sl. 4.3: Šema za određivanje tragova ravni

Tragovi proizvoljnih ravni mogu biti vrlo različito postavljeni u odnosu na prostor. Zbog preglednosti crtanja prvi trag  $\beta_1$  crta se na onom delu koji je na ravni H, drugi trag  $\beta_2$  na delu u ravni V i treći trag  $\beta_3$  na delu koji je na ravni P u I oktantu, što je prikazano debelim linijama na sl. 4.4 desno. Kao što su tačka i prava potpuno određene sa dve projekcije (sa parom pogleda), tako je i ravan jednoznačno definisana sa dva traga pošto sadrže sva tri osna traga.

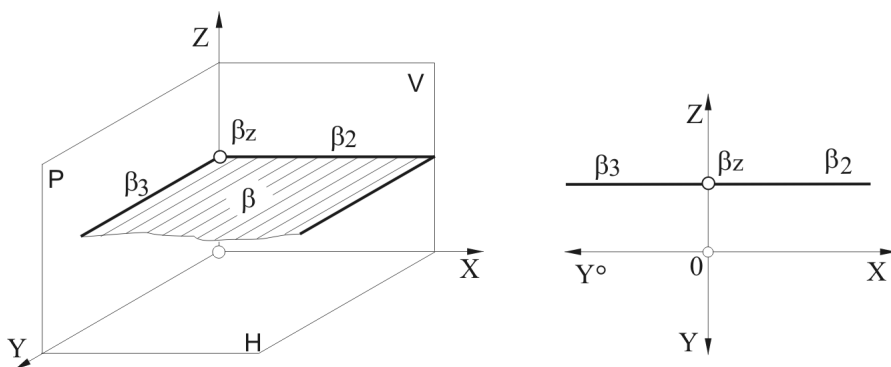


Sl. 4.4: Ravan  $\beta$  sa divergentnim tragovima u prostoru i nakon obaranja projekcijskih ravni

#### 4.2. SPECIJALNI POLOŽAJI RAVNI

Ravan je u specijalnom položaju ako je paralelna, upravna ili pod uglom od  $45^\circ$  prema projekcijskim ravnima. Ravni paralelne sa projekcijskim ravnima nazivaju se projektnim ravnima. Kada je ravan paralelna sa jednom projekcijskom ravni, tada je istovremeno upravna na druge dve projekcijske ravni. Ravni koje su pod uglom od  $45^\circ$  prema projekcijskim ravnima nazivaju se simetralnim ravnima.

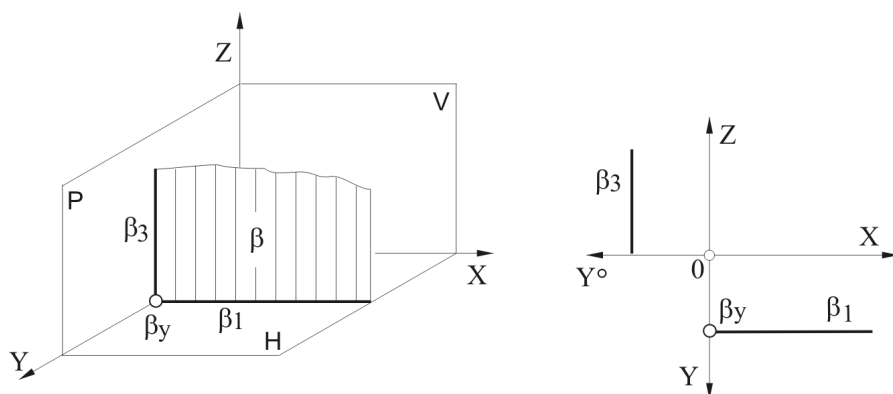
Na sl. 4.5 prikazana je ravan  $\beta(\infty; \infty; \beta_z)$  koja je paralelna sa H ravni, a upravna na V i P ravni, te ima drugi  $\beta_2$  i treći  $\beta_3$  trag. Prvi trag ravni  $\beta_1$  je u beskonačnosti (nema ga), zbog čega su tragovi  $\beta_2$  i  $\beta_3$  paralelni sa osom X i Y. Ova ravan ima samo jedan osni trag  $\beta_z$ , dok su



druga dva  $\beta_x$  i  $\beta_y$  u beskonačnosti (nema ih). Sve što se na ovoj ravni nalazi vidi se u prvoj projekciji u pravoj veličini, a u drugoj i trećoj projekciji projicira se na tragove  $\beta_2$  i  $\beta_3$ .

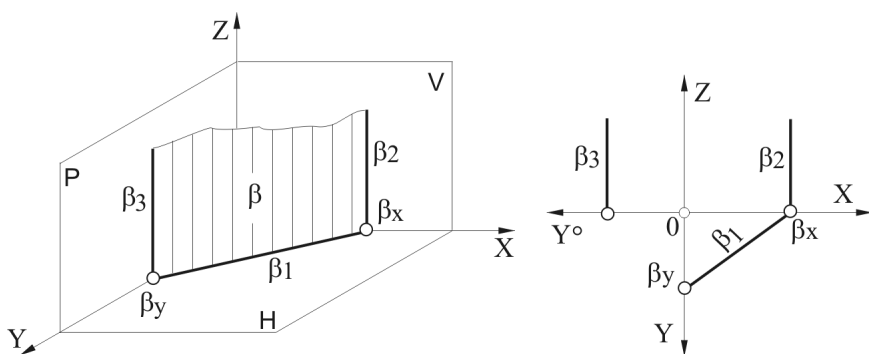
Sl. 4.5: Ravan  $\beta(\infty; \infty; \beta_z)$  paralelna sa H ravni u prostoru i u ortogonalnim projekcijama

Ravan  $\beta(\infty; \beta_Y; \infty)$  je paralelna sa ravni V, a upravna na H i P (sl. 4.6), te je trag  $\beta_1$



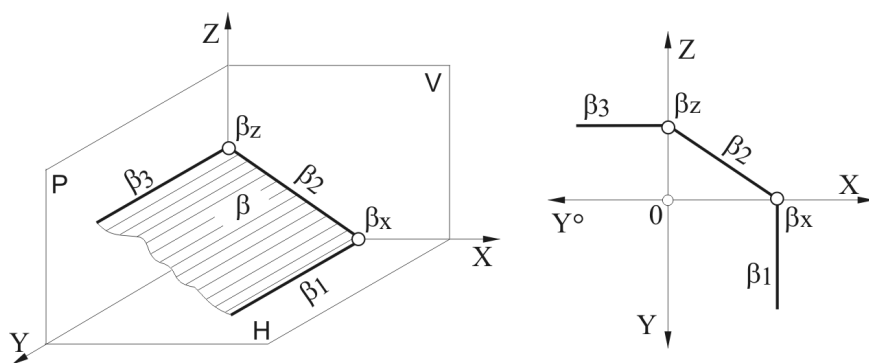
paralelan sa X, a  $\beta_3$  sa Z osom. Ova ravan ima osni trag  $\beta_Y$  u konačnosti, a  $\beta_X$  i  $\beta_Z$  u beskonačnosti. Sve što se na ovoj ravni nalazi, u drugoj projekciji se vidi u pravoj veličini, a u prvoj i trećoj se projicira na tragove  $\beta_1$  i  $\beta_3$ .

Sl. 4.6: Ravan  $\beta(\infty; \beta_Y; \infty)$  paralelna sa V ravni u prostoru i u ortogonalnim projekcijama



Na slici 4.7 prikazana je ravan  $\beta(\beta_X; \beta_Y; \infty)$  koja je upravna na H, a pod uglom na V i P ravni, te je drugi i treći trag paralelan sa Z osom. Prva projekcija svega onog što se nalazi na ovoj ravni leži na prvom tragu  $\beta_1$ .

Sl. 4.7: Ravan  $\beta(\beta_X; \beta_Y; \infty)$  upravna na H ravan u prostoru i u ortogonalnim projekcijama



Ravan  $\beta(\beta_X; \infty; \beta_Z)$  je upravna na vertikalnu projekcijsku ravan, pod nekim uglom na H i P ravan, te su joj tragovi  $\beta_1$  i  $\beta_3$  paralelni sa Y osom (sl. 4.8). Druga projekcija svega onog što se nalazi na ovoj ravni leži na drugom  $\beta_2$  tragu.

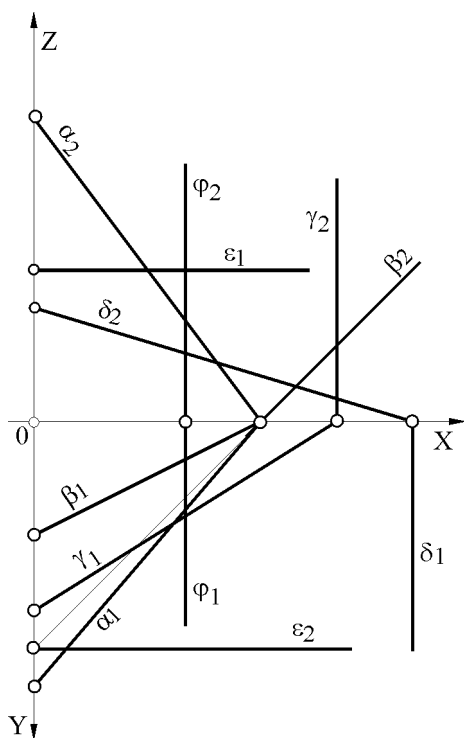
Sl. 4.8: Ravan  $\beta(\beta_X; \infty; \beta_Z)$  upravna na V ravan u prostoru i u ortogonalnim projekcijama

#### Zadatak 4.1.

0(2;5). Nacrtati prvi i drugi trag ravni i označiti osne tragove:  $\alpha(3;3;5;4)$ ,  $\beta(3;1;5;-3)$ ,  $\gamma(4;2;5;\infty)$ ,  $\delta(5;\infty;1;5)$ ,  $\varepsilon(\infty;-3;-2)$  i  $\varphi(2;\infty;\infty)$ .

Prema zadatim osnim tragovima  $\alpha_X$ ,  $\alpha_Y$  i  $\alpha_Z$  odrede se tragovi ravni tako što se spajanjem osnih tragova  $\alpha_X$  i  $\alpha_Y$  dobija prvi trag  $\alpha_1$ , a spajanjem  $\alpha_X$  i  $\alpha_Z$  drugi trag  $\alpha_2$  ravni  $\alpha$  (sl. 4.9). Na isti način dobijaju se tragovi i ostalih ravni. Drugi trag  $\gamma_2$  ravni  $\gamma$  je paralelan sa osom Z pošto je  $\gamma_Z = \infty$ , tj. ravan  $\gamma$  je upravna na H ravan. Prvi trag  $\delta_1$  ravni  $\delta$  je paralelan sa osom Y jer

je  $\delta_Y = \infty$ , te je ova ravan upravna na V ravan. Oba traga ravni  $\varepsilon$  su paralelna sa osom X pošto je  $\varepsilon_X = \infty$ . Trag  $\varepsilon_1$  je iznad, a trag  $\varepsilon_2$  ispod ose X jer su osni tragovi  $\varepsilon_Y$  i  $\varepsilon_Z$  sa negativnim predznakom. Ravan  $\varepsilon$  je upravna na P ravan, pod proizvoljnim uglom na H i V ravni i nalazi se u III oktantu. Tragovi ravni  $\varphi$  se poklapaju i paralelni su sa osom Y i Z jer je  $\varphi_Y = \varphi_Z = \infty$ . Ova ravan je paralelna sa P, a upravna na H i V ravni.



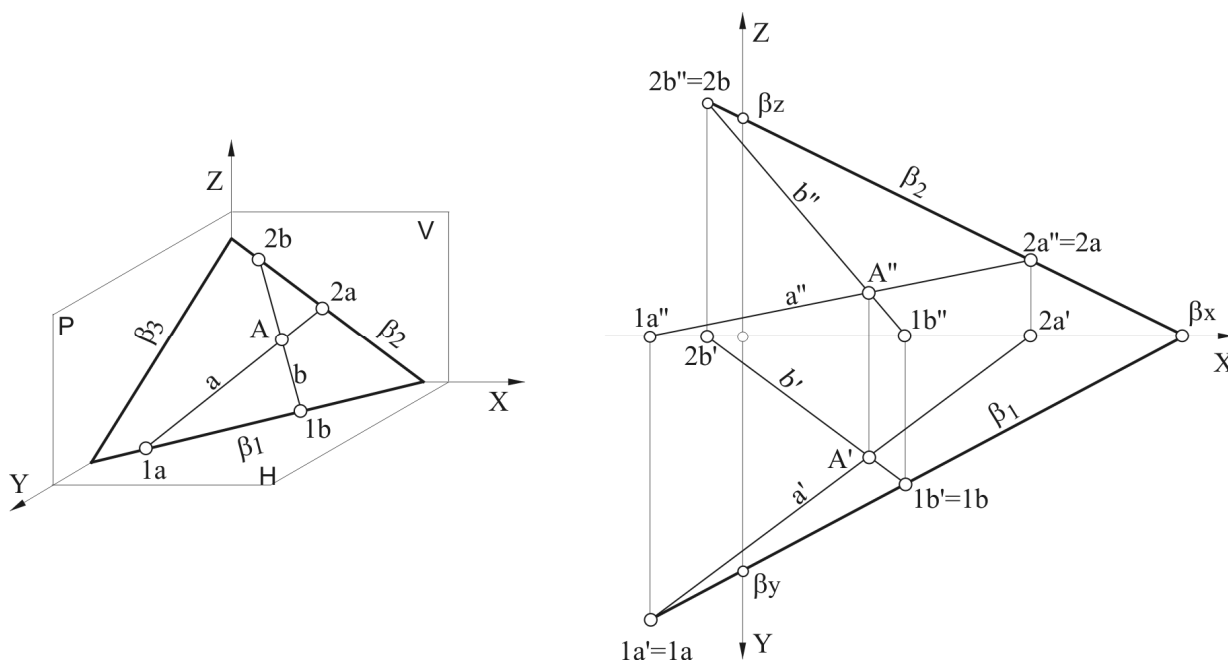
Sl. 4.9: Određivanje tragova ravni (Zadatak 4.1.)

### 4.3. ODREĐIVANJE TRAGOVA RAVNI

#### 4.3.1. Tragovi ravni koju određuju dve prave koje se seku

Ako se prava nalazi na ravni tada se njeni prodori kroz projekcijske ravni nalaze na tragovima ravni: prvi prodor na prvom tragu, drugi na drugom i treći prodor na trećem tragu ravni.

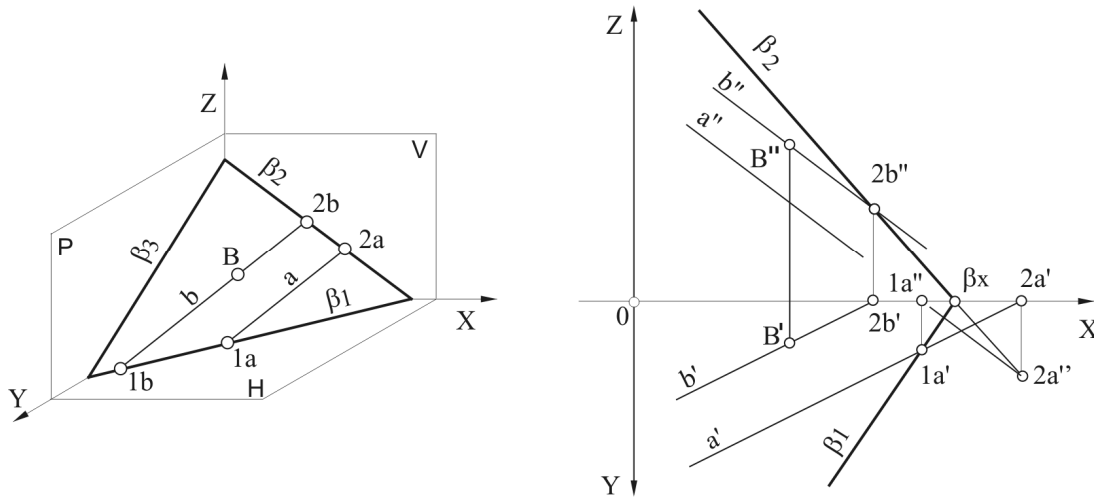
Dve prave koje se seku leže u jednoj ravni (određuju ravan). Tada njihovi prodori kroz projekcijske ravni leže na tragovima ravni, odnosno određuju ravan. Prvi prodor 1a prave a i prvi prodor 1b prave b leže na prvom tragu  $\beta_1$ , a drugi prodori 2a i 2b na drugom tragu  $\beta_2$  (sl. 4.10 levo). Spajanjem prvih prodora 1a' i 1b', dobija se prvi trag  $\beta_1$ , a spajanjem drugih prodora 2a'' i 2b'' dobija se drugi trag ravni  $\beta_2$ . Treći trag ravni  $\beta_3$ , može se dobiti na dva načina. Prvi način je pomoću trećih prodora prava a i b, pošto tačke 3a''' i 3b''' određuju treći prodor  $\beta_3$  ili pomoću osnih tragova  $\beta_Y$  i  $\beta_Z$  koji su sa prva dva traga već određeni. Treći trag ravni  $\beta_3$ , kao i treća projekcija tačke i prave crtaju se samo u izuzetnim prilikama, jer su suvišni.



Sl. 4.10: Tragovi ravni  $\beta$  koju određuju dve prave a i b koje se seku u prostoru i ortogonalne projekcije

### 4.3.2. Tragovi ravni koju određuju dve paralelne prave

Na isti način kao kad se prave seku, određuje se ravan koju određuju dve paralelne prave. Odgovarajući prodori prava čine odgovarajuće tragove ravni. Na sl. 4.11 data je prava  $a$  i tačka  $B$  kroz koju prolazi prava  $b$  paralelna sa pravom  $a$ . Pošto su prave paralelne, paralelne su im i projekcije. Odrede se drugi prodori prava, tačke  $2a''$  i  $2b''$  čijim spajanjem se dobija drugi trag  $\beta_2$ . Spajanjem osnog traga  $\beta_x$  i prvog prodora jedne prave (tačke  $1a'$ ) dobija se prvi trag  $\beta_1$ .



Sl. 4.11: Tragovi ravni  $\beta$  koju određuju dve paralelne prave  $a$  i  $b$  u prostoru i ortogonalne projekcije

### 4.3.3. Tragovi ravni koja je zadata pravom i tačkom van nje ili sa tri tačke

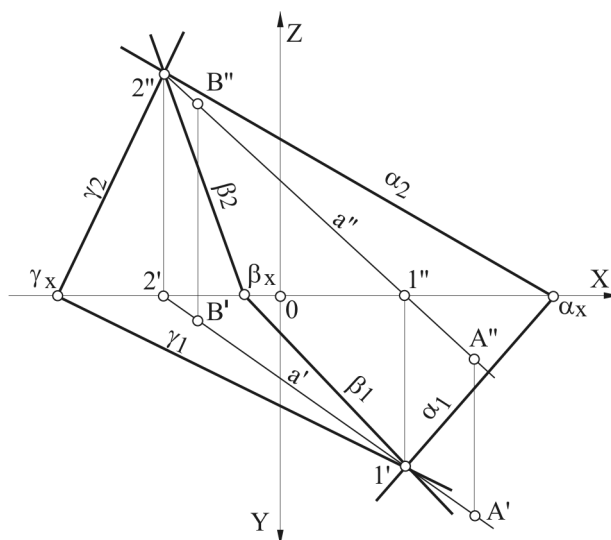
Kada je poznata prava i tačka van nje, a nalaze se na jednoj ravni, tragovi te ravni se određuju kao u prethodnom slučaju, pošto kroz tačku uvek možemo povući pravu koja se sa zatom pravom seče ili je paralelna sa njom. Prodori te dve prave određuju tragove ravni.

Kroz tri nekolinearne tačke (nisu na istom pravcu) koje određuju jednu ravan možemo povući dve prave koje se seku ili su paralelne. Prodori tih prava određuju tragove ravni.

#### Zadatak 4.2.

0(4;5). Kroz pravu  $a$  zadatu tačkama  $A(2,5;3;-1)$  i  $B(-1;0,5;2,5)$  nacrtati familiju (pramen) ravni.

Familija ili pramen ravni se sastoji iz više različitih ravni koje imaju zajedničku pravu (pramenjaču). Odredi se prvi i drugi prodor prave  $a$  (tačke  $1'$  i  $2''$ ) kroz koje prolaze prvi i drugi tragovi familije ravni (sl. 4.12). Proizvoljno se, kroz tačku  $1'$  povuče prvi trag  $\alpha_1$  i gde seče osu  $X$  dobija se osni trag  $\alpha_x$  koji sa tačkom  $2''$  određuje drugi trag  $\alpha_2$ . Na isti način se dobijaju i ostali tragovi ravni  $\beta, \gamma, \dots$



Sl. 4.12: Crtanje familije (pramena) ravni (Zadatak 4.2)

**Zadatak 4.3.**

0(2;7). Trougao  $A(1;?;6)$ ,  $B(8;?;1)$  i  $C(1;?;1)$  pripada ravni  $\alpha$  koja je određena sa dve paralelne prave  $d$  i  $e$ . Prava  $d$  prolazi kroz tačke  $D(0;4,5;4)$  i  $E(4,5;5,5;6)$ , a prava  $e$  kroz tačku  $F(6;4;4,5)$ . Nacrtati prvu projekciju trougla  $A'B'C'$  bez određivanja tragova ravni.

**Zadatak 4.4.**

0(4;9). Odrediti tragove ravni  $\beta$  zadate tačkama  $A(3;0,5;5,5)$ ,  $B(5;4,5;1,5)$  i  $C(-0,5;1,5;0)$ .

**Zadatak 4.5.**

0(3;9). Odrediti tragove ravni  $\alpha$  koju određuju prave  $a$  i  $b$ . Prava  $a$  prolazi kroz tačke  $A(1;4;1)$  i  $B(4;1;2,5)$ , a prava  $b$  kroz tačke  $C(2;1;4)$  i  $D(3;?;?)$ . Tačka  $D$  je presečna tačka pravih  $a$  i  $b$ .

## 5. MEĐUSOBNI ODNOS TAČKE, PRAVE I RAVNI

### 5.1. PRAVA NA RAVNI

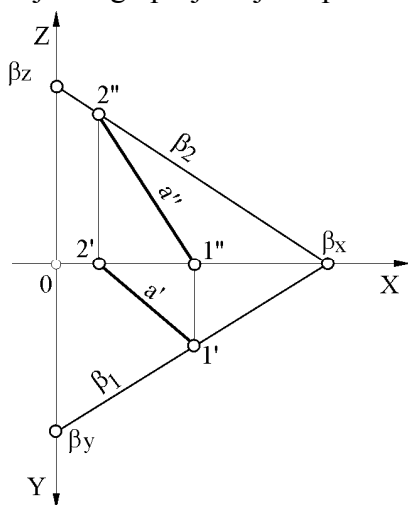
Prava na ravni može biti u proizvoljnom i specijalnom položaju. Prava je u specijalnom položaju na ravni ako je paralelna sa tragovima ravni ili ako je na njih upravna.

#### 5.1.1. Proizvoljna prava na ravni (ravan kroz pravu)

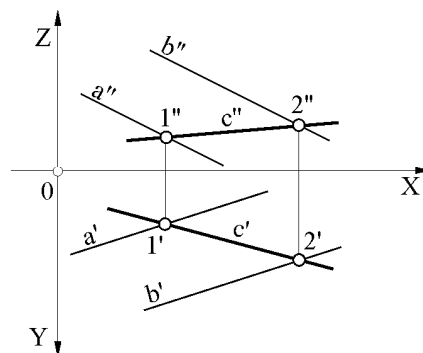
Kada je prava na ravni tada se njeni prodori kroz projekcijske ravni H, V i P nalaze na tragovima ravni; prvi prodor na prvom tragu ( $1'$  na  $\beta_1$ ), drugi na drugom ( $2''$  na  $\beta_2$ ) i treći prodor na trećem tragu ( $3'''$  na  $\beta_3$ ). Ovo važi i obrnuto: ravan prolazi kroz pravu ako tragovi ravni prolaze kroz prodore prave.

Neka je zadata ravan  $\beta$  sa tragovima  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , na kojoj treba nacrtati pravu  $a$ . Kako zadatak nije bliže postavljen (ima bezbroj mogućnosti) proizvoljno se nacrtava prva projekcija  $a'$  prave  $a$  (sl. 5.1). Gde  $a'$  seče prvi trag  $\beta_1$  dobija se prvi prodor prave  $a$  i njena prva projekcija  $1'$ . Druga projekcija prvog prodora  $1''$  je na osi X i dobija se vertikalnom sponom. Gde prva projekcija  $a'$  seče osu X dobija se prva projekcija drugog prodora  $2'$ . Druga projekcija drugog prodora  $2''$  je na drugom tragu  $\beta_2$  i određuje se sponom.

Ako je ravan zadata dvema pravama  $a$  i  $b$ , bilo da su paralelne ili da se seku, neka treća prava  $c$  na njoj se dobija iz uslova: sve proizvoljne prave na jednoj ravni se međusobno seku ili su paralelne (sl. 5.2). Povuču se (proizvoljno, ako drugačije nije zadato)  $c'$  i dobijaju tačke  $1'$  i  $2'$ . Vertikalnim sponama do  $a''$  i  $b''$  dobijaju se druge projekcije tačaka  $1''$  i  $2''$  koje određuju drugu projekciju  $c''$  prave  $c$ .



Sl. 5.1: Prava  $a$  na ravni  $\beta$  koja je zadata tragovima



Sl. 5.2: Prava  $c$  na ravni koja je zadata paralelnim pravama  $a$  i  $b$

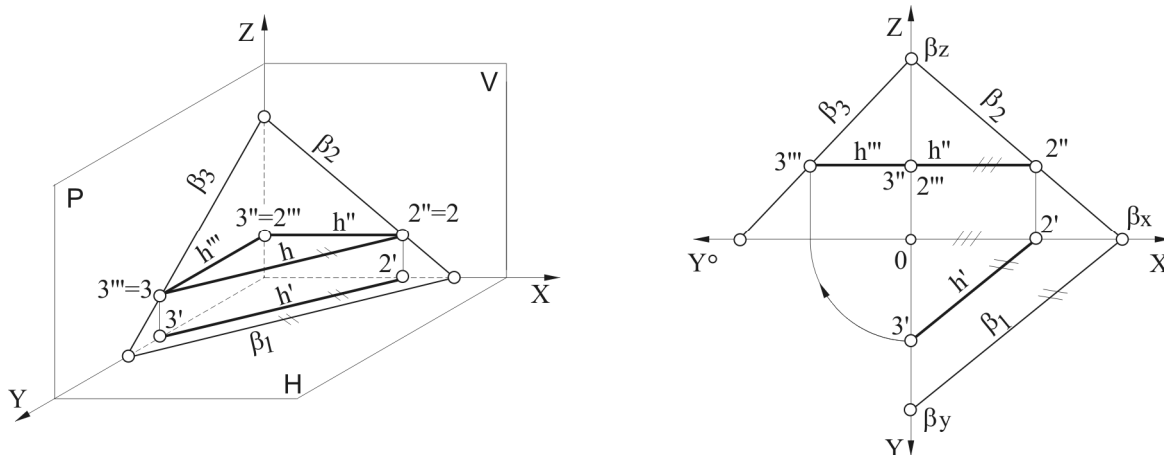
#### 5.1.2. Specijalne prave na ravni

Specijalne prave na ravni su one prave koje su paralelne ili upravne na tragove ravni. Prave koje su paralelne sa tragovima ravni nazivaju se sutražnjice, a one koje su upravne na tragove ravni, nagibnice. Postoje tri sutražnjice i tri nagibnice. Prva sutražnjica ili horizontala (označava se sa  $h$ ) paralelna je sa H ravni i sa prvim tragom  $\beta_1$ ; druga sutražnjica ili frontala  $f$  paralelna je sa F (V) ravni i sa drugim tragom  $\beta_2$ ; treća sutražnjica ili profila  $p$  paralelna je sa P ravni i sa trećim tragom  $\beta_3$ . Prva nagibnica  $g_1$  je upravna na prvi trag  $\beta_1$ , druga  $g_2$  na drugi i treća  $g_3$  je upravna na treći trag  $\beta_3$  ravni  $\beta$ .

Prve dve sutražnjice i nagibnice imaju primenu pri rešavanju zadataka, dok se treće rede koriste.

### Horizontala $h$

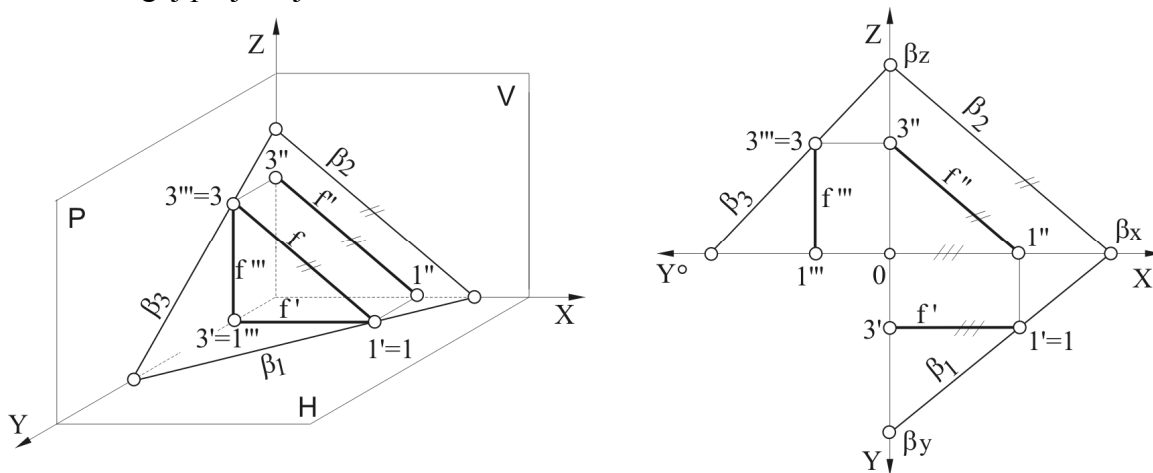
Horizontala ili prva sutražnjica  $h$  je prava na ravni  $\beta$ , koja je paralelna sa prvim tragom  $\beta_1$ , ( $h' \parallel \beta_1$ ), te je istovremeno paralelna i sa  $H$  ravni (sl. 5.3). Druga projekcija horizontale  $h''$  je paralelna sa  $X$  osom, a treća projekcija  $h'''$  je paralelna sa  $Y$  osom, odnosno sa  $Y^\circ$ . Horizontala nema prvi prodor (zato što je paralelna sa  $H$  ravni); drugi prodor 2 i njegova druga projekcija  $2''$  je na drugom tragu  $\beta_2$ , a treći prodor 3 i njegova treća projekcija  $3'''$  je na trećem tragu  $\beta_3$ . Prva projekcija drugog prodora  $2'$  je u preseku vertikalne spone iz drugog prodora  $2''$  i  $X$  ose. Horizontala  $h$  se vidi u pravoj veličini u prvoj projekciji.



Sl. 5.3: Horizontala  $h$  ( $h' \parallel \beta_1$ ) u prostoru i u projekcijama

### Frontala $f$

Frontala ili druga sutražnjica  $f$  je prava na ravni  $\beta$  koja je paralelna sa drugim tragom ravni  $\beta_2$ , te je paralelna i sa  $F$  ( $V$ ) ravni (sl. 5.4). Druga projekcija frontale  $f''$  je paralelna sa drugim tragom  $\beta_2$  ( $f'' \parallel \beta_2$ ), prva projekcija  $f'$  je paralelna sa  $X$  osom, a treća projekcija  $f'''$  je paralelna sa  $Z$  osom. Frontala nema drugi prodor, pošto je paralelna sa  $F$  ( $V$ ) ravni, već ima prvi i treći. Prvi prodor frontale 1 i njegova prva projekcija  $1'$  leže na prvom tragu  $\beta_1$ , a treći prodor 3 i njegova treća projekcija  $3'''$  leže na trećem tragu ravni  $\beta_3$ . Frontala se vidi u pravoj veličini u drugoj projekciji.

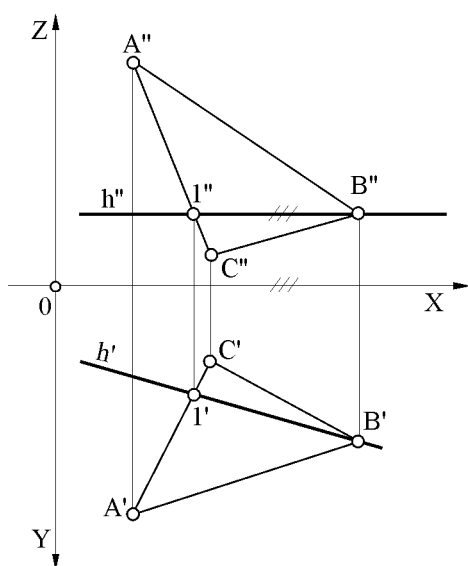


Sl. 5.4: Frontala  $f$  ( $f'' \parallel \beta_2$ ) u prostoru i u projekcijama

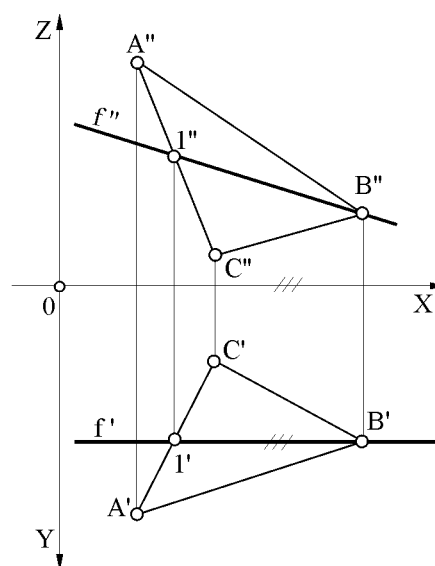
### Crtanje horizontale i frontala bez određivanja tragova ravni

Horizontala i frontala se mogu odrediti i bez crtanja tragova ravni. Neka je ravan zadata sa tri tačke ABC čijim spajanjem se dobijaju tri duži (prave) koje se seku (sl. 5.5). Kroz bilo koju tačku u drugoj projekciji, na primer  $B''$  povuče se horizontalna linija (paralelna sa X osom) koja predstavlja  $h''$ , tada seče duž  $A''C''$  u tački  $1''$ . Kako su ovo sve duži (prave) (AC, AB, CB i h) na jednoj ravni moraju se međusobno seći, te pomoću vertikalne spone iz  $1''$  do duži  $A'C'$  dobija se prva projekcija  $1'$ . Tačke B i 1 određuju horizontalu, odnosno  $1'B'$  daju  $h'$ .

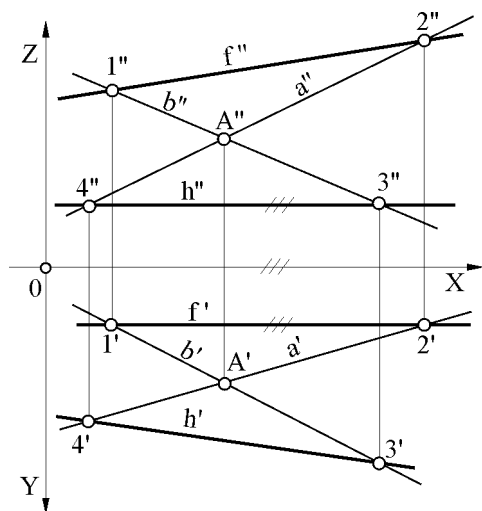
Isti postupak je i za crtanje frontale f, s tim da se u prvoj projekciji povuče horizontalna linija (paralelna sa X osom) koja predstavlja prvu projekciju frontale  $f'$  (sl. 5.6). Gde ona seče duž  $A'C'$  dobija se tačka  $1'$ . U preseku vertikalne spone iz tačke  $1'$  i duži  $A''C''$  dobija se  $1''$ . Tačke  $B''$  i  $1''$  određuju drugu projekciju frontale  $f''$ .



Sl. 5.5: Crtanje horizontale h bez crtanja tragova ravni



Sl. 5.6: Crtanje frontale f bez crtanja tragova ravni



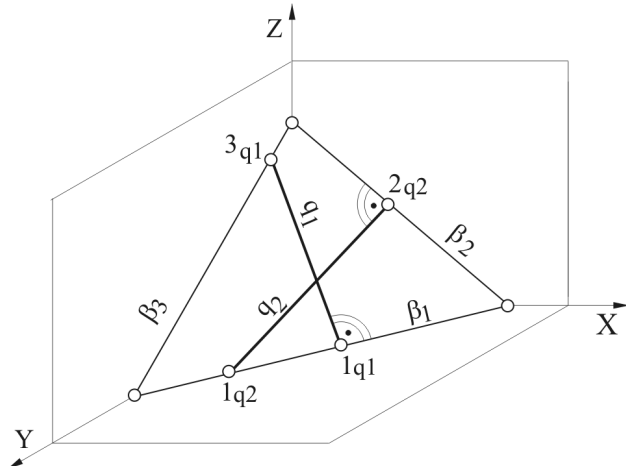
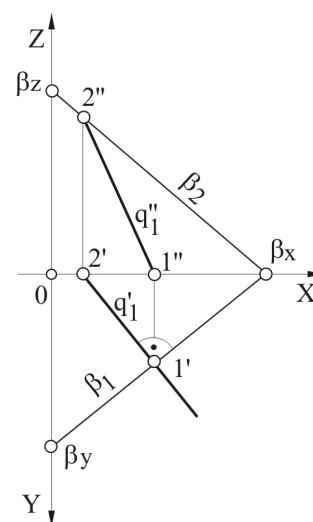
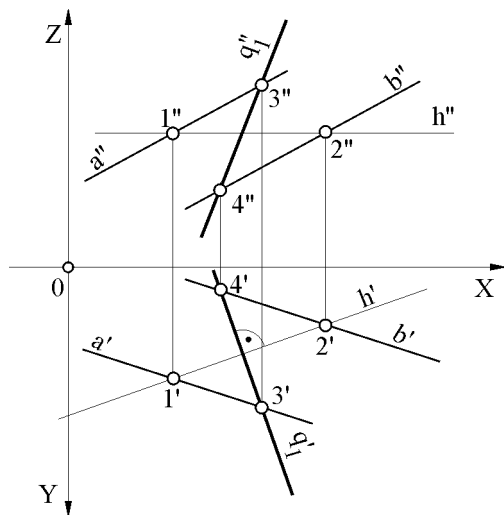
Sl. 5.7: Određivanje horizontale i frontale ravni zadate pravama a i b koje se seku

Na sl. 5.7 prikazano je određivanje horizontale i frontale ravni koja je zadata sa dve prave, a i b, koje se seku u tački A. Postupak je isti kao u prethodnom primeru. Na proizvoljnom mestu u prvoj projekciji povuče se, paralelno sa osom X, prva projekcija frontale  $f'$  i dobiju se tačke preseka ( $1'$  i  $2'$ ) sa  $a'$  i  $b'$ . Pomoću spona do drugih projekcija  $a''$  i  $b''$  dobijaju se tačke  $1''$  i  $2''$  koje određuju  $f''$ . Na isti način se određuje horizontala, s tim da se prvo nacrtaju druga projekcija  $h''$ , koja je paralelna sa osom X. Pomoću tačaka  $3''$ ,  $4''$  i spona dobija se  $3'$  i  $4'$ , odnosno prva projekcija horizontale  $h'$ .



**Prva nagibnica  $g_1$** 

Prva nagibnica, označava se sa  $g_1$ , jeste prava na ravni  $\beta$  koja je upravna na njen prvi trag  $\beta_1$ , te je prva projekcija nagibnice  $g_1'$  upravna na prvi trag ravni  $\beta_1$  ( $g_1' \perp \beta_1$ ). Druga projekcija prve nagibnice  $g_1''$  dobija se iz uslova da se prodori druge nagibnice kroz projekcijske ravni nalaze na tragovima ravni, odnosno prvi prodor 1 na prvom tragu  $\beta_1$ , a drugi prodor 2 na drugom tragu  $\beta_2$  (sl. 5.8). U preseku  $g_1'$  i prvog traga  $\beta_1$ , dobija se prva projekcija prvog prodora 1', a u preseku  $g_1'$  sa X osom prva projekcija drugog prodora 2' (sl. 5.9). Druga projekcija prvog prodora 1'' dobija se pomoću spone do X ose, a druga projekcija drugog prodora 2'' u preseku spone i drugog traga ravni  $\beta_2$ .

Sl. 5.8: Prva  $g_1$  i druga  $g_2$  nagibnica ravni  $\beta$ Sl. 5.9: Prva nagibnica  $g_1$  ravni  $\beta$  nakon obaranja projekcijskih ravniSl. 5.10: Određivanje prve nagibnice  $g_1$  zadate paralelnim pravama  $a$  i  $b$ **Crtanje prve nagibnice bez crtanja tragova ravni**

Kako je prva projekcija prve nagibnice  $g_1'$  upravna na prvi trag ravni, upravna je i na prvu projekciju horizontale  $h'$  ( $g_1' \perp h'$ ). Neka je zadata ravan sa dve paralelne prave  $a$  i  $b$ . Nacrta se druga  $h''$  i prva  $h'$  projekcija horizontale  $h$  (sl. 5.10). Prva projekcija prve nagibnice  $g_1'$  je upravna na  $h'$ , te se na proizvoljnom mestu (ako nije drugačije zadato) povuče pravac upravna na  $h'$ . Dobijaju se tačke 3' i 4', a na osnovu njih pomoću vertikalnih spona dobijaju se 3'' i 4'', koje određuju  $g_1''$ .

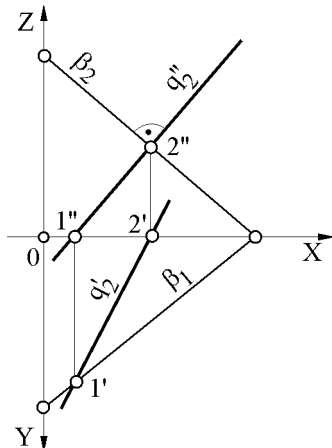
**Druga nagibnica  $g_2$** 

Druga nagibnica, obeležava se sa  $g_2$ , je prava na ravni  $\beta$ , koja je upravna na drugi trag  $\beta_2$ , te je druga projekcija druge nagibnice  $g_2''$  upravna na drugi trag ravni  $\beta_2$  ( $g_2'' \perp \beta_2$ ). Osim toga druga projekcija druge nagibnice  $g_2''$  je upravna i na drugu projekciju frontale  $f''$  ( $g_2'' \perp f''$ ).

Prva projekcija druge nagibnice  $g_2'$  dobija se pomoću prodora druge nagibnice kroz H i V ravni koji leže na tragovima ravni, odnosno 1' je na  $\beta_1$  a 2'' na  $\beta_2$  (sl. 5.8). U preseku  $g_2'$  i  $\beta_2$

dobija se druga projekcija drugog prodora  $2''$ , a u preseku  $g_2''$  i ose X, druga projekcija prvog prodora  $1''$  (sl. 5.11). Prva projekcija drugog prodora  $2'$  je na osi X, a prva projekcija prvog prodora  $1'$  na prvom tragu  $\beta_1$ .

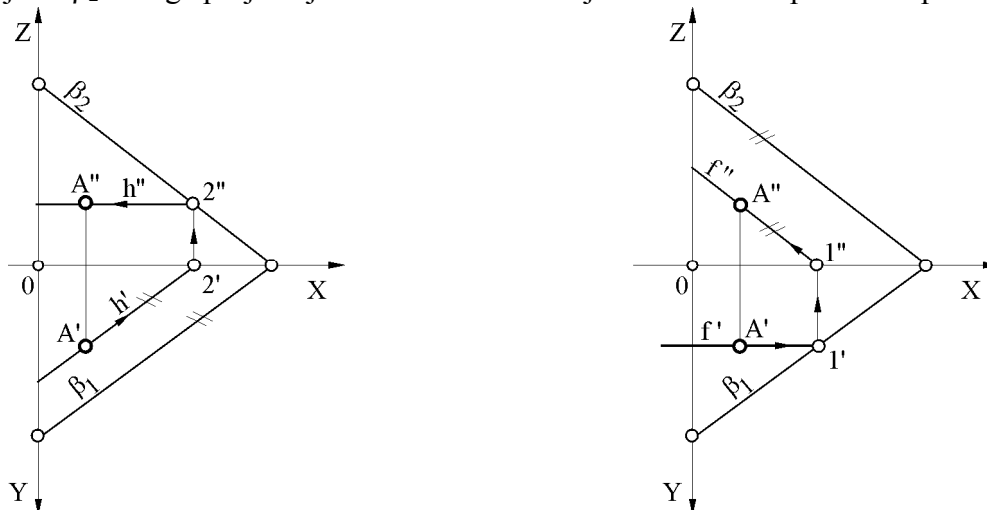
Druga nagibnica se može nacrtati i bez tragova ravni, na isti način kao i prva nagibnica, ali koristeći frontalu f.



Sl. 5.11: Druga nagibnica  $g_2$  ravni  $\beta$  nakon obaranja projekcijskih ravni

## 5.2. TAČKA NA RAVNI

Tačka je na ravni ako se nalazi na pravoj koja leži na ravni. Važi i obrnuto: ravan prolazi kroz tačku ako prava koja je na ravni prolazi kroz tu tačku. Neka je data ravan  $\beta$  sa tragovima  $\beta_1, \beta_2$  i prva projekcija  $A'$  tačke A, koja leži na ravni  $\beta$  (sl. 5.12). Druga projekcija  $A''$  može se dobiti postavljanjem proizvoljne prave kroz tačku A koja će ležati na ravni. Međutim, mnogo je jednostavnije koristiti sutražnjice, bilo horizontalu ili frontalu. U prvom slučaju (sl. 5.12, levo) kroz zadatu prvu projekciju  $A'$  tačke A nacrta se  $h'$  (paralelno sa  $\beta_1$ ) i tamo gde ona seče osu X dobija se prva projekcija drugog prodora  $2'$ , a druga projekcija drugog prodora  $2''$  je u preseku spone i drugog traga  $\beta_2$ . Iz tačke  $2''$  nacrta se  $h''$  koja je paralelna sa osom X. Druga projekcija  $A''$  tačke A je na sponi iz  $A'$  do  $h''$ . Zadatak se može rešiti na isti način korišćenjem frontale. Kroz tačku  $A'$  povuče se  $f'$  (paralelno sa osom X) i na osnovu prvog prodora frontale (tačke  $1'$ ) i spone iz nje, određuje se tačka  $1''$ . Druga projekcija frontale  $f''$  polazi iz tačke  $1''$  i paralelna je sa  $\beta_2$ . Druga projekcija  $A''$  tačke A određuje se na osnovu prve  $A'$  i spone do  $f''$ .



Sl. 5.12: Određivanje tačke A na ravni  $\beta$  korišćenjem horizontale i frontale

### Zadatak 5.1.

0(1;4). Data je ravan  $\beta(3;2;-3)$ . Kroz tačku  $A(2,5;1;?)$  nacrtati horizontalu i frontalu zadate ravni  $\beta$ .

Kroz prvu projekciju tačke  $A'$  povuče se prva projekcija frontale  $f'$  (paralelno sa osom  $X$ ) i u preseku sa  $\beta_1$  dobija se prvi prodor, tj. tačka  $1'$  (sl. 5.13). Pomoću spone do ose  $X$  dobija se tačka  $1''$ , odakle se paralelno sa tragom  $\beta_2$  nacrti  $f''$ . Druga projekcija  $A''$  dobija se pomoću spone iz  $A'$  do  $f''$ . Zadatak se može rešiti tako što se prvo, kroz tačku  $A'$  nacrti prva projekcija  $h'$  horizontale  $h$  ( $h' // \beta_1$ ) do ose  $X$ , gde se dobija prva projekcija drugog prodora horizontale  $2'$ . Iz tačke  $2'$  pomoću spone do  $\beta_2$  dobija se  $2''$  iz koje se nacrti  $h''$  paralelno sa osom  $X$ .

### Zadatak 5.2.

0(1;4). Data je ravan  $\beta(2;-2,5;2,5)$ . Kroz tačku  $A(1;?;2)$  nacrtati horizontalu i frontalu ravni.

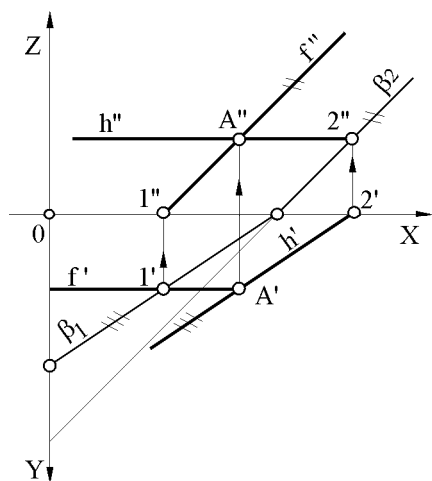
Postupak je isti kao u zadatku 5.1, s tim što se kroz tačku  $A''$  nacrtaju  $h''$  ili  $f''$  (sl. 5.14). Pomoću projekcija njihovih prodora kroz projekcijske ravni (tačaka  $2''$ ,  $2'$  ili  $1''$  i  $1'$ ) određuju se prve projekcije  $h'$  ili  $f'$ , a zatim tačka  $A'$ .

### Zadatak 5.3.

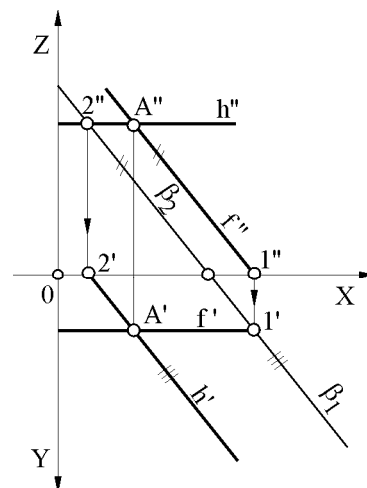
0(2;10). Data je ravan  $\gamma(8;6,5;7)$  i na njoj tačka  $A(3;2,5;?)$ . Kroz datu tačku nacrtati proizvoljnu pravu na ravni  $\gamma$ , horizontalu, frontalu i prvu i drugu nagibnicu ravni  $\gamma$ .

### Zadatak 5.4.

0(6;8). Data je ravan sa tri tačke  $A(-2;2;1)$ ,  $B(5;1;3)$  i  $C(1;6;7)$  i na njoj tačke  $D(2;?;5)$  i  $E(-3;3;?)$ . Kroz tačku  $D$  nacrtati drugu, a kroz tačku  $E$  prvu nagibnicu bez određivanja tragova ravni.



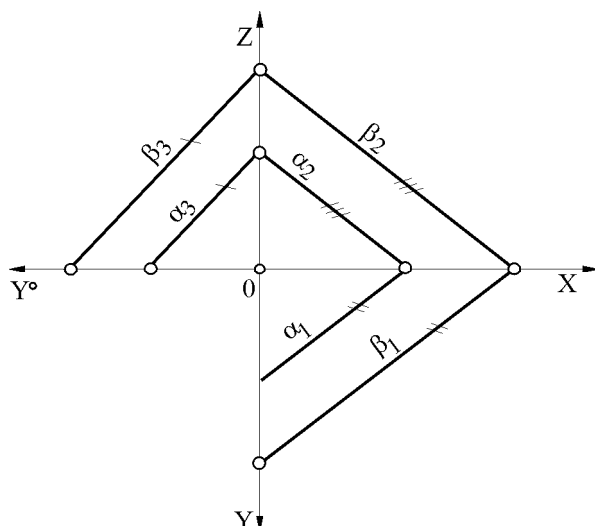
Sl. 5.13: Određivanje  $h$  i  $f$  ravni  $\beta$  kroz tačku  $A(2,5;1;?)$  (Zadatak 5.1.)



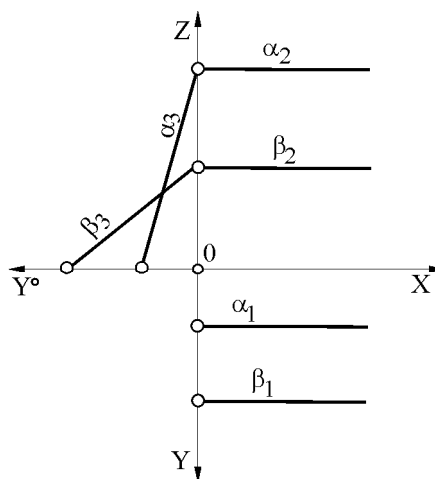
Sl. 5.14: Određivanje  $h$  i  $f$  ravni  $\beta$  kroz tačku  $A(1;?;2)$  (Zadatak 5.2.)

## 5.3. PARALELNE RAVNI

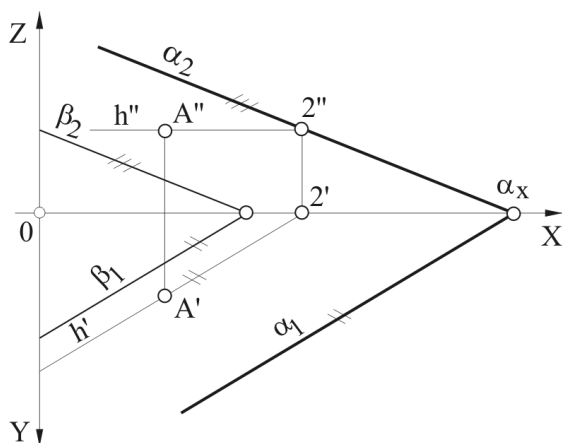
Dve ravni su paralelne ako svaka od dveju pravih koje se seku na jednoj ravni ima sebi paralelnu pravu na drugoj ravni. Ako su dve ravni paralelne,  $\alpha // \beta$ , tada su im i sva tri traga paralelna:  $\alpha_1 // \beta_1$ ,  $\alpha_2 // \beta_2$  i  $\alpha_3 // \beta_3$  (sl. 5.15). Osim toga horizontale i frontale paralelnih ravni su međusobno paralelne. Ravni  $\alpha$  i  $\beta$  sa sl. 5.16 nisu paralelne jer im treći tragovi nisu paralelni.



Sl. 5.15: Paralelne ravni

Sl. 5.16: Ravni  $\alpha$  i  $\beta$  nisu paralelne**Zadatak 5.5.**

0(1;3) Kroz tačku  $A(1,5;1;1)$  nacrtati ravan  $\alpha$  tako da bude paralelna sa ravni  $\beta(2,5;1,5;1)$ .



Zadatak se može rešiti korišćenjem horizontale ili frontale ravni  $\alpha$  kroz tačku  $A$  čiji prodori leže na tragovima ravni  $\alpha$ . Prva projekcija horizontale  $h'$  je paralelna sa prvim tragovima  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ , te se kroz prvu projekciju  $A'$  povuče  $h'$  do ose  $X$  gde se dobija prva projekcija drugog prodora  $2'$  (sl. 5.17). Druga projekcija drugog prodora  $2''$  dobija se u preseku spone iz  $2'$  i  $h''$ , koja prolazi kroz  $A''$ . Drugi trag  $\alpha_2$  prolazi kroz  $2''$  i paralelan je sa  $\beta_2$ . Prvi trag  $\alpha_1$  je paralelan sa  $\beta_1$  i polazi iz osnog traga  $\alpha_x$ .

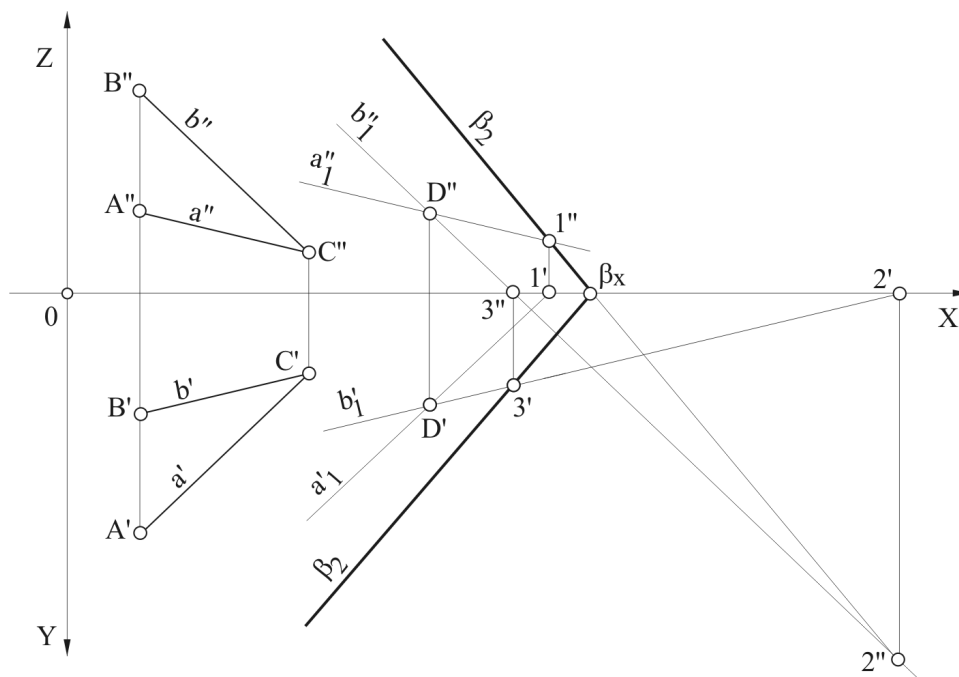
Sl. 5.17: Crtanje ravni  $\alpha$  kroz tačku  $A$  paralelno**Zadatak 5.6.**

0(1;4). Kroz tačku  $D(4,5;1,5;1)$  postaviti ravan  $\beta$  tako da je paralelna sa ravni koju određuju tri tačke  $A(1;3;1)$ ,  $B(1;1,5;2,5)$  i  $C(3;1;0,5)$ , bez crtanja tragova ravni.

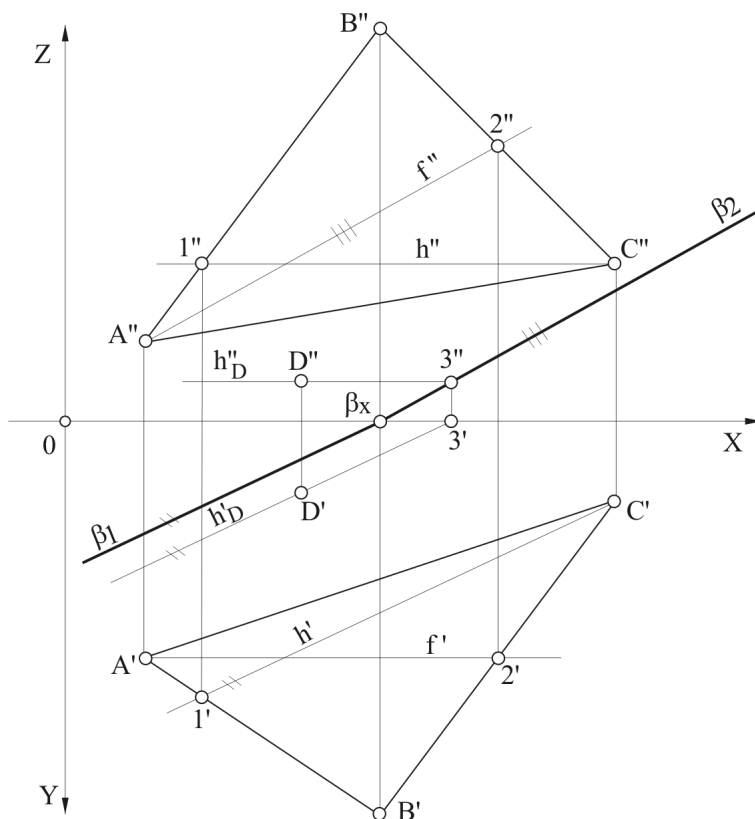
Kroz tačku  $D$  povuku se pomoćne prave  $a_1$  i  $b_1$  koje se seku, a paralelne sa zadatim nacrtanim pravama  $a$  i  $b$  (određene su tačkama  $A$ ,  $B$  i  $C$ ). Projekcije prava  $a_1$ ,  $a$  i  $b$ ,  $b_1$  su međusobno paralelne (sl. 5.18). Prodori prava  $a_1$  i  $b_1$  kroz  $H$  i  $V$  ravni određuju tragove ravni  $\beta$ . Tačke  $1''$  i  $2''$  su drugi prodori prava  $a_1$  i  $b_1$  i kroz njih prolazi  $\beta_2$ . Tačka  $3'$  je prvi prodor prave  $b_1$ , te ona i osni trag  $\beta_x$  daju trag  $\beta_1$ .

**Zadatak 5.7.**

0(1;6). Kroz tačku  $D(3;1;0,5)$  nacrtati ravan  $\beta$  paralelnu sa ravni trougla  $A(1;3;1)$ ,  $B(4;5;5)$  i  $C(7;1;2)$  ne crtajući tragove ravni trougla.



Sl. 5.18: Crtanje ravan  $\beta$  paralelne sa ravni koju određuju tačke A, B i C (Zadatak 5.6.)

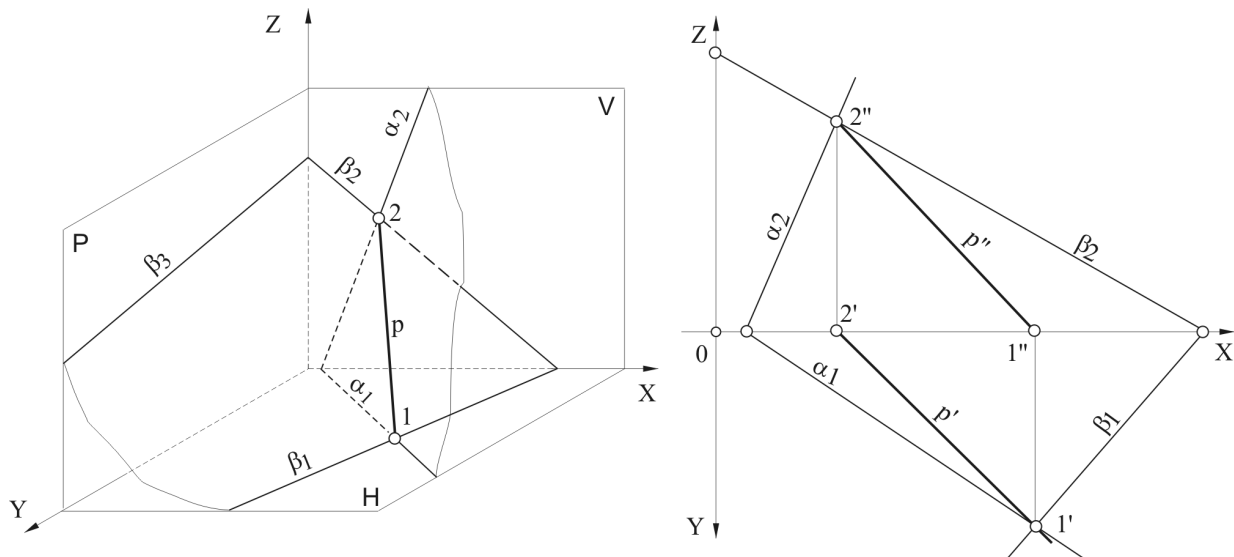


Sl. 5.19: Ravan  $\beta$  paralelna sa ravni trougla ABC (Zadatak 5.7.)

Kako se ne crtaju tragovi ravni trougla koriste se horizontala  $h$  i frontala  $f$  ravni trougla povučene iz tačaka C i A (sl. 5.19). Kroz tačku  $D'$  povuče se  $h_D'$  paralelno sa prvom projekcijom  $h'$  horizontale trougla, a kroz  $D''$  nacrtat se  $h_D''$ , na osnovu kojih se odredi druga projekcija drugog prodora horizontale  $h_D$  (tačka  $3''$ ). Kroz tačku  $3''$  nacrtat se  $\beta_2$  paralelno sa  $f''$ , a zatim se iz osnog traga  $\beta_x$  nacrtat  $\beta_1$  paralelno sa  $h'$ . Ravan  $\beta$  je paralelna sa ravni trougla zato što ima horizontalu  $h_D$  koja je paralelna sa horizontalom  $h$  na trouglu. Trag ravni  $\beta_1$  je paralelan sa  $h'$  dok je trag  $\beta_2$  paralelan sa  $f''$ , što znači da je ravan  $\beta$  paralelna sa ravni trougla.

### 5.4. PROIZVOLJNE RAVNI (PRESEČNICA RAVNI)

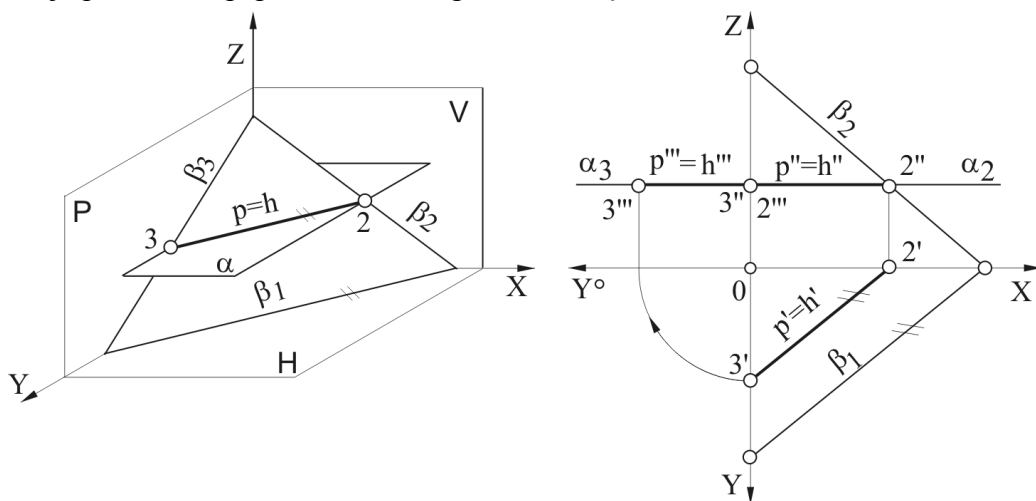
Dve proizvoljne ravni seku se po pravoj  $p$  koja se naziva presečnica. Presečnicu  $p$  određuju dve tačke 1 i 2 koje se dobijaju u preseku tragova ravni (sl. 5.20). Tačka 1 i njena prva projekcija  $1'$  nalaze se na H ravni u preseku tragova  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ . Tačka 1 predstavlja i prvi prodor presečnice  $p$  kroz H ravan. Tačka 2 i njena druga projekcija  $2''$  nalaze se na V ravni, dobijaju se u preseku drugih tragova  $\alpha_2$  i  $\beta_2$  i predstavlja drugi prodor presečnice  $p$  kroz V ravan. Presečnica  $p$  je zajednička prava dveju ravni koje se seku (pripada i jednoj i drugoj ravni). Sve proizvoljne prave na ovim ravnima ( $\alpha$  i  $\beta$ ) međusobno se seku po presečnici  $p$ .



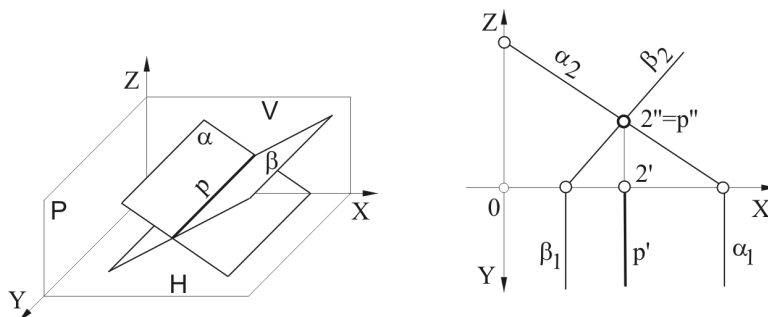
Sl. 5.20: Određivanje presečnice  $p$  ravni  $\alpha$  i  $\beta$  u prostoru i nakon obaranja projekcijskih ravni

Na sl. 5.21 i 5.22 prikazano je određivanje presečnice ravni  $\alpha$  i  $\beta$  zadatih u nekom od specijalnih položaja. U prvom primeru ravan  $\alpha$  je paralelna sa H ravni te se presečnica i horizontala poklapaju.

U drugom primeru presečnica se u drugoj projekciji vidi kao tačka, jer su ravni  $\alpha$  i  $\beta$  upravne na V ravan. Tačka preseka prvih tragova ravni je u beskonačnosti, te je prva projekcija presečnice  $p'$  paralelna sa tragovima  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ .



Sl. 5.21: Određivanje presečnice  $p$  ravni  $\alpha$  i  $\beta$  kada je  $\alpha //$  sa H, u prostoru i u projekcijama

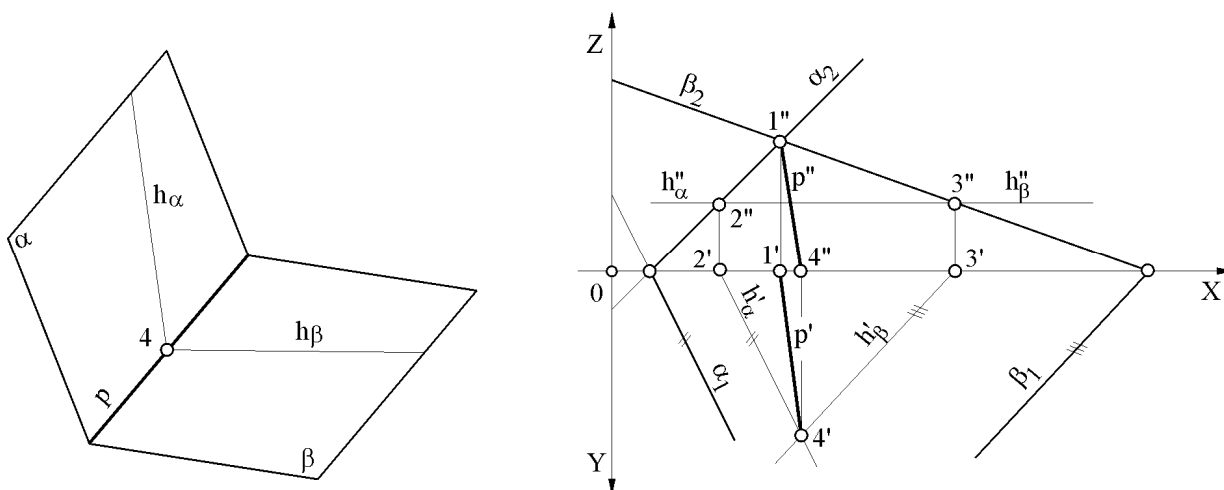


Sl. 5.22: Određivanje presečnice  $p$  ravni  $\alpha$  i  $\beta$  koje su upravne na  $V$  ravan, u prostoru i u projekcijama

#### Zadatak 5.8.

0(1;4). Odrediti presečnicu ravni  $\alpha(0,5;-1;-0,5)$  i  $\beta(7;12,5;2,5)$ .

Osní trag  $\beta_V$  ravni  $\beta$  u odnosu na ostale osne tragove ima veliku vrednost (12,5 cm), tako da je tačka preseka prvih tragova  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  daleko (sl. 5.23). Kako se sve proizvoljne prave na ravnima  $\alpha$  i  $\beta$  međusobno seku u tački koja se nalazi na presečnici tih ravni, za određivanje prve tačke presečnice (tačke 4) najjednostavnije je koristiti horizontale ravni  $h_\alpha$  i  $h_\beta$ . Na proizvoljnom mestu nacrtaju se druge projekcije  $h_\alpha''$  i  $h_\beta''$  i dobijaju tačke  $2''$  i  $3''$ . Kako su to tačke na  $V$  ravni drugi prodori, prve projekcije  $2'$  i  $3'$  su na osi  $X$ . Iz ovih tačaka se nacrtaju prve projekcije horizontala  $h_\alpha'$  i  $h_\beta'$  u čijem preseku se dobija  $4'$ . Tačke  $1'$  i  $4'$  određuju  $p'$ , a tačke  $1''$  i  $4''$  daju  $p''$ .



Sl. 5.23: Određivanje presečnice  $p$  ravni  $\alpha$  i  $\beta$  korišćenjem horizontala  $h_\alpha$  i  $h_\beta$  (Zadatak 5.8.)

#### Zadatak 5.9.

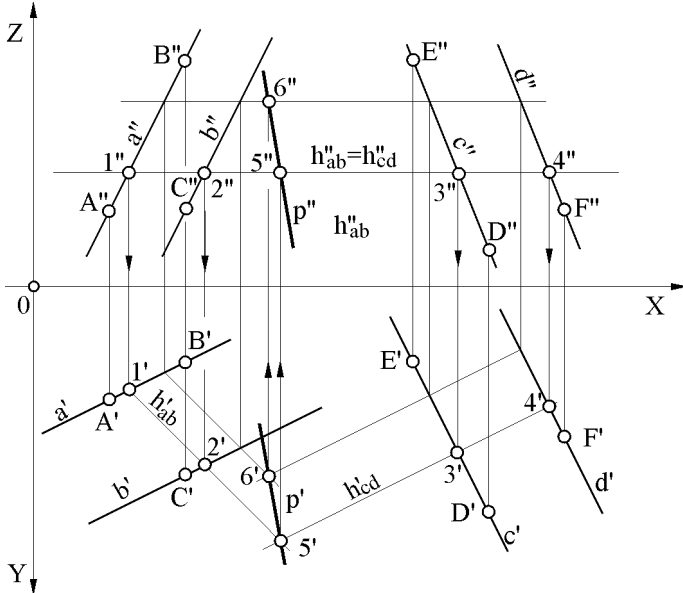
0(1;4). Odrediti presečnicu dveju ravni zadate sa po dve paralelne prave  $a$ ,  $b$  i  $c$ ,  $d$  bez određivanja tragova ravni. Ravan  $\alpha$  je zadata pravom  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(1;1,5;1)$  i  $B(2;1;3)$  i pravom  $b$  koja prolazi kroz tačku  $C(2;2,5;1)$ . Ravan  $\beta$  je određena pravom  $c$  koja prolazi kroz tačke  $D(6;3;0,5)$  i  $E(5;1;3)$  i pravom  $d$  koja prolazi kroz tačku  $F(7;2;1)$ .

Zadatak se rešava slično prethodnom, tj. korišćenjem horizontala. Na proizvoljnom mestu povuku se  $h_{ab}''$  i  $h_{cd}''$  i dobijaju tačke  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  i  $4''$  (sl. 5.24). Prve projekcije ovih tačaka su u preseku spona i prvih projekcija prava. U preseku  $h_{ab}'$  i  $h_{cd}'$  dobija se tačka  $5'$  koja se nalazi na  $p'$ , a  $5''$  je na drugoj projekciji horizontala. Postupak se ponovi još jednom da bi se dobila tačka  $6'$ . Tačke  $5$  i  $6$  određuju presečnicu  $p$ .

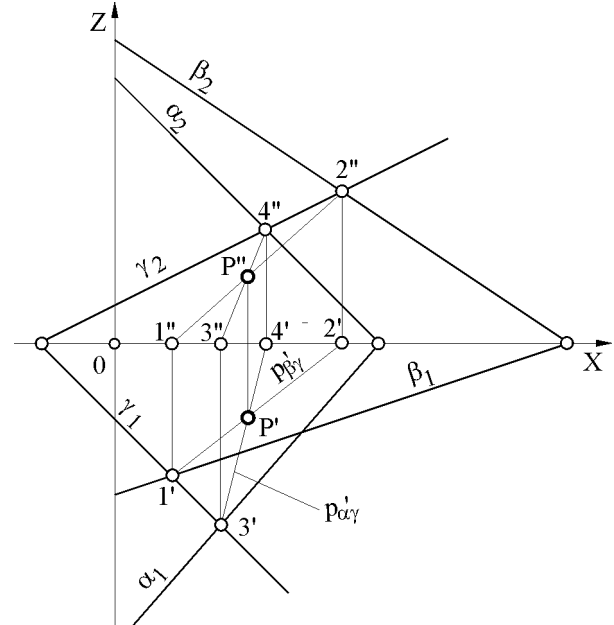
#### Zadatak 5.10.

0(2;5). Odrediti presečnicu triju ravni  $\alpha(3,5;4;3,5)$ ,  $\beta(6;2;4)$  i  $\gamma(-1;1;0,5)$ .

Presek triju ravni daje tačku P koja se dobija na preseku međusobnih presečnica (sl. 5.25). U preseku tragova  $\beta_1$  i  $\gamma_1$  dobija se tačka 1', a u preseku tragova  $\beta_2$  i  $\gamma_2$  tačka 2'', a tačke 1'' i 2' nalaze se na osi X. Tačke 1 i 2 daju presečnicu  $p_{\beta\gamma}$ . Na isti način se odredi presečnica  $p_{\alpha\gamma}$  ravni  $\alpha$  i  $\gamma$  (pomoću tačaka 3' i 4''). U preseku dveju presečnica  $p_{\beta\gamma}$  i  $p_{\alpha\gamma}$  dobija se tačka preseka P. Za određivanje presečnice triju ravni (tačke P) može da se koristiti i bilo koja druga kombinacija presečnica ovih ravni.



Sl. 5.24: Određivanje presečnice  $p$  ravni koje su zadate sa po dve paralelne prave bez određivanja tragova ravni (Zadatak 5.9.)



Sl. 5.25: Presek triju ravni  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  je tačka P (Zadatak 5.10)

#### Zadatak 5.11.

0(3;20). Odrediti zajedničku tačku ravni  $\alpha(7;4;7)$ ,  $\beta(\infty;3;3)$  i  $\gamma(3;-2;3)$ .

#### Zadatak 5.12.

0(6;7). Data je presečnica  $p$  ravni  $\alpha(\infty;5;5)$  i  $\beta$ . Presečnica je određena tačkama  $A(-4;4;?)$  i  $B(-2;0;5;?)$ . Nacrtati tragove ravni  $\beta$  koja prolazi kroz tačku  $C(-4;1;5;5,5)$ .

### 5.5. PRAVA IZVAN RAVNI

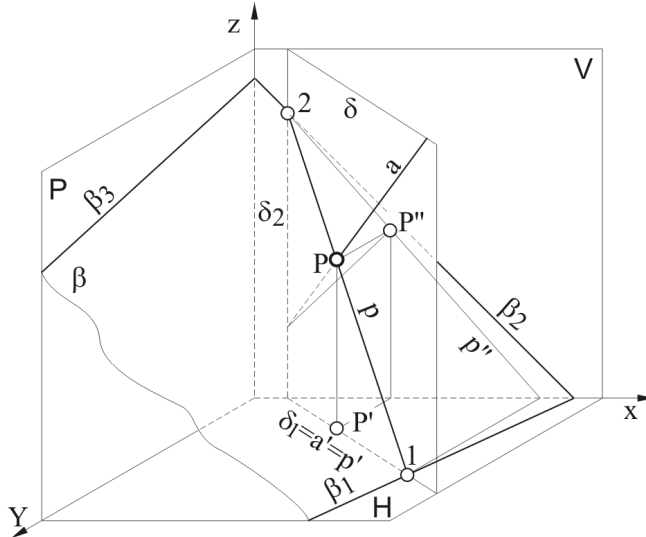
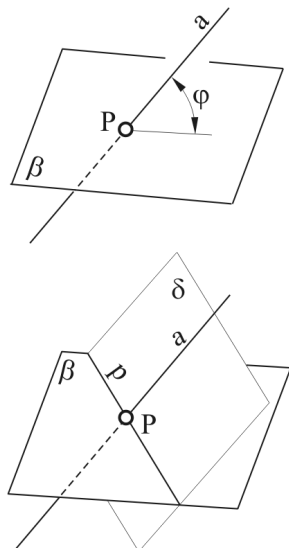
Kada se prava nalazi izvan ravni može biti u proizvoljnom položaju prema ravni, upravna na ravan i paralelna sa njom.

#### 5.5.1. Prava u proizvoljnom položaju izvan ravni (Prodor prave kroz ravan)

Prava u proizvoljnom položaju prema ravni (pod nekim uglom  $\varphi$ ) prodire ravan u tački P, koja se naziva prodorom prave kroz ravan (ne treba brkati sa prodorima prave kroz projekcijske ravni – prvim (1), drugim (2) i trećim (3) prodorom). Za određivanje prodora prave  $a$  kroz ravan  $\beta$ , postavi se kroz pravu  $a$  pomoćna ravan  $\delta$  (sl. 5.26). U preseku prave  $a$  i presečnice ovih ravni  $p$  dobija se prodor P. Zbog jednostavnijeg crtanja pomoćna ravan  $\delta$  nije u proizvoljnom položaju već treba da bude upravna na H ili V ravan i da prolazi kroz pravu  $a$ . Na sl. 5.27 prikazano je određivanje prodora prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  korišćenjem pomoćne ravni  $\delta$  upravne na H ravan. Drugi trag pomoćne ravni  $\delta_2$  paralelan je sa osom Z. Pošto ravan  $\delta$  prolazi kroz pravu  $a$  prva projekcija  $a'$ , prvi trag ravni  $\delta_1$  i prva projekcija presečnice  $p'$  ravni  $\beta$  i  $\delta$  se poklapaju ( $\delta_1=a'=p'$ ).



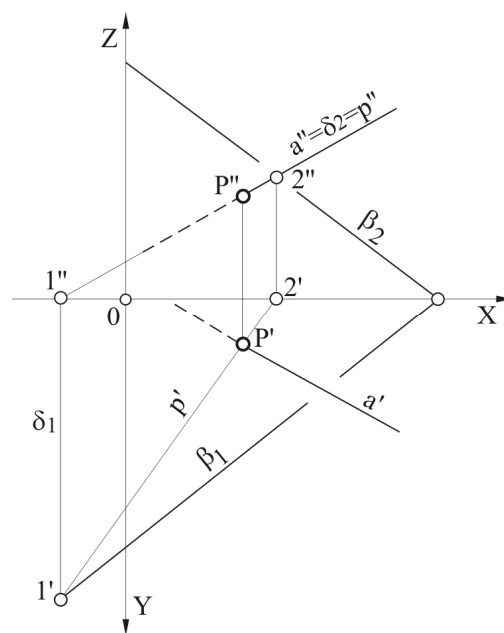
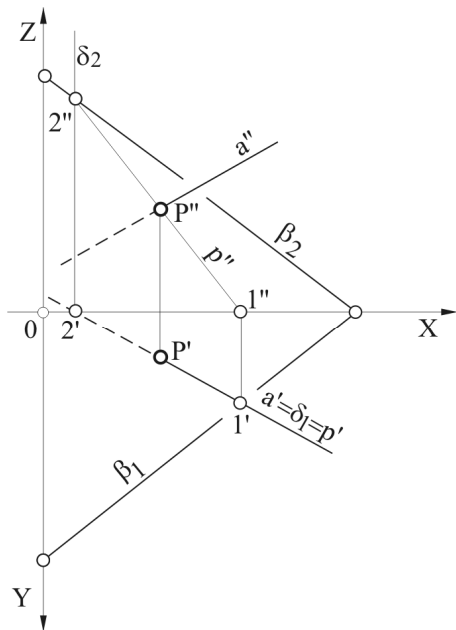
Iz uslova da se presečne prave na ravnima koje se seku, seku na presečnici, dobija se prodor prave kroz ravan (tačka P) što je nakon obaranja projekcijskih ravni prikazano na sl. 5.28. U preseku tragova ravni  $\beta_1, \delta_1$  i  $\beta_2, \delta_2$  dobijaju se projekcije tačaka presečnice,  $1'$  i  $2''$ . Prva projekcija presečnice  $p'$  leži na  $\delta_1$ , a druga  $p''$  je određena tačkama  $1''$  i  $2''$ . U preseku drugih projekcija  $p''$  i  $a''$  dobija se druga projekcija prodora prave a kroz ravan  $\beta$ , tj. tačka  $P''$ . Prva projekcija prodora  $P'$  je u preseku spona iz  $P''$  i prvih projekcija  $a'=p'$ .



Sl. 5.26: Postupak dobijanja prodora prave a kroz ravan  $\beta$  (tačke P)

Sl. 5.27: Postupak određivanja prodora prave a kroz ravan  $\beta$  (tačke P) u prostoru

Druga mogućnost za određivanje tačke P je da se kroz pravu a postavi pomoćna ravan  $\delta$  upravna na V ravan. Tada je prvi trag pomoćne ravni  $\delta_1$  paralelan sa X osom (sl. 2.29). U ovom slučaju druga projekcija prave  $a''$ , drugi trag ravni  $\delta_2$  i druga projekcija presečnice  $p''$  se poklapaju ( $a''=\delta_2=p''$ ). Prva projekcija prodora prave a kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P'$ ) određuje se u preseku prvih projekcija  $a'$  i  $p'$  (pošto se u ovoj projekciji ne poklapaju).



Sl. 5.28: Određivanje prodora prave a kroz ravan  $\beta$  (tačke P), kada je  $\delta \perp H$  ravan

Sl. 5.29: Određivanje prodora prave a kroz ravan  $\beta$  (tačke P), kada je  $\delta \perp V$  ravan

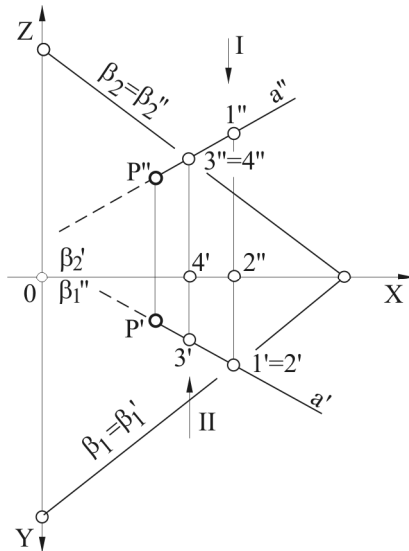
### Određivanje vidljivosti prave i ravni

Princip određivanja vidljivosti prave i ravni je isti kao kod određivanja vidljivosti mimoilaznih prava. Vidljivost se određuje analiziranjem tačaka sečenja projekcija  $a'$  i  $\beta_1'$  i  $a''$  i  $\beta_1''$ . Granične tačke vidljivosti su projekcije prodora  $P$ , odnosno tačke  $P'$  i  $P''$ . Uoči se tačka sečenja prvih projekcija  $a'$  i  $\beta_1'$ , tj. tačke  $1'=2'$  (sl. 5.30). Ove tačke u drugoj projekciji se nalaze:  $1''$  na  $a''$ ,  $2''$  na  $\beta_1''$  ( $\beta_1''$  je na osi  $X$ ). Pošto se prva projekcija dobija posmatranjem druge odozgo, to se prvo vidi tačka  $1''$  koja je na  $a''$  (bliža je posmatraču), a ne vidi se  $2''$  koja je na  $\beta_1''$ . Stoga se prva projekcija prave  $a'$  vidi a  $\beta_1'$  ne vidi (na tom mestu je  $\beta_1$  "prekinuto") sve do prve projekcije prodora  $P'$ , odakle se  $a'$  na dalje ne vidi. Vidljivost u drugoj projekciji se određuje posmatranjem tačaka  $3''=4''$  i njihovog položaja u prvoj projekciji. Posmatrajući od napred (odozdo) prvo se vidi tačka  $3'$  koja je na  $a'$ , pa tek onda  $4'$  koja je na  $\beta_2'$  ( $\beta_2'$  je na osi  $X$ ). Znači da je na tom mestu druga projekcija prave  $a''$  vidljiva sve do tačke  $P''$ , a od tačke  $P''$  na dalje se ne vidi.

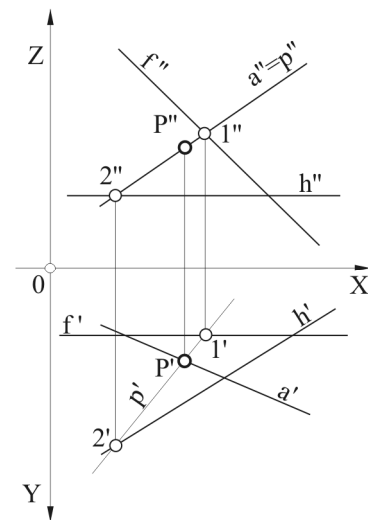
### Određivanje prodora prave kroz ravan koja je zadata sa horizontalom i frontalom

Kada je ravan zadata sa dvema pravama horizontalom  $h$  i frontalom  $f$ , prodor prave  $a$  kroz tako zadatu ravan može se odrediti i bez crtanja tragova ravni (sl. 5.31). Kao i u prethodnom slučaju postavi se pomoćna ravan  $\delta$  kroz pravu  $a$  i odredi presečnica ravni  $\delta$  i ravni koju obrazuju  $h$  i  $f$ . Ravan  $\delta$  (na slici nije označena) upravna je na  $V$  ravan te se zbog toga poklapaju  $a''$  i  $p''$ . Gde druga projekcija presečnice  $p$  seče  $f'$  i  $h'$  dobijaju se tačke  $1''$  i  $2''$ . Prve projekcije ovih tačaka  $1'$ ,  $2'$  su na prvim projekcijama  $h'$  i  $f'$  koje određuju  $p'$ . U preseku  $p'$  i  $a'$  dobija se prva projekcija  $P'$  tačke prodora  $P$  prave  $a$  kroz ravan zadatu sa  $h$  i  $f$ . Druga projekcija prodora  $P''$  je u preseku spone iz  $P'$  i  $a''$ .

Na isti način bi se odredio prodor prave  $a$  kroz ravan koja bi bila zadata sa bilo koje dve presečne prave koje obrazuju ravan.



Sl. 5.30: Određivanje vidljivosti prave  $a$  u odnosu na ravan  $\beta$



Sl. 5.31: Prodor prave  $a$  kroz ravan koja je zadata sa  $h$  i  $f$

### Zadatak 5.13.

0(1;4). Odrediti prodor prave  $a$  kroz ravan  $\beta(4;2,5;3)$  i naznačiti vidljivost. Prava  $a$  je paralelna sa  $H$  i  $V$  ravni, a nalazi se na 1 cm iznad  $H$  i ispred  $V$  ravni.

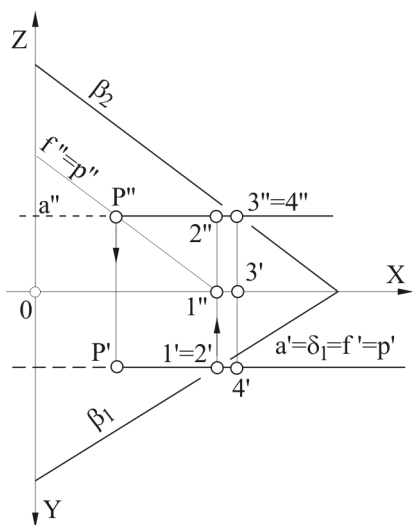
Zadata prava  $a$  je u specijalnom položaju. Postavljanjem pomoćne ravni  $\delta$  kroz pravu  $a$  upravno na  $H$  ravan dobija se  $a'=\delta_1=f'=p'$  i prva projekcija prvog prodora presečnice  $p$  i

frontale  $f$  kroz  $H$  ravan (tačka  $1'$ ). Na osnovu tačke  $1'$  određuju se  $f''=p''$  koje u preseku sa  $a''$  daju drugu projekciju prodora  $P''$  (sl. 5.32). Vidljivost prave  $a$  i ravni  $\beta$  određuje se analiziranjem položaja tačaka  $1'=2'$  i  $3''=4''$  isto kao u zadatku sa sl. 5.30.

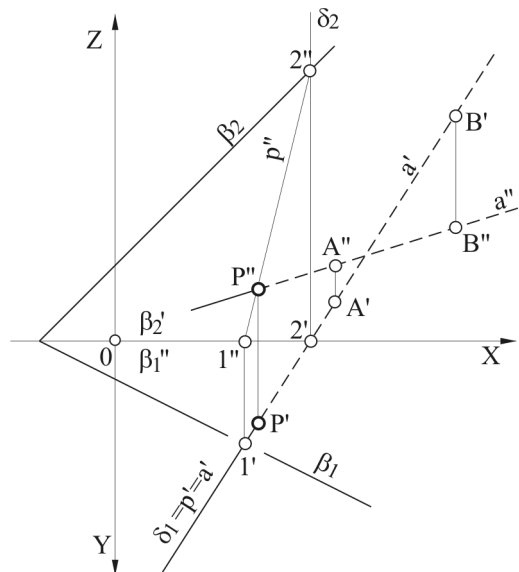
#### Zadatak 5.14.

0(2;5). Odrediti prodor prave  $a$  zadate tačkama  $A(2,5;-0,5;1)$  i  $B(4,5;-3;1,5)$  kroz ravan  $\beta(-1;0,5;1)$ , kao i vidljivost.

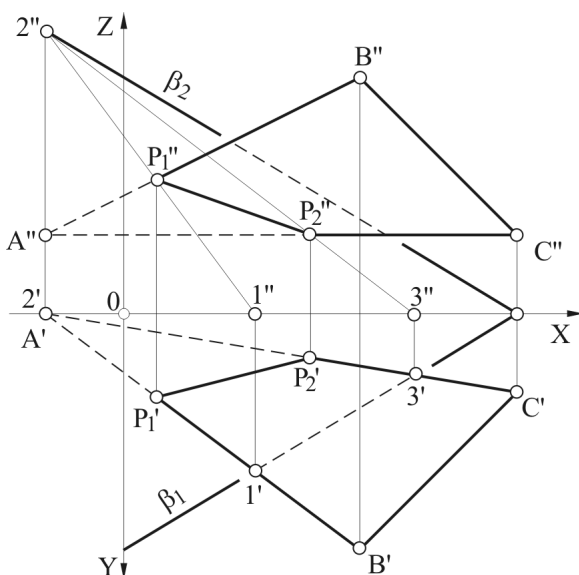
Neka je pomoćna ravan  $\delta$  upravna na  $H$  ravan, te se poklapaju  $\delta_1$ ,  $p'$  i  $a'$  (sl. 5.33). Na osnovu preseka tragova  $\beta_1$ ,  $\delta_1$  i  $\beta_2$ ,  $\delta_2$ . dobijaju se tačke  $1'$  i  $2''$ , a na osi  $X$  su  $1''$  i  $2'$ . Odgovarajuće projekcije tačaka  $1$  i  $2$  određuju odgovarajuće projekcije presečnice  $p$ . U preseku  $p''$  i  $a''$  dobija se druga projekcija prodora  $P''$ .



Sl. 5.32: Prodor prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  (Zadatak 5.13.)



Sl. 5.33: Prodor prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  (Zadatak 5.14.)



Sl. 5.34: Prodor trougla  $ABC$  kroz ravan  $\beta$  (Zadatak 5.15.)

#### Zadatak 5.15.

0(2;5). Odrediti presek ravni zadate sa tačkama  $A(-1;0;1)$ ,  $B(3;3;3)$  i  $C(5;1;1)$  kroz ravan  $\beta(5;3;3)$  kao i vidljivost.

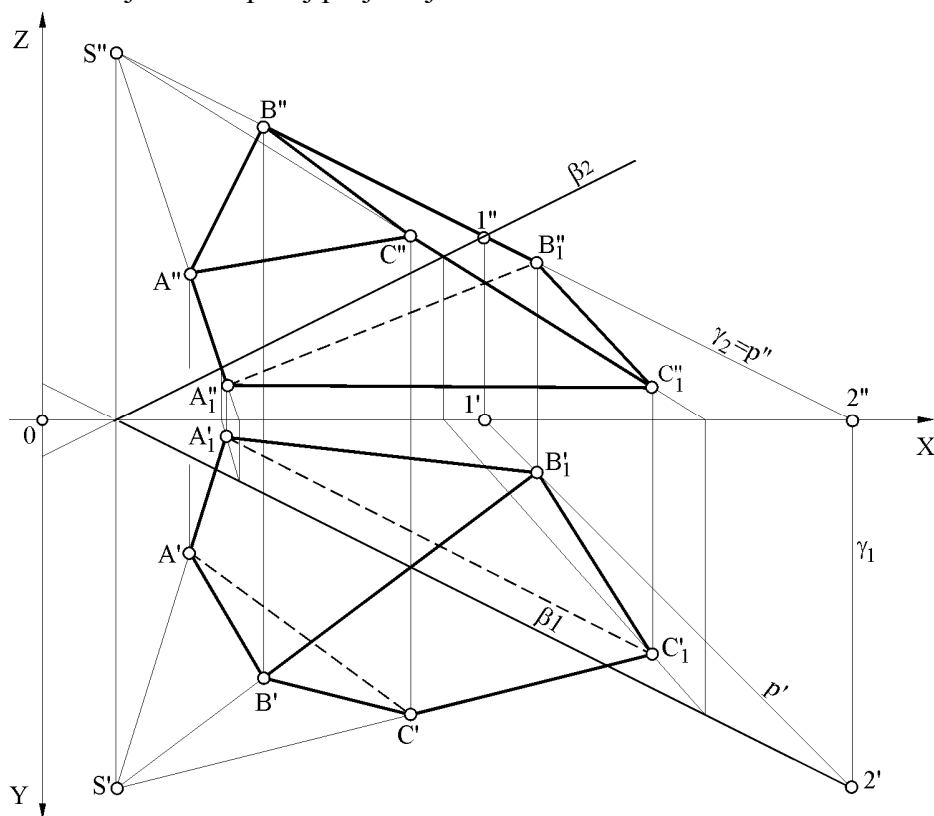
Odredi se prodor duži  $AB$  kroz ravan  $\beta$  posmatrajući ih u prvoj projekciji ( $A'B'$ ) gde se dobijaju tačke  $1'$  i  $2'$ . Na osnovu druge projekcije ovih tačaka dobija se druga projekcija prodora  $P_1''$ . Postupak se ponovi za duž  $AC$  (tačke  $2'$  i  $3'$ ) i odredi tačka  $P_2''$ . Spajanjem projekcija tačaka  $P_1$  i  $P_2$  dobijaju se projekcije presečnice po kojoj se seku ravni (sl. 5.34). Vidljivost se određuje posmatrajući tragove ravni i ivice trougla kao mimoilazne prave. Granica vidljivosti je ivica  $P_1$  i  $P_2$ .

**Zadatak 5.16.**

0(1;6). Iz tačke  $S(1;5;5)$  nacrtati projekcije trougla  $A(2;2;2)$ ,  $B(3;3;5;4)$  i  $C(5;4;2;5)$  na ravan  $\beta(1;-0,5;-0,5)$ .

Iz tačke  $S$  kroz tačke trougla  $ABC$ , povuku se prave i odrede njihovi prodori kroz ravan  $\beta$  korišćenjem pomoćnih ravni. Pomoćna ravan  $\gamma$  postavljena je kroz tačke  $S$  i  $B$  ( $\gamma \perp V$ , te  $\gamma_2$  prolazi kroz tačke  $S''B''$ ). Postupak se ponovi i kroz tačke  $S, A$  i  $S, C$ . Prodori prava  $SA, SB$  i  $SC$  kroz ravan  $\beta$  su tačke  $A_1, B_1$  i  $C_1$  koje predstavljaju projekciju trougla  $ABC$  na ravan  $\beta$  (sl. 5.35). Spajanjem dva trougla  $ABC$  i  $A_1B_1C_1$  dobijaju se ivice odsečene (zarubljene) trostrane kose piramide, odnosno spajanjem projekcija ovih tačaka dobijaju se projekcije piramide.

Vidljivost se određuje analizirajući položaje ivica zarubljene piramide u odnosu na posmatrača za svaku projekciju. Sve spoljašnje konturne ivice se vide, jer nisu zaklonjene, a to su u drugoj projekciji  $A''A_1'', A_1''C_1'', C_1''B_1'', B_1''B''$  i  $B''A''$ . Druga projekcija  $C''$  roglja  $C$  nalazi se unutar konture druge projekcije i može da se vidi ili ne vidi. Rogalj  $C$  u prvoj projekciji  $C'$  je najbliži posmatraču gledajući prvu projekciju odozdo, te se  $C''$  vidi i vide se sve ivice iz ovog roglja:  $C''A'', C''B''$  i  $C''C_1''$ . Ivica  $A_1''B_1''$  se ne vidi jer su ove tačke u prvoj projekciji ( $A_1'B_1'$ ) posmatrajući odozdo iz prve projekcije, najdalje od posmatrača. Na isti način se odredi vidljivost i u prvoj projekciji.



Sl. 5.35: Projekcija trougla  $ABC$  na ravan  $\beta$  iz tačke  $S$  (Zadatak 5.16.)

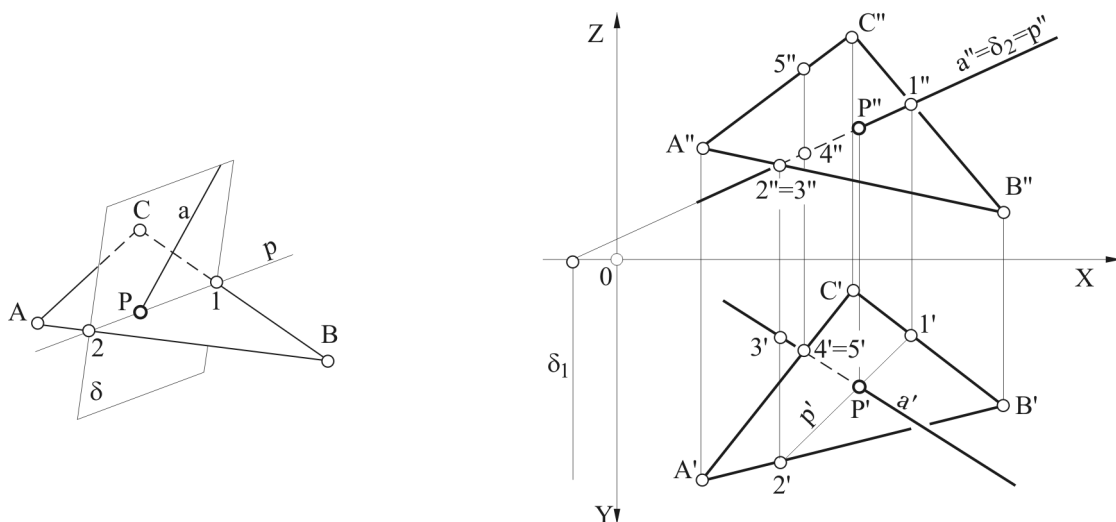
**Zadatak 5.17.**

0(3;7). Date su prave:  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(-1;4;4)$  i  $B(3;5;2;1)$ ;  $b$  kroz tačku  $C(3;1;3)$  i upravna je na  $H$  ravan i prava  $c$  kroz tačku  $D(0;1,5,1,5)$  i paralelna je sa osom  $X$ . Odrediti prodore datih prava kroz ravan  $\alpha(-2;2;2,5)$ , kao i vidljivost.

**Određivanje prodora prave kroz ravan koja je zadata sa tri tačke**

Pri određivanju prodora prave kroz ravan koja je zadata sa tri tačke koristi se pomoćna ravan  $\delta$  kao i u prethodnim slučajevima. Uzmimo slučaj da se drugi trag pomoćne ravni  $\delta_2$

poklapa se sa  $a''$  i  $p''$  (kada je  $\delta \perp V$  ravan). U preseku  $p''$  i drugih projekcija zadatih duži  $C''B''$  i  $A''B''$  dobijaju se tačke  $1''$  i  $2''$  (sl. 5.36). Njihove prve projekcije  $1'$ ,  $2'$  se nalaze na sponama i prvim projekcijama duži  $C'B'$  i  $A'B'$  koje određuju  $p'$ . U preseku  $p'$  i  $a'$  dobija se prva projekcija prodora  $P'$ . Vidljivost se određuje posmatrajući druge projekcije prave  $a''$  i duži  $A''B''$  koje se mimoilaze, odnosno analizirajući položaje tačaka  $2''$ ,  $3''$  i  $2'$ ,  $3'$ . Kako se tačka  $2'$  nalazi na duži  $A'B'$  koja je bliža posmatraču u drugoj projekciji ta duž  $A''B''$  se vidi, a ne vidi  $a''$ . Granica vidljivosti je druga projekcija prodora  $P''$ . Na isti način se odredi vidljivost u prvoj projekciji posmatrajući tačke  $4'=5'$ .

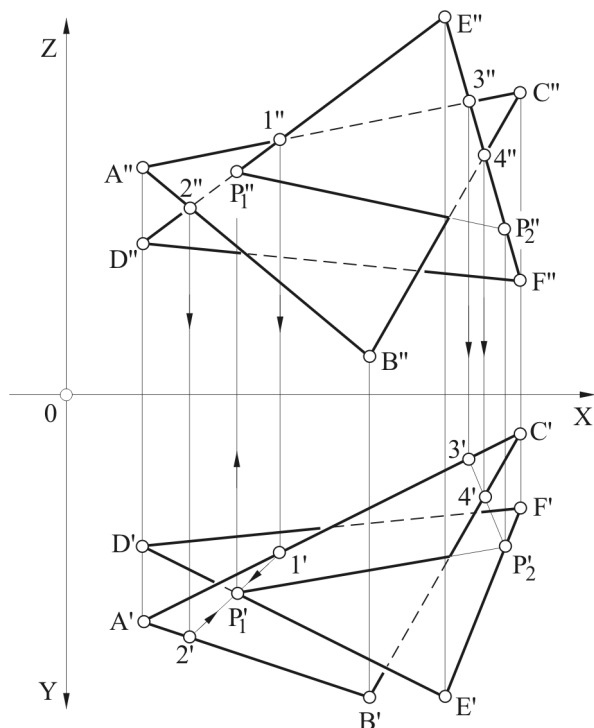


Sl. 5.36: Prodor prave  $a$  kroz ravan koja je zadata tačkama  $ABC$ , bez određivanja tragova ravni, u prostoru i nakon obaranja projekcijskih ravni

### Određivanje presečnice ravni, koje su zadate tačkama

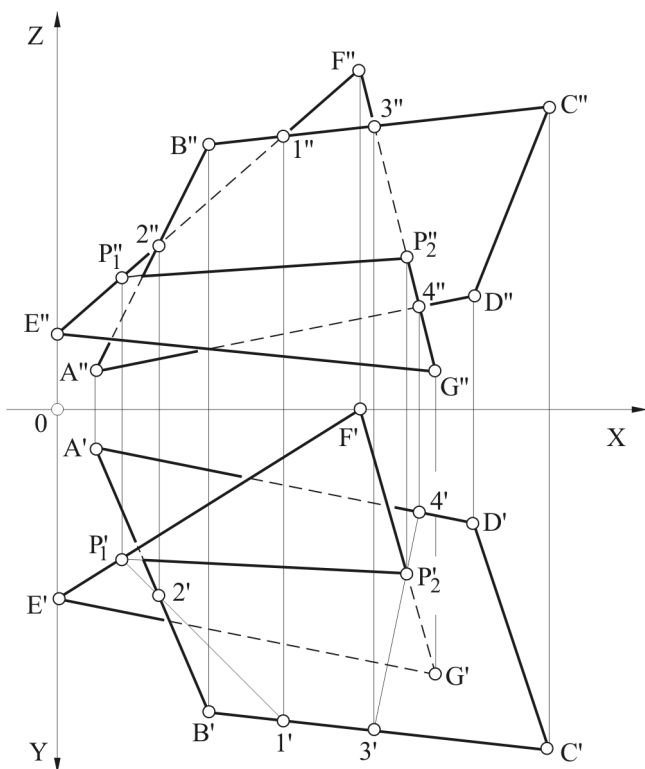
Međusobni presek dveju ravni koje su zadate tačkama dobija se tako što se odrede prodori prava (duži) jedne ravni kroz drugu. Neka je zadata ravan sa tačkama:  $A(1;3;3)$ ,  $B(4;4;0,5)$  i  $C(6;0,5;4)$  i ravan sa tačkama  $D(1;2;2)$ ,  $E(5;4;5)$  i  $F(6;1,5;1,5)$  čiji presek treba odrediti.

Proizvoljno se odaberu dve duži jedne ravni bilo u prvoj ili drugoj projekciji i odrede njihovi prodori kroz drugu zadatu ravan, npr. duži  $DE$  i  $EF$  kroz ravan  $ABC$  posmatrajući drugu projekciju (sl. 5.37). Kroz druge projekcije tih duži  $D''E''$  i  $E''F''$  postavse pomoćne ravni upravne na  $V$  ravan na čijim pravcima se nalaze i presečnice (nisu obeležene). Na već poznati način pomoću tačaka  $1''$ ,  $2''$  i  $3''$ ,  $4''$  odredi se prodor duži  $DE$  i  $EF$  kroz ravan koja je data sa tačkama  $ABC$ . U preseku duži  $1'2'$  i  $D'E'$  dobija se tačka  $P_1'$ , a u preseku  $3'4'$  i  $E'F'$  tačka  $P_2'$ . Projekcije linije po kojoj se seku dve ravni (dva trougla) dobijaju se spajanjem projekcija tačaka  $P_1$  i  $P_2$  i predstavlja



Sl. 5.37: Određivanje presečnice dveju ravni zadate tačkama

samo onaj deo koji obuhvata obe ravni istovremeno. Vidljivost se određuje posmatrajući duži kao mimoilazne. Granica vidljivosti je deo presečne duži  $P_1P_2$ .



### Zadatak 5.18.

0(1;5). Odrediti presek ravni zadate sa četiri tačke  $A(0,5;0,5;0,5)$ ,  $B(2;4;3,5)$ ,  $C(6,5;4,5;4)$ ,  $D(5,5;1,5;1,5)$  i ravni sa tri tačke  $E(0;2,5;1)$ ,  $F(4;0;4,5)$  i  $G(5;3,5;0,5)$ , kao i vidljivost.

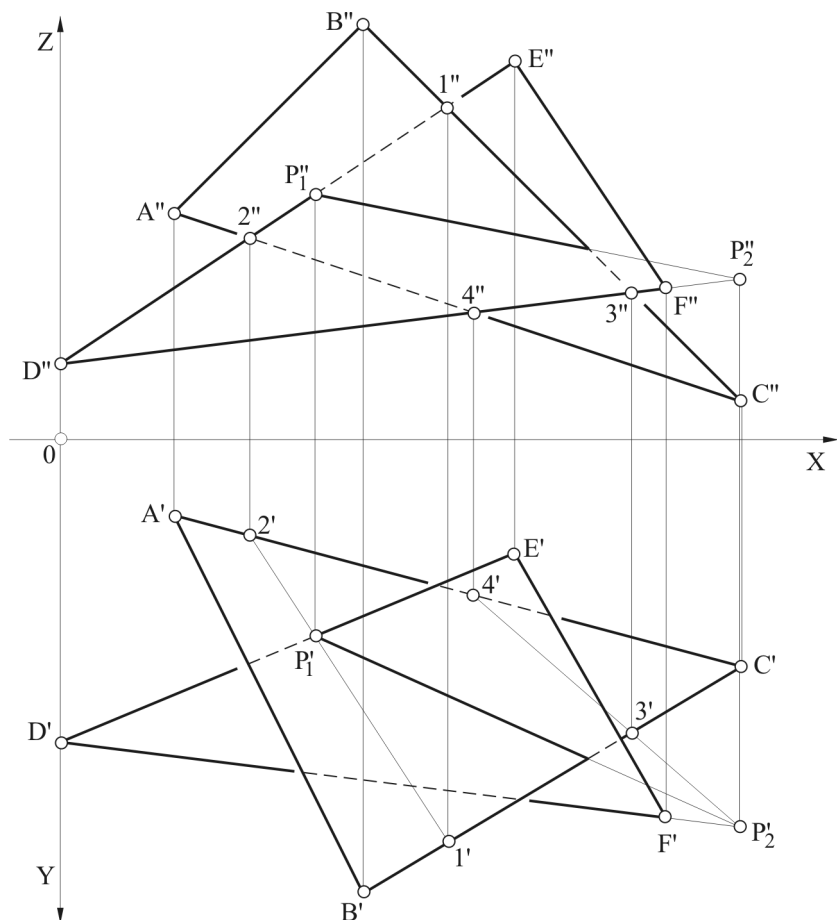
Usvojene su druge projekcije duži  $EF$  i  $FG$  ( $E''F''$  i  $F''G''$ ) čijim prodorima kroz ravan  $ABCD$  se određuje presek (sl. 5.38).

### Zadatak 5.19.

0(1;6). Odrediti presek ravni zadate tačkama  $A(1,5;1;3)$ ,  $B(4;6;5,5)$  i  $C(9;3;0,5)$  i ravni zadate tačkama  $D(0;4;1)$ ,  $E(6;1,5;5)$  i  $F(8;5;2)$  kao i vidljivost.

Rešenje je dato na sl. 5.39.

Sl. 5.38: Presek trougla i četvorougla (Zadatak 5.18.)



### Zadatak 5.20.

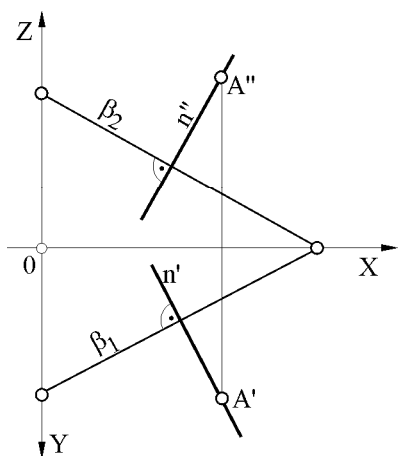
0(1;7). Odrediti međusobni presek ravni koju određuju tačke  $A(0;1;2)$ ,  $B(3;8;6)$  i  $C(8;2;3)$  i ravni zadate tačkama  $D(0;5;0)$ ,  $E(5;0;6)$  i  $F(8;5;6;5)$  kao i vidljivost.

Sl. 5.39: Presek dva trougla (Zadatak 5.19.)

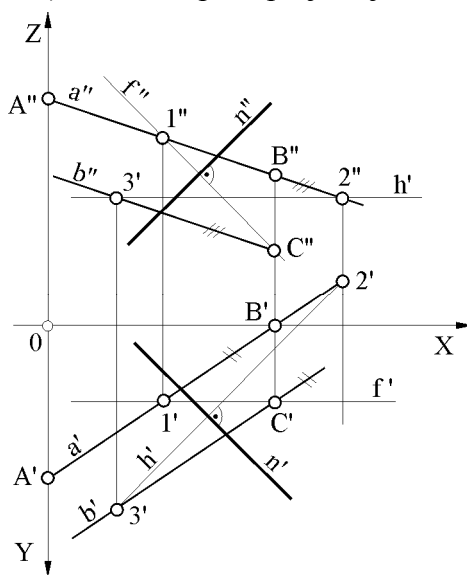
### 5.5.2. Prava upravna na ravan (normala $n$ ) i obrnuto

Prava je upravna na ravan ako je upravna bar na dve prave koje su na toj ravni. Kada je prava upravna na ravan (naziva se normala i označava sa  $n$ ) tada je njena prva projekcija upravna na prvi trag ravni i prvu projekciju horizontale, druga projekcija je upravna na drugi trag ravni i drugu projekciju frontale, odnosno  $n' \perp \beta_1$  i  $n'' \perp \beta_2$  i  $f'$ . Važi i obrnuto, tj. ravan je upravna na pravu ako su odgovarajući tragovi ravni upravni na odgovarajuće projekcije prave ( $\beta_1 \perp a'$  i  $\beta_2 \perp a''$ ). Na sl. 5.39 iz proizvoljne tačke  $A$  koja je izvan ravni  $\beta$  nacrtana je normala  $n$  ravni  $\beta$ .

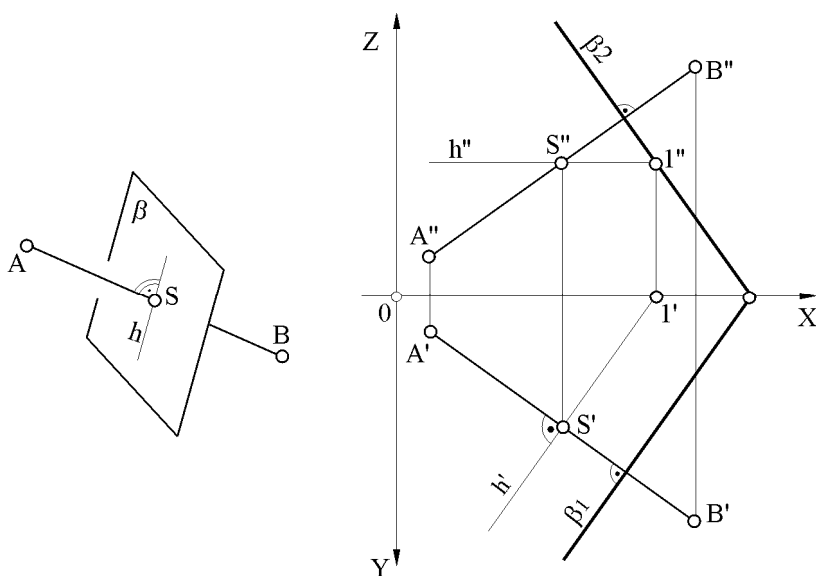
Normala ravni se može odrediti i bez određivanja tragova ravni. Neka je data ravan sa dve paralelne prave  $a$  i  $b$  na koju treba nacrtati normalu  $n$ . Prava  $a$  prolazi kroz tačke  $A(0;2;3)$  i  $B(3;0;2)$ , a prava  $c$  kroz tačku  $C(3;1;1)$ . Odredi se horizontala i frontala ravni (sl. 5.40). Na proizvoljnom mestu (ako zadatkom nije drugačije zadato) nacrtana se prva projekcija normale tako da je  $n' \perp h'$ , a u drugoj projekciji je  $n'' \perp f''$ .



Sl. 5.39: Prava (normala  $n$ ) upravna na ravan  $\beta$



Sl. 5.40: Određivanje normale  $n$  bez crtanja tragova ravni



Sl. 5.41: Simetralna ravan  $\beta$  duži  $AB$

#### Simetralna ravan duži

Ravan koja je upravna na duž i polovi je na dva jednaka dela naziva se simetralna ravan duži. Simetralna ravan duži  $AB$  dobija se tako što se kroz tačku  $S'$  koja je na polovini duži  $A'B'$  nacrtala horizontala u prvoj projekciji tako da je upravna na tu duž ( $h' \perp A'B'$ ) (sl. 5.41). Kroz drugi prodor horizontale  $1''$  povuče se drugi trag  $\beta_2$  tako da je  $\beta_2 \perp A''B''$ , a iz  $\beta_X$  nacrtana se prva trag ravni tako da je  $\beta_1 \perp A'B'$ .

**Zadatak 5.21.**

0(2;5). Odrediti ortogonalno simetričnu tačku  $A_1$ , date tačke  $A(0;-1;3)$  u odnosu na ravan  $\beta(3;2;-3,5)$ .

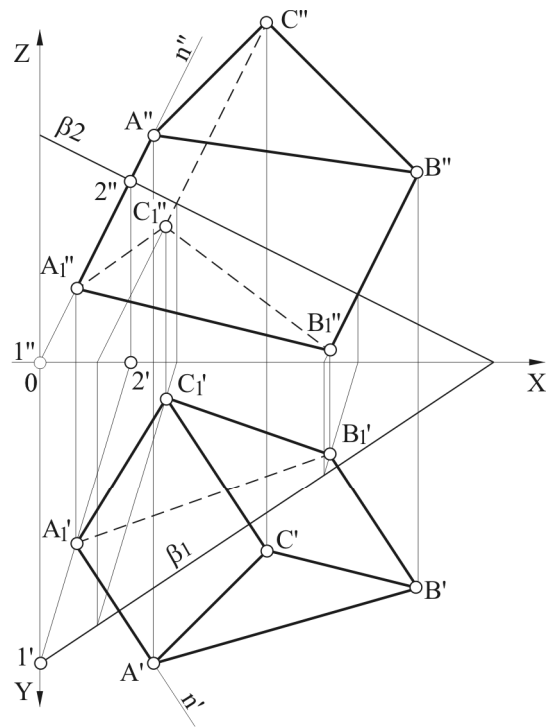
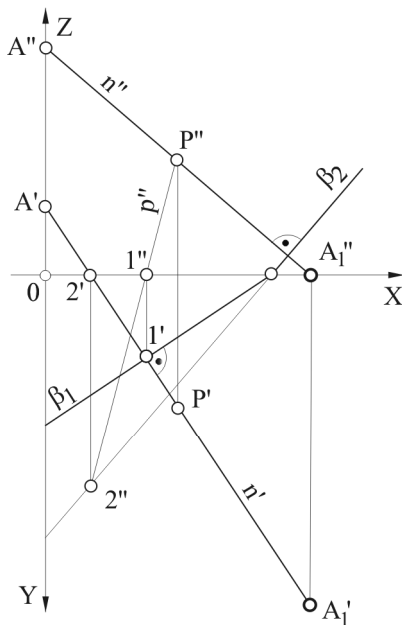
**Ortogonalno simetrične tačke** u odnosu na ravan su one tačke koje se nalaze na projekcijskom zraku koji je upravna na ravan i na istom rastojanju od ravni na suprotnoj strani. Tačke  $A$  i  $A_1$  sa sl. 5.41 su ortogonalno simetrične u odnosu na ravan  $\beta$ .

Zadatak se rešava tako što se iz tačke  $A$  nacrtaju normala na ravan  $\beta$  ( $n' \perp \beta_1$  i  $n'' \perp \beta_2$ ). Korišćenjem pomoćne ravni koja je upravna na  $H$  ravan a prolazi kroz normalu  $n$  odredi se prodor normale kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P$ ). U produžetku normale nanese se isto rastojanje i dobija se tačka  $A_1$  ( $A'P'=P'A_1'$ , tj.  $A''P''=P''A_1''$ ) koja je ortogonalno simetrična tački  $A$  u odnosu na ravan  $\beta$  (sl. 5.42).

**Zadatak 5.22.**

0(1;6). Odrediti ortogonalnu projekciju trougla  $A(1,5;4;3)$ ,  $B(5;3;2,5)$  i  $C(3;2,5;4,5)$  na ravan  $\beta(6;4;3)$ .

Iz tačaka  $A$ ,  $B$  i  $C$  povuku se normale na ravan  $\beta$  i njihovi prodori kroz ravan  $\beta$  daju ortogonalne projekcije trougla (tačke  $A_1$ ,  $B_1$ , i  $C_1$ ). Dobija se isti trougao kao što je zadati, a njihovim spajanjem trostrana prizma (sl. 5.43). Vidljivost se određuje na način opisan u zadatku 5.16, sl. 5.35.



Sl. 5.42: Ortogonalno simetrične tačke  $A$  i  $A_1$  u odnosu na ravan  $\beta$  (Zadatak 5.21.)

Sl. 5.43: Ortogonalne projekcija trougla  $ABC$  na ravan  $\beta$  (Zadatak 5.22.)

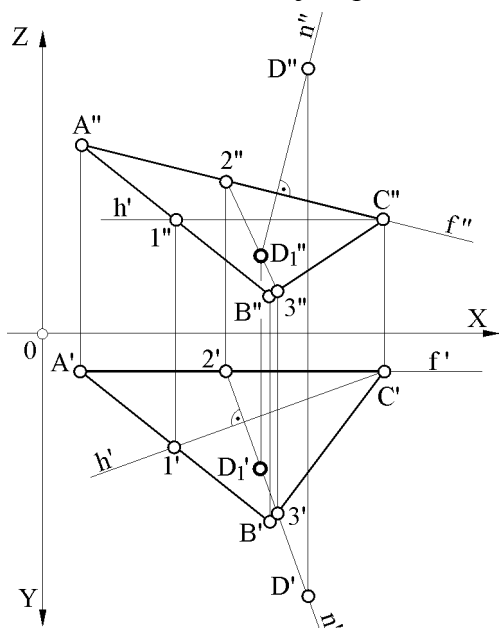
**Zadatak 5.23.**

0(1;5). Odrediti ortogonalnu projekciju tačke  $D(3,5;3;3,5)$  na ravan trougla  $A(0,5;0,5;2,5)$ ,  $B(3;2,5;0,5)$  i  $C(4,5;0,5;1,5)$  bez crtanja tragova ravni.

Ortogonalna projekcija tačke  $D$  na ravan trougla dobija se tako što se kroz tačku  $D$  povuče normala  $n$  na ravan trougla i tamo gde ona probija trougao dobija se tačka  $D_1$  koja predstavlja ortogonalnu projekciju tačke  $D$  na trougao. Kako se ne crtaju tragovi ravni odrede se horizontala i frontala ravni (sl. 5.44). Prva projekcija normale  $n'$  je upravna na  $h'$ , a druga  $n''$  na  $f''$ . Odredi se prodor normale  $n$  kroz ravan  $ABC$  na isti način kao što se odredio



prodor proizvoljne prave  $a$  sa sl. 5.36. Projekcije presečnice su određene projekcijama tačaka 2 i 3. Tačka  $D_1''$  se dobija u preseku  $n''$  u druge projekcije presečnice.



Sl. 5.44: Ortogonalna projekcija  $D_1$  tačke  $D$  na ravan trougla  $ABC$  (Zadatak 5.23.)

#### Zadatak 5.24.

0(1;7). Data je ravan  $\alpha$  sa dvema paralelnim pravama  $a$  i  $b$ . Prava  $a$  prolazi kroz tačke  $A(1,5;4,5;1,5)$  i  $B(3,5;1,5;1,5)$ , a prava  $b$  kroz tačku  $C(5,5;2;1,5)$ . Kroz tačku  $D(3,5;3;?)$  koja je na ravni  $\alpha$  povući normalu na ravan bez crtanja tragova ravni.

#### Zadatak 5.25.

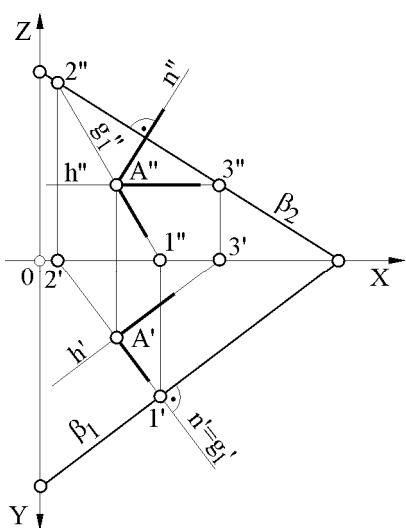
0(6;7). Kroz tačku  $A(-2;2;2)$  nacrtati ravan  $\alpha$  koja je upravna na pravu  $a$ . Prava  $a$  prolazi kroz tačke  $A(-4;5;5)$  i  $B(-1;2;2)$ .

### 5.5.3. Prvi i drugi nagibni triedar

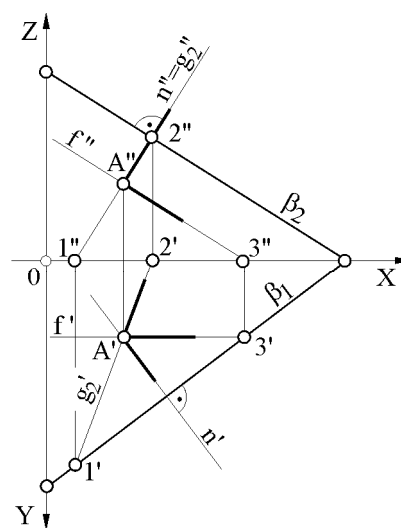
Prvi nagibni triedar sačinjavaju: horizontala  $h$ , prva nagibnica  $g_1$  i normala ravni  $n$  (sl. 5.45). Ove tri prave su međusobno upravne. Prve projekcije  $g_1'$  i  $n'$  se poklapaju i upravne su na prvi trag ravni  $\beta_1$  i prvu projekciju horizontale  $h'$ .

Drugi nagibni triedar sačinjavaju: frontala  $f$ , druga nagibnica  $g_2$  i normala ravni  $n$ . Takođe, i ove tri prave su međusobno upravne. Druge projekcije  $g_2''$  i  $n''$  se poklapaju i upravne su na drugi trag ravni  $\beta_2$  i drugu projekciju frontale  $f''$  (sl. 5.46).

Prvi i drugi nagibni triedar koriste se pri rešavanju zadataka jer predstavljaju tri ivice koje se seku u jednoj tački (roglju) pravilnih geometrijskih tela, npr. kocke.



Sl. 5.45: Prvi nagibni triedar: horizontala  $h$ , prva nagibnica  $g_1$  i normala  $n$

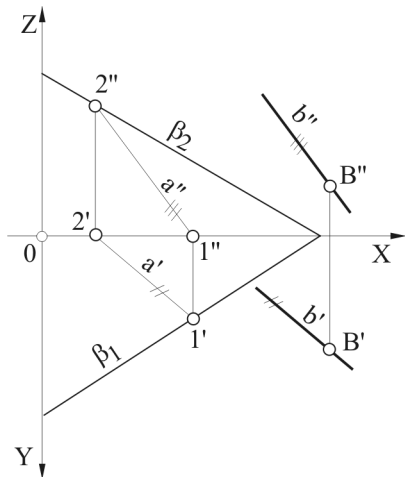


Sl. 5.46: Drugi nagibni triedar: frontala  $f$ , druga nagibnica  $g_2$  i normala  $n$

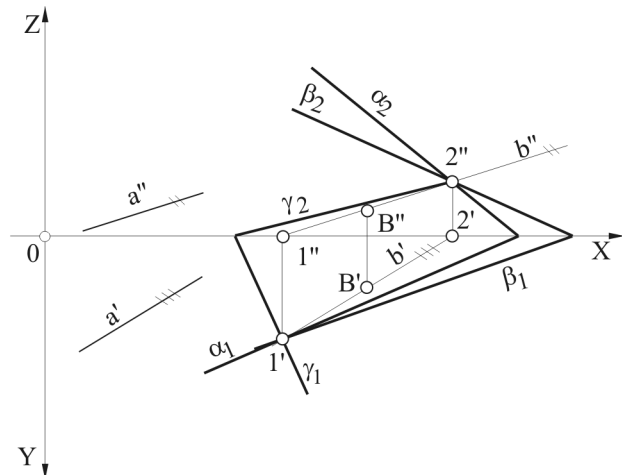
### 5.5.4. Prava paralelna sa ravni i obrnuto

Prava je paralelna sa ravni ako je paralelna bar sa jednom pravom koja je na toj ravni. Na sl. 5.47 nacrtana je prava  $b$  koja je paralelna sa ravni  $\beta$  jer je paralelna sa pravom  $a$  koja je na ravni  $\beta$ . Prava  $b$  prolazi kroz tačku  $B$  koja je izvan ravni  $\beta$ .

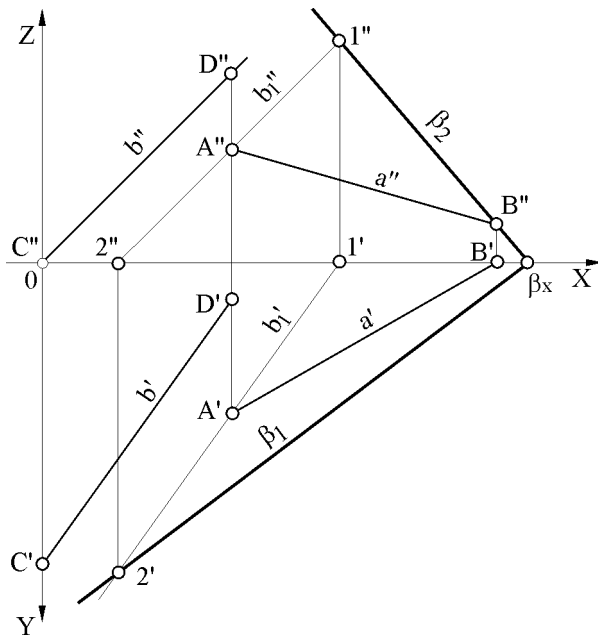
Isti uslov važi i obrnuto: ravan je paralelna sa pravom ako je bar jedna prava na ravni paralelna sa njom. Ravni  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  su paralelne sa zatom pravom  $a$  (sl. 5.48) jer se na njima nalazi prava  $b$  koja je paralelna sa pravom  $a$ . Kroz prvi prodor prave  $b$  ( $1'$ ) prolaze prvi tragovi ravni  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  i  $\gamma_1$ , a kroz drugi prodor ( $2''$ ) drugi tragovi ravni  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  i  $\gamma_2$ .



Sl. 5.47: Prava  $b$  paralelna sa ravni  $\beta$



Sl. 5.48: Ravni  $\alpha$ ,  $\beta$ , i  $\gamma$  paralelne sa pravom  $a$



Sl. 5.49: Ravan  $\beta$  paralelna sa pravom  $b$   
(Zadatak 5.26.)

#### Zadatak 5.26.

0(1;7). Kroz pravu  $a$  određenu tačkama  $A(2,5;2;1,5)$  i  $B(6,0;0,5)$  postaviti ravan  $\beta$  paralelnu sa pravom  $b$  koja prolazi kroz tačke  $C(0;4;0)$  i  $D(2,5;0,5;2,5)$ .

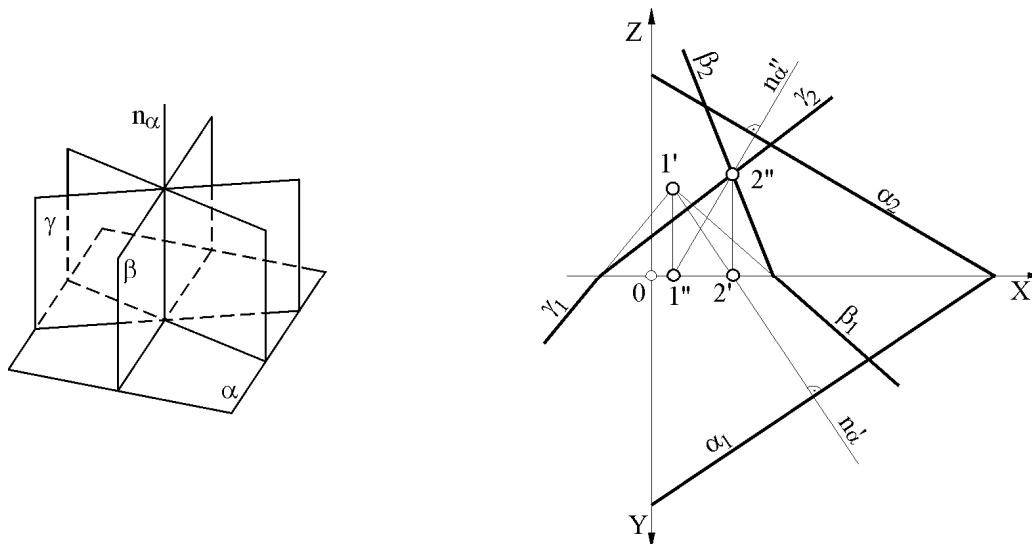
Kroz proizvoljnu tačku na pravoj  $a$ , npr. kroz tačku  $A$  nacrtati pomoćnu pravu  $b_1$  paralelnu sa pravom  $b$  (sl. 5.49). Prodori prava  $a$  i  $b_1$  kroz  $H$  i  $V$  ravni određuju tragove ravni  $\beta$ . Kako je prava  $b_1$  paralelna sa pravom  $b$ , a ravan  $\beta$  prolazi kroz  $b_1$ , tada je ravan  $\beta$  paralelna sa pravom  $b$ . Tačke  $B''$  i  $1''$  su drugi prodori prava  $a$  i  $b_1$  kroz koje prolazi trag  $\beta_2$ . Tačka  $2'$  je prvi prodor prave  $b_1$  i kroz nju i tačku  $\beta_x$  prolazi trag  $\beta_1$ .

### 5.6. UPRAVNE RAVNI

Jedna ravan je upravna na drugu ako ima bar jednu pravu koja je upravna na drugu ravan. Na jednu datu ravan  $\alpha$  možemo povući više ravni tj, familiju ravni (pramen ravni)  $\beta$ ,  $\gamma$ ... koje su upravne na nju. Ravni  $\beta$ ,  $\gamma$ ... su upravne na  $\alpha$  zato što prolaze kroz pravu (normalu  $n_\alpha$ ) upravnu na ravan  $\alpha$  (sl. 5.50 levo). Da bi se odredili tragovi ravni  $\beta$  i  $\gamma$  na proizvoljnom mestu

(ako drugačije nije zadato) nacrtaju se projekcije normale  $n_\alpha$  na ravan  $\alpha$  tako da je  $n_\alpha' \perp \alpha_1$  i  $n_\alpha'' \perp \alpha_2$  i odrede njeni prodori kroz H i V ravni (tačke  $1'$  i  $2''$ ). Kroz ove tačke prolaze prvi i drugi tragovi ravni  $\beta$  i  $\gamma$ .

Tragovi međusobno upravni ravni ne projiciraju se u ortogonalnim projekcijama pod pravim uglom, kada su u proizvoljnom položaju prema projekcijskim ravnima.

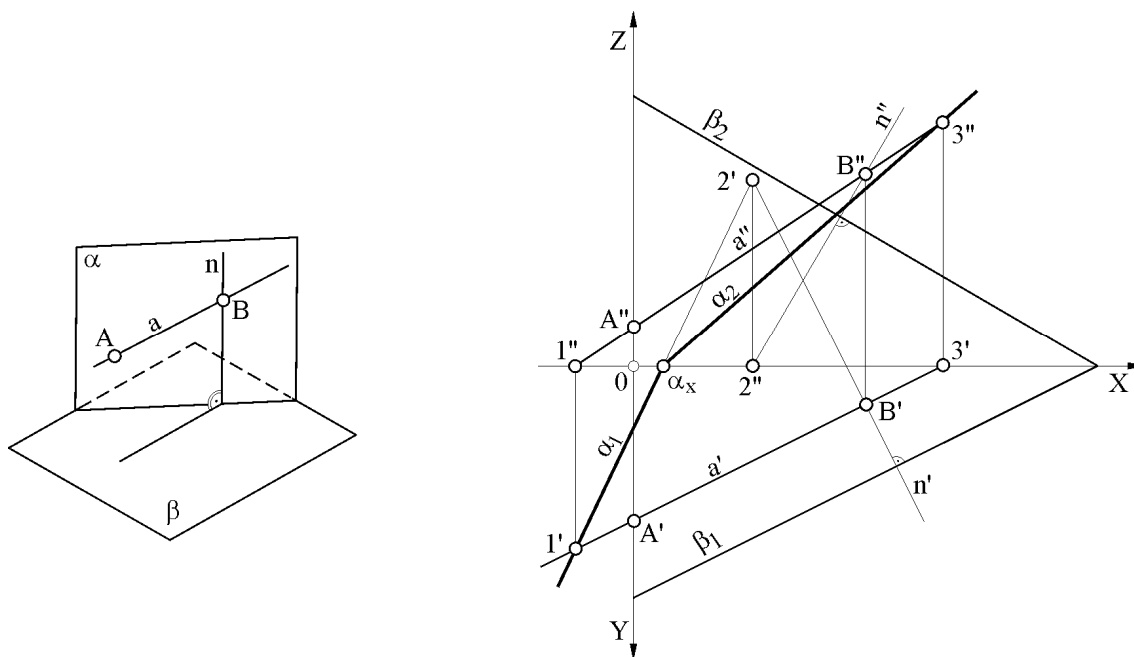


Sl. 5.50: Međusobno upravne ravni ( $\beta$  i  $\gamma \perp \alpha$ )

#### Zadatak 5.27.

0(2;5). Kroz pravu  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(0;2;0,5)$  i  $B(3;0,5;2,5)$  nacrtati ravan  $\alpha$  da bude upravna na ravan  $\beta(6;3;3,5)$ .

Prostorni prikaz rešenja zadatka dat je na sl. 5.51 levo. Kroz jednu tačku prave  $a$  (npr. kroz tačku  $B$ ) nacrtati se normala  $n$  na ravan  $\beta$ . Prava  $a$  i normala  $n$  (seku se u tački  $B$ ) daju ravan  $\alpha$  koja je upravna na ravan  $\beta$ . Kroz odgovarajuće prodore prave  $a$  i normale  $n$  prolaze odgovarajući tragovi ravni  $\alpha$ . Kroz prve prodore, tačke  $1'$  i  $2''$  prolazi trag  $\alpha_1$ , a kroz drugi prodor  $3''$  i  $\alpha_X$  prolazi drugi trag  $\alpha_2$ .



Sl. 5.51: Ravan  $\alpha$  prolazi kroz pravu  $a$  i upravna je na ravan  $\beta$  (Zadatak 5.27.)

**Zadatak 5.28.**

0(8;16). Data je ravan  $\alpha(8;4;-6)$  i prava izvan nje tačkama  $A(1;0;0)$  i  $B(4;3;3)$ . Kroz pravu  $a$  postaviti ravan  $\beta$  upravno na  $\alpha$  i odrediti njihov međusobni presek.

**5.7. REZIME MEĐUSOBNOG ODNOSA TAČKE, PRAVE I RAVNI**

Pregled međusobnih odnosa tačke, prave i ravni dat je u tabeli 5.1, kao i uslova koje ispunjavaju projekcije tačke i prave i tragovi ravni u ortogonalnim projekcijama.

Tabela 5.1: Rezime međusobnog odnosa tačke, prave i ravni

Tačke A i B i prava a			
Tačka i tačka	Podudarne tačke <sup>1</sup>	$A' = B', A'' = B'', A''' = B'''$	
	Nepodudarne tačke <sup>2</sup>	$A' \neq B', A'' \neq B'', A''' \neq B'''$	
Tačka i prava	Tačka leži na pravoj	$A'$ na $a', A''$ na $a'', A'''$ na $a'''$	
	Tačka izvan prave	Sve projekcije tačke nisu na svim projekcijama prave.	
Tačka i ravan	Tačka leži na ravni	Tačka leži na jednoj pravoj koja leži na ravni.	
	Tačka izvan ravni	Tačka ne leži ni na jednoj pravoj koja leži na ravni.	
Prave a i b			
Prava i prava	Podudarne prave	$a' = b', a'' = b'', a''' = b'''$	
	Nepodudarne prave	$a' \neq b', a'' \neq b'', a''' \neq b'''$	
	Prave se seku	Imaju zajedničku presečnu tačku.	
	Prave su paralelne	$a' // b', a'' // b'', a''' // b'''$	
	Prave se mimoilaze	Nemaju zajedničku presečnu tačku.	
Prava i ravan	Prava leži na ravni	Prodori prave kroz H, V i P ravni su na tragovima ravni: $1'$ na $\alpha_1, 2''$ na $\alpha_2, 3'''$ na $\alpha_3$ .	
	Prava paralelna sa ravni	Prava je paralelna sa pravom koja leži na ravni.	
	Prava izvan ravni	Prava normalna na ravan	$a' \perp \alpha_1, a'' \perp \alpha_2, a''' \perp \alpha_3$
Prava proizvoljna prema ravni		Prodire ravan u tački P pod nekim uglom $\varphi$ .	
Ravan $\alpha$ i $\beta$			
Ravan i ravan	Podudarne ravni	$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3$	
	Nepodudarne ravni	$\alpha_1 \neq \beta_1, \alpha_2 \neq \beta_2, \alpha_3 \neq \beta_3$	
	Paralelne ravni	$\alpha_1 // \beta_1, \alpha_2 // \beta_2, \alpha_3 // \beta_3$	
	Upravne ravni	Imaju zajedničku pravu koja je normalna na ravni.	
	Proizvoljne ravni	Seku se po presečnici p.	

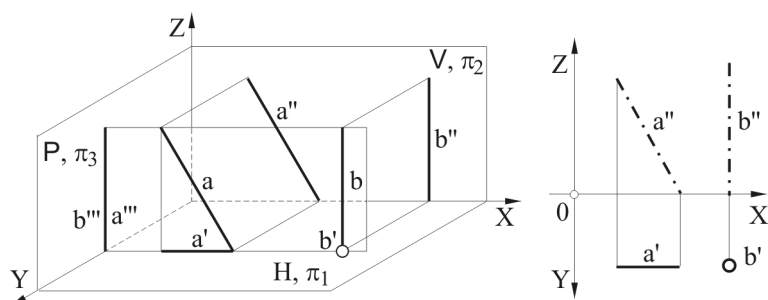
<sup>1</sup> Podudarne tačke su one tačke koje leže jedna na drugoj.

<sup>2</sup> Nepodudarne tačke su one koje ne leže jedna na drugoj.

## 6. TRANSFORMACIJA

Ortogonalne projekcije prave (duži) i ravni mogu biti deformisane (manje od stvarnih) ili prave veličine, što zavisi od njihovog položaja u odnosu na projekcijske ravni.

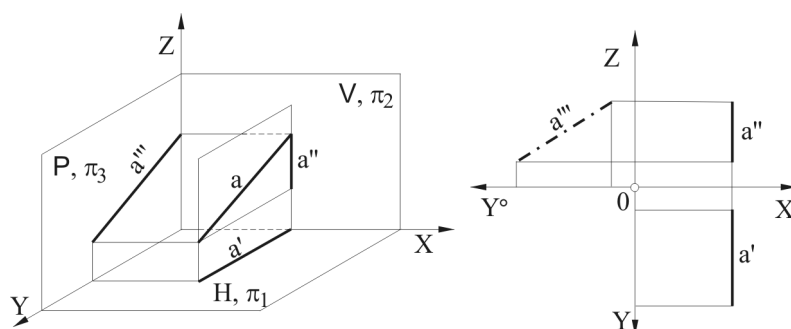
Na sl. 6.1 prikazan je jedan od položaja prava  $a$  i  $b$  u prostoru i u paru ortogonalnih projekcija nakon obaranja projekcijskih ravni. Prava  $a$  je paralelna sa  $V$  ravni ( $\pi_2$ ) stoga je  $a'$  paralelna sa  $X$ , a  $a''$  sa  $Z$  osom. Prava veličina prave  $a$  vidi se u drugoj projekciji  $a''$  (nacrtana linijom crta-tačka-crta, kako će se u daljem tekstu označavati prava veličina).



Sl. 6.1: Projekcije  $a''$ ,  $b''$  i  $b'''$  su prave veličine prava  $a$  i  $b$ , jer su  $a // \pi_2$  i  $b // \pi_2$  i  $\pi_3$

Prava  $b$  je paralelna sa  $V(\pi_2)$  i  $P(\pi_3)$  a upravna na  $H(\pi_1)$  ravan. Prva projekcija prave  $b'$  je maksimalno deformisana (cela se projicira kao tačka). Prava veličina prave  $b$  vidi se u drugoj i trećoj projekciji jer je paralelna sa drugom  $\pi_2$  i trećom  $\pi_3$  ravni.

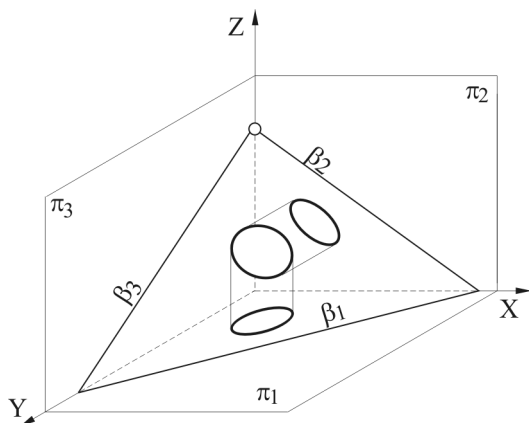
Prava  $a$  sa sl. 6.2 projicira se u pravu veličinu u trećoj projekciji jer je paralelna sa trećom projekcijskom ravni  $\pi_3$ , a deformisana (kraća) je na projekcijama  $a'$  i  $a''$ .



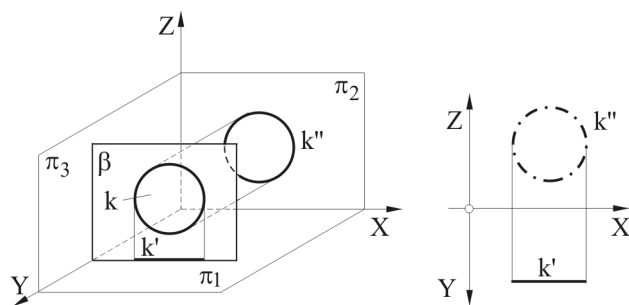
Sl. 6.2: Projekcija  $a'''$  je prava veličina prave  $a$ , jer je  $a // \pi_3$

Kada krug (kružnica) leži na ravni koja je u proizvoljnom položaju sl. 6.3 sve tri projekcije će biti deformisane kružnice, odnosno projiciraće se u različito spljoštene elipse.

Prava veličina kružnice  $k$  sa sl. 6.4 projiciraće se na ravan  $\pi_2$  jer se nalazi na ravni  $\beta$  paralelnoj sa  $\pi_2$ , dok će se na ravni  $\pi_1$  maksimalno deformisati u duž koja je paralelna sa osom  $X$ .



Sl. 6.3: Projekcije kružnice kada je u proizvoljnom položaju su elipse

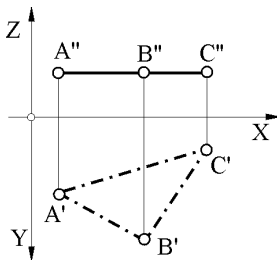


Sl. 6.4: Druga projekcija kružnice  $k''$  je prava veličina (kružnica) jer je paralelna sa  $\pi_2$

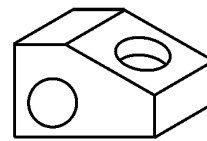
Sledeći primer je trougao ABC koji je paralelan sa  $\pi_1$  ravni, te se stoga u drugoj projekciji projicira u duž paralelnu sa osom X, tako da prva projekcija predstavlja pravu veličinu (sl. 6.5).

Može se izvesti zaključak: Duž (prava) i ravan projicira se u pravoj veličini na onoj projekcijskoj ravni sa kojom je paralelna. Kada je duž ili ravan paralelna sa nekom od projekcijskih ravni, tada je projekcija koja nije na toj ravni paralelna sa osom X, Y ili Z.

Delovi mašina (predmeti crtanja) su vrlo različitog oblika i ne mogu se uvek postaviti prema projekcijskim ravnima tako da se sve njegove površine i ivice vide u pravoj veličini, što je za potpuno razumevanje crteža neophodno. Na primer, sve tri projekcije kružnog otvora na kosoj površini predmeta (sl. 6.6) projiciraće se u elipse. Problem se ne može rešiti postavljanjem predmeta u neki drugi položaj u odnosu na projekcijske ravni, jer će se uvek jedan od dva kružna otvora projicirati kao elipsa ili duž.



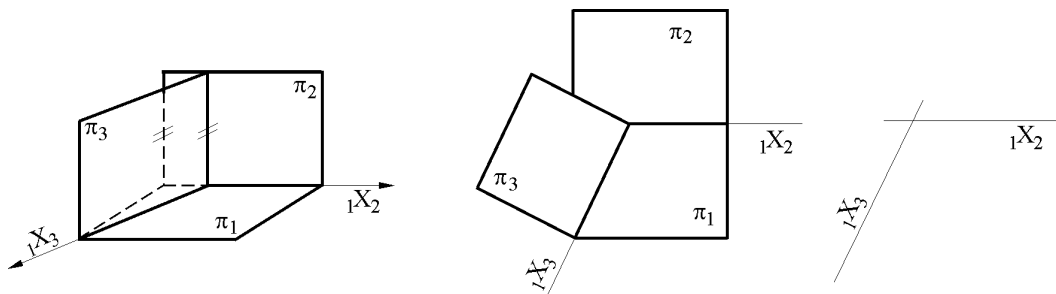
Sl. 6.5: Prva projekcija  $A'B'C'$  je prava veličina trougla



Sl. 6.6: Kružna rupa na kosoj površini predmeta vidi se kao elipsa u sve tri projekcije

Da bi se ovaj problem rešio treća projekcijska ravan  $\pi_3$  se izmešta iz "standardnog" položaja (upravnog na  $\pi_1$  i  $\pi_2$  ravan) u neki potreban, pod uslovom da ostaje upravna na jednu ravan, prvu  $\pi_1$  ili drugu  $\pi_2$  projekcijsku ravan. Izmeštanjem ravan  $\pi_3$  se dovodi u položaj da bude paralelna sa kosom površinom predmeta. Pomeranje treće projekcijske ravni  $\pi_3$  zove se transformacija.

Na sl. 6.7 prikazana je transformacija ravni  $\pi_3$  tako da ostaje upravna na ravan  $\pi_1$ , a pod nekim proizvoljnim (potrebim) uglom na  $\pi_2$ . Linija po kojoj se seku ravni  $\pi_1$  i  $\pi_2$  naziva se osa transformacije (ili kraće osa) i označava se sa  ${}_1X_2$ , a linija po kojoj se seku ravni  $\pi_1$  i  $\pi_3$  označava se sa  ${}_1X_3$ . Da bi se projekcijske ravni dovele u jednu ravan (ravan crtanja), kao i ranije, obaraju se ravni  $\pi_1$  i  $\pi_3$  tako da se nađu u ravni  $\pi_2$  (vertikalnoj ravni). Ravan  $\pi_3$  zamišljeno se odvoji od ravni  $\pi_2$ , obori se za  $90^\circ$  u levu stranu oko ose  ${}_1X_3$  i zajedno sa ravni  $\pi_1$  obori se oko ose  ${}_1X_2$  na dole u položaj ravni  $\pi_2$ . Nakon obaranja, položaj ovako postavljenih projekcijskih ravni prikazuje se samo sa osama  ${}_1X_2$  i  ${}_1X_3$  (sl. 6.7 desno).

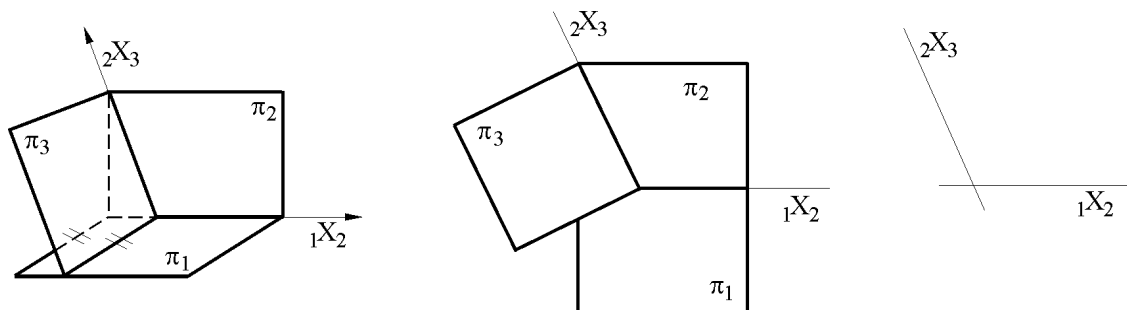


Sl. 6.7: Transformacija ravni  $\pi_3 \perp \pi_1$ : u prostoru, nakon obaranja i označavanje osama  ${}_1X_2$  i  ${}_1X_3$

Druga mogućnost za transformaciju profilne ravni  $\pi_3$  jeste da bude upravna na  $\pi_2$ , a pod proizvoljnim uglom na  $\pi_1$  ravan (tako da bude paralelna sa kosom površinom predmeta).

Horizontalna projekcijska ravan obara se oko ose  $1X_2$  na dole, a ravan  $\pi_3$  oko ose  $2X_3$  na levu ili desnu stranu, dok se ne nađu na ravni  $\pi_2$  (sl. 6.8).

Pomeranje treće projekcijske ravni  $\pi_3$  u jednom ili drugom slučaju je takvo da se prilagođava površinama predmeta crtanja, tj da transformacijska ravan bude paralelna sa nekom kosom površinom predmeta crtanja.



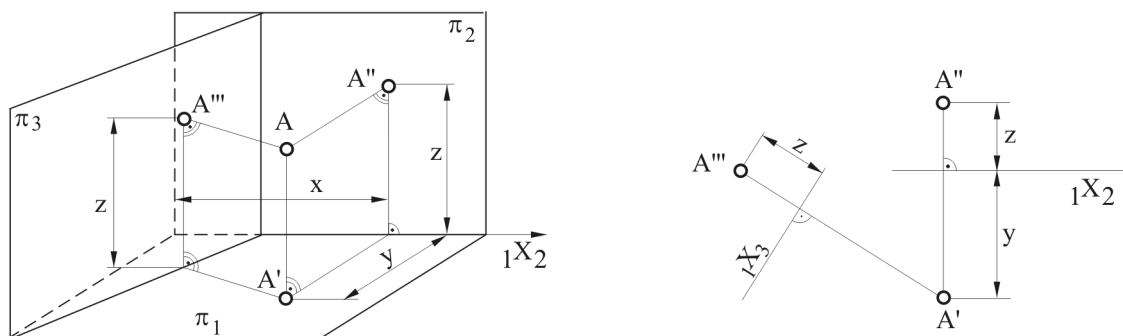
Sl. 6.8: Transformacija ravni  $\pi_3 \perp \pi_2$ : u prostoru, nakon obaranja i označavanje osama  $1X_2$  i  $2X_3$

### 6.1. TRANSFORMACIJA TAČKE

Položaj tačke A u prostoru kada je ravan  $\pi_3$  transformisana definisana je kao i do sada, koordinatama, odnosno odstojanjima od H, V i P ravni. Ortogonalne projekcije tačke dobijaju se pomoću projekcijskih zraka upravnih na ravni  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  i  $\pi_3$  (sl. 6.9). Nakon obaranja projekcijskih ravni, projekcijski zraci (spone) su upravne na ose  $1X_2$  i  $1X_3$  (princip je isti kao kada ravan  $\pi_3$  nije bila transformisana).

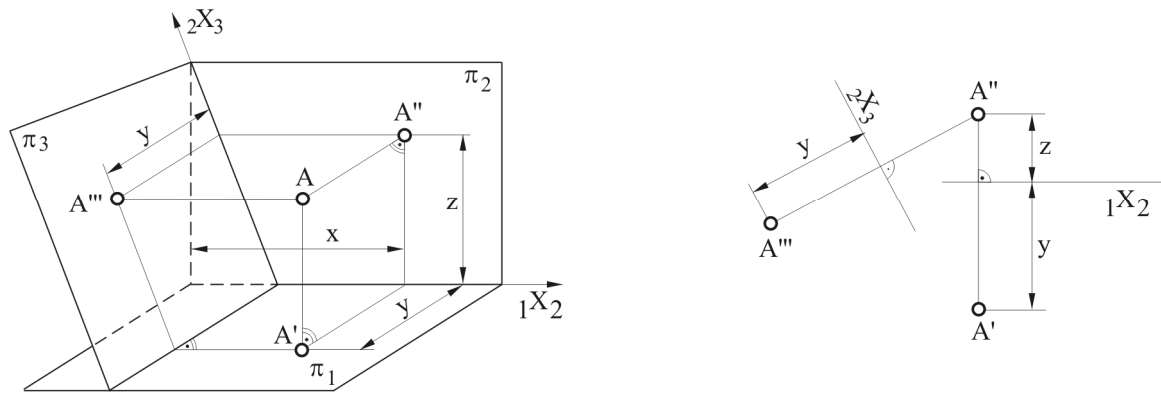
Prva i druga projekcija tačke određuje se kao i ranije, pomoću zadatih koordinata, i uvek su na zajedničkoj vertikalnoj sponi, bez obzira na to kako je ravan  $\pi_3$  transformisana, bilo da je upravna na  $\pi_1$  ili  $\pi_2$  ravan.

Prva projekcija tačke A' je na y rastojanju (koordinata y) od ravni  $\pi_2$  i od ose  $1X_2$ , druga A'' je na z rastojanju (koordinata z) od ravni  $\pi_1$  i ose  $1X_2$ , a treća projekcija A''' je na sponi iz prve projekcije A' koja je upravna na osu  $1X_3$ . Rastojanje treće projekcije A''' od ose  $1X_3$  je isto kao i druge A'' od ose  $1X_2$ , tj. na rastojanju z koordinate.

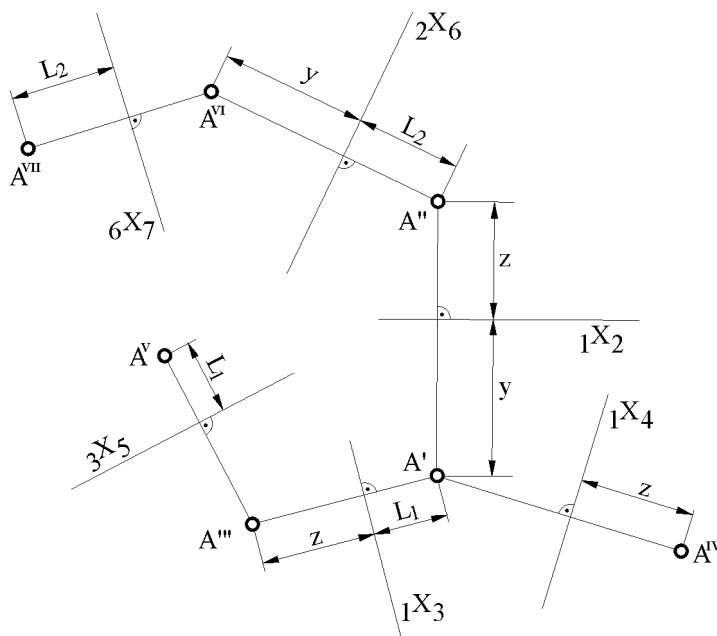


Sl. 6.9: Transformacija tačke A (ortogonalne projekcije tačke A na transformisanu ravan  $\pi_3 \perp \pi_1$ )

Druga mogućnost za transformaciju tačke je takva da je  $\pi_3$  upravna na  $\pi_2$  (sl. 6.10). Položaj prve i druge projekcije tačke A je isti kao u prethodnom slučaju. Treća projekcija tačke A''' dobija se pomoću projekcijskog zraka upravnog na ravan  $\pi_3$ , odnosno nalazi se na sponi upravnoj na osu  $2X_3$  iz tačke A''. Rastojanje treće projekcije od ose  $2X_3$  je jednako rastojanju tačke A od ravni  $\pi_2$ , odnosno na y rastojanju. Nakon obaranja projekcijskih ravni druga A'' i treća projekcija A''' tačke A su na sponi koja je upravna na osu  $2X_3$ .



Sl. 6.10: Transformacija tačke A (ortogonalne projekcije tačke A na transformisanu ravan  $\pi_3 \perp \pi_2$ )



Sl. 6.11: Princip transformacije tačke; korišćenje više transformacijskih ravni

Može se koristiti više transformacijskih ravni  $\pi_3, \pi_4, \dots$  zavisno od potrebe predmeta crtanja, pod uslovom da je svaka nova ravan upravna na prethodnu. Na sl. 6.11 prikazan je princip transformacije tačke kada se koriste više ravni. Svaka nova projekcija je povezana sa prethodnom pomoću spone koja je upravna na osu. Rastojanja projekcija od osa određuju se prema pravilu: rastojanje nove projekcije od nove ose transformacije isto je kao rastojanje prethodne projekcije od njene prethodne ose. Na primer nova osa je  $3X_5$  a prethodna je  $1X_3$ , te je  $L_1$  rastojanje nove projekcije  $A''$  od nove ose, isto kao i rastojanje prethodne projekcije  $A'$  od prethodne ose.

## 6.2. TRANSFORMACIJA PRAVE (DUŽI) – PRAVA VELIČINA PRAVE (DUŽI)

Za određivanje prave veličine prave (duži) postavi se treća projekcijska ravan  $\pi_3$  paralelno sa pravom a, na nekom proizvoljnom rastojanju od prave a i da je pri tome upravna na ravan  $\pi_1$  ili  $\pi_2$ .

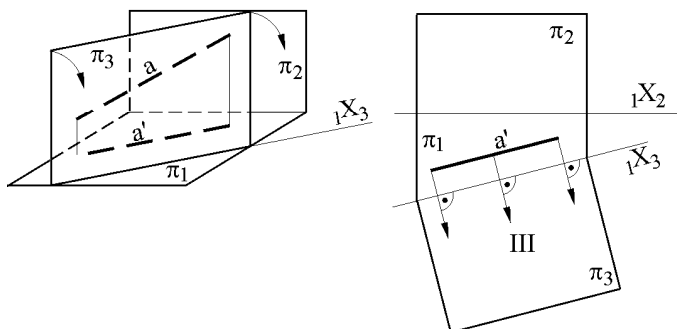
Na sl. 6.12 paralelno sa pravom a postavljena je transformacijska ravan  $\pi_3$  koja je upravna na  $\pi_1$ . U ovom slučaju, osa  $1X_3$  po kojoj se seku ravni  $\pi_1$  i  $\pi_3$ , paralelna je sa prvom projekcijom prave a' ( $1X_3 \parallel a'$ ). Nakon obaranja, ravan  $\pi_3$  zajedno sa  $\pi_1$  će biti ispod ravni  $\pi_2$ .

Treća ortogonalna projekcija tačke  $A'''$  dobija se pomoću spone iz prve  $A'$  upravne na ravan  $\pi_3$ , odnosno upravne na osu  $1X_3$  na rastojanju  $z_A$  od nje (sl. 6.13).

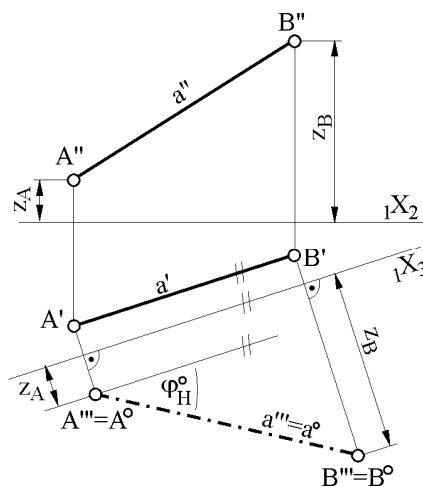
Na isti način se odredi i treća projekcija  $B'''$  tačke B. Treća projekcija prave  $a'''$  dobija se spajanjem trećih projekcija tačaka  $A'''$ ,  $B'''$ . Pošto je prava paralelna sa trećom projekcijskom



ravni, treća projekcija  $a'''$  je prava veličina prave ( $a'''=a^\circ$ ). Oznaka "°" će se koristiti za označavanje projekcija u kojima se vidi prava veličina. Ugao između treće projekcije  $a'''=a^\circ$  i ose  ${}_1X_3$  je prava vrednost nagibnog ugla  $\varphi_H^\circ$  prave  $a$  prema horizontalnici.

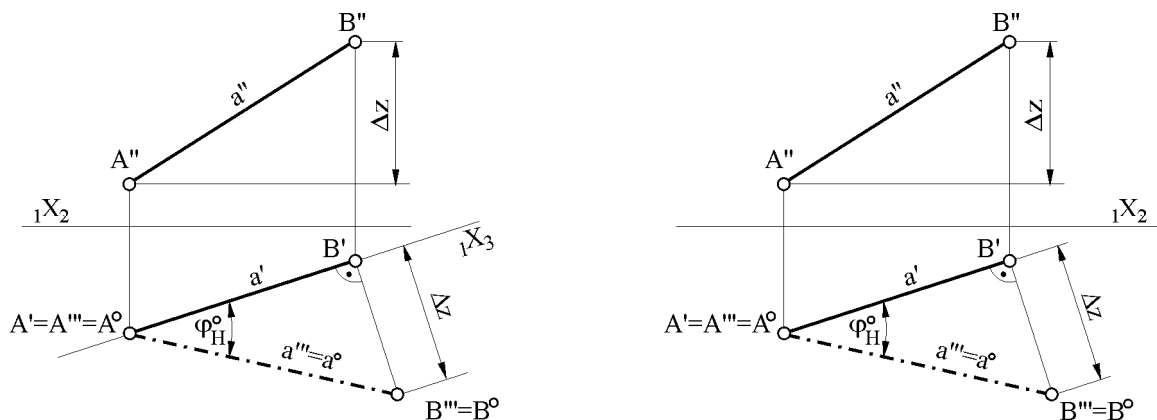


Sl. 6.12: Princip transformacije duži kada je  $\pi_3 \perp \pi_1$



Sl. 6.13: Određivanje prave veličine duži  $A^\circ B^\circ = a^\circ$  transformacijom ( $\pi_3 \perp \pi_1$ )

Da bi crtež zauzeo što manje prostora treća projekcijska ravan  $\pi_3$  može se postaviti kroz samu pravu  $a$  ( $a$  ne na nekom rastojanju od nje) i tada će se osa  ${}_1X_3$  podudarati sa prvom projekcijom  $a'$  (sl. 6.14). Treće projekcije tačaka  $A'''$ ,  $B'''$  mogu se dobiti na osnovu razlike  $z$  koordinata tačaka  $A$  i  $B$  ( $\Delta z$ ). Iz jedne tačke, npr.  $B$  nacrti se spona upravna na osu  ${}_1X_3$  i na nju se nanese  $\Delta z$  što određuje tačku  $B'''=B^\circ$ . Treća projekcija tačke  $A$  poklapa se sa prvom i oborenom,  $A'=A'''=A^\circ$  (sl. 6.14 levo). Kada ravan  $\pi_3$  prolazi kroz pravu (duž) osa  ${}_1X_3$  može da se ne označi, čime se maksimalno smanjuju oznake na crtežu (sl. 6.14 desno). Na ovaj način dobijen je trougao pravih veličina u kojem se vidi prava  $a$ , njen nagibni ugao prema  $H$  ravni i razlika koordinata  $\Delta z$  tačaka  $A$  i  $B$  u pravoj veličini ( $a^\circ$ ,  $\varphi_H^\circ$ ,  $\Delta z$ ).

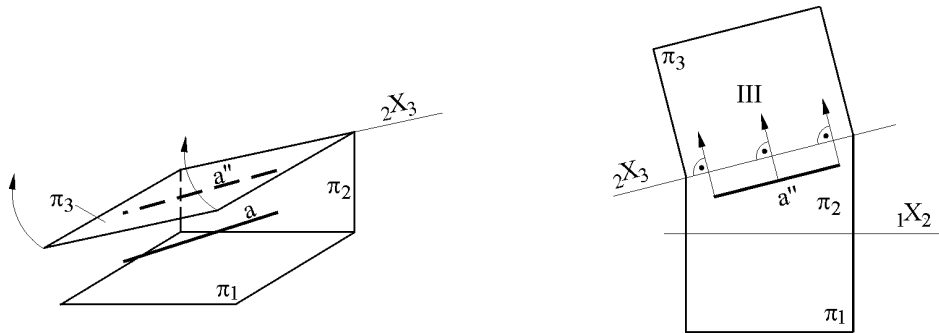


Sl. 6.14: Određivanje prave veličine duži  $A^\circ B^\circ = a^\circ$  transformacijom ( $\pi_3 \perp \pi_1$ ) sa i bez označavanja osa (trougao pravih veličina)

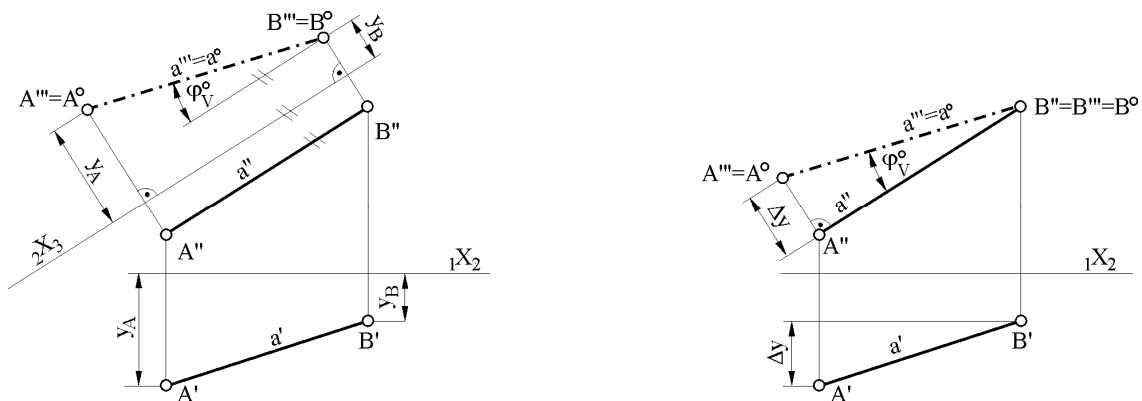
Prava veličina prave (duži) može se odrediti tako da se ravan  $\pi_3$  postavi upravno na ravan  $\pi_2$  i da bude paralelna sa pravom  $a$  na nekom proizvoljnom rastojanju od nje (sl. 6.15). Tada će osa  ${}_2X_3$  po kojoj se seku ravni  $\pi_2$  i  $\pi_3$  biti paralelna sa drugom projekcijom prave  $a''$ . Ravan  $\pi_3$  se obara oko ose  ${}_2X_3$  na gore dok se ne dovede u vertikalnu ravan  $\pi_2$ .

Treće projekcije tačaka  $A'''$  i  $B'''$  dobijaju se na osnovu  $y$  koordinata  $y_A$  i  $y_B$  i treća projekcija predstavlja pravu veličinu duži  $a^\circ$ , odnosno  $a'''=a^\circ$  (sl. 6.16). Ugao između prave veličine  $a^\circ$  prave  $a$  i ose  ${}_2X_3$  je prava veličina nagibnog ugla  $\varphi_V^\circ$  prave  $a$  prema  $V$  ravni. Kada se ravan  $\pi_3$  postavi tako da prolazi kroz samu pravu  $a$ , tada se osa  ${}_2X_3$  poklapa sa  $a''$  i ne

označava se (sl. 6.16 desno). Na taj način se dobija trougao pravih veličina u kojem se u pravoj veličini vidi prava  $a$ , njen nagibni ugao prema  $V$  ravni i razlika koordinata  $\Delta y$  tačaka  $A$  i  $B$  ( $a^\circ$ ,  $\varphi_V^\circ$ ,  $\Delta y$ ).



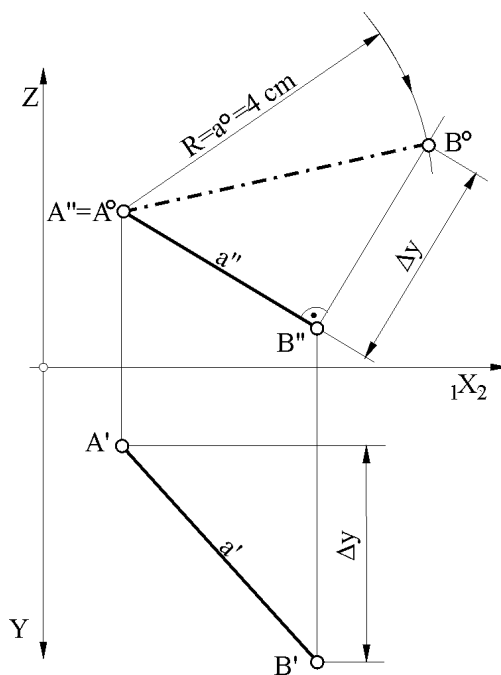
Sl. 6.15: Princip transformacije duži kada je  $\pi_3 \perp \pi_2$



Sl. 6.16: Određivanje prave veličine duži  $A^oB^o = a^o$  transformacijom ( $\pi_3 \perp \pi_2$ ), sa i bez označavanja osa (trougao pravih veličina)

### 6.2.1. Određivanje projekcija duži kada je zadata prava veličina (transformacijom)

Postupak je obrnut od slučaja određivanja prave veličine duži kada su zadate njene projekcije. Neka je zadata duž  $a$  sa tačkama  $A(1;1;2)$  i  $B(3,5;?;0,5)$  čija je prava veličina  $A^oB^o = 4$  cm. Treba odrediti prvu projekciju duži  $a'$ , odnosno  $B'$ .

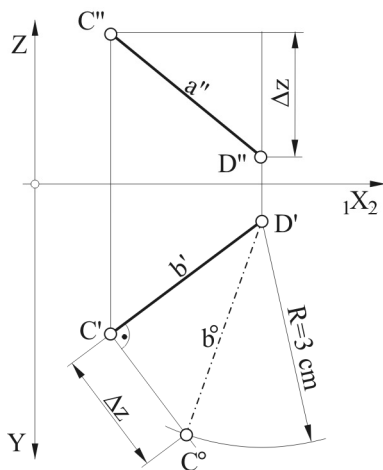


Prema zadatim koordinatama tačaka  $A$  i  $B$  nacrt se druga projekcija duži  $a''$  i prva projekcija tačke  $A'$  (sl. 6.17). Nepoznata je prva projekcija  $a'$ , odnosno  $B'$ . Na osnovu zadatih podataka nacrt se trougao pravih veličina u drugoj projekciji na sledeći način. Iz jedne tačke druge projekcije (npr.  $B''$ ) povuče se linija upravna na  $a''$ . Šestarom otvora  $R = a^o = A^oB^o = 4$  cm iz tačke  $A''$  zaseče se normala podignuta iz tačke  $B''$  i dobija se  $B^o$ , odnosno trougao pravih veličina i razlika koordinata  $\Delta y$  tačaka  $A'B'$ . Dobijena vrednost  $\Delta y$  se nanese na sponu koja prolazi kroz tačku  $B''$  (kako je pokazano na sl. 6.17) i dobija se prva projekcija tačke  $B'$ , a na taj način i nepoznata prva projekcija duži  $a'$ .

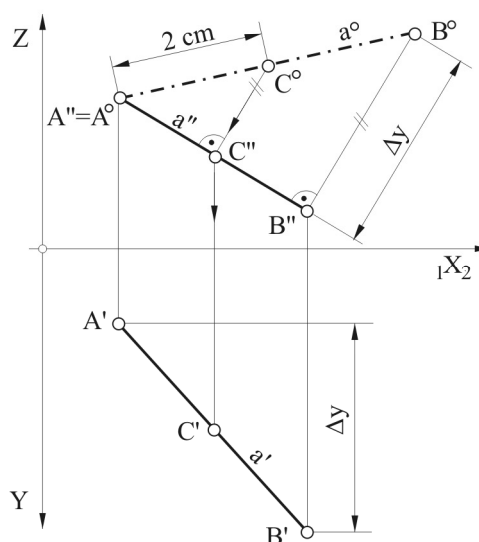
Sl. 6.17: Određivanje prve projekcije duži  $a'$  kada je zadata prava veličina  $A^oB^o = a^o = 4$  cm

Neka je zadata duž  $b$  sa tačkama  $C(1;2;2)$  i  $D(3;0;5;?)$  i njena prava veličina  $CD=3$  cm treba odrediti projekcije duži. Prema zadatim podacima odredi se  $b'$  i  $C''$  (sl. 6.18). Nacrta se trougao pravih veličina u prvoj projekciji na sledeći način. Iz tačke  $C'$  nacrta se linija upravna na  $b'$ , a pomoću šestara otvora  $R=3$  cm iz tačke  $D'$  dobija se  $C^\circ$  i tako određuje razlika  $\Delta z$  koordinata tačaka  $D''$  i  $C''$ .

Kada se želi odrediti projekcija tačke na duži na nekom zadatom rastojanju, npr. tačke  $C$  na duži  $AB$  na rastojanju  $A^\circ C^\circ=2$  cm, postupak je sledeći. Odredi se trougao pravih veličina i dobije  $a^\circ$ , odnosno  $A^\circ B^\circ$  (sl. 6.19). Na duži  $A^\circ B^\circ$  od tačke  $A^\circ$  nanese se duž  $A^\circ C^\circ=2$  cm i dobije se tačka  $C^\circ$  od koje se upravno na  $a''$ , dobija  $C''$ , a zatim se sponom do  $a'$  dobija  $C'$ .



Sl. 6.18: Određivanje druge projekcije duži ( $b''$ ) kada je zadata prava veličina  $C'D$



Sl. 6.19: Određivanje tačke  $C$  na duži  $AB$  na zadatom rastojanju  $A^\circ C^\circ=2$  cm

### 6.2.2. Najkraće rastojanje između prave i tačke postupkom transformacije $a^\circ$

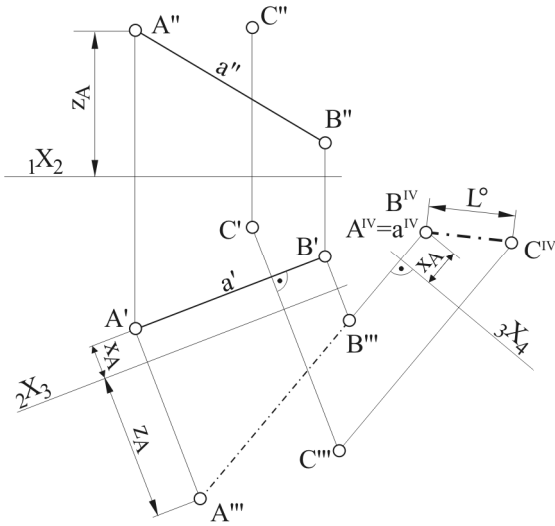
Najkraće rastojanje između prave i tačke je ono koje se dobija povlačenjem normale iz tačke na pravu. Međutim, to rastojanje u projekcijama se ne vidi pod pravim uglom. Stoga je potrebno tako postaviti transformacijske ravni da se i prava projicira kao tačka. Tada će, u toj projekciji, svako rastojanje između tačke i prave biti isto, pa i najkraće.

Postavi se ravan  $\pi_3$  upravno na  $\pi_1$  a paralelna sa pravom  $a$ , te će osa  $1X_3$  biti paralelna sa  $a'$ . Pomoću  $z$  koordinata tačaka  $A$  i  $B$  ( $z_A$ ) odredi se  $A'''$  i  $B'''$ , što predstavlja pravu veličinu te duži (sl. 6.20). Sledeća projekcijska ravan  $\pi_4$  treba da je upravna na  $\pi_3$  i treću projekciju prave  $a'''$ . Četvrta projekcija prave  $a^{IV}$  projicira se kao tačka. Najkraće rastojanje između prave i tačke projicira se u četvrtoj projekciji  $A^{IV}C^{IV}$  i označeno je sa  $L^\circ$ . Kada se kaže najkraće rastojanje, podrazumevaće se prava veličina najkraćeg rastojanja.

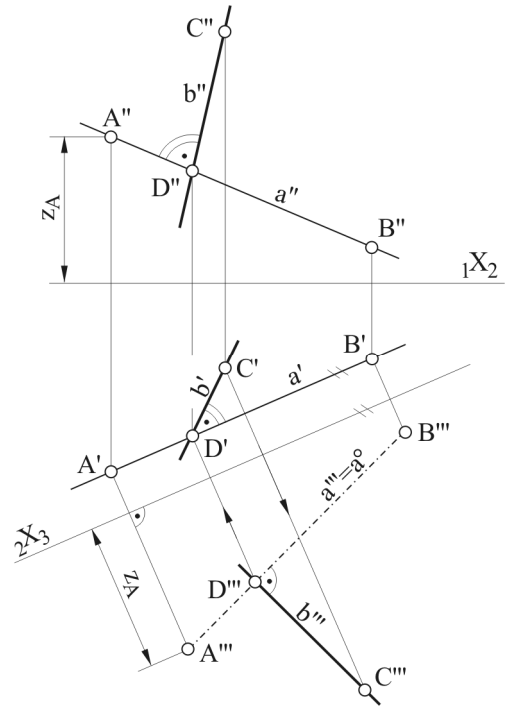
### 6.2.3. Crtanje međusobno upravnih prava postupkom transformacije

Kada su prave u proizvoljnom položaju prema projekcijskim ravnima, a međusobno su upravne, u ortogonalnim projekcijama se prav ugao između njih projicira deformisano, odnosno ne vidi se kao prav ugao ( $90^\circ$ ). Prav ugao između međusobno upravnih prava vidi se kada se jedna od njih vidi u pravoj veličini. Stoga je potrebno jednu od prava, postupkom transformacije dovesti u položaj da se vidi u pravoj veličini, jer će se u toj projekciji prav ugao između njih videti nedeformisan. Neka je data prava  $a$  sa tačkama  $A$  i  $B$ . Treba nacrtati pravu  $b$  koja prolazi kroz tačku  $C$  i da je upravna na pravu  $a$ . Postavi se ravan transformacije  $\pi_3$  čija je osa  $1X_3$  paralelna sa prvom projekcijom  $a'$  prave  $a$  (sl. 6.21). Treća projekcija  $a'''$

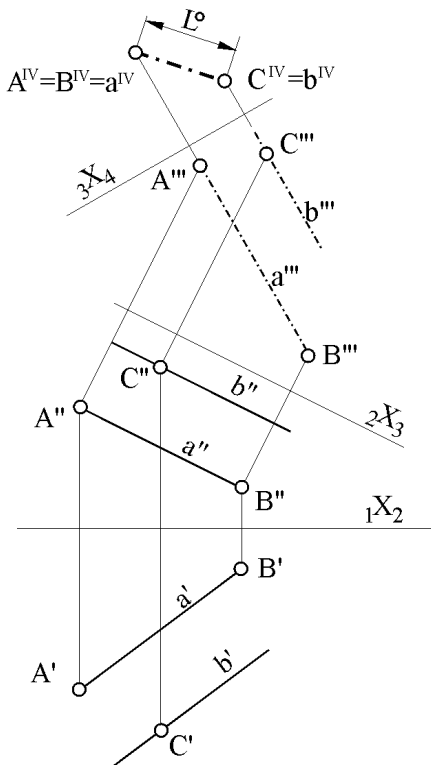
prave  $a$  je njena prava veličina, tj.  $a'''=a^\circ$ . Iz tačke  $C'''$  spusti se normala na  $a'''$  i u preseku sa  $a'''$  dobija se treća projekcija  $D'''$  tačke  $D$ . Tačke  $C$  i  $D$  određuju pravu  $b$  koja je upravna na pravu  $a$ . Tačka  $D$  je tačka u kojoj se seku prave  $a$  i  $b$ , te pomoću spona iz tačke  $D'''$  do  $a'$  i  $a''$  dobijaju se projekcije  $D'$  i  $D''$ .



Sl. 6.20: Najkraće rastojanje  $L^\circ$  tačke  $C$  od prave  $a$  postupkom transformacije



Sl. 6.21: Crtanje prave  $b$  upravne na pravu  $a$



Sl. 6.22: Najkraće rastojanje  $L^\circ$  između paralelnih prava  $a$  i  $b$  postupkom transformacije

#### 6.2.4. Najkraće rastojanje između paralelnih prava postupkom transformacije

Najkraće rastojanje između dve paralelne prave dobija se tako što se iz jedne tačke na pravoj podigne normala na drugu pravu. U ortogonalnim projekcijama to rastojanje se ne vidi pod pravim uglom niti njegova prava veličina. Stoga se transformacijske ravni postavljaju tako da se, u jednoj od projekcija, obe prave projiciraju kao tačke, tada će se u toj projekciji videti prava veličina najkraćeg rastojanja dve paralelne prave.

Neka je zadata prava  $a$  sa tačkama  $A(1;2;1,5)$  i  $B(3;0,5;0,5)$  i njoj paralelna prava  $b$  kroz tačku  $C(2;2,5;2)$ . Treba da se odredi najkraće rastojanje između prava  $a$  i  $b$ . Postavi se transformacijska ravan  $\pi_3$  paralelno sa pravama  $a$  i  $b$  ( ${}_2X_3 // a'', b''$ ) i zatim ravan  $\pi_4$  upravno na treću projekciju prava ( ${}_3X_4 \perp a''', b'''$ ). Na taj način će se prave u četvrtoj projekciji  $A^{IV}$  i  $C^{IV}$  projicirati kao tačke, gde će sva rastojanja, pa i najkraće biti između  $A^{IV}$  i  $C^{IV}$ , odnosno  $L^\circ$  (sl. 6.22).

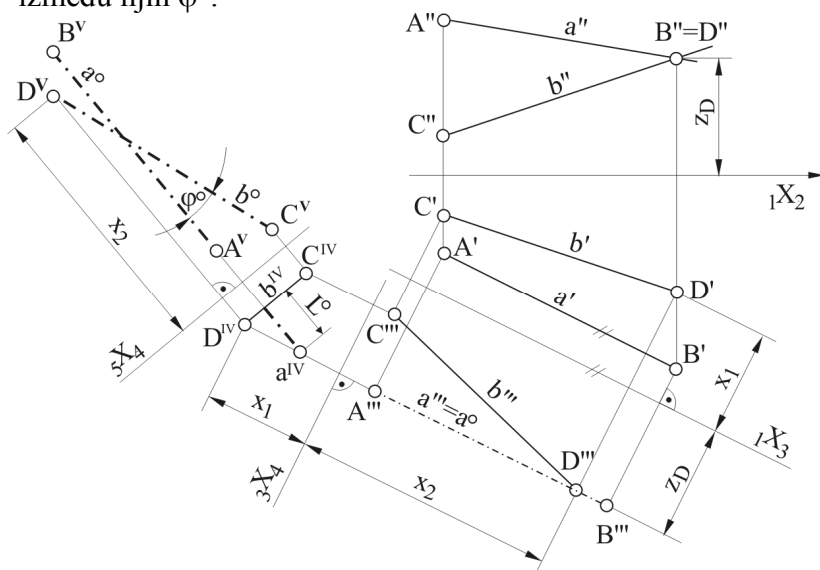
### 6.2.5. Najkraće rastojanje između mimoilaznih prava i ugla između njih, postupkom transformacije

Po definiciji, najkraće rastojanje između dveju mimoilaznih prava dobija se tako što se iz proizvoljne tačke na jednoj pravoj povuče pomoćna prava koja je paralelna sa drugom pravom. Prva i pomoćna prava obrazuju pomoćnu ravan. Spuštanjem normale iz proizvoljne tačke sa druge prave na pomoćnu ravan, dobija se prodor normale kroz pomoćnu ravan. Prava veličina rastojanja između proizvoljne tačke na drugoj pravici i prodora normale kroz pomoćnu ravan, predstavlja najkraće rastojanje između mimoilaznih prava. Određivanje najkraćeg rastojanja između mimoilaznih prava po ovoj definiciji je "komplikovano".

Postupak određivanja najkraćeg rastojanja između mimoilaznih prava transformacijom jednostavnije je i svodi se na to da se postavljanjem projekcijskih ravni  $\pi$  dobiju projekcije prava tako da se jedna od njih projicira kao tačka. Prava veličina ugla između ovih prava videće se u onoj projekciji gde se obe prave projiciraju u pravoj veličini.

Neka je zadata prava  $a$  sa tačkama  $A(1;1;2)$  i  $B(4;2,5;1,5)$  i prava  $b$  sa tačkama  $C(1;0,5;0,5)$  i  $D(4;1;1,5)$  koje se mimoilaze. Treba odrediti pravu veličinu najkraćeg rastojanja i ugla između prava  $a$  i  $b$ .

Postavi se ravan  $\pi_3$  paralelno sa pravom  $a$  ( ${}_1X_3$  je paralelno sa  $a'$ ) i nacrtaju treće projekcije prava u kojoj se prava  $a$  vidi u pravoj veličini,  $a'''=a^\circ$  (sl. 6.23). Zatim se postavi ravan  $\pi_4$  upravno na  $a'''$  ( ${}_3X_4 \perp a'''$ ) gde se u četvrtoj projekciji prava  $a$  projicira kao tačka. Spuštanjem normale iz  $a^{IV}$  do projekcije  $b^{IV}$  dobija se  $L^\circ$ , što predstavlja pravu veličinu najkraćeg rastojanja između mimoilaznih prava. Postavljanjem ravni  $\pi_5$  paralelno sa četvrtom projekcijom prave  $b^{IV}$  ( ${}_5X_4 // b^{IV}$ ) obe prave će se projicirati u pravoj veličini kao i ugao između njih  $\varphi^\circ$ .



Sl. 6.23: Najkraće rastojanje  $L^\circ$  i ugao  $\varphi^\circ$  između mimoilaznih prava  $a$  i  $b$  postupkom transformacije

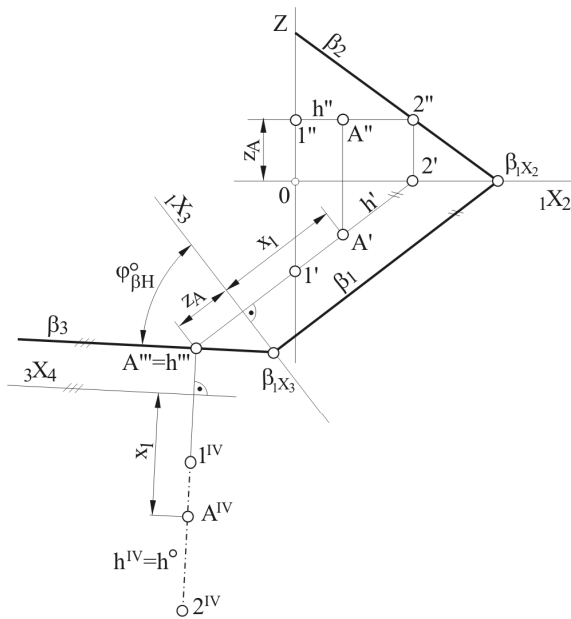
### 6.3. TRANSFORMACIJA RAVNI

Za određivanje traga ravni na transformacijskoj ravni  $\pi$  koristi se prava na ravni bilo proizvoljna ili specijalna (sutražnjice), s obzirom na to da se njihovi prodori nalaze na tragovima ravni. Projekcijska ravan  $\pi$  može da bude u proizvoljnom položaju prema ravni ili upravna na zadatu ravan, odnosno upravna na prvi ili drugi trag ravni, što se pri rešavanju zadataka, uglavnom koristi.

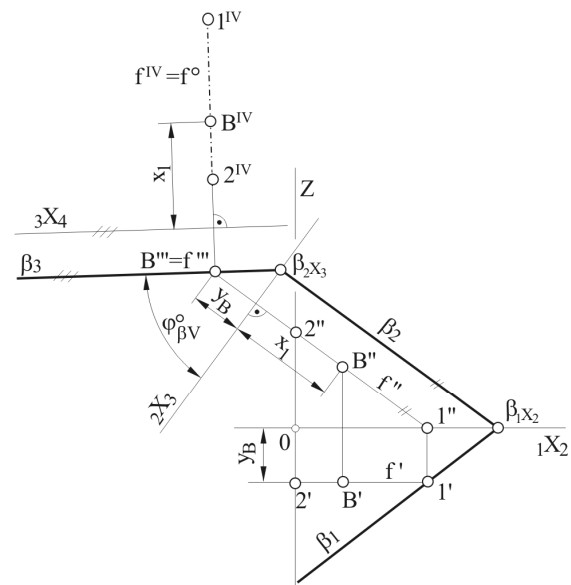
Na sl. 6.24 prikazana je transformacija ravni  $\beta$  korišćenjem ravni  $\pi_3$  koja je upravna na  $\pi_1$  i na prvi trag  $\beta_1$  koristeći horizontalu  $h$  kroz tačku  $A$ . Tačka  $A$  se nalazi na ravni  $\beta$ . Na proizvoljnom rastojanju povuče se osa  ${}_1X_3$  upravno na  $\beta_1$  i u preseku sa  $\beta_1$  dobija se osni trag  $\beta_{1X3}$ . Pomoću  $z$  koordinate tačke  $A$  ( $z_A$ ) odredi se treća projekcija tačke i horizontale  $A'''=h'''$ . Kako je projekcijska ravan  $\pi_3$  upravna na  $\pi_1$  sve što se na njoj nalazi projicira se na tragu  $\beta_3$ ,

tako da se spajanjem  $A'''$  i  $\beta_{1X3}$  dobija trag  $\beta_3$ . Ugao između ose  $1X_3$  i traga  $\beta_3$  predstavlja pravu veličinu nagibnog ugla ravni  $\beta$  prema H ravni ( $\varphi_{\beta H}^\circ$ ). Prava veličina ravni  $\beta$  i svega onog što na njoj leži dobija se na ravni  $\pi_4$  koja je paralelna sa ravni  $\beta$  i sa trećim tragom  $\beta_3$ , odnosno na četvrtoj projekciji ( $h^{IV}=h^\circ$ ). Osa  $3X_4$  je paralelna sa tragom  $\beta_3$ .

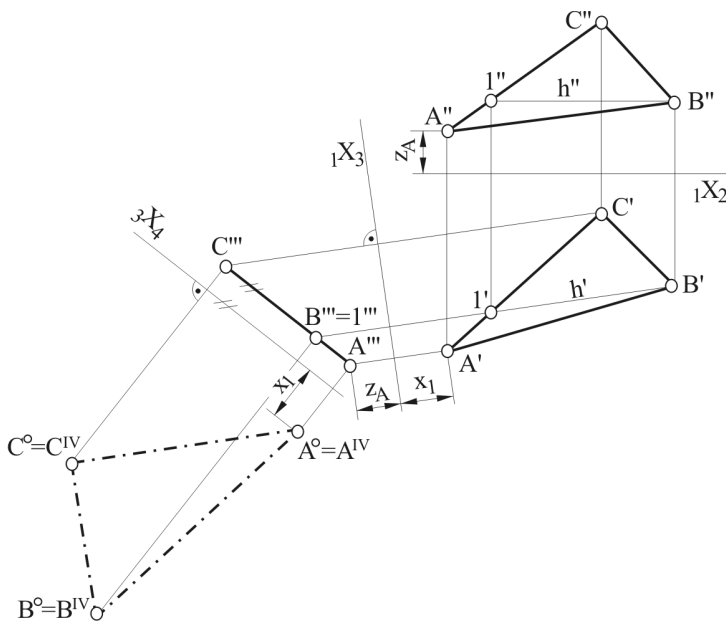
Transformacija ravni  $\beta$  može se dobiti i postavljanjem ravni  $\pi_3$  upravne na ravan  $\pi_2$  i na trag  $\beta_2$  koristeći frontalnu  $f$  kroz tačku  $B$  koja se nalazi na ravni  $\beta$ . Osa  $2X_3$  je upravna na  $\beta_2$  i  $f'$ , koja u preseku sa  $\beta_2$  daje osni trag  $\beta_{2X3}$  (sl. 6.25). Trag  $\beta_3$  prolazi kroz tačke  $B'''$  i  $\beta_{2X3}$ . Prava veličina ravni  $\beta$  i svega onog što na njoj leži dobija se na ravni  $\pi_4$  koja je paralelna sa ravni  $\beta$  i sa trećim tragom  $\beta_3$ , odnosno u četvrtoj projekciji ( $f^{IV}=f^\circ$ ). Osa  $3X_4$  je paralelna sa tragom  $\beta_3$ . Ugao između ose  $2X_3$  i traga  $\beta_3$  je prava veličina nagibnog ugla  $\varphi_{\beta V}^\circ$  ravni  $\beta$  prema V ravni.



Sl. 6.24: Transformacija ravni  $\beta$  zadate tragovima ( $\pi_3 \perp \beta_1$ )



Sl. 6.25: Transformacija ravni  $\beta$  zadate tragovima ( $\pi_3 \perp \beta_2$ )



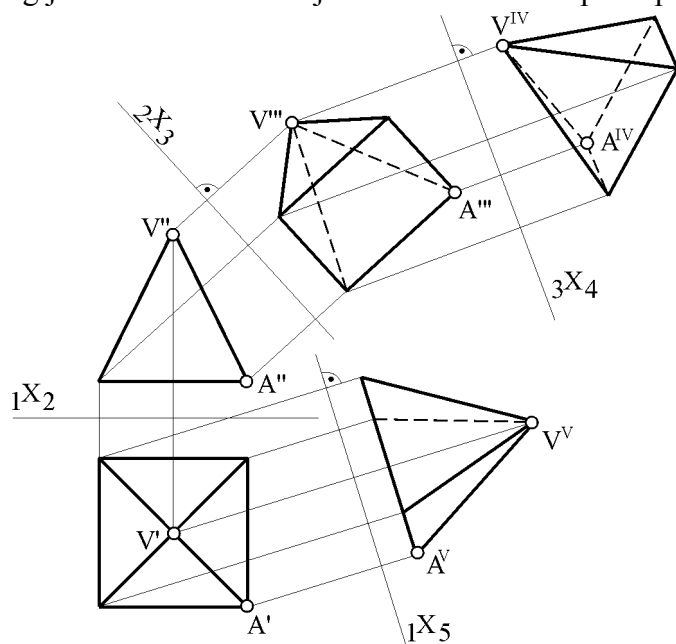
Sl. 6.26: Transformacija ravni zadate tačkama  $ABC$  (prava veličina trougla postupkom transformacije)

### 6.3.1. Transformacija ravni zadate tačkama

Kada je ravan zadata sa tri nekolinearne tačke  $A$ ,  $B$  i  $C$  i želi se odrediti prava veličina transformacijom, bez određivanja tragova ravni trougla, postavi se ravan  $\pi_3$  upravna na  $\pi_1$  i ravan trougla, odnosno upravna na horizontalu  $h$ . Odredi se horizontala  $h$  i nacrtaj osa  $1X_3$  upravno na prvu projekciju horizontale  $h'$  ( $1X_3 \perp h'$ ) (sl. 6.26). Treća projekcija trougla se projicira kao duž. Postavi se sledeća ravan  $\pi_4$  paralelna sa trećom projekcijom trougla i dobijena četvrta projekcija predstavlja pravu veličinu trougla.

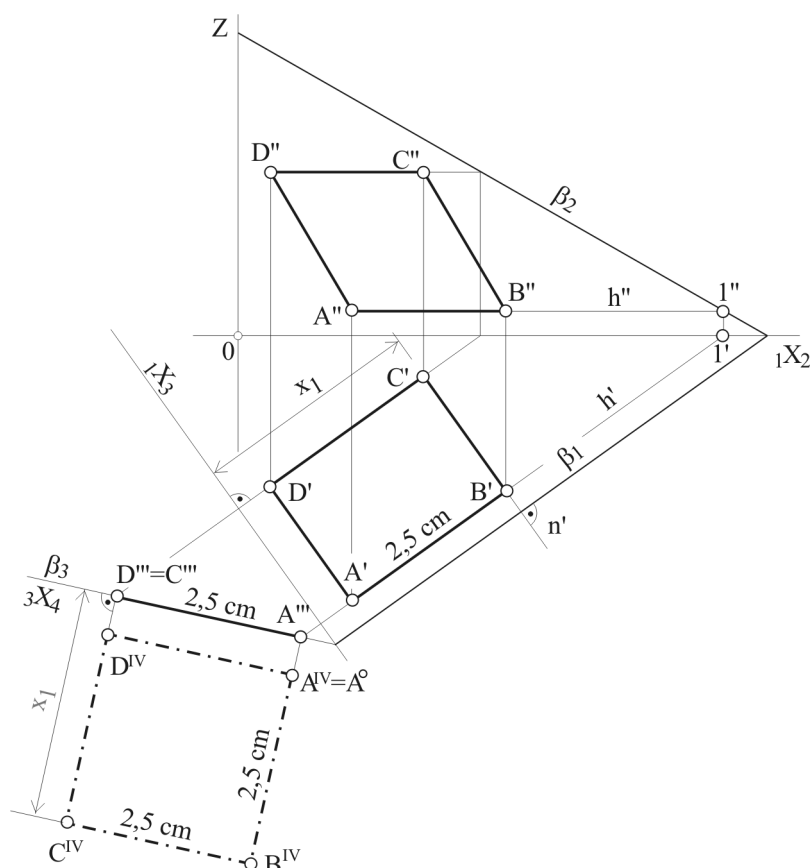
### 6.3.2. Transformacija pravilnih geometrijskih tela

Pravilna geometrijska tela sastoje se iz površina (ravni) ograničenih tačkama kao rogljevima tela. Pri crtanju tela koriste se isti principi i postupci kao i pri crtanju tačke, prave i ravni.



Pogodnost korišćenja transformacijskih projekcijskih ravni naročito dolazi do izražaja pri crtanju tela. Na slici 6.27. nacrtana je pravilna prava četverostrana piramida čiji je bazis ABCD paralelan sa H ravni. Pored prve i druge projekcije date su treća, četvrta i peta, koristeći ose  $2X_3$ ,  $3X_4$  i  $1X_5$  transformacijskih ravni  $\pi_3$ ,  $\pi_4$  i  $\pi_5$ . Na ovaj način piramida je prikazana iz više uglova, što može biti pogodnije i jasnije širem krugu korisnika. Kako ose proizvoljno biramo imamo mogućnost da prikazemo telo iz onog ugla koji je najpogodniji, što zavisi od tela, vrste crteža i korisnika crteža.

Sl. 6.27: Transformacija četverostrane prave piramide



Sl. 6.28: Prava veličina kvadrata postupkom transformacije (Zadatak 6.1)

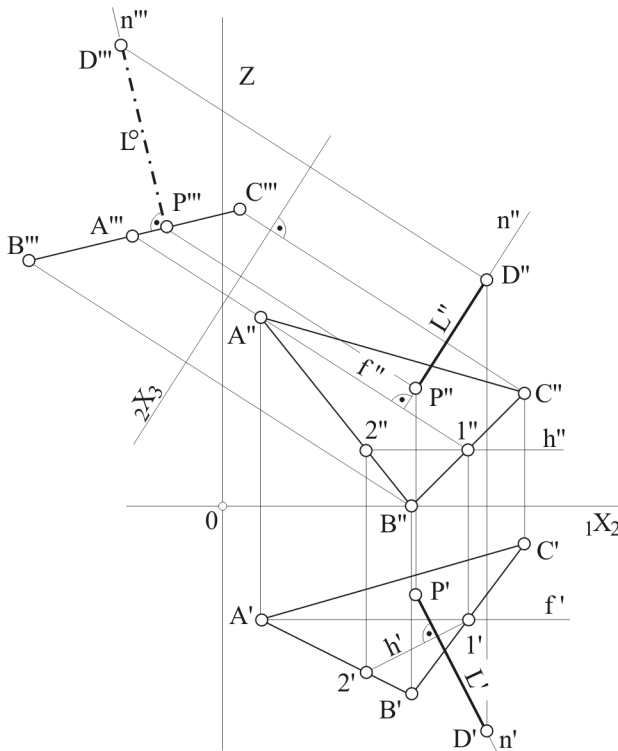
#### Zadatak 6.1.

0(6;5). Data je ravan  $\beta(7;5;4)$  i tačka  $A(1,5;3,5;?)$  na njoj. Tačka A je teme kvadrata koji leži na ravni  $\beta$ . Nacrtati ortogonalne projekcije kvadrata stranice  $a=2,5$  cm tako da je ivica AB paralelna sa H ravni.

Kroz prvu projekciju  $A'$  tačke A povuče se prva projekcija horizontale  $h'$  (sl. 6.28). Na osnovu drugog prodora horizontale  $1''$  nacrti se  $h''$  na kojoj se nalazi  $A''$ . Kako se na  $h'$  vidi prava veličina ( $h$  je paralelna sa H ravni) od tačke  $A'$  nanese se stranica kvadrata od 2,5 cm i dobija tačka  $B'$ . Da bi se odredile ostale tačke kvadrata treba postaviti ravan transformacije  $\pi$  tako da se kvadrat vidi u pravoj veličini. Stoga se koristi ravan  $\pi_3$  koja je upravna na

$\pi_1$  i na trag  $\beta_1$  (osa  ${}_1X_3$  je upravna na  $h'$ ) i odredi treći trag ravni  $\beta_3$ . Treća projekcija kvadrata projiciraće se na tragu  $\beta_3$  kao duž i to tako da se poklope tačke  $A'''=B'''$  i  $C'''=D'''$ . Iвица kvadrata  $A'''D'''$  videće se u pravoj veličini, odnosno  $A'''D'''=2,5$  cm. Postavi se nova ravan  $\pi_4$  tako da prolazi kroz treću projekciju kvadrata, tj.  ${}_3X_4=\beta_3$ . Četvrta projekcija je prava veličina kvadrata. Prva projekcija tačaka  $D'$  i  $C'$  dobija se pomoću spone iz  $D'''=C'''$  koja je upravna na osu  ${}_1X_3$  na rastojanju koje je dobijeno u četvrtoj projekciji. Za tačku  $C$  to je rastojanje  $x_1$ .

Zadatak se mogao rešiti i kraće, bez crtanja četvrte projekcije, jer se tačke  $C'$  i  $D'$  nalaze na normali ravni  $\beta$ .



Sl. 6.29: Određivanje najkraćeg rastojanja  $L^\circ$  između tačke  $D$  i trougla  $ABC$  (Zadatak 6.2.)

### Zadatak 6.2.

0(4;7). Data je ravan sa tri tačke  $A(0,5;1,5;2,5)$ ,  $B(2,5;2,5;0)$  i  $C(4;0,5;1,5)$ . Odrediti pravu vrednost najkraćeg rastojanja tačke  $D(3,5;3;3)$  od ravni trougla.

Najkraće rastojanje tačke  $D$  od ravni trougla dobiće se kada se kroz tačku  $D$  spusti normala  $n$  na trougao. Tačka prodora normale kroz trougao, tačka  $P$  i tačka  $D$  daju najkraće rastojanje  $L$ .

Zadatak se rešava tako što se postavi ravan transformacije  $\pi_3$  na kojoj će se trougao projicirati kao duž. U toj projekciji će se videti i ugao od  $90^\circ$  u pravoj veličini između normale  $n$  i ravni trougla.

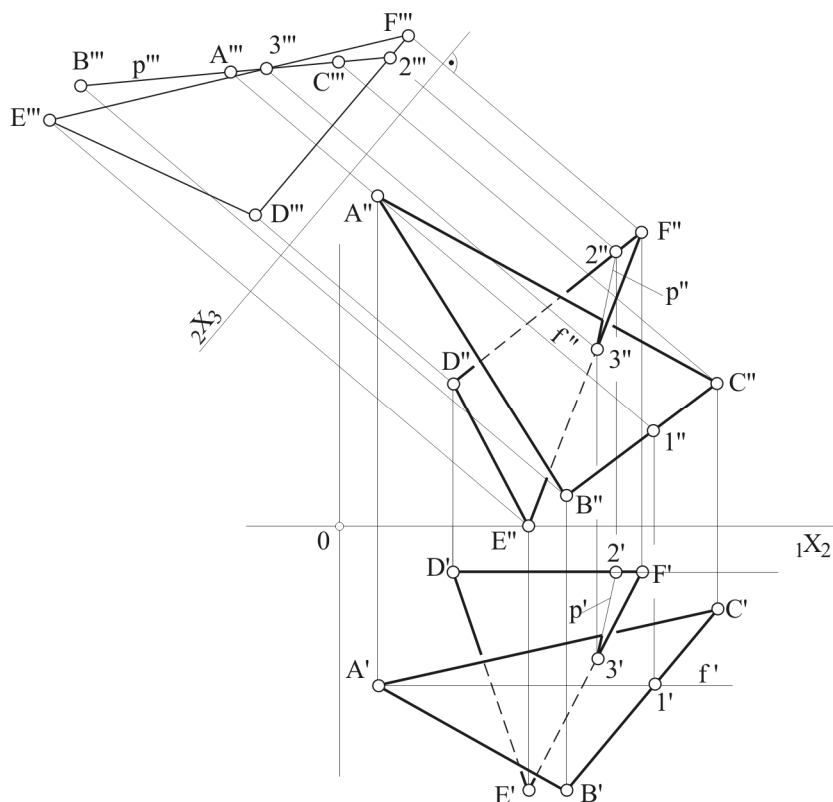
Zbog toga se koristi ravan  $\pi_3$  čija je osa  ${}_2X_3$  upravna na frontalu u drugoj projekciji  $f''$ . Iz tačke  $D'''$  spusti se normala  $n'''$  i dobija tačka prodora  $P'''$  (sl. 6.29), a samim tim i prava veličina najkraćeg rastojanja  $L^\circ$ .

### Zadatak 6.3.

0(6;7). Odrediti presek dveju ravni zadate sa po tri tačke. Prva ravan je zadata tačkama  $A(0,5;2;4,5)$ ,  $B(3;3,5;0,5)$  i  $C(5;1;2)$ , a druga tačkama  $D(1,5;0,5;2)$ ,  $E(2,5;4;0)$  i  $F(4;0,5;4)$ .

Jedan od načina rešavanja ovakvih zadataka objašnjen je u poglavlju 5, sl. 5.37. Zadatak se može rešiti i postupkom transformacije. Treba odabrati ravni transformacije tako da se jedan od trouglova projicira kao duž. Zbog toga se koristi ravan transformacije  $\pi_3$  koja je upravna na trougao  $ABC$ , tj. nacrtava se osa  ${}_2X_3$  upravna na drugu projekciju frontale  $f''$  (sl. 6.30). Na taj način se trougao  $ABC$  u trećoj projekciji vidi kao duž i vide se tačke presečnice, tačke  $2'''$  i  $3'''$ . Tačka 2 je na duži  $DF$ , a tačka 3 na duži  $EF$ . Određivanjem tačaka presečnice u drugoj i prvoj projekciji dobija se presek zadata dva trougla.





Sl. 6.30: Određivanje preseka dva trougla postupkom transformacije (Zadatak 6.3.)

**Zadatak 6.4.**

0(2;6). Odrediti pravu veličinu duži  $A(2;1;3)$   $B(5;4;1)$  i njene nagibne uglove prema H i V ravni.

**Zadatak 6.5.**

0(1;5). Odrediti pravu vrednost najkraćeg rastojanja između paralelnih prava a i b. Prava a prolazi kroz tačke  $A(2;3;1)$  i  $B(6;1;4)$ , a prava b kroz tačku  $C(4;0;1)$ .

**Zadatak 6.6.**

0(10;7). Odrediti pravu veličinu trougla  $A(1;3;3;0)$ ,  $B(4;5;4)$  i  $C(7;1;2)$  i njegov nagibni ugao prema ravni H. Naći najkraće rastojanje tačke  $D(2;1,5;5)$  od ravni trougla. Zadatak rešiti bez crtanja tragova ravni trougla koristeći osu transformacije  $1X_3$  i  $3X_4$  kroz tačku  $E(-0,5;2,5;0)$ .

**Zadatak 6.7.**

0(5;6). Nacrtati par ortogonalnih projekcija kvadrata A,  $B(3,5;3)$ , C i D. Dijagonala AC pripada pravoj m koja prolazi kroz tačke  $M(5,5;2,5;4)$  i  $N(8;5,5;0)$ . Zadatak rešiti bez crtanja tragova ravni trougla, koristeći osu transformacije kroz tačku  $L(0;0;0)$ .

**Zadatak 6.8.**

0(6;7). Odrediti presek ravni zadate tačkama  $A(1;3;6)$ ,  $B(8;2;3)$  i  $C(5;6;0,5)$  i ravni sa tačkama  $D(2;1;3)$ ,  $E(7;1;6)$  i  $F(4;7;1)$ . Osu transformacije  $1X_3$  postaviti kroz tačku  $G(0;2;0)$ .

## 7. ROTACIJA

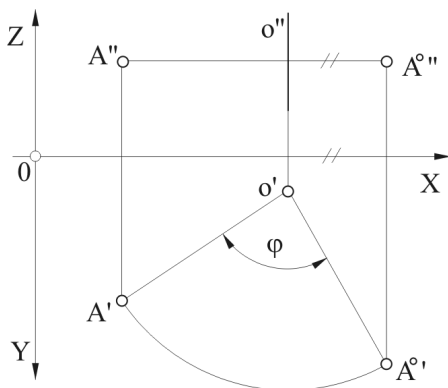
Rotacija je postupak kojim se tačka, prava ili ravan obrtanjem oko ose rotacije dovode u položaj da budu paralelni sa projekcijskim ravnima, kako bi se na tim projekcijskim ravnima projicirali u pravoj veličini. To je, osim transformacije, još jedan postupak za određivanje pravih veličina.

### 7.1. ROTACIJA TAČKE

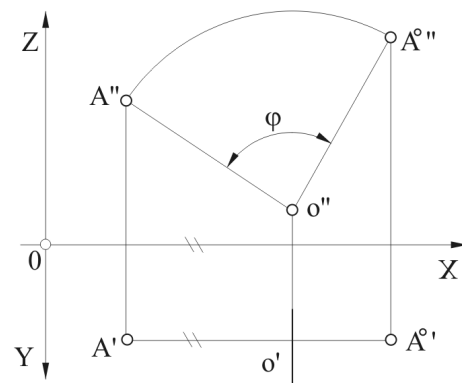
Tačka se može rotirati oko ose  $o$  koja je proizvoljno postavljena prema projekcijskim ravnima, međutim zbog jednostavnijeg rešavanja zadatka usvaja se da osa rotacije  $o$  bude upravna na H ili V ravan.

Ako je osa rotacije upravna na H ravan njena prva projekcija  $o'$  će biti tačka, a druga  $o''$  će biti paralelna sa osom Z (sl. 7.1). Tačka A se zarotira oko ose rotacije  $o$  za neki ugao  $\varphi$ . Pri tome će krug rotacije biti paralelan sa H ravni. Iz prve projekcije oko ose rotacije  $o'$  šestarom se zarotira tačka A' za ugao  $\varphi$  i dobija se prva projekcija zarotirane (oborene)  $A^{\circ'}$  tačke A. Pri tome se tačka A' pomerila po luku rotacije  $A'A^{\circ'}$ . Druga projekcija luka rotacije je duž  $A''A^{\circ''}$  koja je paralelna sa osom X. Prva  $A^{\circ'}$  i druga  $A^{\circ''}$  projekcija zarotirane tačke A su na zajedničkoj vertikalnoj sponi.

Ako je osa rotacije upravna na V ravan tada se njena druga projekcija  $o''$  projicira kao tačka, a prva  $o'$  paralelna je sa Y osom. Tada je krug rotacije tačke A paralelan sa V ravni, a njegova prva projekcija je paralelna sa osom X. Iz tačke  $o''$  šestarom se zarotira tačka A'' u položaj definisan uglom rotacije  $\varphi$  i dobija zarotirana  $A^{\circ''}$  druga projekcija tačke A (sl. 7.2). Luk rotacije u prvoj projekciji je duž  $A'A^{\circ'}$  paralelna sa osom X. Prva  $A^{\circ'}$  i druga  $A^{\circ''}$  projekcija zarotirane tačke A su na zajedničkoj vertikalnoj sponi.



Sl. 7.1: Rotacija tačke A oko ose  $o$  koja je upravna na H ravan



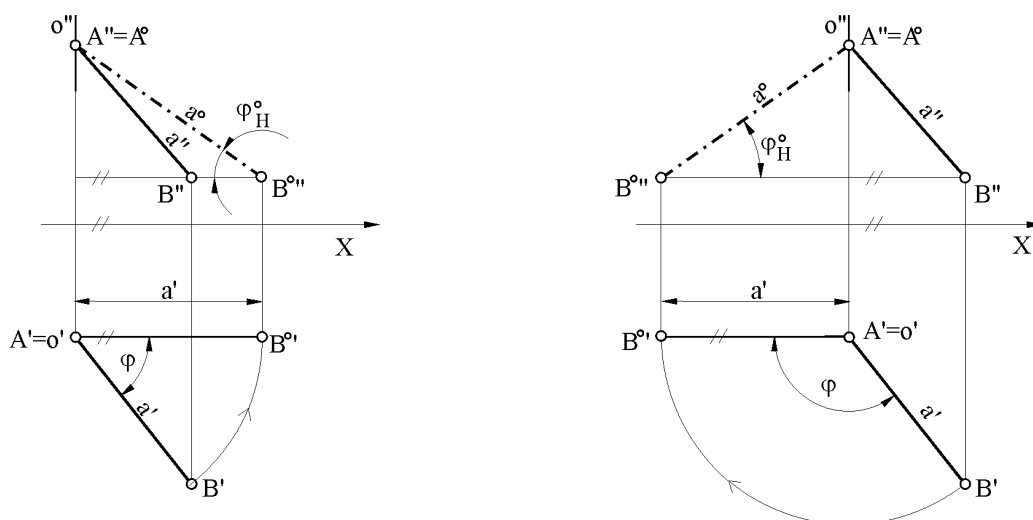
Sl. 7.2: Rotacija tačke A oko ose  $o$  koja je upravna na V ravan

### 7.2. ROTACIJA PRAVE (DUŽI) - PRAVA VELIČINA PRAVE (DUŽI)

Kroz jednu tačku duži postavi se osa rotacije tako da je upravna na horizontalnu ili vertikalnu ravan. Na sl. 7.3 usvojena je osa  $o$  upravna na H ravan, koja prolazi kroz tačku A i stoga se prva projekcija ose rotacije  $o'$  vidi kao tačka,  $A'=o'$ . Prava  $a$  (duž AB) rotira se oko ose  $o$  (takođe, i oko tačke A) po kružnici za onu vrednost ugla rotacije  $\varphi$ , da se dovede u položaj paralelan sa V ravni, tj. da prva projekcija prave  $a'$  bude paralelna sa osom X,  $a'//X$  (sl. 7.3 levo), pri čemu se tačka B' rotacijom dovodi u položaj  $B^{\circ'}$ . Krug rotacije je paralelan sa H ravni, a njegova prva projekcija (tačke A', B',  $B^{\circ'}$ ) je prava veličina. Duž  $A'B'$  je poluprečnik kruga rotacije. U drugoj projekciji krug rotacije je duž paralelna sa osom X i

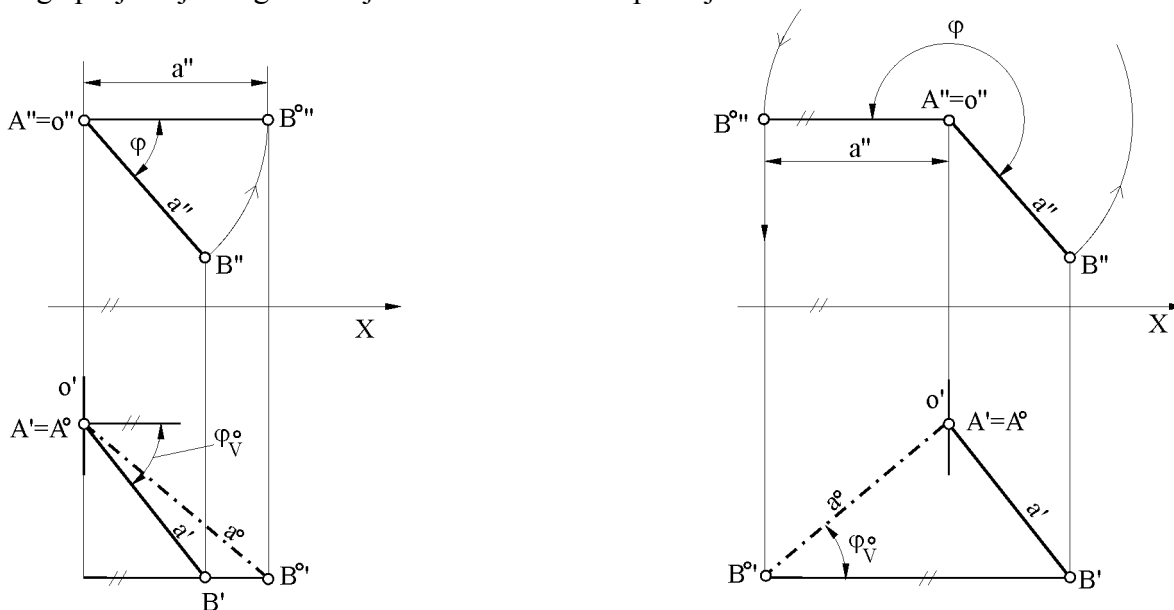
prolazi kroz tačku B'' pošto se ona rotira. Druga projekcija oborene tačke B''' je u preseku spone iz njene prve projekcije i druge projekcije luka rotacije. Prava veličina a° prave a dobija se u drugoj projekciji jer se prava a rotacijom dovela u položaj paralelan sa V ravni. Tačka A je nakon rotacije ostala na istom mestu A''=A°, te je A''B'''=a°. Nagibni ugao prave a prema horizontalnoj ravni  $\varphi_H^\circ$  je ugao između a° i druge projekcije kruga rotacije (B''B''').

Ugao rotacije  $\varphi$  je proizvoljan, može bilo na jednu ili drugu stranu, zavisno od preglednosti crteža. Na istom primeru (sl. 7.3 desno) određena je prava veličina prave a rotacijom na suprotnu stranu. Dobija se ista prava veličina a° prave a i njen ugao  $\varphi_H^\circ$  prema H ravni.



Sl. 7.3: Rotacija prave a (duži AB) oko ose o  $\perp$  na H ravan, na jednu ili drugu stranu (određivanje prave veličine prave (duži) rotacijom)

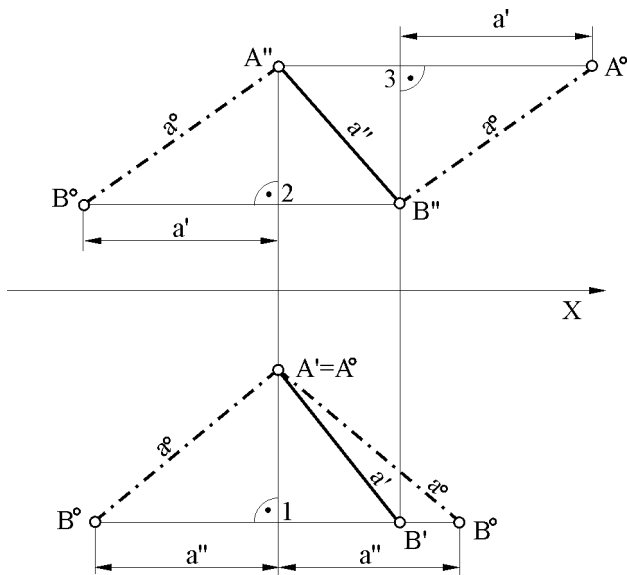
Na sl. 7.4 prikazana je rotacija prave a oko ose rotacije o koja je upravna na V ravan, i prolazi kroz tačku A, sve dok se ne dovede u položaj paralelan sa H ravni. Tačka B se rotira sve dok se druga projekcija prave a'' ne dovede u položaj paralelan sa osom X (što je pokazatelj da je prava a paralelna sa H ravni) svejedno da li na jednu ili drugu stranu. Krug rotacije je paralelan sa V ravni tako da je njegova prva projekcija paralelna sa osom X, a druga projekcija kruga rotacije A''B''B''' se vidi u pravoj veličini.



Sl. 7.4: Rotacija prave a (duži AB) oko ose o  $\perp$  na V ravan, na jednu ili drugu stranu (određivanje prave veličine prave (duži) rotacijom)

U preseku spone iz druge zarotirane projekcije  $B''$  i kruga rotacije u prvoj projekciji (linija paralelna sa osom X kroz tačku  $B'$ ) dobija se prva projekcija zarotirane tačke  $B^\circ$ . Tačke  $B^\circ$  i  $A'$  daju pravu veličinu  $a^\circ$  prave  $a$ , kao i pravu veličinu nagibnog ugla  $\varphi_V^\circ$  koji prava  $a$  zaklapa sa V ravni.

Ima više mogućnosti za rotaciju duži u cilju dobijanja njene prave veličine: oko jedne ili druge njene tačke, oko ose o upravne na H ili V ravan i na levu ili desnu stranu. Praktično, rotacija duži se svodi na to da se prva ili druga njena projekcija, rotacijom oko jedne od tačaka, dovedu u položaj paralelan sa osom X (sl. 7.5).



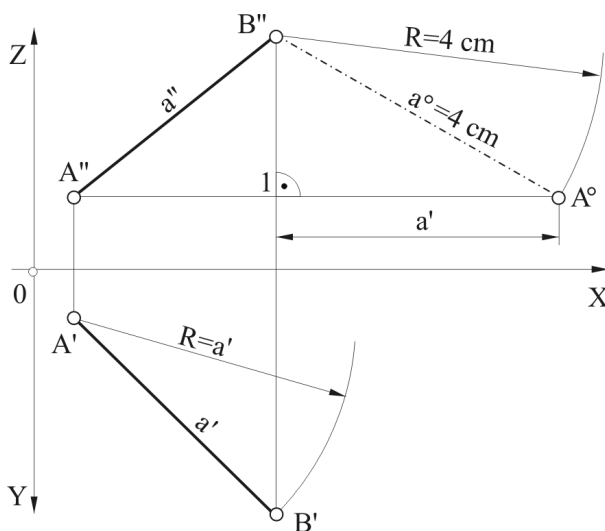
Sl. 7.5: Mogućnosti za rotaciju prave (duži) (određivanje prave veličine prave (duži))

Jedna od mogućnosti je ta da se u preseku vertikalne linije iz  $A'$  i horizontalne iz  $B'$  dobije tačka (označena sa 1) od koje se na jednu ili drugu stranu po horizontalnoj liniji (krugu rotacije) nanese dužina druge projekcije ( $a''$ ) i dobija tačka  $B^\circ$ , koja sa  $A'$  daje pravu veličinu duži ( $a^\circ = A'B^\circ$ ).

Sledeća prikazana mogućnost je da se na drugoj projekciji iz tačke 2, koja je dobijena u preseku vertikalne linije iz  $A''$  i horizontalne iz  $B''$ , nanese po horizontalnoj liniji (krugu rotacije) vrednost prve projekcije  $a'$ , te tako dobijena tačka  $B^\circ$  i tačka  $A''$  daju pravu veličinu duži  $a^\circ = B^\circ A''$ . Zavisno od prostora i preglednosti crteža može se rotirati duž oko tačke  $B$ , odnosno može se vrednost duži iz prve projekcije  $a'$  naneti i iz tačke 3 po horizontalnoj liniji gde se dobija  $A^\circ$ . Tačke  $B''$  i  $A^\circ$ , takođe, daju pravu veličinu  $a^\circ = B'' A^\circ$ .

### 7.2.1. Određivanje projekcija duži kada je zadata prava veličina (rotacijom)

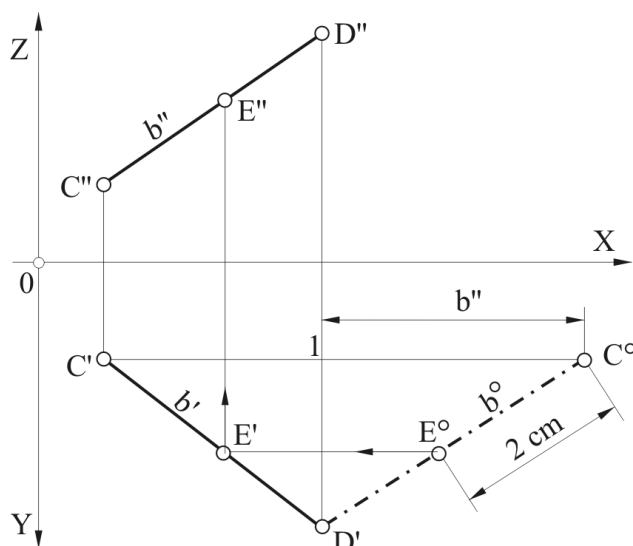
Problem se obrnuto postavlja: treba odrediti projekcije duži ako je poznata njena prava veličina. Neka za duž zadatu tačkama  $A(1;1;0,5)$  i  $B(3,5;?;2,5)$ , treba odrediti prvu projekciju, ako je njena prava veličina  $A^\circ B^\circ = 4$  cm.



Sl. 7.6: Određivanje projekcije duži  $A'B'$  ako je poznata prava veličina  $A^\circ B^\circ = 4$  cm i  $A''B''$  postupkom rotacije

Prema zadatim koordinatama nacrtaju se druga projekcija duži  $A''B''$  i prva projekcija tačke  $A'$ , dok je  $B'$  nepoznato (sl. 7.6). Iz tačke  $B''$  šestarom otvora  $R=4$  cm nacrtaju se luk koji u preseku sa horizontalnom linijom iz tačke  $A''$  (kruga rotacije) daje  $A^\circ$ , tako da duž  $A^\circ B''$  predstavlja pravu vrednost duži  $A^\circ B^\circ = 4$  cm. Na taj način se dobija vrednost prve projekcije duži  $a'$  (duž  $1A^\circ$ ). Iz prve projekcije tačke  $A'$  šestarom otvora  $R=a'$  nacrtaju se luk koji sa presekom vertikalne spone iz tačke  $B''$  daje  $B'$ , čime je određena nepoznata prva projekcija duži  $a'$ .

Sledeći primer je da se na duži  $b$  koja je zadata tačkama  $C(0,5;1;0,5)$  i  $D(3,5;2,5;1,5)$  odrede projekcije tačke  $E$  koja se nalazi na pravoj  $b$  na 2 cm od tačke  $C$ .



Prema zadatim koordinatama tačaka nacrtaju se prva i druga projekcija duži i odredi prava veličina rotacijom, npr. rotacijom tačke C oko D (sl. 7.7). Iz tačke C' povuče se horizontalna, a iz D' vertikalna linija koje u preseku daju tačku 1 od koje se po horizontalnoj liniji nanese vrednost duži iz druge projekcije  $b''$ . Dobijene tačke  $C^\circ$  i  $D'$  određuju pravu veličinu dužu  $b^\circ$ . Od tačke  $C^\circ$  po pravoj veličini duži nanese se 2 cm i dobija tačka  $E^\circ$  odakle se horizontalnom linijom do  $b'$  dobija  $E'$ , a pomoću spone do  $b''$  i druga projekcija  $E''$  tačke E.

Sl. 7.7: Određivanje projekcija tačke E na pravoj  $b$ , ako je poznata prava veličina  $C^\circ E^\circ = 2 \text{ cm}$

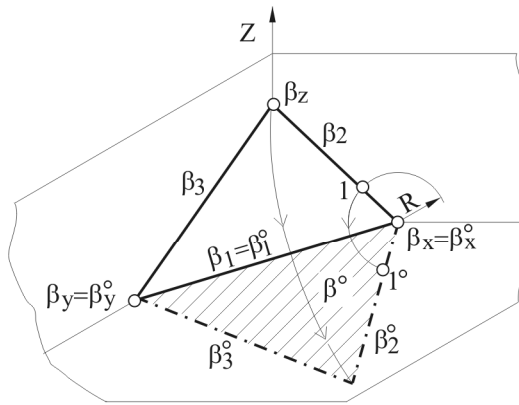
### 7.3. OBARANJE (ROTACIJA) RAVNI

Postupak je isti kao i kod rotacije prave. Treba obaranjem (rotiranjem) za određeni ugao dovesti ravan u položaj da legne na H ili V projekcijsku ravan ili da bude sa njima paralelna. Ravan se obara (rotira) oko prvog ili drugog traga ili oko horizontale ili frontale. Oborena ravan se dobija obaranjem tačke ili proizvoljne prave na njoj ili pomoću njenih sutražnjica.

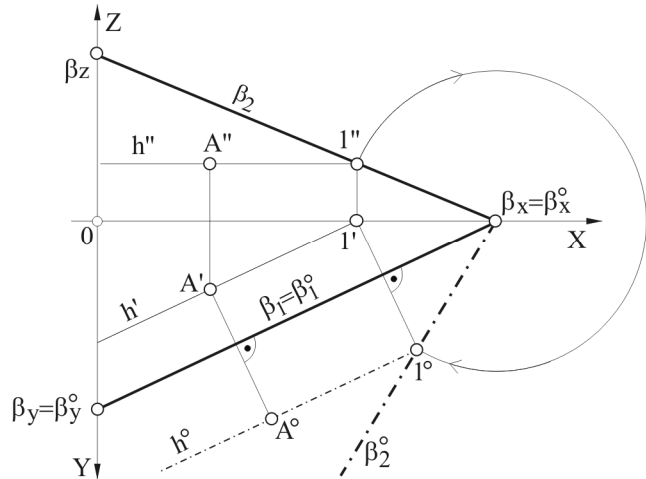
#### 7.3.1. Obaranje (rotacija) ravni oko prvog traga

Ravan se zarotira za neki potreban ugao oko prvog traga  $\beta_1$  sve dok se ne obori na horizontalnu ravan (da legne na nju), pri čemu se obara drugi trag  $\beta_2$ . Prvi oboreni trag  $\beta_1^\circ$  se poklapa sa prvim tragom  $\beta_1$  ( $\beta_1 = \beta_1^\circ$ ), tako da se oba oborena traga  $\beta_1^\circ$  i  $\beta_2^\circ$  nalaze na H ravni (sl. 7.8). Tragovi ravni se vide u pravoj veličini jer leže na projekcijskim ravnima. Stoga se iz osnog traga  $\beta_X = \beta_X^\circ$  šestarom otvora  $R = \beta_X 1$  "prenese" po luku tačka 1 dok ne legne na H ravan i dobije  $1^\circ$ . Tačke  $\beta_X^\circ 1^\circ$  daju oboreni drugi trag  $\beta_2^\circ$  na kojem se nalaze sve oborene tačke drugog traga (na primer  $\beta_Z^\circ$ ). Sve što se nalazi na ravni  $\beta$  u oborenem položaju vidi se u pravoj veličini, odnosno deo te oborene ravni je između tragova  $\beta_1$  i  $\beta_2^\circ$ .

Dobijanje drugog oborenog traga  $\beta_2^\circ$  ravni  $\beta$  u paru ortogonalnih projekcija prikazano je na sl. 7.9. Najjednostavnije je da se koristi horizontala ravni  $h$  kroz proizvoljnu tačku A koja je na ravni  $\beta$  čiji se drugi prodor (tačka  $1'$ ) nalazi na drugom tragu  $\beta_2$ . Iz osnog traga  $\beta_X = \beta_X^\circ$  šestarom otvora  $R = \beta_X 1'$  nacrtava se luk na kojem se nalazi i oboreni drugi prodor ( $1^\circ$ ) pošto je  $\beta_X 1' = \beta_X^\circ 1^\circ$ . Tačka  $1^\circ$  mora se naći i na krugu rotacije (spone) koji je upravan na prvi trag  $\beta_1$ , a polazi iz prve projekcije prodora (tačke  $1'$ ). U preseku luka i spone dobija se oboreni prvi prodor  $1^\circ$  koji sa  $\beta_X^\circ$  daje drugi oboreni trag  $\beta_2^\circ$ . Iz tačke  $1^\circ$  crta se horizontala u oborenem položaju  $h^\circ$  koja je paralelna sa  $\beta_1^\circ$  ( $h^\circ // \beta_1 = \beta_1^\circ$ ). Tačka A je na ravni stoga su joj projekcije na projekcijama horizontale  $h$  kao i oboreni položaj ( $A^\circ$  je na  $h^\circ$ ). Oborena projekcija  $A^\circ$  tačke A i njena prva projekcija  $A'$  su na sponi koja je upravna na prvi trag ravni  $\beta_1$ . Ravan se vidi u pravoj veličini u oborenem položaju, odnosno deo te oborene ravni  $\beta^\circ$  je između tragova  $\beta_1$  i  $\beta_2^\circ$ .



Sl. 7.8: Princip obaranja ravni oko prvog traga  $\beta_1$  u prostoru

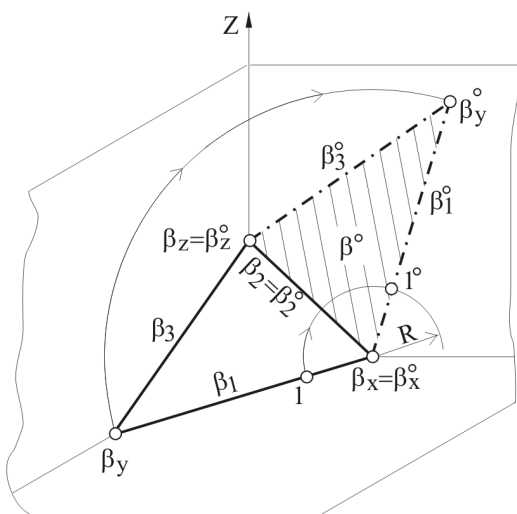


Sl. 7.9: Obaranje ravni oko prvog traga  $\beta_1$  u ortogonalnim projekcijama

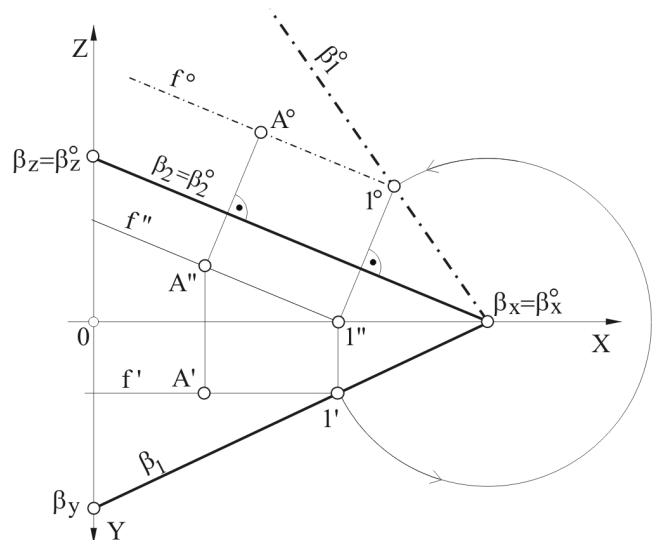
### 7.3.2. Obaranje (rotacija) ravni oko drugog traga

Ravan se obara (rotira) oko drugog traga  $\beta_2$  sve dok ne legne na V ravan, odnosno sve dok njen prvi trag  $\beta_1$  ne legne na V ravan. Proizvoljno se odabere tačka 1 na ravni  $\beta$  na njenom prvom tragu  $\beta_1$ . Pomoću šestara otvora  $R=\beta_x 1$  "prenese" se tačka 1 na V ravan i dobija  $1^\circ$  koja sa osnim tragom  $\beta_x=\beta_x^\circ$  određuje prvi oboreni trag  $\beta_1^\circ$  (sl. 7.10). Drugi oboreni trag  $\beta_2^\circ$  nalazi se gde i drugi  $\beta_2$ , odnosno  $\beta_2=\beta_2^\circ$ . Ravan se vidi u pravoj veličini u oborenom položaju  $\beta^\circ$ , odnosno deo te oborene ravni je između tragova  $\beta_2$  i  $\beta_1^\circ$ .

Za obaranje ravni u ortogonalnim projekcijama oko drugog traga najjednostavnije je koristiti frontalnu  $f$  i njen prvi prodor, tačku 1. Iz osnog traga  $\beta_x$  koji je ujedno i oboreni,  $\beta_x=\beta_x^\circ$  šestarom otvora  $R=\beta_x 1'$  prenese se tačka  $1'$  u oboreni položaj  $1^\circ$  (sl. 7.11). U preseku luka iz  $1'$  i spone iz tačke  $1''$ , koja je upravna na drugi trag  $\beta_2$ , dobija se  $1^\circ$  iz koje se nacrtava frontala u oborenom položaju  $f^\circ$ . Pošto je frontala paralelna sa drugim tragom tada će i  $f^\circ$  biti paralelna sa  $\beta_2^\circ$  ( $f^\circ // \beta_2^\circ = \beta_2$ ). Tačka  $A^\circ$  nalazi se u preseku frontale u oborenom položaju  $f^\circ$  i spone upravne na trag  $\beta_2$  iz tačke  $A''$ .



Sl. 7.10: Princip obaranja ravni oko drugog traga  $\beta_2$  u prostoru



Sl. 7.11: Obaranje ravni oko drugog traga  $\beta_2$  u ortogonalnim projekcijama

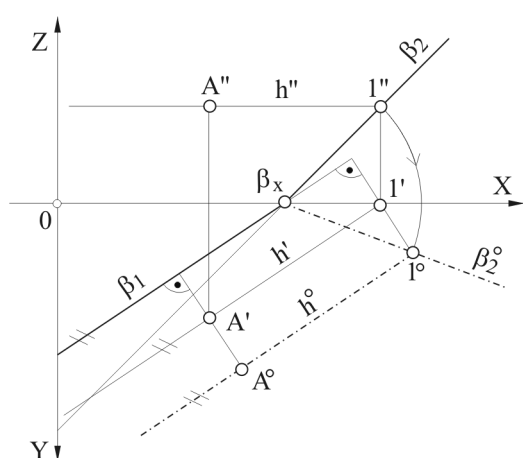
**Zadatak 7.1.**

0(1;4). Data je ravan  $\beta(3;2;-3)$  i tačka  $A(2;1,5;?)$  na njoj. Oboriti ravan  $\beta$ : a) oko prvog i b) oko drugog traga i odrediti tačku  $A^\circ$ .

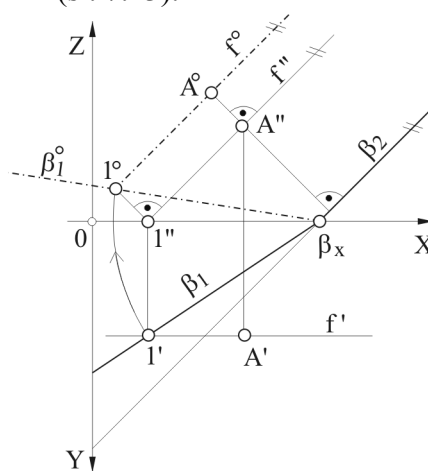
Tragovi zadate ravni su "nezgodno" postavljeni, te određivanje njenih oborenih tragova može biti teže za početnike. Stoga treba dobro uvežbati obaranje tragova ravni kada je "najzgodnije" postavljena (kao u prethodnom primeru) i po ugledu na taj primer rešiti zadati.

a) Nacrtaju se tragovi ravni  $\beta$  i prva projekcija tačke  $A'$ . Pomoću horizontale  $h$  odredi se druga projekcija tačke  $A''$  (sl. 7.12). Iz osnog traga  $\beta_X$  šestarom otvora  $R=\beta_X 1''$  povuče se luk u pravcu strelice koji u preseku sa sponom iz tačke  $1'$ , koja je upravna na  $\beta_1$ , daje  $1^\circ$ . Tačke  $\beta_X$  i  $1^\circ$  određuju drugi oboreni trag  $\beta_2^\circ$ . Oboreni položaj tačke  $A^\circ$  nalazi se na oborenoj horizontali  $h^\circ$  koja se crta iz  $1^\circ$  i paralelna je sa  $\beta_1$ .

b) Za obaranje prvog traga najlakše je koristiti frontalu  $f$  povučenu kroz tačku  $A$ . Iz  $\beta_X$  šestarom se nacrtaju luk poluprečnika  $R=\beta_X 1'$  i u preseku sa sponom iz  $1''$  koja je upravna na trag  $\beta_2$  dobija se  $1^\circ$ . Prvi oboreni trag  $\beta_1^\circ$  prolazi kroz  $\beta_X$  i  $1^\circ$  (sl. 7.13).



Sl. 7.12: Obaranje drugog traga ravni ( $\beta_2^\circ$ ) (Zadatak 7.1, a)



Sl. 7.13: Obaranje prvog traga ravni ( $\beta_1^\circ$ ) (Zadatak 7.1, b)

**Zadatak 7.2.**

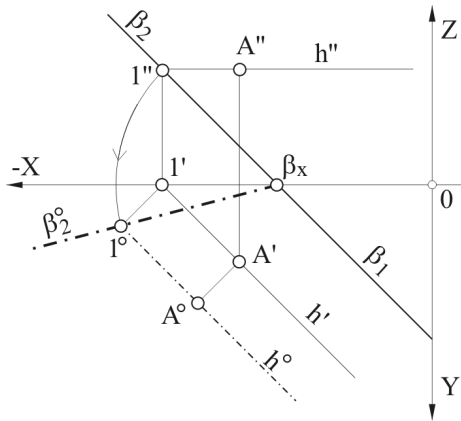
0(-7;3). Oboriti ravan  $\beta(-2;2;-2)$  oko prvog traga kao i tačku  $A(-2,5;?;1,5)$  na njoj.

Zadatak se može rešiti pomoću horizontale  $h$  kroz tačku  $A$  i njenog prodora kroz  $V$  ravan (tačke 1) (sl. 7.14).

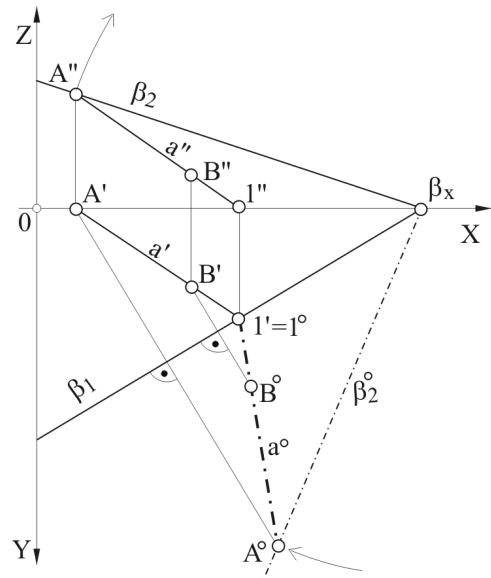
**Zadatak 7.3.**

0(1;3). Zadata je prava  $a$  sa tačkama  $A(0,5;0;1,5)$  i  $B(2;1;?)$  koja se nalazi na ravni  $\beta(5;3;?)$ . Odrediti oboreni položaj prave  $a$  na ravni  $H$ .

Obaranje proizvoljne prave na ravni je isto kao i obaranje horizontale i frontale. Prava na ravni u oborenom položaju nalazi se na oborenim prodorima kroz  $H$  i  $V$  ravni, a koji se nalaze na prvom i drugom oborenom tragu ravni. Prema zadatim koordinatama nacrtaju se  $a'$ ,  $A''$  i  $\beta_1$ . U preseku  $a'$  i  $\beta_1$  dobija se prvi prodor prave  $a$  (tačka  $1'$ ), a druga njena projekcija  $1''$  je na osi  $X$  (sl. 7.15). Pošto je tačka  $A'$  na osi  $X$  ujedno je to i prva projekcija drugog prodora prave  $a$ . Drugi prodor je tačka  $A''$  kroz koju prolazi drugi trag  $\beta_2$  koji se dobija spajanjem  $\beta_X$  i  $A''$ . Oborena prava  $a^\circ$  prolazi kroz  $A^\circ$  i  $1^\circ=1'$ . Oboreni položaj  $A^\circ$  tačke  $A$  je na oborenom drugom tragu  $\beta_2^\circ$  koji se dobija u preseku luka radijusa  $R=\beta_X A''$  iz tačke  $\beta_X$  i spona iz tačke  $A'$  upravne na  $\beta_1$ .



Sl. 7.14: Obaranje drugog traga ravni ( $\beta_2^\circ$ )  
(Zadatak 7.2.)

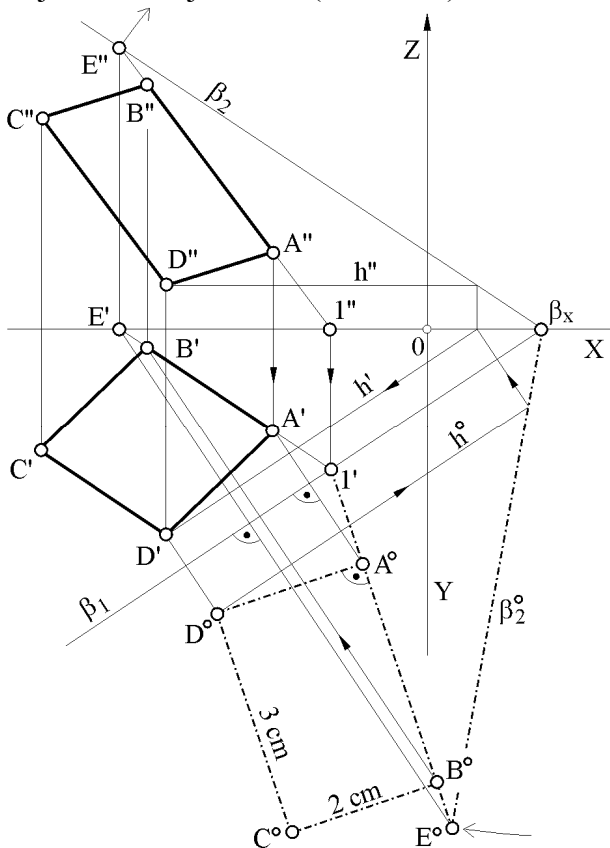


Sl. 7.15: Obaranje ravni  $\beta$  i prave  $a$  na njoj oko prvog traga (Zadatak 7.3.)

#### Zadatak 7.4.

0(-6;5). Data je ravan  $\beta(1,5;1;1)$  i tačke  $A(-2;?;1)$  i  $E(-4;0;?)$  na njoj. Nacrtati pravougaonik ABCD tako da su dimenzije  $AB=3$  cm i  $BC=2$  cm, a ivica AB leži na pravouj AE.

Prema zadatim podacima nacrtaju se tragovi ravni  $\beta_1$  i  $\beta_2$  kao i  $A''$  i  $E'$  (sl. 7.16). Pošto je  $E'$  na osi X znači da je ta tačka i drugi prodor, te je  $E''$  na sponi i drugom tragu  $\beta_2$ . Spoji se  $E''$  i  $A''$  i odredi druga projekcija prvog prodora te duži (tačka  $I''$ ). Prva projekcija prvog prodora  $I'$  je na tragu  $\beta_1$ , te se odredi  $A'$  koja je na duži  $E'I'$ . Na ovoj duži je ivica pravougaonika AB čija vrednost je zadata ( $AB=3$  cm).



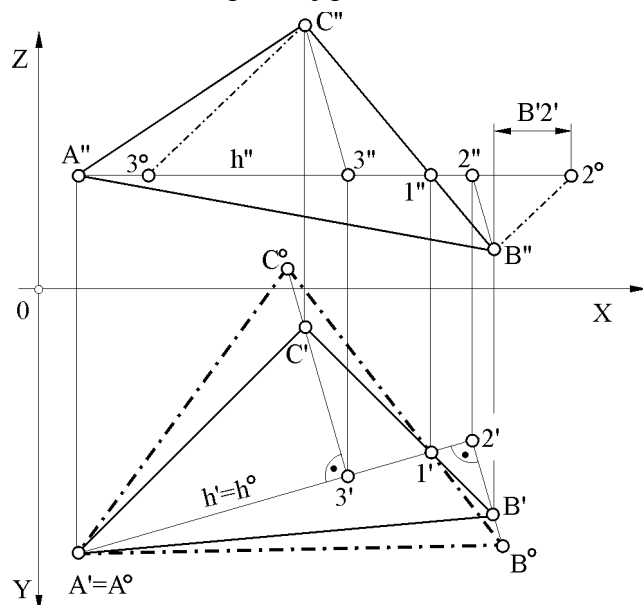
Da bi se odredile projekcije pravougaonika obori se ravan  $\beta$  na kojoj se nalazi pravougaonik npr. oko traga  $\beta_1$ . Obori se tačka E (pomoću luka iz  $\beta_x$  i spona iz  $E'$ ) i dobija  $E^\circ$  koja sa  $\beta_x$  daje  $\beta_2^\circ$ . Spajanjem  $E^\circ$  i  $I'$ , pošto je  $I'=I^\circ$ , dobija se duž na kojoj se odredi  $A^\circ$  (sponom iz  $A'$ ). Od tačke  $A^\circ$  na duži  $A^\circ E^\circ$  na 3 cm nalazi se  $B^\circ$ . Konstruiše se pravougaonik zadatih ivica  $3 \times 2$  cm i dobijaju tačke  $C^\circ$  i  $D^\circ$ . Tačke pravougaonika se "vraćaju" iz oborenog položaja u projekcije pomoću spona (iz tačke  $B^\circ$ ) i horizontale  $h^\circ$  iz  $D^\circ$  i na taj način dobijaju tačke  $A'$ ,  $B'$  i  $D'$ . Tačka  $C'$  se dobija iz uslova da su i projekcije ivica pravougaonika međusobno paralelne, kao što su paralelne i u oborenom (stvarnom) položaju.

Sl. 7.16: Crtanje projekcija pravougaonika kada su zadate ivice (Zadatak 7.4.)



### 7.3.3. Obaranje (rotacija) ravni oko sutražnjica

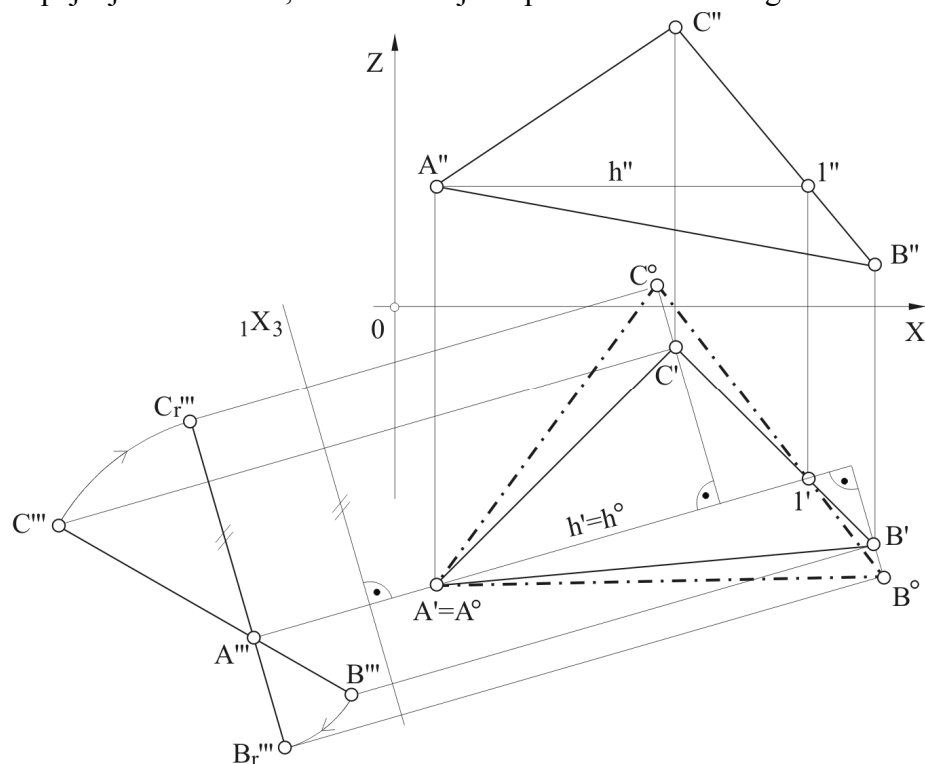
Kada je ravan zadata sa tri tačke njena prava veličina se može odrediti i bez crtanja tragova ravni, tako što se obori (zarotira) oko horizontale  $h$  u položaj paralelan sa  $H$  ravni ili oko frontale  $f$  u položaj paralelan sa  $V$  ravni.



Sl. 7.17: Obaranje ravni  $ABC$  oko horizontale  $h$

Neka je zadata ravan sa tri tačke  $A(0,5;3,5;1,5)$ ,  $B(6;3;0,5)$  i  $C(3,5;0,5;3,5)$  čiju pravu veličinu treba odrediti. Nacrta se horizontala  $h$  kroz tačku  $A$ , oko koje se obara trougao tako da je  $h'=h^\circ$  (sl. 7.17). Iz tačaka  $B'$  i  $C'$  spuste se normale na  $h^\circ$  koje predstavljaju krug rotacije na kojem se nalaze te oborene tačke  $B^\circ$  i  $C^\circ$ , a tačka  $A'$  je ujedno i oborena  $A^\circ$  ( $A'=A^\circ$ ). Tačke  $3'$  i  $2'$  se dobijaju u preseku normala i  $h'$ . Druge projekcije ovih tačaka  $2''$  i  $3''$  su na  $h''$ . Prava veličina duži  $3C$  i  $2B$  može se odrediti transformacijom (trouglom pravih veličina) ili rotacijom. U zadatku je korišćena rotacija. Duž  $3^\circ C''$  predstavlja pravu veličinu duži  $3C$ , te se iz tačke  $3'$  na krug rotacije nanese ova duž i tako dobija  $C^\circ$ . Na isti način se dobija i tačka  $B^\circ$  ( $2'B^\circ=B''2^\circ$ ).

Rešenje ovog zadatka kombinovanim korišćenjem transformacije i rotacije pokazano je na sl. 7.18. Za određivanje prave veličine duži  $3C$  i  $2B$  postavljena je ravan transformacije  $\pi_3$  čija je osa  $1X_3$  upravna na  $h'$ . Treća projekcija trougla je duž  $B'''C'''$  koja se zarotira tako da se dovede u položaj paralelan sa osom  $1X_3$  i dobija duž  $B_r'''C_r'''$ . Ova duž predstavlja trougao u položaju paralelnom sa ravni  $\pi_3$ , te se stoga sponama upravnim na  $1X_3$  dobijaju tačke  $C^\circ$  i  $B^\circ$ . Spajanjem tačaka  $A'$ ,  $B^\circ$  i  $C^\circ$  dobija se prava veličina trougla.

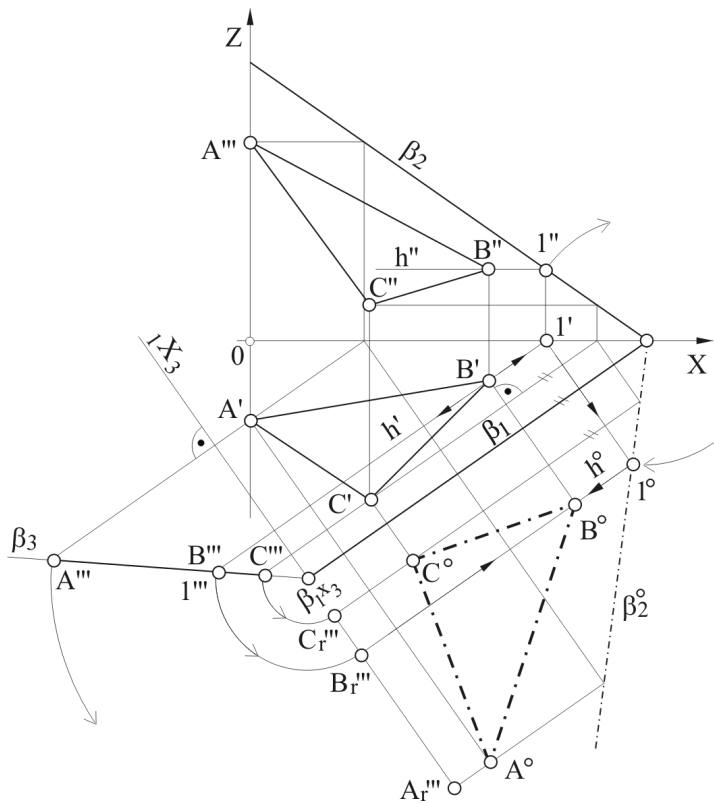


Sl. 7.18: Određivanje prave veličine ravni  $ABC$  kombinacijom transformacije i rotacije

**Zadatak 7.5.**

0(4;4). Odrediti pravu veličinu trougla zadatog tačkama  $A(0;1;?)$ ,  $B(3;0,5;?)$  i  $C(1,5;2;?)$  koji se nalazi na ravni  $\beta(5;3,5;3,5)$  postupkom transformacije i rotacije.

Prema zadatim koordinatama odrede se prve projekcije tačaka, a druge projekcije iz uslova da se trougao nalazi na ravni  $\beta$ , pomoću horizontala (sl. 7.19). Postavi se ravan transformacije  $\pi_3$  upravno na  $\pi_1$  (osa  $1X_3 \perp \beta_1$ ) i pomoću z koordinate jedne tačke, na primer tačke  $1''$  dobije se  $1'''$ . Spajanjem tačaka  $1'''$  i  $\beta_{1X_3}$  dobija se trag  $\beta_3$  na kojem se nalazi treća projekcija trougla, tj. tačke  $A'''$ ,  $B'''$  i  $C'''$ . Kada bi se postavila transformacijska ravan  $\pi_4$  paralelno sa  $\pi_3$  dobila bi se četvrta projekcija koja bi dala pravu veličinu trougla.



Međutim, ovim zadatkom želi se pokazati povezanost transformacije i rotacije. Stoga se pomoću tačke  $1''$  obori drugi trag ravni i dobija  $\beta_2^\circ$ . Koristeći oborene horizontale kroz tačke trougla dobija se prava veličina, odnosno tačke  $A^\circ B^\circ C^\circ$ .

Oborene tačke trougla mogu se dobiti ako se treća projekcija trougla (tačke  $A'''$ ,  $B'''$  i  $C'''$ ) zarotiraju oko osnog traga  $\beta_{1X_3}$  da se dovedu na osu  $1X_3$ . Na taj način se treća projekcija trougla dovodi u položaj upravan na oborenu ravan  $\beta^\circ$ , odnosno dobijaju se tačke  $A_r'''$ ,  $B_r'''$  i  $C_r'''$ . U preseku linija paralelnih sa prvim tragom  $\beta_1$  iz  $A_r'''$ ,  $B_r'''$  i  $C_r'''$  i upravnim na njega iz tačaka  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  dobija se prava veličina trougla, tj. tačke  $A^\circ$ ,  $B^\circ$  i  $C^\circ$ .

Sl. 7.19: Povezanost transformacije i rotacije pri određivanju prave veličine trougla (Zadatak 7.5.)

**Zadatak 7.6.**

0(1;4).

- Pomoću rotacije odrediti pravu veličinu duži  $A(2;4;1)$  i  $B(5;1;3)$  i njene nagibne uglove prema H i V ravni
- Na duži AB odrediti tačku C koja je 2,5 cm udaljena od tačke A.

**Zadatak 7.7.**

0(5;10). Rotacijom oko frontale  $f$  odrediti pravu veličinu trougla  $K(1;5;1,5)$ ,  $L(7,5;4;0)$  i  $M(5,5;1;5)$ .

**Zadatak 7.8.**

0(1;10). Nacrtati projekcije jednakostraničnog trougla ABC na ravni  $\alpha(9;6;8,5)$  tako da mu se teme A nalazi na H ravni 5 cm ispred V, a suprotna ivica BC je paralelna sa V ravni. Dužine ivica trougla su 5 cm.

## 8. METRIČKI PROBLEMI (PRAVE VELIČINE MEĐUSOBNIH ODNOSA TAČKE, PRAVE I RAVNI)

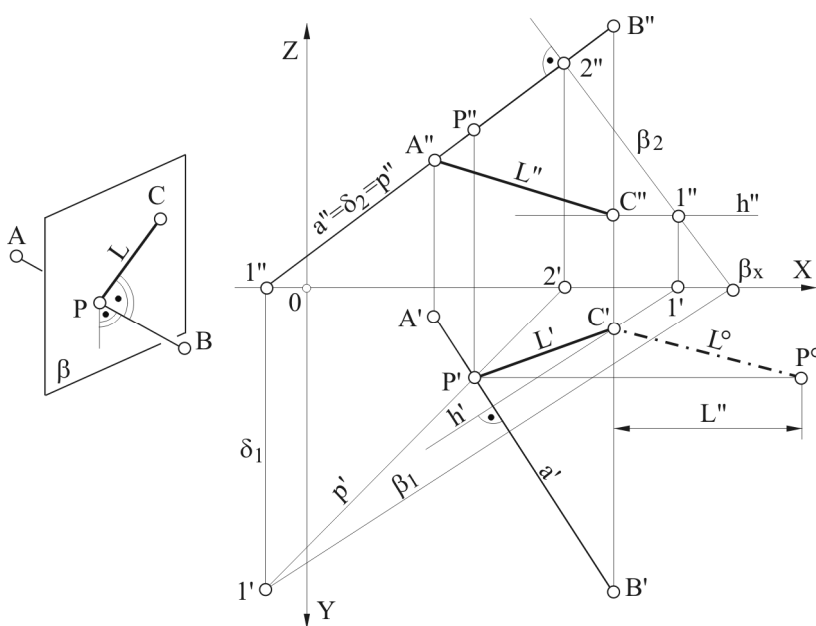
U poglavlju broj 5 definisani su međusobni odnosi tačke, prave i ravni kao i uslovi koji pri tome treba da se zadovolje u prostoru i u ortogonalnim projekcijama. U šestom i sedmom poglavlju pokazan je način određivanja pravih veličina međusobnih odnosa tačke, prave i ravni postupkom transformacije i rotacije. Koji će se od ovih postupaka koristiti zavisi od zadatka, raspoloživog prostora, preglednosti crtanja, ličnog afiniteta itd. Osim ova dva postupka postoje i druge mogućnosti za određivanje pravih veličina koji se proučavaju u okviru metrike. Metrika je deo nacrtne geometrije u kojem se proučavaju mogućnosti za određivanje pravih veličina kada su zadate projekcije i obrnuto; određivanje projekcija kada su zadate prave veličine, te se ovi zadaci nazivaju metričkim problemima. Zadatak koji će se realizovati treba uraditi na dva različita načina. Tek kada oba načina daju isto rešenje, sigurni smo da je zadatak dobro rešen, jer se pri crtanju prave slučajne (nenamerne) greške.

### 8.1. RASTOJANJE TAČKE OD PRAVE

U poglavlju 6 pod tačkom 6.2.2. definisano je najkraće rastojanje tačke od prave i kako se dobija, a na primeru sa sl. 6.20 određeno je postupkom transformacije. Rešenje zadatka postupkom transformacije je pregledno, međutim, zauzima dosta prostora te se koriste i druge mogućnosti.

Neka je zadata prava  $a$  sa tačkama  $A$  i  $B$  i tačka  $C$  čije najkraće rastojanje od prave  $a$  treba odrediti. Kroz tačku  $C$  postavi se pomoćna ravan  $\beta$  upravna na pravu  $a$ . Prava  $a$  probija ravan  $\beta$  u tački  $P$ . Rastojanje od tačke  $C$  do  $P$  predstavlja najkraće rastojanje tačke  $C$  od prave  $a$ , jer je na normali iz tačke  $C$  na pravu  $a$ , što je šematski prikazano na sl. 8.1, levo.

Kroz tačku  $C$  postavi se ravan  $\beta$  upravna na pravu  $a$  koristeći horizontalu  $h$  ( $h \perp a'$ ). Kroz drugi prodor horizontale (kroz tačku  $1''$ ) nacrti se drugi trag ravni  $\beta_2$  koji je upravna na drugu projekciju prave  $a''$  ( $\beta_2 \perp a''$ ) (sl. 8.1, desno). Iz osnog traga  $\beta_x$  povuče se prvi trag  $\beta_1$  koji je upravna na  $a'$  (prava  $a$  je normala ravni  $\beta$ ). Odredi se prodor prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P$ ) koristeći pomoćnu ravan  $\delta$  upravnu na  $V$  ravan. Trag ravni  $\delta_2$  se poklapa sa  $a''$ , a  $\delta_1$  je paralelan sa osom  $Y$ .

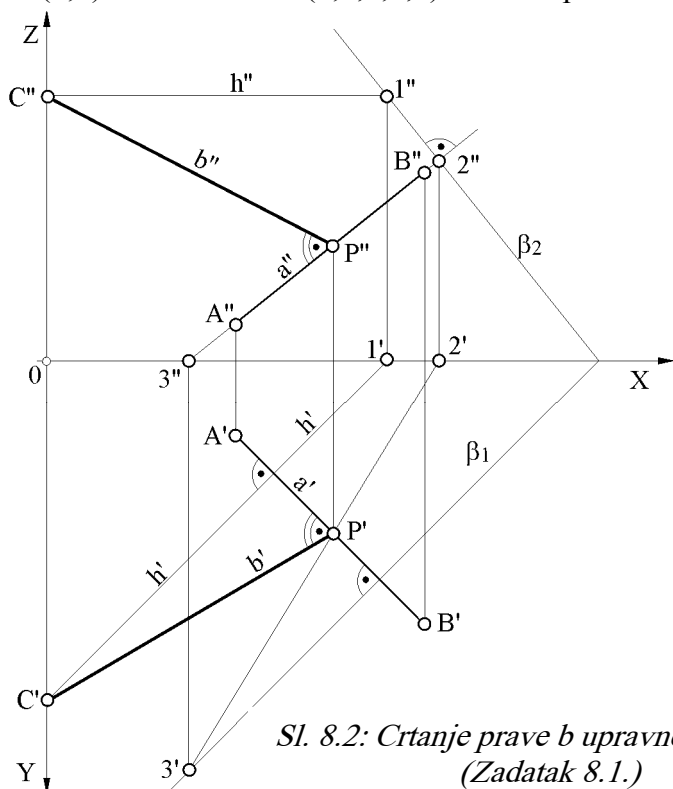


Na presečnici  $p$  ravni  $\beta$  i  $\delta$  (određuju je tačke 1 i 2) nalazi se prodor  $P$ . Duž  $PC$  (označena sa  $L$ ) je najkraće rastojanje tačke  $C$  od prave  $a$ , a njena prava veličina  $L^\circ$  dobija se ili transformacijom (trouglo pravih veličina) ili rotacijom. U ovom zadatku korišćena je rotacija. Od tačke gde se seče horizontalna linija iz  $P'$  i vertikalna iz  $C'$  nanese se duž  $L''$  i dobija  $P^\circ$ . Tačke  $C'$  i  $P^\circ$  određuju najkraće rastojanje tačke  $C$  od prave  $a$  ( $L^\circ$ ).

Sl. 8.1: Određivanje prave veličine najkraćeg rastojanja  $L^\circ$  tačke  $C$  od prave  $a$ ; šematski prikaz i ortogonalne projekcije

**Zadatak 8.1.**

0(1;5). Kroz tačku  $C(0;4,5;3,5)$  nacrtati pravu  $b$  upravno na pravu  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(2,5;1;0,5)$  i  $B(5;3,5;2,5)$ .



Sl. 8.2: Crtanje prave  $b$  upravne na pravu  $a$  (Zadatak 8.1.)

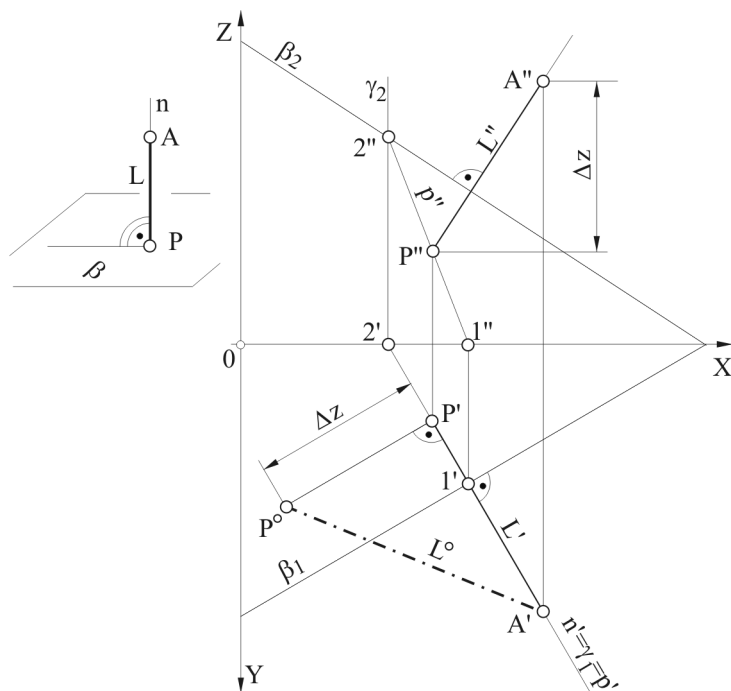
Zadatak se rešava kao i prethodni u kojem se odredilo najkraće rastojanje između tačke i prave, a koje je bilo na normali iz tačke na pravu.

Kroz tačku  $C$  pomoću horizontale  $h$  postavi se ravan  $\beta$  upravno na pravu  $a$  (sl. 8.2). Gde prava  $a$  probija ravan  $\beta$  dobija se prodor  $P$  koji sa tačkom  $C$  daje normalu na pravu  $a$ . Tražena prava  $b$  se poklapa sa normalom, odnosno prolazi kroz tačke  $C$  i  $P$ .

Zadatak uporediti sa zadatkom iz tačke 6.2.3, sl. 6.21, gde je korišćen postupak transformacije.

**8.2. RASTOJANJE TAČKE OD RAVNI**

Da bi se odredilo najkraće rastojanje između tačke i ravni potrebno je kroz tačku povući normalu na ravan i odrediti njen prodor kroz ravan. Rastojanje između tačke i prodora je najkraće rastojanje tačke od ravni (sl. 8.3, levo).



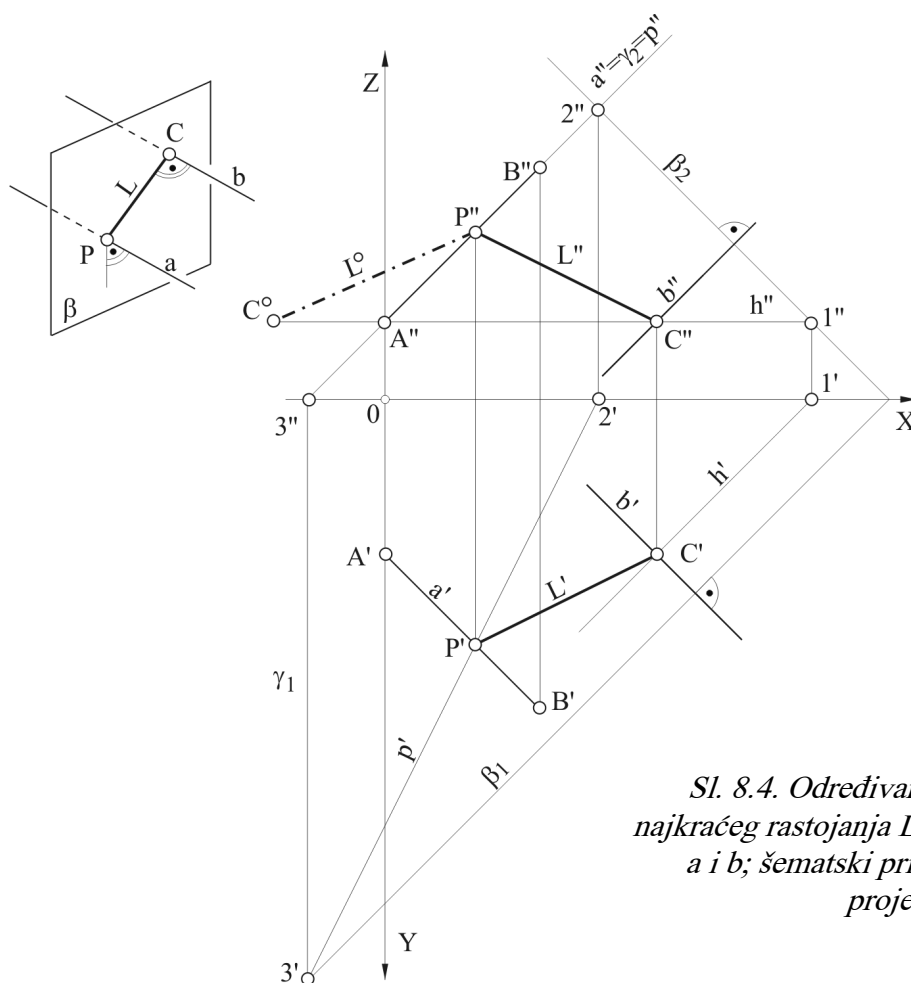
Sl. 8.3: Određivanje prave veličine najkraćeg rastojanja  $L^\circ$  tačke  $A$  od ravni  $\beta$ ; šematski prikaz i ortogonalne projekcije

Neka je data tačka  $A$  i ravan  $\beta$ . Treba odrediti pravu veličinu najkraćeg rastojanja  $L^\circ$  između njih. Iz tačke  $A$  spusti se normala  $n$  na ravan  $\beta$  ( $n' \perp \beta_1$ ,  $n'' \perp \beta_2$ ). Koristeći pomoćnu ravan  $\gamma$  ( $\gamma_1$  se poklapa sa  $n'$ , a  $\gamma_2$  je paralelno sa osom  $Z$ ) odredi se prodor normale  $n$  kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P$ ). Rastojanje od tačke  $A$  do tačke  $P$  je najkraće rastojanje između tačke  $A$  i ravni  $\beta$  (označeno sa  $L$ ). Prava veličina ovog rastojanja  $L^\circ$  određena je trouglom pravih veličina u prvoj projekciji. Iz jedne tačke, na primer  $P'$  podigne se normala na duž  $L'$  na koju se nanese razlika  $z$  koordinata tačaka  $P''A''$  ( $\Delta z$ ) i dobija se  $P^\circ$ . Duž  $A'P^\circ$  predstavlja pravu veličinu najkraćeg rastojanja između tačke  $A$  i ravni  $\beta$ .

### 8.3. RASTOJANJE DVE PARALELNE PRAVE

Da bi se odredilo najkraće rastojanje između dve paralelne prave  $a$  i  $b$  postavi se pomoćna ravan  $\beta$  kroz proizvoljnu tačku na pravoj  $b$ , na primer kroz  $C$ , koja je upravna na prava  $a$  i  $b$  (sl. 8.4, levo). Prodor prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P$ ) i tačka  $C$  određuju najkraće rastojanje između paralelnih prava  $a$  i  $b$  ( $L=PC$ ).

Neka je zadata prava  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A$  i  $B$  i njoj paralelna prava  $b$  koja prolazi kroz tačku  $C$ . Potrebno je odrediti pravu veličinu najkraćeg rastojanja  $L^\circ$  između prava  $a$  i  $b$ . Koristeći horizontalu  $h$  postavi se pomoćna ravan  $\beta$  kroz tačku  $C$  upravno na zadate prave  $a$  i  $b$  ( $h' \perp b'$ ). Za određivanje prodora prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  (tačke  $P$ ) korišćena je pomoćna ravan  $\gamma$  kroz pravu  $a$  koja je upravna na  $V$  ravan. Prava veličina najkraćeg rastojanja ( $L^\circ$ ) određena je u drugoj projekciji rotacijom tačke  $C$  ( $L^\circ = P''C^\circ$ ).



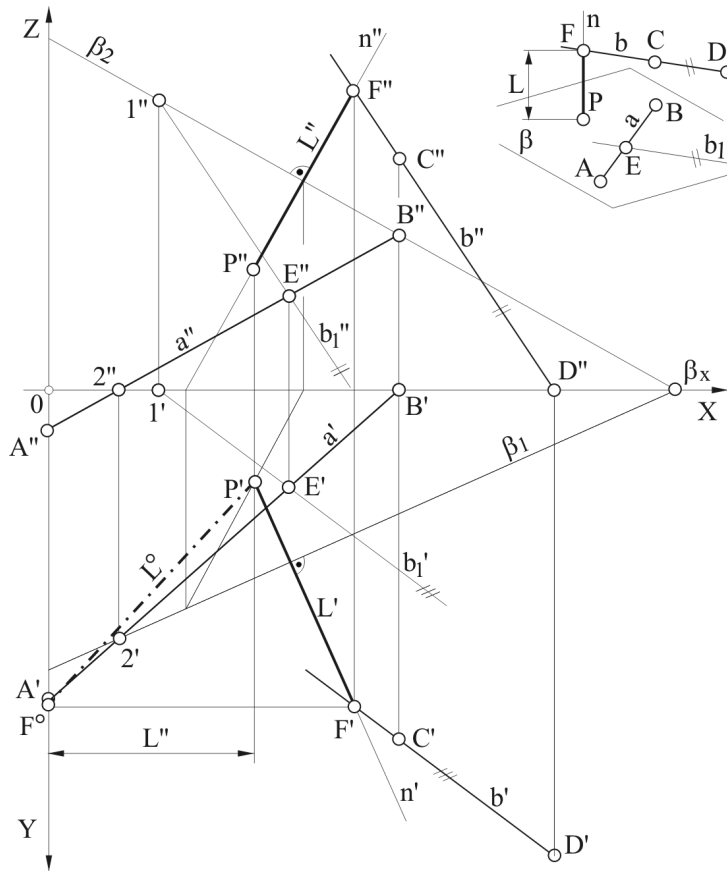
Sl. 8.4. Određivanje prave veličine najkraćeg rastojanja  $L^\circ$  dve paralelne prave  $a$  i  $b$ ; šematski prikaz i ortogonalne projekcije

### 8.4. RASTOJANJE DVE MIMOILAZNE PRAVE

Određivanje najkraćeg rastojanja između dve mimoilazne prave pomoću transformacije pokazano je u poglavlju 6, sl. 6.23. Zadatak se može rešiti i na drugi način. Neka je data prava  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(0;4;-0,5)$  i  $B(4,5;0;2)$  i prava  $b$  koja prolazi kroz tačke  $C(4,5;4,5;3)$  i  $D(6,5;6;0)$  koje se mimoilaze i čije najkraće rastojanje treba odrediti.

Najkraće rastojanje između dve mimoilazne prave  $a$  i  $b$  dobija se tako što se iz proizvoljne tačke, npr.  $E$  koja je na pravoj  $a$  povuče pomoćna prava  $b_1$  koja je paralelna sa pravom  $b$  (sl. 8.5, desno). Prava  $a$  i  $b_1$  određuju pomoćnu ravan  $\beta$ . Drugi prodori presečnih prava  $a$  i  $b_1$

(tačke  $B''$  i  $1''$ ) određuju  $\beta_2$ , a  $\beta_x$  i prvi prodor prave  $a$  (tačka  $2''$ ) određuju  $\beta_1$ . Spuštanjem normale  $n$  iz proizvoljne tačke na pravoj  $b$ , npr. iz tačke  $F$ , dobija se prodor normale kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P$ ). Duž  $FP$  predstavlja najkraće rastojanje između mimoilaznih prava  $a$  i  $b$  ( $L=FP$ ). Prava veličina tog rastojanja  $L^\circ$  određena je rotacijom u prvoj projekciji.

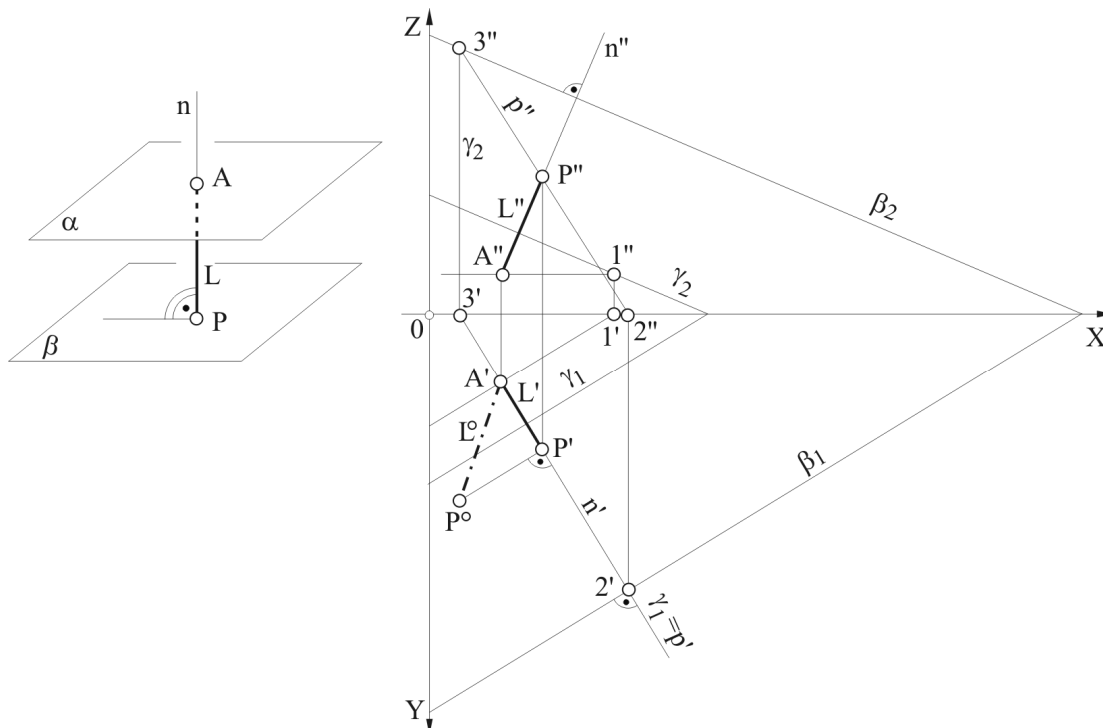


Sl. 8.5. Određivanje prave veličine najkraćeg rastojanja  $L^\circ$  između mimoilaznih prava  $a$  i  $b$

### 8.5. RASTOJANJE IZMEĐU DVE PARALELNE RAVNI

Najkraće rastojanje između dve paralelne ravni  $\alpha$  i  $\beta$  dobija se kada se iz proizvoljne tačke  $A$  na ravni  $\alpha$  povuče normala  $n$  na ravan  $\beta$ . Rastojanje od tačke  $A$  do prodora normale  $n$  kroz ravan  $\beta$  (tačke  $P$ ) predstavlja najkraće rastojanje između paralelnih ravni  $\alpha$  i  $\beta$ , označeno sa  $L$  (sl. 8.6, levo).

Kroz tačku  $A$  nacrti se normala  $n$  ravni  $\alpha$  i  $\beta$  i odredi njen prodor  $P$  kroz ravan  $\beta$  korišćenjem pomoćne ravni  $\gamma$  upravne na  $H$  ravan (sl. 8.6, desno). Duž  $AP$  je najkraće rastojanje  $L$  između ravni  $\alpha$  i  $\beta$  ( $L=AP$ ), a prava veličina  $L^\circ$  je određena transformacijom (trouglom pravih veličina).



Sl. 8.6: Određivanje prave veličine najkraćeg rastojanja  $L^\circ$  između dve paralelne ravni  $\alpha$  i  $\beta$ ; šematski prikaz i ortogonalne projekcije

### 8.6. UGAO IZMEĐU DVE PRAVE KOJE SE SEKU

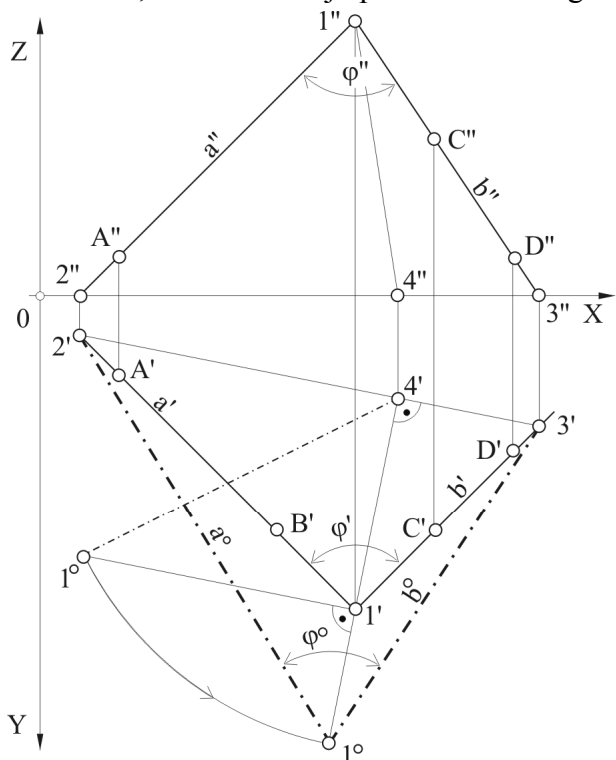
Kada se prave  $a$  i  $b$  seku međusobno zaklapaju ugao  $\varphi$ . Prava veličina ugla  $\varphi$  dobija se tako što se obori ravan koju obrazuju prave  $a$  i  $b$  na  $H$  ili  $V$  ravan ili se rotacijom dovedu u položaj paralelan sa njima. Ravan koju obrazuju dve prave koje se seku obara se oko prvih prodora na  $H$  ili oko drugih na  $V$  ravan, tj. oko tragova ravni.

Neka je zadata prava  $a$  sa tačkama  $A(1;1;0,5)$  i  $B(3;3;?)$  i prava  $b$  sa tačkama  $C(5;3;2)$  i  $D(6;2;0,5)$  koje se seku. Treba naći pravu veličinu ugla  $\varphi$  između ravni. Odrede se prvi prodori prava  $a$  i  $b$  (tačke  $2'$  i  $3'$ ) čijim spajanjem se dobija prvi trag ravni koju obrazuju ove dve prave (sl. 8.7). Iz prve projekcije presečne tačke prava (tačke  $1'$ ) povuče se normala na trag ravni  $2'3'$  i dobija tačka  $4'$ , a druga njena projekcija  $4''$  je na osi  $X$ . Duž  $1,4$  se obara na  $H$  ravan oko tačke  $4'$ , tako što se odredi njena prava veličina  $1^{\circ}4'$  koja se nanese na duž  $4'1'$  od tačke  $4'$ . Prava veličina duži  $1^{\circ}4'$  dobija se pomoću trougla pravih veličina (ili rotacijom). Spajanjem tačaka  $2'$  i  $3'$  sa  $1^{\circ}$  dobijaju se prave veličine prava  $a^{\circ}$  i  $b^{\circ}$ , kao i prava veličina ugla između njih  $\varphi^{\circ}$ .

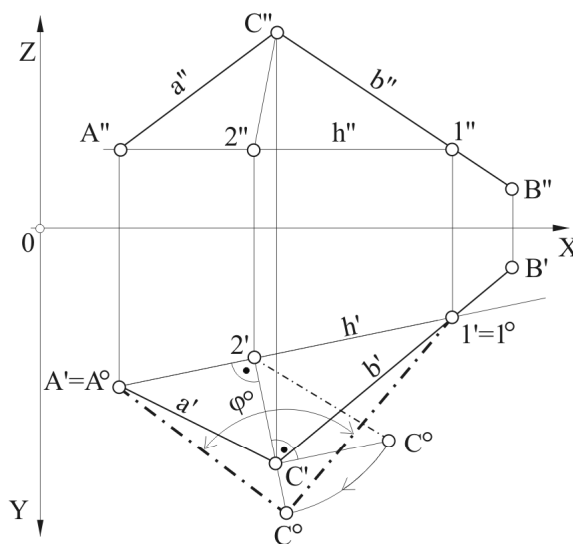
#### Zadatak 8.2.

0(1;3). Data je prava  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(1;2;1)$  i  $C(3;3;2,5)$  i prava  $b$  koja prolazi kroz tačke  $B(6;0,5;0,5)$  i  $C$ . Treba odrediti pravu veličinu ugla  $\varphi$  koje prave međusobno zaklapaju.

Zadatak se može rešiti tako što se prave  $a$  i  $b$  koje se seku u tački  $C$  zarotiraju oko horizontale  $h$  ravni koju obrazuju u položaj da ravan koju obrazuju bude paralelna sa  $H$  ravni. Stoga se kroz tačku  $A''$  povuče druga projekcija horizontale  $h''$  i dobija tačka  $1''$ , a prva projekcija horizontale  $h'$  prolazi kroz tačke  $A'$  i  $1'$  (sl. 8.8). Iz tačke  $C'$  povuče se normala na  $h'$  i dobija tačka  $2'$ . Duž  $C2'$  predstavlja poluprečnik rotacije te se odredi njena prava veličina  $C^{\circ}2'$  koristeći trougao pravih veličina u prvoj projekciji i nanese se na duž  $2'C'$  od tačke  $2'$ . Tačke  $C^{\circ}$ ,  $A'$  i  $1'$  određuju pravu veličinu ugla  $\varphi^{\circ}$  koje prave  $a$  i  $b$  međusobno zaklapaju.



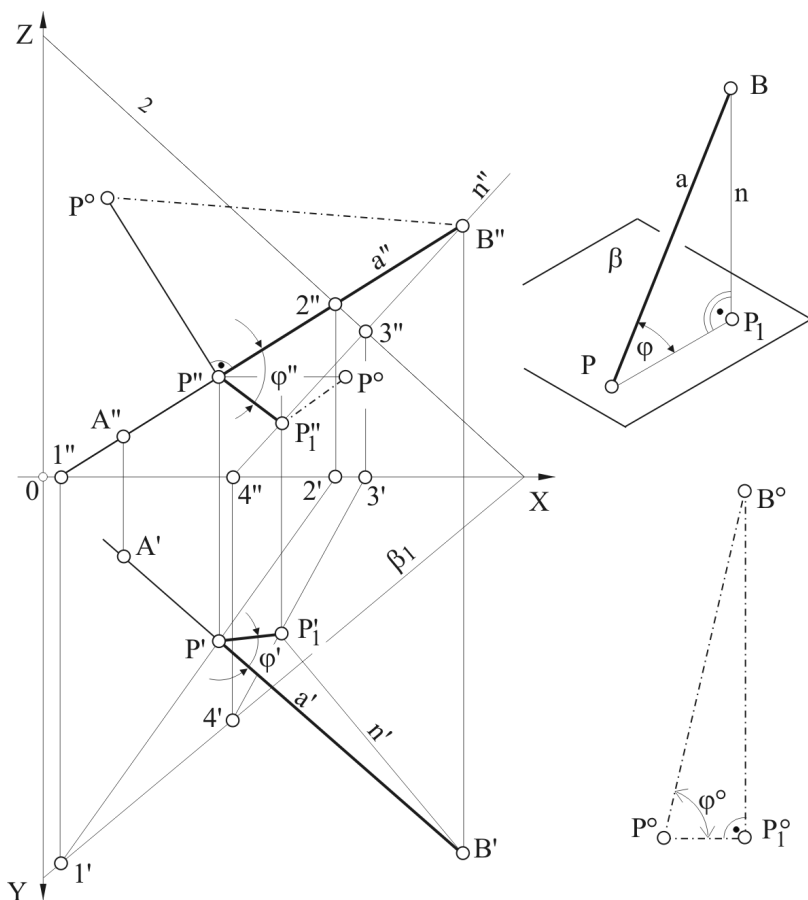
Sl. 8.7: Određivanje prave veličine ugla  $\varphi^{\circ}$  između prava  $a$  i  $b$  koje se seku, obaranjem oko prvih prodora



Sl. 8.8: Određivanje prave veličine ugla  $\varphi^{\circ}$  između prava  $a$  i  $b$  koje se seku, rotiranjem oko horizontale  $h$  (Zadatak 8.2.)

### 8.7. UGAO PRAVE PREMA RAVNI

Ugao prave prema ravni je ugao između prave i njene ortogonalne projekcije na tu ravan. Ortogonalnu projekciju prave  $a$  na ravan  $\beta$  određuje prodor prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P$ ) i



prodor normale  $n$  kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P_1$ ) povučene iz proizvoljne tačke  $B$  na pravoj  $a$  (sl. 8.9 desno, gore). Ugao između prave  $a$  i njene projekcije na ravan  $\beta$  (duž  $PP_1$ ) je ugao između prave  $a$  i ravni  $\beta$  (označen sa  $\varphi$ ).

Odredi se prodor prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  (tačka  $P$ ) koristeći pomoćnu ravan koja prolazi kroz pravu  $a$  koja je upravna na  $V$  ravan (sl. 8.9). Iz proizvoljne tačke  $B$  na pravoj  $a$  spusti se normala  $n$  na ravan  $\beta$  i odredi njen prodor, tačka  $P_1$ . Prava veličina trougla  $B^\circ P_1^\circ P^\circ$  odredi se, zbog preglednosti, sa strane (sl. 8.9 desno, dole). Prava veličina duži  $P'P_1^\circ$  određena je rotacijom, a duži  $B''P^\circ$  trouglom pravih veličina (transformacijom).

Sl. 8.9: Određivanje prave veličine ugla  $\varphi^\circ$  prave  $a$  prema ravni  $\beta$ ; šematski prikaz i ortogonalne projekcije

### 8.8. PRAVA POD ZADATIM UGLOM PREMA PROJEKCIJSKIM RAVNIMA

U poglavlju 6 pod tačkom 6.2. objašnjeno je kako se određuju uglovi prave prema  $H$  i  $V$  ravnima kada je prava zadata ortogonalnim projekcijama. Ovde se problem postavlja obrnuto, kako nacrtati ortogonalne projekcije prave kada su zadati uglovi koje prava treba da zaklapa sa  $H$  i  $V$  ravnima.

Neka je zadata prva projekcija  $a'$  prave  $a$ , prva projekcija  $A'$  tačke  $A$  kroz koju prava prolazi i prvi prodor  $1'$  prave  $a$ . Treba nacrtati drugu projekciju  $a''$  prave  $a$ , tako da sa  $H$  ravni zaklapa ugao  $\varphi_H = 60^\circ$ .

Kroz tačku  $A'$  možemo postaviti dve prave "a" koje će sa  $H$  ravni zaklapati ugao  $\varphi_H = 60^\circ$ , a koje će imati zadatu prvu projekciju  $a'$ . Druga mogućnost prave  $a$  je u produžetku zadate prve projekcije, određene sa tačkom  $A'$  i  $2'$ . Tačka  $2'$  je prvi prodor druge mogućnosti prave  $a$  koja se odredi iz jednakosti duži  $1'A' = A'2'$ . Druge projekcije tačaka  $1''$  i  $2''$  su na osi  $X$ .

Prava  $a$  treba da se zarotira oko ose upravne na  $H$  ravan, a koja prolazi kroz tačku  $A$  tako da se dovede u položaj paralelan sa  $V$  ravni, kako bi se na toj ravni ugao  $\varphi_H$  projicirao u pravoj veličini. Stoga se zarotira prva projekcija  $a'$  prave  $a$  oko tačke  $A'$  tako da se prava  $a$  dovede u položaj paralelan sa  $V$  ravni, odnosno da je  $a^{\circ}$  paralelna sa osom  $X$  (sl. 8.10). Pošto je zarotirana prava  $a^{\circ}$  paralelna sa osom  $X$  njena druga projekcija  $a^{\circ\prime}$  će se videti u pravoj veličini kao i ugao  $\varphi_H^\circ$  prave  $a$  prema  $H$  ravni. Stoga se iz tačke  $1^{\circ\prime}$  pod uglom  $\varphi_H^\circ = 60^\circ$

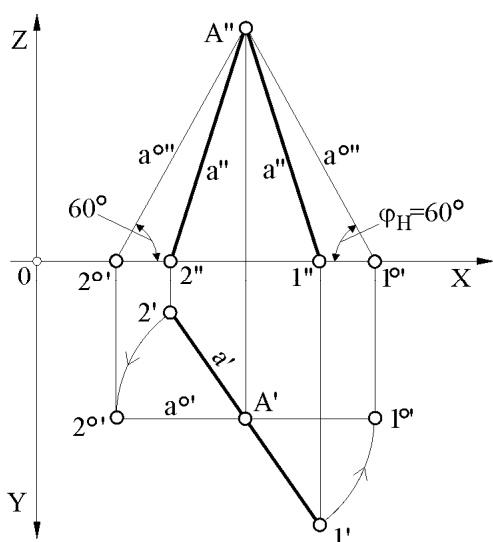


povuče druga projekcija oborene prave  $a^{o''}$  koja zajedno sa sponom iz  $A'$  određuje drugu projekciju  $A''$  tačke  $A$ . Druga projekcija prave  $a''$  prolazi kroz tačke  $1''$  i  $A''$ .

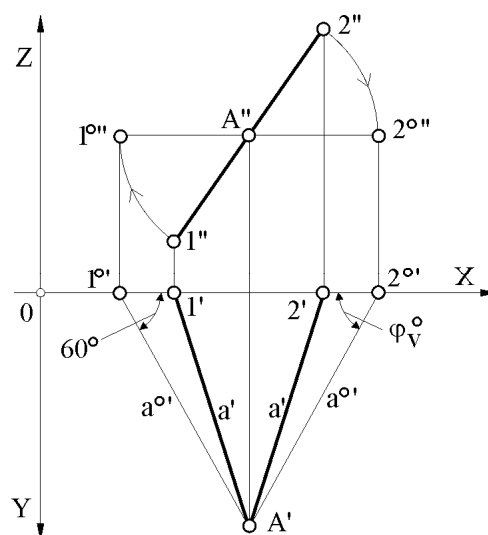
Druga mogućnost za pravu  $a$  određuje se na isti način rotiranjem tačke  $2'$  u položaj  $2''$  da  $a^{o''}$  bude paralelno sa osom  $X$ , tako da  $a''$  prolazi kroz tačke  $2''$  i  $A''$ .

Ako je zadata druga projekcija  $a''$  prave  $a$ , druga projekcija  $A''$  tačke  $A$  na njoj i drugi prorod  $1''$  prave  $a$ , može se odrediti prva projekcija  $a'$  tako da prava  $a$  sa  $V$  ravni zaklapa ugao, npr. od  $\varphi_V=60^\circ$ .

Tada se prava  $a$  zarotira oko ose upravne na  $V$  ravan koja prolazi kroz tačku  $A$  tako da se dovede u položaj paralelan sa  $H$  ravni. Tada se druga projekcija prave  $a''$  rotacijom dovede u položaj paralelan sa  $H$  ravni, tako da se u prvoj projekciji  $a^{o'}$  vidi u pravoj veličini kao i ugao prema  $V$  ravni ( $\varphi_V^\circ$ ). Tačka  $1''$  se zarotira oko  $A''$  u položaj  $1^{o''}$ , tako da je  $a^{o''}$  paralelno sa osom  $X$  (sl. 8.11). Prva projekcija zarotirane tačke  $1^{o'}$  je na osi  $X$  odakle se pod zadatim uglom od  $60^\circ$  nacrti  $a^{o'}$  koja je prava veličina prave  $a$  i koja određuje traženu tačku  $A'$ . Prva projekcija  $a'$  prave  $a$  prolazi kroz tačke  $1'$  i  $A'$ . Kao i u prethodnom primeru postoji još jedno rešenje, odnosno i druga mogućnost prave  $a$  koja zaklapa zadati ugao  $\varphi_V=60^\circ$ . Druga mogućnost prave  $a$  je određena tačkama  $A''$  i  $2''$ . Tačka  $2''$  je na istom rastojanju od  $A''$  kao i  $1''$ , odnosno  $1''A''=A''2''$ .



Sl. 8.10: Određivanje  $a''$  kada je prava  $a$  pod zadatim uglom  $\varphi_H^\circ=60^\circ$



Sl. 8.11: Određivanje  $a'$  kada je prava  $a$  pod zadatim uglom  $\varphi_V^\circ=60^\circ$

### Zadatak 8.3.

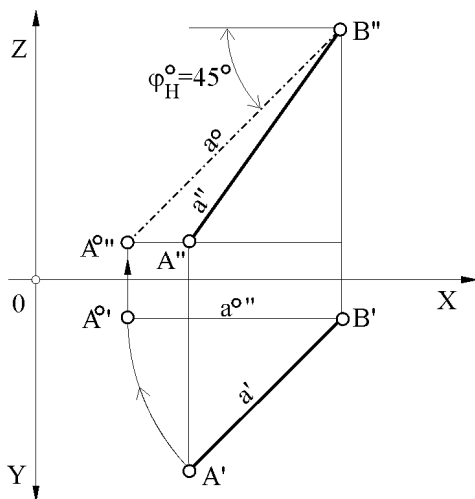
0(1;4). Prava  $a$  prolazi kroz tačke  $A(2;2,5;0,5)$  i  $B(4;0,5;?)$ . Odrediti drugu projekciju prave  $a$  tako da sa  $H$  ravni zaklapa ugao  $\varphi_H=45^\circ$ .

Prema zadatim koordinatama nacrti se  $a'$  i  $A''$ . Tačka  $A$  treba da se zarotira oko ose upravne na  $H$  ravan koja prolazi kroz tačku  $B$  u položaj da prava  $a$  bude paralelna sa  $V$  ravni. Da bi se ovo postiglo tačka  $A'$  se zarotira oko  $B'$  u položaj  $A^{o'}$  tako da prva projekcija  $a^{o'}$  prave  $a$  bude paralelna sa osom  $X$  (sl. 8.12). Pri tome tačka  $A$  pravi luk rotacije koji je paralelan je sa  $H$  ravni, te je njegova druga projekcija paralelna sa osom  $X$  i prolazi kroz tačku  $A''$ . Druga projekcija oborene tačke  $A^{o''}$  nalazi se u preseku spone iz  $A^{o'}$  i horizontalne linije iz tačke  $A''$  (druge projekcije luka rotacije). Prava veličina  $a^{o'}$  prave  $a$  prolazi kroz tačku  $A^{o''}$  i pod uglom je od  $45^\circ$ , te se na osnovu nje i spone iz tačke  $B'$  dobija  $B''$ , čime je određena druga projekcija prave  $a''$ .

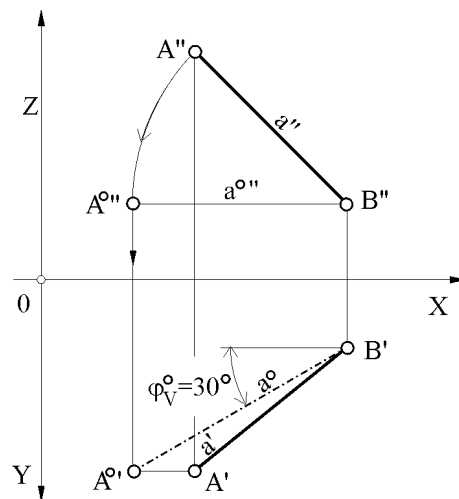
**Zadatak 8.4.**

0(1;4). Prava  $a$  prolazi kroz tačke  $A(2;2,5;3)$  i  $B(4;?;1)$ . Odrediti prvu projekciju prave  $a$  tako da sa  $V$  ravni zaklapa ugao  $\varphi_V=30^\circ$ .

Nacrta se druga projekcija prave  $a''$  i tačka  $A''$  (sl. 8.13). Da bi se odredila tačka  $B''$  i prva projekcija prave  $a'$  zarotira se prava  $a$  u položaj paralelan sa  $H$  ravni oko ose upravne na  $H$  ravan koja prolazi kroz tačku  $B$ . Pri tome se  $A''$  zarotira oko  $B''$  u položaj da druga oborena projekcija  $a^{o''}$  bude paralelna sa osom  $X$ . Krug rotacije je paralelan sa  $H$  ravni, te je njegova prva projekcija paralelna sa osom  $X$  i prolazi kroz  $A'$ . Tačka  $A^{o'}$  je u preseku spone iz  $A^{o''}$  i horizontalne linije iz tačke  $A'$  iz koje se povuče pravac pod uglom od  $30^\circ$  i tako dobija  $B'$ . Pravu veličinu prave  $a$  određuju tačke  $A^{o'}$  i  $B'$ , kao i zadati ugao prema  $V$  ravni ( $\varphi_V=30^\circ$ ).



Sl. 8.12: Određivanje  $a''$  kada je prave  $a$  pod zadatim uglom  $\varphi_H^o=45^\circ$  (Zadatak 8.3.)



Sl. 8.13: Određivanje  $a'$  kada je prave  $a$  pod zadatim uglom  $\varphi_V^o=30^\circ$  (Zadatak 8.4.)

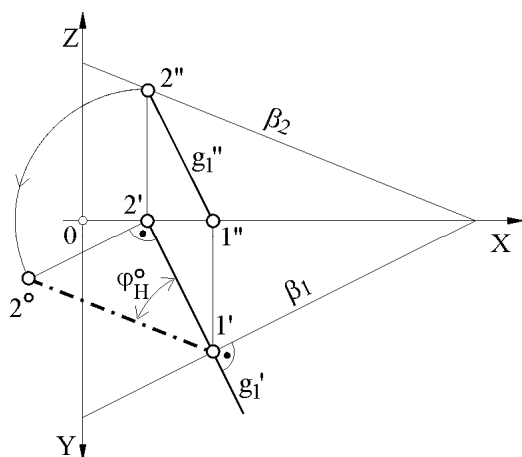
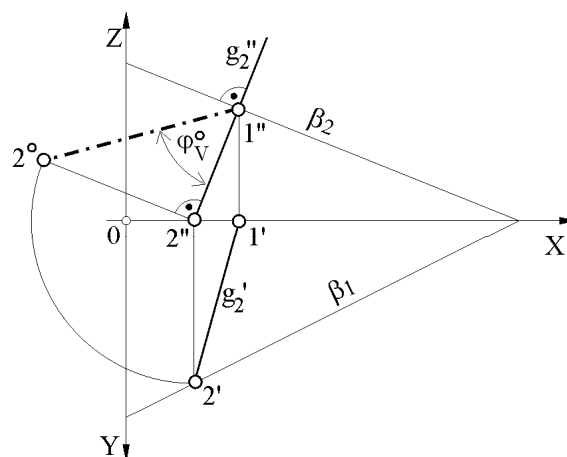
**8.9. UGAO RAVNI PREMA PROJEKCIJSKIM RAVNIMA**

Ugao ravni  $\beta$  prema  $H$  ravni je ugao njene prve nagibnice prema  $H$  ravni, a ugao ravni  $\beta$  prema  $V$  ravni je ugao njene druge nagibnice prema  $V$  ravni. Na sl. 8.14 nacrtana je prva nagibnica  $g_1$  ravni  $\beta$  koja prolazi kroz tačke 1 i 2 (prvi i drugi prodor). Nacrta se trougao pravih veličina u prvoj projekciji, tako što se iz tačke  $2'$  podigne normala na  $g_1'$  na koju se nanese razlika  $z$  koordinata tačaka 1 i 2 (šestarom iz  $2'$ ) i dobija  $2''$ . Ugao  $\varphi_H^o$  između  $g_1'$  i  $g_1''$  predstavlja ugao ravni  $\beta$  prema  $H$  ravni, tj. ugao prve nagibnice  $g_1$  prema  $H$  ravni.

Na sličan način se određuje i ugao ravni  $\beta$  prema  $V$  ravni. Nacrta se druga nagibnica  $g_2$  ravni  $\beta$  pomoću tačaka 1 i 2 i odredi njena prava veličina koristeći trougao pravih veličina u drugoj projekciji (sl. 8.15). Iz jedne tačke u drugoj projekciji, na primer  $2''$  podigne se normala na  $g_2''$  i na nju nanese razlika  $y$  koordinata tačaka 1 i 2 što određuje  $2'$ . Ugao  $\varphi_V^o$  između  $g_2'$  i  $g_2''$  predstavlja ugao ravni  $\beta$  prema  $V$  ravni, tj. ugao druge nagibnice  $g_2$  prema  $V$  ravni.

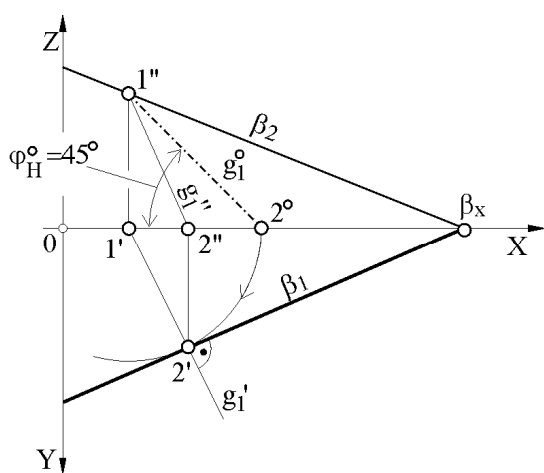
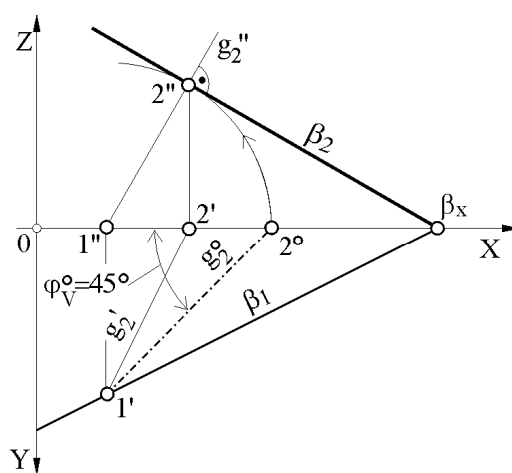
**8.10. RAVAN POD ZADATIM UGLOM PREMA PROJEKCIJSKIM RAVNIMA**

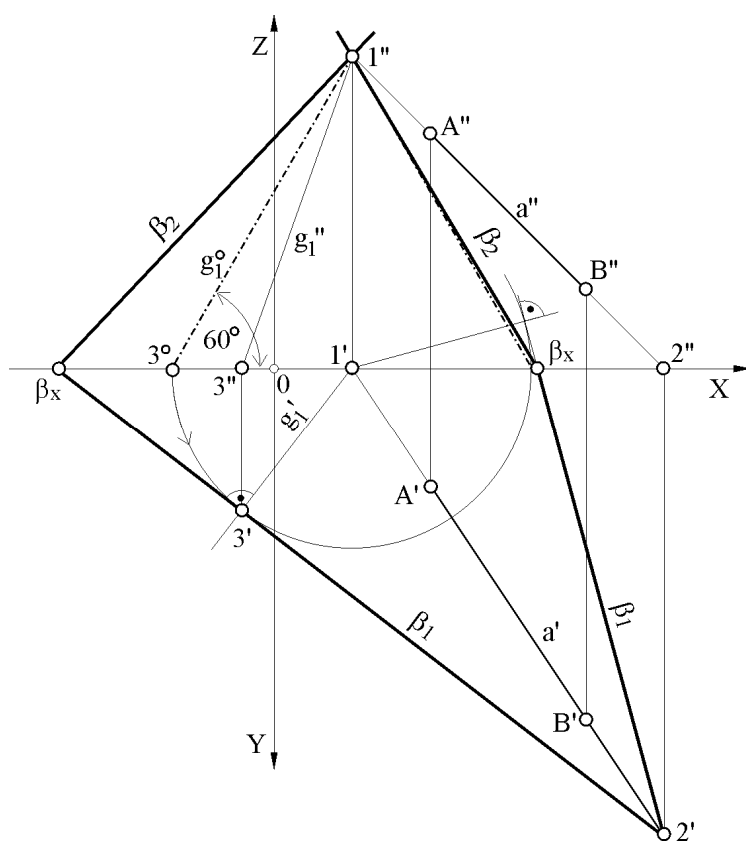
Ovde se zadatak postavlja obrnuto od zadatka iz prethodne tačke, tj. treba nacrtati ortogonalne projekcije ravni (tragove ravni) tako da sa  $H$  ili  $V$  projekcijskom ravni zaklapa zadati ugao. Neka je zadat drugi trag ravni  $\beta_2$  i ugao  $\varphi_H=45^\circ$  koji ravan  $\beta$  treba da zaklapa sa  $H$  ravni. Treba odrediti prvi trag  $\beta_1$ .

Sl. 8.14: Ugao  $\varphi_H^\circ$  ravni  $\beta$  prema  $H$  ravniSl. 8.15: Ugao  $\varphi_V^\circ$  ravni  $\beta$  prema  $V$  ravni

Zadatak se rešava tako što se nacrtaju prva nagibnica  $g_1$  ravni  $\beta$  pod uglom od  $45^\circ$  prema  $H$  ravni. Iz proizvoljne tačke  $1''$  na drugom tragu  $\beta_2$  koja je drugi prodor prve nagibnice, povuče se pravac pod uglom  $\varphi_H^\circ = 45^\circ$  koji predstavlja pravu veličinu prve nagibnice  $g_1$  i dobija se tačka  $2^\circ$  (sl. 8.16). Prva projekcija drugog prodora je na osi  $X$  (tačka  $1'$ ) iz koje se šestarom otvora  $1'2^\circ$  iz tačke  $1'$  nacrtaju luk koji predstavlja luk rotacije prve nagibnice u prvoj projekciji. Prvi trag  $\beta_1$  se dobija kao tangenta na ovaj luk iz osnog traga  $\beta_X$ . Kada se iz tačke  $1'$  povuče normala na trag  $\beta_1$  dobija se tačka  $2'$  koja određuje prvu projekciju prve nagibnice  $g_1'$  koja je upravna na  $\beta_1$ .

Na sl. 8.17 prikazano je određivanje drugog traga ravni  $\beta_2$  kada ravan  $\beta$  treba da je pod zadatim uglom od  $\varphi_V^\circ = 45^\circ$  prema  $V$  ravni, kada je poznat njen prvi trag  $\beta_1$ . Treba nacrtati drugu nagibnicu  $g_2$  ravni  $\beta$  tako da bude pod uglom od  $45^\circ$  prema  $V$  ravni. Stoga se iz proizvoljne tačke  $1'$  na tragu  $\beta_1$ , koja predstavlja prvi prodor druge nagibnice povuče pravac pod zadatim uglom od  $45^\circ$  i dobija  $g_2^\circ$  i tačka  $2^\circ$ . Iz druge projekcije prvog prodora (tačke  $1''$ ) nacrtaju se luk poluprečnika  $1''2^\circ$  (luk rotacije druge nagibnice u drugoj projekciji). Tangenta na luk rotacije iz  $\beta_X$  određuje drugi trag  $\beta_2$ , tako da je druga projekcija druge nagibnice  $g_2''$  normala iz tačke  $1''$  na trag  $\beta_2$ , što određuje i tačku  $2''$ .

Sl. 8.16: Crtanje traga  $\beta_1$  kada je ravan  $\beta$  pod zadatim uglom  $\varphi_H^\circ = 45^\circ$  prema  $H$  ravniSl. 8.17: Crtanje traga  $\beta_2$  kada je ravan  $\beta$  pod zadatim uglom  $\varphi_V^\circ = 45^\circ$  prema  $V$  ravni



Sl. 8.18: Crtanje ravni  $\beta$  pod zadatim uglom od  $60^\circ$  prema H ravni (Zadatak 8.5.)

### Zadatak 8.5.

0(4;5). Kroz pravu  $a$  zadatu tačkama  $A(2;1;5;3)$  i  $B(4;4;5;1)$  postaviti ravan  $\beta$  koja prema H ravni zaklapa ugao od  $60^\circ$ . Nacrtati oba rešenja.

Ravan  $\beta$  određena je pravom  $a$  i prvom nagibnicom  $g_1$  koja treba da je pod uglom od  $60^\circ$  prema H ravni, odnosno određena je njihovim prodorima kroz H i V ravan. Stoga se kroz drugi prodor prave  $a$  (kroz tačku  $1''$ ) nacrtaju oborena projekcija  $g_1''$  prve nagibnice pod uglom od  $60^\circ$  prema osi X i dobija tačka  $3''$  (sl. 8.18). Šestarom iz tačke  $1'$  nacrtaju se luk poluprečnika  $1'3''$  na koji se iz prvog prodora prave  $a$  (tačke  $2'$ ) povuče tangenta koja predstavlja prvi trag  $\beta_1$  ravni  $\beta$ . Drugi trag  $\beta_2$  prolazi kroz osni trag  $\beta_x$  i drugi prodor prave  $a$  (kroz tačku  $1''$ ). Druga varijanta tragova ravni  $\beta$  dobija se na isti način pomoću druge mogućnosti za  $g_1''$ .

## 8.11. UGAO RAVNI PREMA KOORDINATNIM OSAMA

Uglovi ravni  $\beta$  ( $\varphi_X$ ,  $\varphi_Y$  i  $\varphi_Z$ ) prema koordinatnim osama X, Y i Z dobijaju se iz pravouglavih trouglova  $00_1\beta_X$ ,  $00_1\beta_Y$  i  $00_1\beta_Z$ , (sl. 8.19). Tačka  $0_1$  je ortogonalna projekcija koordinatnog početka 0 na ravan  $\beta$  i tačka gde se dve katete tri pravougla trougla seku pod uglom od  $90^\circ$ . Tačka  $0_1$  dobija se kao prodor normale  $n$  iz tačke 0 na ravan  $\beta$ . Prava veličina uglova  $\varphi_X^\circ$ ,  $\varphi_Y^\circ$  i  $\varphi_Z^\circ$  najjednostavnije se određuje na pomoćnoj slici sa strane. Odredi se prava veličina  $0^\circ 0_1^\circ$  duži  $00_1$  (npr. rotacijom) koja je zajednička kateta za sva tri trougla. Na ovu duž povuče se pod pravim uglom linija na kojoj se nalaze oboreni osni tragovi ravni  $\beta$  (na pomoćnoj slici sa strane). Koordinate osnih tragova vide se u pravoj veličini, te se šestarom iz tačke  $0^\circ$  nanese duži  $0\beta_X$ ,  $0\beta_Y$  i  $0\beta_Z$ . i dobijaju tačke  $\beta_X^\circ$ ,  $\beta_Y^\circ$  i  $\beta_Z^\circ$  i prave veličine uglova ravni  $\beta$  prema koordinatnim osama.

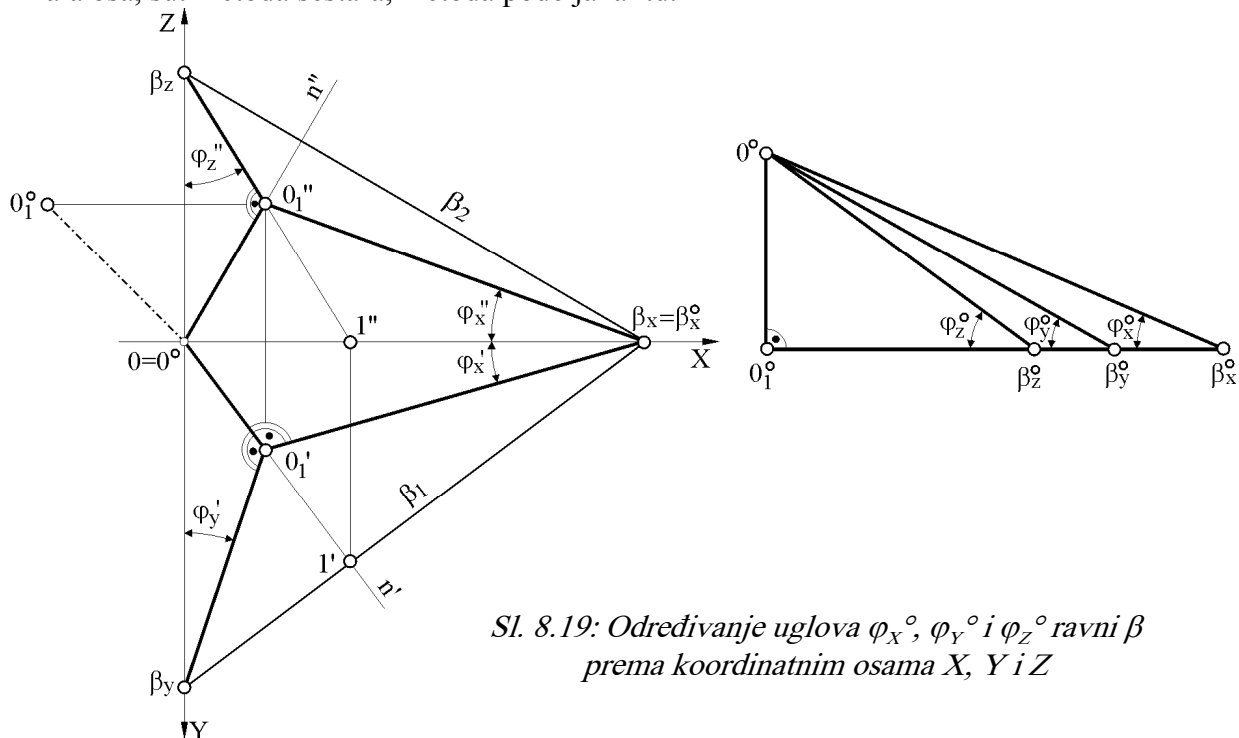
## 8.12. ORTOGONALNE PROJEKCIJE KRUŽNIH POVRŠINA

Kada je kružna površina ili kružnica u proizvoljnom položaju prema projekcijskoj ravni u ortogonalnoj projekciji na toj ravni se projicira kao elipsa. Samo kada je kružna površina paralelna sa projekcijskom ravni ili leži na njoj, projicira se na njoj kao kružnica (u pravoj veličini), a kada je upravna na projekcijsku ravan projicira se kao duž jednaka prečniku kružnice.

Elipsa, kao ortogonalna projekcija kružnice, može biti manje ili više "spljoštena" što zavisi od ugla pod kojim je prema projekcijskoj ravni. Što je ugao veći, elipsa je "spljoštenija" i obrnuto. Crtanje elipse je najjednostavnije kada je poznata velika i mala osa

elipse, kao osnovni parametri koji je definišu (sl. 8.20). Kod ortogonalnih projekcija kružnice (elipsi) velika osa jednaka je prečniku kružnice  $D$ , tj.  $AB=2a=2R=D$ , odnosno jednaka je dvostrukoj vrednosti poluose  $a$ , dok je  $a=R$ . Mala osa  $CD=2b$  je uvek manja od prečnika kružnice, što je ugao koji kružna površina zaklapa sa  $H$  ili  $V$  ravni veći, mala osa je manja i obrnuto. Velika i mala osa su pod uglom od  $90^\circ$ .

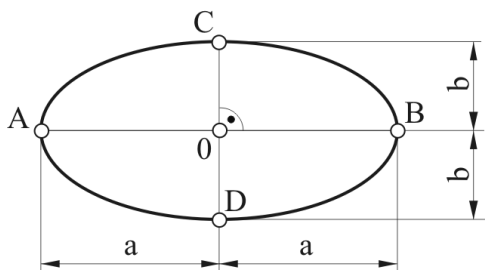
Elipsa se može nacrtati na više načina. Metode za crtanje elipse, kada su poznate velika i mala osa, su: metoda šestara, metoda podeljaka itd.



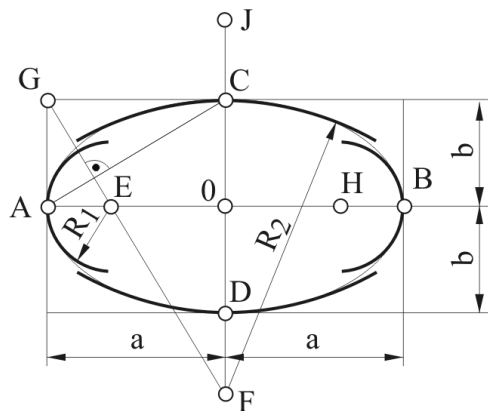
Sl. 8.19: Određivanje uglova  $\varphi_x^\circ$ ,  $\varphi_y^\circ$  i  $\varphi_z^\circ$  ravni  $\beta$  prema koordinatnim osama  $X$ ,  $Y$  i  $Z$

### Metoda šestara

Na osnovu poznate velike i male ose (tačaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ ) nacrtat se pravougaonik. Iz jednog roglja pravougaonika, npr. iz tačke  $G$  (sl. 8.21) povuče se normala na pravac  $AC$  i u preseku sa velikom osom dobija se tačka  $E$ , a sa malom osom tačka  $F$ . Tačke  $H$  i  $J$  dobijaju se simetrično tačkama  $E$  i  $F$  u odnosu na tačku  $O$ . Iz tačke  $E$  nacrtat se luk radijusa  $R_1=EA$  koji predstavlja deo elipse, a iz tačke  $F$  luk radijusa  $R_2=FC$  koji, takođe predstavlja deo elipse. Simetrično ovim dobijaju se i druga dva luka iz tačaka  $H$  i  $J$ . Spajanjem lukova pomoću krivuljara dobija se elipsa.



Sl. 8.20: Osnovni parametri za crtanje elipse  $a$ –velika poluosa,  $b$ –mala poluosa,  $2a$ –velika osa,  $2b$ –mala osa,  $O$ –centar elipse

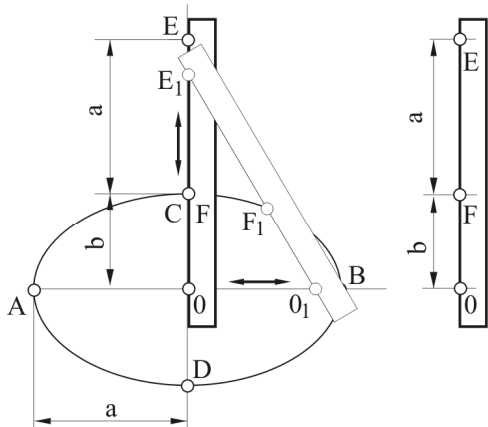


Sl. 8.21: Crtanje elipse metodom šestara kada su poznate velika i mala osa

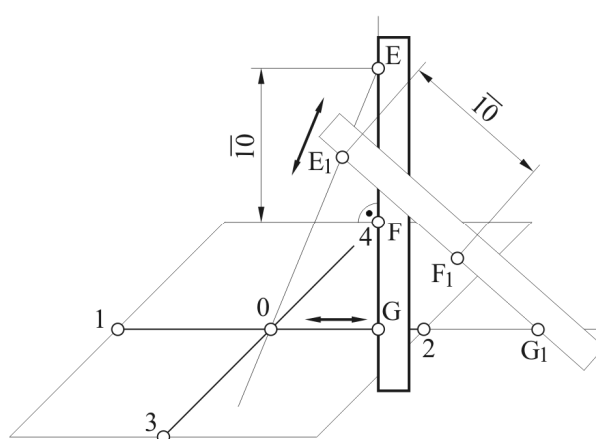
### Metoda parčeta hartije

Na osnovu zadate velike AB i male CD ose (sl. 8.22) na jednom parčetu hartije po ravnoj ivici nacrtat se duž OE koja je jednaka zbiru poluosa ( $OE=b+a$ ). Rastojanje OF na parčetu hartije predstavlja malu poluosu b, a FE veliku poluosu a. Parče hartije klizi po pravcima velike i male ose, tako da je tačka E stalno na pravcu male ose, a tačka O sa parčeta hartije na pravcu velike ose (dobijaju se tačke  $E_1, O_1$  u sledećem nekom položaju  $E_2, O_2$  itd.). Tačka  $F_1$  daje tačku elipse. Postupak se kontinualno ponavlja zavisno od željene preciznosti elipse. Kada se nacrtat gornja desna četvrtina elipse, parče hartije se premešta na levu stranu, zatim na donju.

Kada su poznati konjugovani prečnici (to su oni prečnici koji su na kružnici međusobno upravni, a na elipsi nisu) elipsu je najjednostavnije nacrtati pomoću parčeta hartije. I jedan i drugi konjugovani prečnik je manji od velike ose (od prečnika kružnice). Ovom metodom crtež se ne "opterećuje" dodatnim linijama, a zavisno od strpljenja dobija se dovoljno precizna elipsa. Iz jedne tačke kraćeg konjugovanog prečnika, tačke 4 (sl. 8.23) podigne se normala na duži konjugovani prečnik na koju se nanese polovina većeg konjugovanog prečnika, duž  $10$  i dobija tačka E. Spoji se tačka E i centar 0 i dobija pravac po kojem klizi tačka E sa parčeta hartije. Na parčetu hartije po ravnoj ivici, od proizvoljno odabranog položaja za tačku E, nanese se polovina većeg konjugovanog poluprečnika (duž  $EF$ ) i duž  $FG$ . Tačka E sa parčeta hartije klizi po pravcu OE, a tačka G po pravcu O2. Tačka F pri pomeranju parčeta hartije daje tačke elipse ( $F_1$ ).

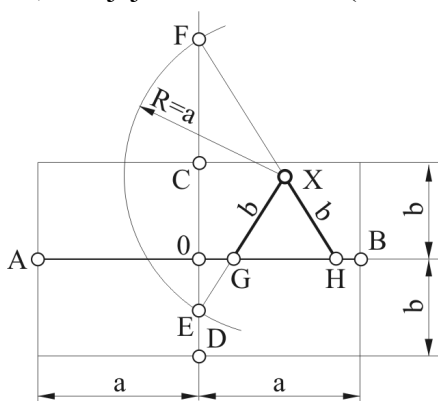


Sl. 8.22: Crtanje elipse metodom parčeta hartije kada je poznata velika i mala osa



Sl. 8.23: Crtanje elipse metodom parčeta hartije kada su poznati konjugovani prečnici

Ako je poznata velika osa AB i jedna tačka na elipsi X može se odrediti mala poluosa b. Pravac male ose je upravan na veliku iz tačke O koja je na sredini velike ose. Iz zadate (poznate) tačke X koja je na elipsi nacrtat se luk poluprečnika poluose a i gde seče pravac male ose, dobijaju se tačke E i F (sl. 8.24).



$$AB=2a - \text{zadato}$$

Poznat pravac male ose (upravan je na pravac velike ose)

X – zadata tačka na elipsi

$$XE=XF=a, \quad XG=XH=b$$

Sl. 8.24: Postupak dobijanja vrednosti male poluose b

Povuku se prave kroz tačke  $XE$  i  $XF$  i gde one seku veliku osu  $AB$ , dobijaju se tačke  $G$  i  $H$ . Rastojanje  $XG$  i  $XH$  predstavlja malu poluosu  $b$ , odnosno  $XG=XH=b$ . Sada kada je poznata i mala poluosa  $b$ , nekom od prethodnih metoda može se nacrtati elipsa.

### Zadatak 8.6.

0(1;6). Nacrtati kružnicu poluprečnika  $R=2$  cm sa centrom u tački  $S(2;2;?)$  koja leži na ravni  $\beta(7;6;4,5)$ .

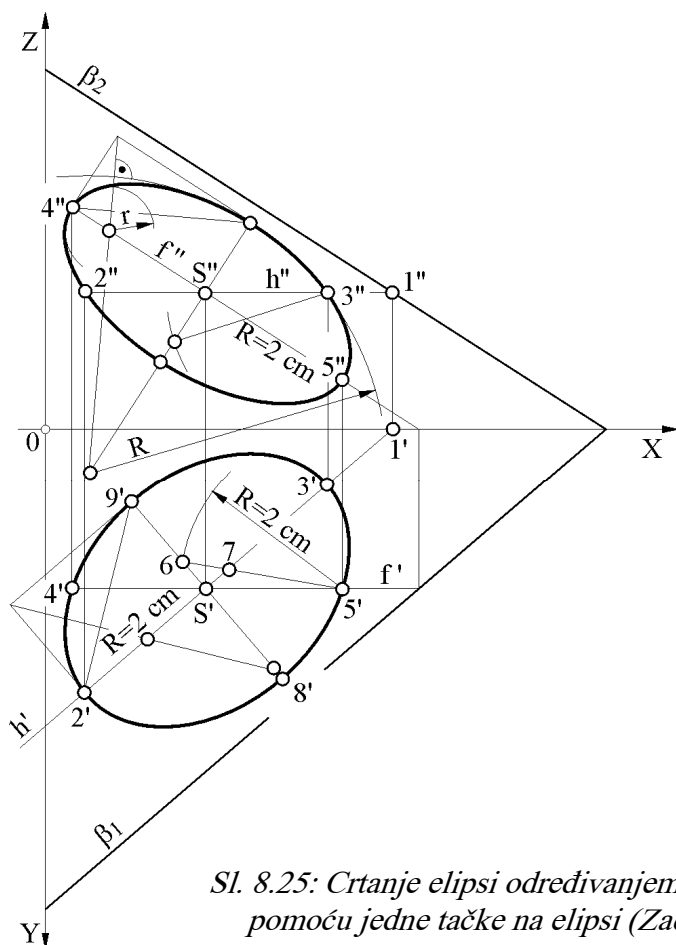
Kružnica je u proizvoljnom položaju na  $H$  i  $V$  ravni, te se u projekcijama vidi kao elipsa. Prečnik kružnice u prvoj projekciji se vidi u pravoj veličini na prvoj projekciji horizontale  $h'$  koja prolazi kroz prvu projekciju središta  $S'$ , što ujedno predstavlja veliku osu elipse u prvoj projekciji. U drugoj projekciji prečnik kružnice se projicira u pravoj veličini na drugoj projekciji frontale  $f''$  koja prolazi kroz drugu projekciju središta  $S''$  i to predstavlja veliku osu elipse u drugoj projekciji. Prečnik kružnice koji se projicira kao velika osa u prvoj projekciji, nije velika osa i u drugoj projekciji. Na pravac velike ose u prvoj i drugoj projekciji povuku se normale iz projekcija središta kružnice, što predstavlja pravce malih osa elipsi.

Vrednost male ose elipse određuje se na više načina: pomoću jedne tačke na elipsi, obaranjem tragova ravni, transformacijom itd.

#### a) Određivanje male poluose elipse pomoću jedne tačke na njoj

Nacrta se horizontala i frontala ravni kroz tačku  $S$  (sl. 8.25). Iz tačke  $S'$  po pravcu  $h'$  na jednu i drugu stranu nanese se vrednost poluprečnika  $R=2$  cm i dobijaju tačke  $2'$  i  $3'$  koje predstavljaju veliku osu elipse u prvoj projekciji. U drugoj projekciji po pravcu  $f''$  iz tačke  $S''$  na jednu i drugu stranu, takođe, nanese se vrednost  $R=2$  cm i dobijaju tačke  $4''$  i  $5''$  koje predstavljaju veliku osu elipse u drugoj projekciji. Na pravce velikih osa povuku se normale

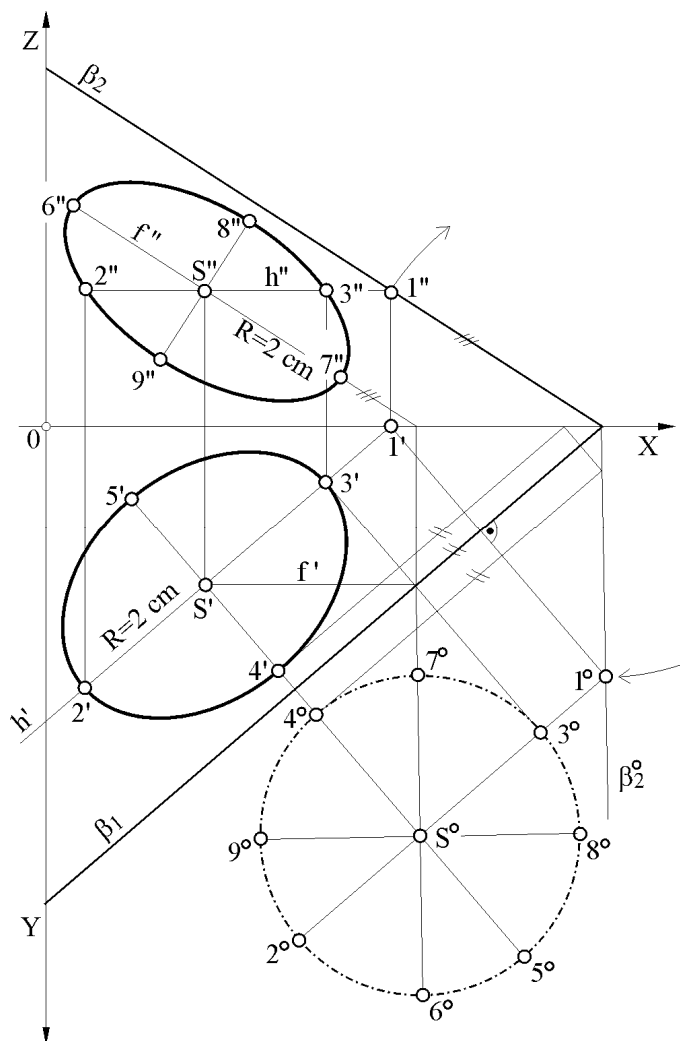
iz tačaka  $S'$  i  $S''$  i dobijaju pravci malih osa. Odrede se druge projekcije tačaka  $2$  i  $3$ , tj.  $2''$  i  $3''$ , kao i prve projekcije tačaka  $4$  i  $5$ , odnosno  $4'$  i  $5'$ . Iz tačke  $5'$ , kao tačke koja se nalazi na elipsi, postupkom objašnjenim na sl. 8.24 odredi se mala poluosa u prvoj projekciji. Duž  $5'7'$  predstavlja malu poluosu u prvoj projekciji koja se nanese na jednu i drugu stranu i dobijaju tačka  $8'$  i  $9'$  ( $S'8'=S'9'=5'7'$ ). Sada se metodom šestara može nacrtati elipsa u prvoj projekciji. Na isti način se dobija i mala poluosa u drugoj projekciji koristeći tačku  $3''$  kao tačku na elipsi.



Sl. 8.25: Crtanje elipsi određivanjem malih poluosa pomoću jedne tačke na elipsi (Zadatak 8.6.a.)

### b) Određivanje male poluose elipse obaranjem ravni

Drugi način za određivanje male poluose je obaranje jednog traga ravni koji je pokazan na istom primeru. Nacrta se horizontala i frontala ravni te se na  $h'$  i  $f''$  nanese vrednost prečnika i dobija velika osa u prvoj i velika osa u drugoj projekciji. Pomoću drugog prodora horizontale  $h$  povučene kroz središte elipse (tačke  $1''$ ) obori se drugi trag i dobija  $\beta_2^\circ$  (sl. 8.26). Iz tačke  $S^\circ$  nacrta se kružnica poluprečnika  $R=2$  cm i povuče par spregnutih prečnika (jedan paralelan, a drugi upravno na prvi trag  $\beta_1$ ), te se dobijaju tačke  $2^\circ, 3^\circ$  i  $4^\circ, 5^\circ$ . Pomoću horizontala ove tačke se "vrate" u prvu projekciju, tako da tačke  $2', 3'$  predstavljaju veliku osu u prvoj projekciji na kojoj se projicira prečnik u pravoj veličini, a tačke  $4', 5'$  malu osu elipse. U drugoj projekciji na  $f''$  se nanese vrednost prečnika  $2R=4$  cm što predstavlja veliku osu. Mala osa se dobija pomoću tačke  $2''$  ili  $3''$  kao u zadatku 8.6,a sa sl. 8.25. Male poluose u drugoj projekciji mogu se dobiti obaranjem prvog traga  $\beta_1^\circ$ .



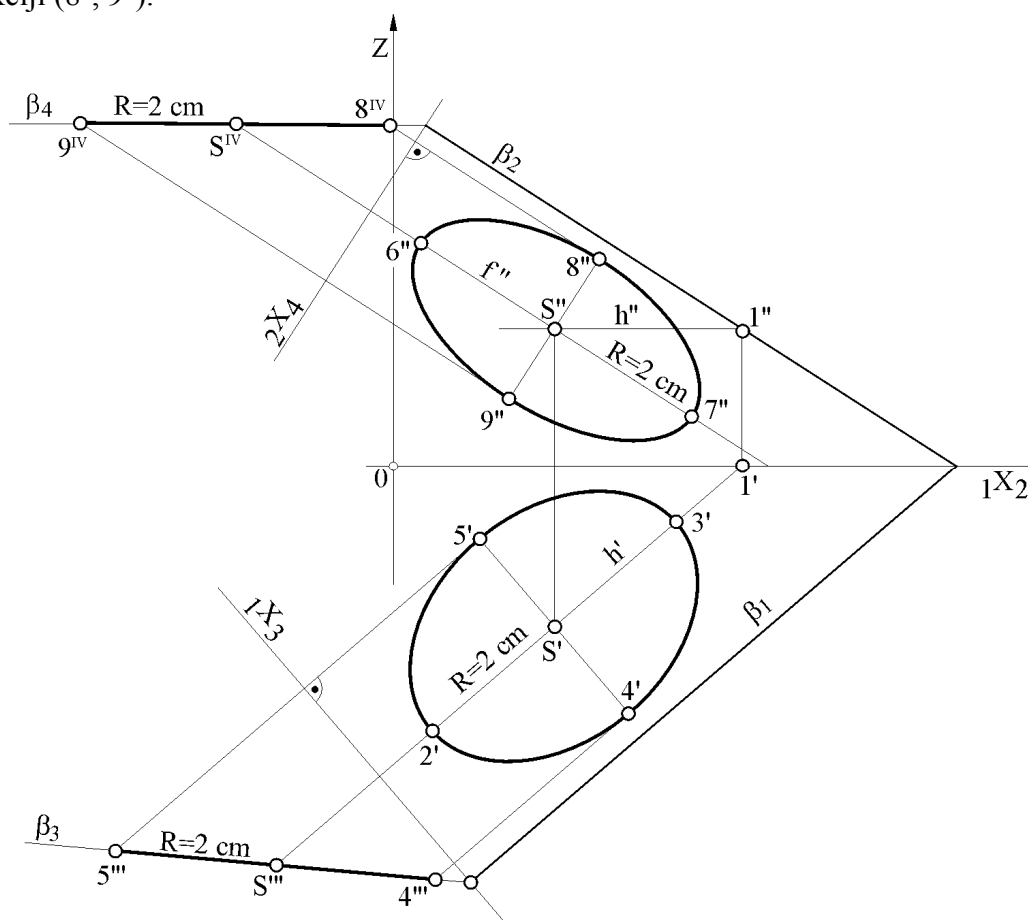
Sl. 8.26: Crtanje elipse određivanjem male poluose obaranjem traga  $\beta_2$  (Zadatak 8.6,b.)

### c) Određivanje male poluose elipse pomoću transformacije ravni

Sledeća mogućnost je transformacija ravni na kojoj se nalazi kružnica. Kao i u prethodna dva načina nacrtaju se horizontala i frontala ravni i postavi ravan transformacije  $\pi_3$  upravno na  $\pi_1$ , a  $\pi_4$  upravno na  $\pi_2$ , tako je osa  $1X_3 \perp \beta_1$  a osa  $2X_4 \perp \beta_2$  (sl. 8.27). Treća i četvrta projekcija



kružnice je duž jednaka prečniku na osnovu kojih se dobija mala osa u prvoj ( $4', 5'$ ), i u drugoj projekciji ( $8'', 9''$ ).



Sl. 8.27: Crtanje elipsi određivanjem male poluose postupkom transformacije (Zadatak 8.6.c.)

**Zadatak 8.7.**

0(12;7). Nacrtati ortogonalne projekcije kružnice koja leži na ravni  $\beta(-11;9;6)$  sa središtem u tački  $S(-3;2,5;?)$  postupkom obaranja ravni  $\beta$  oko prvog traga.

**Zadatak 8.8.**

0(6;13). Nacrtati ortogonalne projekcije kružnice koja prolazi kroz tačke  $A(4;7;1,5)$ ,  $B(9,5;3;5)$  i  $C(10;7;8,5)$ .

**Zadatak 8.9.**

0(3;10). Kroz tačku  $C(0;4,5;3,5)$  nacrtati pravu  $b$  upravno na pravu  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(2,5;1;0,5)$  i  $B(5;3,5;2,5)$ . Zatim odrediti pravu veličinu najkraćeg rastojanja između tačke  $C$  i prave  $a$ .

**Zadatak 8.10.**

0(4;14). Odrediti pravu veličinu ugla prave  $a$  prema ravni  $\alpha(12;10;11)$ . Prava  $a$  je zadata tačkama  $A(2;3;0,5)$  i  $B(9;9;5)$ .

## 9. ORTOGONALNE PROJEKCIJE PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TELA

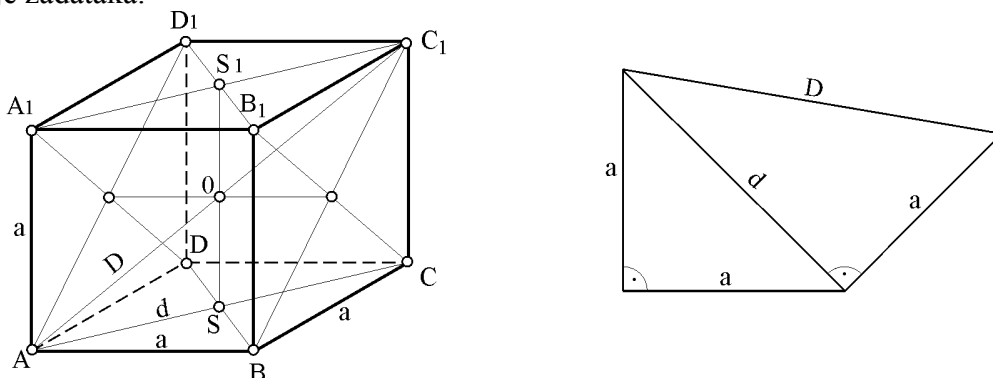
Većina delova mašina i objekata imaju oblik nastao od pravilnih geometrijskih tela, njihovih delova ili više međusobno spojenih u jednu celinu. Pravilna geometrijska tela su ona koja za osnovu imaju pravilne geometrijske figure: kvadrat, pravougaonik, trougao, pravilne poliedre i kružnicu. Geometrijska tela sa ravnim površinama nazivaju se rogljasta tela, a ona koja su nastala rotacijom neke linije, prave ili krive, oko ose rotacije nazivaju se rotaciona ili obla tela.

### 9.1. ROGLJASTA TELA

Pravilna rogljasta tela sastoje se od ravnih pravilnih površina koje se međusobno seku po jednoj liniji (ivici, izvodnici) ili u jednoj tački (roglju). Imaju jedan ili dva bazisa (osnove) na kojima se oslanja omotač. Omotač se sastoji od međusobno spojenih ivica (izvodnica) koje mogu biti međusobno paralelne ili da se seku u jednoj tački (vrhu) tela. Paralelne izvodnice mogu biti upravne na bazis (prava rogljasta tela) ili pod nekim proizvoljnim uglom (kosa rogljasta tela). Normala iz vrha rogljastog tela može probijati bazis u njegovom središtu (prava tela) ili van središta bazisa (kosa tela). U rogljasta tela spadaju: kocka, prizma, piramida, tetraedar, oktaedar itd.

#### 9.1.1. Kocka

Kocka ima šest međusobno upravnih ili paralelnih kvadrata (strana kocke) koji se seku po dvanaest jednakih ivica i osam rogljeva. U svakom roglju se seku tri međusobno upravne ivice kocke. Osnovni parametri kocke i njihov uzajamni odnos dat je na sl. 9.1. Središnje linije i telesne dijagonale seku su u tački  $O$  koja se naziva središtem kocke. Kocka ima tri središnje linije (jedna od njih je  $SS_1$ ) i četiri telesne dijagonale  $D$ . Središnje linije su međusobno upravne. Dijagonale  $d$  onih strana kocke koje se seku pod pravim uglom su međusobno upravne. Telesne dijagonale  $D$  se ne seku pod pravim uglom. Položaj i odnos ivice kocke  $a$ , dijagonale strane  $d$  i telesne dijagonale  $D$  dat je na sl. 9.1, desno, što predstavlja "ključ" za rešavanje zadataka.



Sl. 9.1: Kocka, osnovni parametri i njihov uzajamni odnos

$A$  - jedan od osam rogljeva,  $AB=a$  - jedna od dvanaest ivica,  $ABCD$  - jedna od šest strana,  $AC=d$  - jedna od dvanaest dijagonala strana,  $AC_1=D$  - jedna od četiri telesne dijagonale,  $SS_1$  - jedna od tri središnje linije,  $O$  - središte kocke

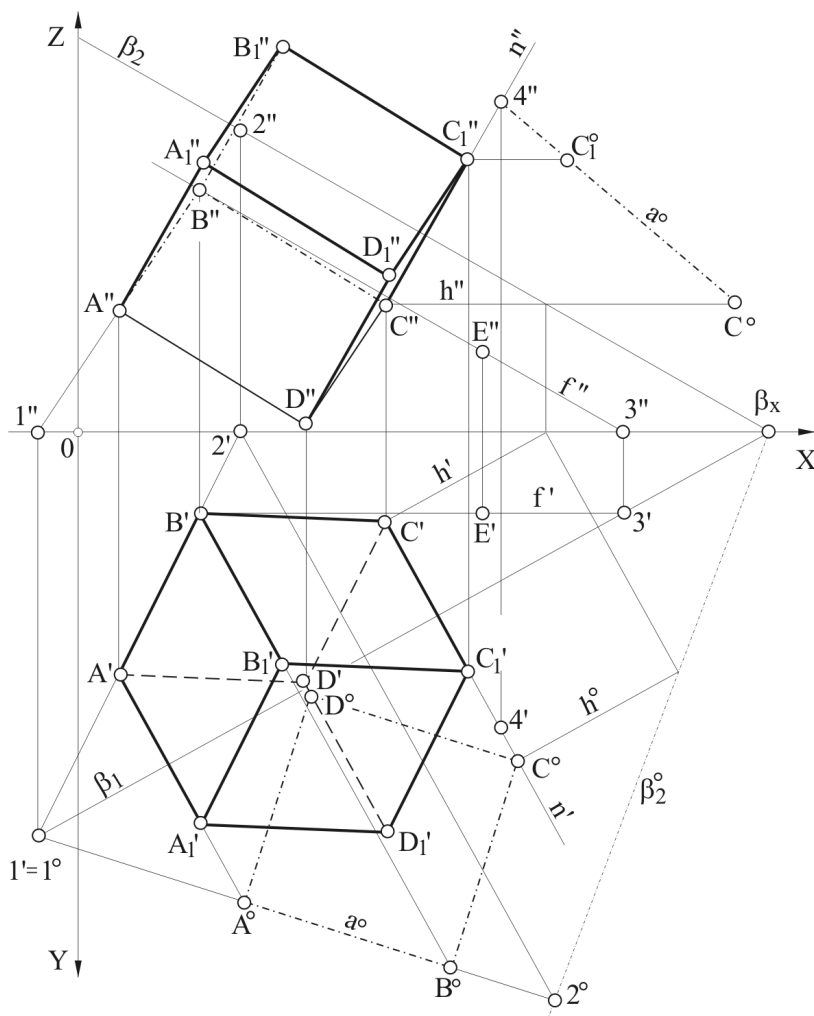
#### Zadatak 9.1.

$0(2;7)$ . Data je ivica kocke tačkama  $A(0,5;3;1,5)$  i  $B(1,5;1;3)$ . Na strani kocke na kojoj se nalazi ivica  $AB$  poznata je tačka  $E(5;1;1)$ . Nacrtati ortogonalne projekcije kocke.

Ivica kocke  $AB$  i tačka  $E$  nalaze se na jednoj strani kocke, odnosno obrazuju ravan  $\beta$  čije tragove možemo odrediti. Kroz tačku  $E$  povučemo pravu koja će se seći sa pravom koja

prolazi kroz tačke A i B, npr. u tački B (sl. 9.2). Na osnovu prodora prava koje prolaze kroz tačke A, B i B, E (tačke 1, 2 i 3) odrede se tragovi ravni  $\beta$ . Prvi trag  $\beta_1$  prolazi kroz prve prodore prava, tj kroz tačke 1' i 3'. Kako je prva projekcija prave koja prolazi kroz tačke B' i E' paralelna sa osom X ona predstavlja prvu projekciju frontale. Zbog toga je trag  $\beta_2$  paralelan sa drugom projekcijom prave koja prolazi kroz tačke E'', B'' i polazi iz osnog traga  $\beta_X$ . Da bi se nacrtale projekcije strane kocke ABCD potrebno je da se prvo nacrtaju u pravoj veličini, npr. obaranjem jednog traga ravni. Na osnovu tačke 2'' obori se drugi trag  $\beta_2$  i dobija  $\beta_2^\circ$  koristeći normalu na  $\beta_1$  iz 2' i uslova da je  $2''\beta_X = \beta_X 2^\circ$ . Prava koja prolazi kroz tačke A i B obori se pomoću njenih prodora 1' i 2''. Oborena tačka 1<sup>o</sup> je gde i njena prva projekcija 1'=1<sup>o</sup>. Oborene tačke A<sup>o</sup>, B<sup>o</sup> nalaze se u preseku normala na  $\beta_1$  iz tačaka A' i B' i duži 1<sup>o</sup>2<sup>o</sup>. Na osnovu dobijene prave veličine ivice kvadrata  $a^\circ = A^\circ B^\circ$  (ivica kocke) odrede se i ostali rogljevi C<sup>o</sup> i D<sup>o</sup>. Pomoću horizontale (h<sup>o</sup> i h') iz tačke C<sup>o</sup> odredi se C', a C'' je u preseku spone iz C' i h''. Tačka D se dobija iz uslova paralelnosti ivica bazisa. Ako je AD//BC tada je A'D'//B'C' i A''D''//B''C'', što važi i za paralelne ivice CD i AB.

Suprotna strana kocke  $A_1B_1C_1D_1$  je paralelna sa stranom ABCD, te se rogljevi  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$  nalaze na normalama ravni  $\beta$  iz tačaka A, B, C i D. Stoga se iz ovih tačaka povuku normale n ravni  $\beta$  na kojima se nalaze tačke  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$ . Ivica  $AA_1$  jednaka je ivici kocke a, ali se ona u projekcijama vidi deformisano (skraćeno). Na jedan od načina mogu se odrediti projekcije duži  $AA_1$  pošto se znaju pravci projekcija i njena prava veličina. U ovom zadatku korišćena je rotacija.



Sl. 9.2: Ortogonalne projekcije kocke (Zadatak 9.1)

Na prvoj projekciji normale n' iz tačke, npr. C' proizvoljno se odabere tačka 4' i pomoću spone do n'' odredi se i njena druga projekcija 4''.

Rotacijom se odredi prava veličina duži C4, npr. u drugoj projekciji. Na pravu veličinu duži C<sup>o</sup>4'' od tačke C<sup>o</sup> nanese se prava veličina ivice kocke a<sup>o</sup> i dobija tačka C<sub>1</sub><sup>o</sup>, a pomoću horizontalne linije do n'' dobija se C<sub>1</sub>'. Prva projekcija ove tačke C<sub>1</sub>' nalazi se na sponi i n'. Ostale tačke A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub> i D<sub>1</sub> dobijaju se iz jednakosti ivica kocke C'C<sub>1</sub>'=A'A<sub>1</sub>' itd., odnosno C''C<sub>1</sub>''=A''A<sub>1</sub>'', što važi i za druge ivice kocke.

Vidljivost se određuje na način opisan u zadatku 5.16. sl. 5.35. Prvo se podebljaju sve spoljašnje konture predmeta u obe projekcije, jer nisu zaklonjene, tj. vide se. Zatim se uoči tačka ili ivica predmeta unutar konture u prvoj ili drugoj projekciji, u

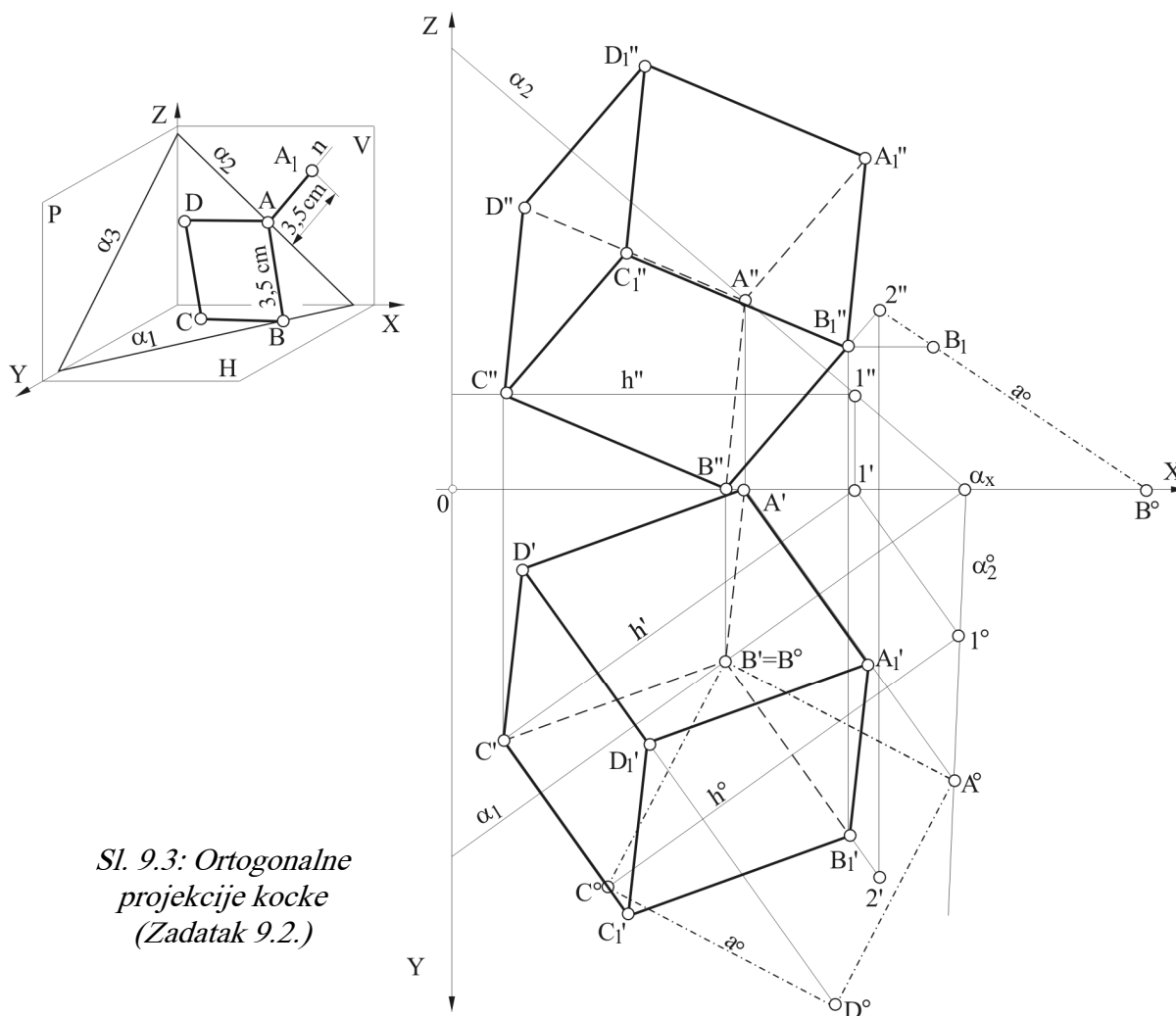
ovom primeru tačka D'. Tačka D' se ne vidi jer je unutar konture prve projekcije, a u drugoj projekciji D'' je najdalje od posmatrača (najbliža osi X), te se sve ivice koje "idu" iz D' ne vide. U drugoj projekciji tačka B'' i sve ivice iz nje se ne vide, jer je unutar konture druge projekcije, a tačka B' je najdalja od posmatrača, tj. najbliža osi X.

### Zadatak 9.2.

0(1;7). Data je ravan  $\alpha(7;5;6)$  na kojoj se nalazi strana kocke ABCD. Tačka A se nalazi na V ravni 4 cm desno od profilnice. Ivica kocke je  $a=3,5$  cm, a drugi rogalj kocke B leži na H ravni. Nacrtati ortogonalne projekcije kocke.

Pri rešavanju složenijih zadataka treba nacrtati skicu postavke i način rešavanja zadatka. Teme kocke, tačka A nalazi se na ravni  $\alpha$  i na V ravni, te se može zaključiti da se nalazi na drugom tragu  $\alpha_2$ . Drugu rogalj, tačka B nalazi se na ravni  $\alpha$  i na H ravni, te se može zaključiti da se nalazi na prvom tragu  $\alpha_1$ , na rastojanju od 3,5 cm od tačke A. Suprotno teme od tačke A, tačka A<sub>1</sub> nalazi se na normali n ravni  $\alpha$  na rastojanju od 3,5 cm (sl. 9.3 levo).

Nacrta se zadata ravan  $\alpha$ . Pošto se tačka A nalazi istovremeno na ravni  $\alpha$  i na V ravni, njena druga projekcija A'' se nalazi na tragu  $\alpha_2$ , a prva A' na osi X na 4 cm desno od P ravni. Obori se jedan trag, npr. drugi  $\alpha_2$  pomoću tačke A'' i dobija  $\alpha_2^\circ$  i A° (sl. 9.3). Rogalj kocke B je istovremeno na ravni  $\alpha$  i H ravni, te se B' nalazi na  $\alpha_1$ , a B'' na osi X. [estarem otvora  $a=3,5$  cm iz tačke A° zaseče se trag  $\alpha_1$  i dobija B°=B'. Na ivicu kocke A°B° konstruiše se kvadrat koji predstavlja stranu kocke i dobijaju tačke C° i D°. Prva i druga projekcija tačke C dobija se pomoću h°, h' i h''. Tačka D se dobija iz uslova paralelnosti dobijenih ivica kocke u obe projekcije. Suprotna strana kocke A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> određuje se na isti način kao u prethodnom zadatku 9.1. sl. 9.2, na osnovu proizvoljne tačke 2 na izvodnici iz B'.



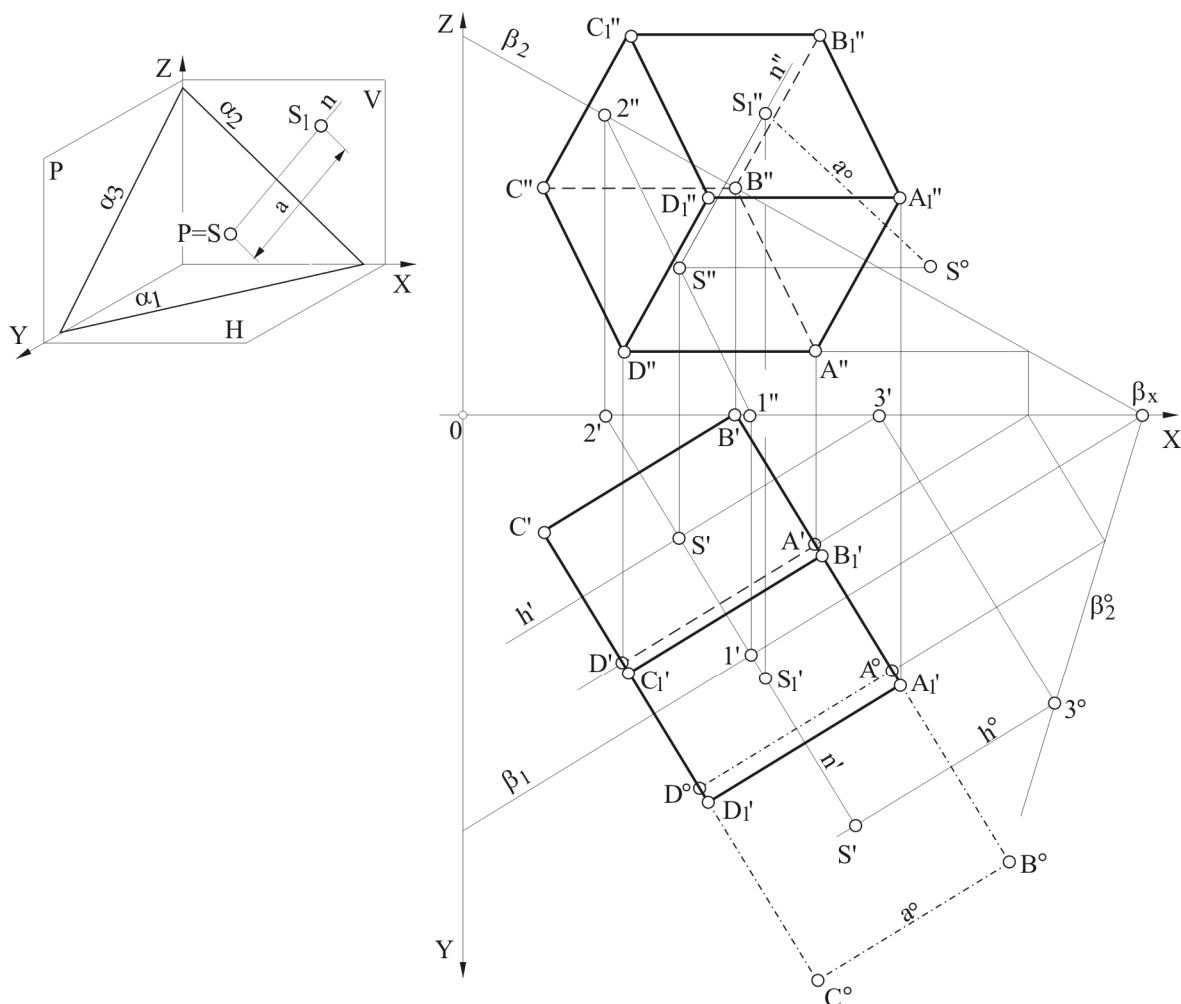
Sl. 9.3: Ortogonalne projekcije kocke (Zadatak 9.2.)

**Zadatak 9.3.**

0(1;7). Data je ravan  $\beta(9;5,5;5)$  na kojoj se nalazi strana kocke ABCD. Središte suprotne strane kocke je u tački  $S_1(4;3,5;4)$ . Dve ivice kocke su paralelne sa H ravni. Nacrtati ortogonalne projekcije kocke.

Ako se kroz tačku  $S_1$  nacrti normala  $n$  ravni  $\beta$  i odredi njen prodor  $P$  kroz ravan  $\beta$  dobiće se središte  $S$  suprotne strane kocke koja leži na ravni  $\beta$ . Rastojanje od tačke  $S_1$  do  $S$  jednako je ivici kocke  $a$  (sl. 9.4 levo).

Prema zadatim podacima nacrtaju se ravan  $\beta$  i tačka  $S_1$  koja je izvan ravni  $\beta$ , kao središte strane kocke. Suprotno središte  $S$  je na ravni  $\beta$  na kojoj se nalazi strana kocke ABCD i nalazi se kao prodor normale  $n$  ravni  $\beta$  iz tačke  $S_1$ . Nacrtaju se iz tačke  $S_1$  projekcije normale  $n$ , tako da je  $n' \perp \beta_1$  i  $n'' \perp \beta_2$ . Odredi se prodor normale  $n$  kroz ravan  $\beta$  pomoću pomoćne ravni upravne na H ravan (sl. 9.4). Projekcije presečnice ravni  $\beta$  i pomoćne ravni (zbog preglednosti nije na crtežu označena) određene su projekcijama tačkaka 1 i 2. U preseku druge projekcije presečnice (određena tačkaka 1'' i 2'') i  $n''$  dobija se tačka  $S''$ , a njena prva projekcija  $S'$  je u preseku vertikalne spona i  $n'$ . Središnja linija kocke  $S_1S$  jednaka je ivici kocke  $a$ . Da bi se nacrtale ortogonalne projekcije kocke treba odrediti pravu veličinu ivice  $a^\circ$ . U zadatku je korišćena rotacija i to u drugoj projekciji. Duž  $S^\circ S_1''$  jednaka je  $a^\circ$ .



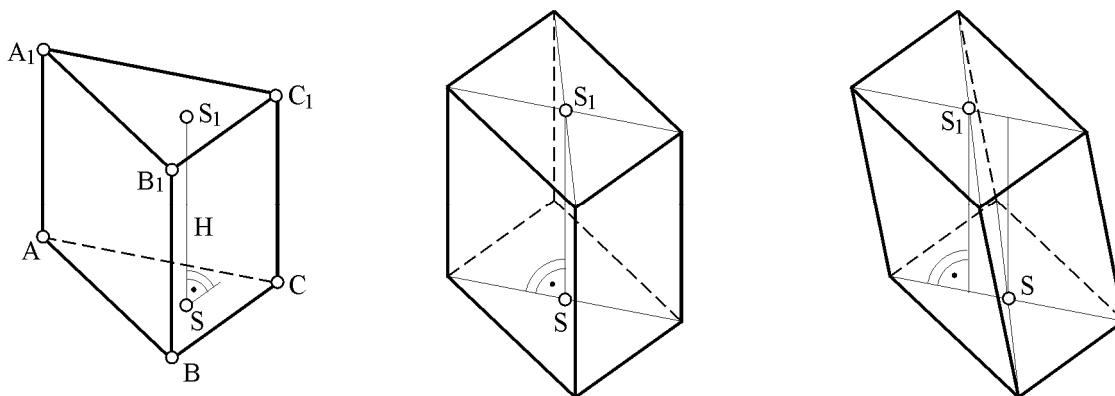
Sl. 9.4: Ortogonalne projekcije kocke (Zadatak 9.3.)

Obori se ravan  $\beta$  oko prvog traga  $\beta_1$  kao i tačka  $S$  na njoj. Iz tačke  $S^\circ$  konstruiše se kvadrat stranice  $a^\circ$  tako da su dve ivice paralelne sa prvim tragom  $\beta_1$  (jer su paralelne sa H ravni). Koristeći horizontale iz tačkaka  $A^\circ$ ,  $D^\circ$  i  $S^\circ$  dobijaju se prve i druge projekcije ovih

tačkaka, a na osnovi njih i tačke C i B u obe projekcije kao simetrične u odnosu na središte S. Strana kocke  $A_1B_1C_1D_1$  sa središtem u tački  $S_1$  je paralelna sa nacrtanom stranom ABCD. Projekcije strane kocke  $A_1B_1C_1D_1$  dobijaju se iz uslova da je  $A'A_1'=S'S_1'$ ,  $B'B_1'=S'S_1'$  itd., odnosno da je  $A''A_1''=S''S_1''$ ,  $B''B_1''=S''S_1''$  itd.

### 9.1.2. Prizma

Prizma nastaje kada se prava linija (izvodnica) pomera po obimu pravilnog mnogougla tako da ostaje sama sebi paralelna. Svaka prizma ima dva bazisa (pravilna mnogougla), onoliko strana koliko mnogougao ima ivica, onoliko izvodnica koliko mnogougao ima temena i dva puta veći broj rogljeva od broja temena mnogougla (bazisa). Bočne strane svih prizmi su paralelogrami. Pravilan mnogougao može biti: jednakostraničan trougao, kvadrat, pravougaonik, petougao, šestougao itd. Prizma može biti prava ili kosa (sl. 9.5.)



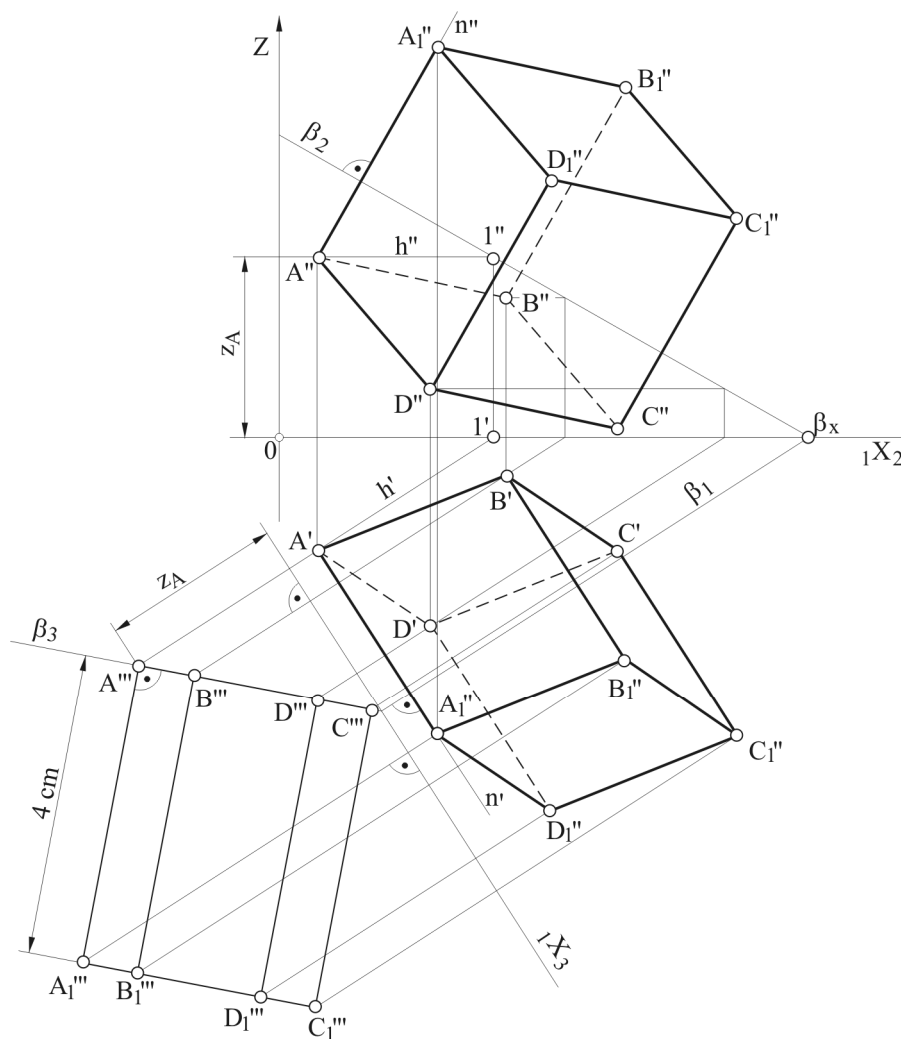
Sl. 9.5: Prave i kose prizme koje za bazis imaju jednakostraničan trougao i kvadrat  
 $A$  – jedan od rogljeva,  $ABC$  – jedan od dva bazisa,  $AA_1$  – jedna od izvodnica,  
 $ABA_1B_1$  – jedna od strana,  $SS_1$  – središnja linija prizme,  $H$  – visina prizme

### Zadatak 9.4.

0(5;6). Data je ravan  $\beta(7;4,5;4)$  na kojoj se nalazi bazis ABCD pravilne prave četverostrane prizme visine 4 cm. Temena bazisa su  $A(0,5;1,5;?)$ ,  $B(3;0,5;?)$  i  $D(2;2,5;?)$ . Nacrtati ortogonalne projekcije prizme.

Druge projekcije tačkaka A, B i D određuju se iz uslova da se nalaze na ravni  $\beta$  koristeći horizontale. ^etvrta tačka C određuje se iz uslova paralelnosti ivica četvorougla, tj.  $DC//AB$  i  $BC//AD$ , što se odnosi i na njihove projekcije (sl. 9.6). Prizma je prava te su njene izvodnice upravne na ravan  $\beta$ , odnosno tačke  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$  nalaze se na normalama ravni  $\beta$  iz tačkaka A, B, C i D. Potrebno je odrediti jednu izvodnicu u projekcijama npr.  $A'A_1'$  i  $A''A_1''$  kada je zadata prava veličina od 4 cm.

U ovom zadatku je korišćena transformacija. Postavi se ravan  $\pi_3$  upravno na ravni  $\pi_1$  i  $\beta_1$  te je osa  ${}_1X_3$  upravna na  $h'$ . Treća projekcija bazisa je duž  $A'''C'''$ , a izvodnice se projiciraju pod pravim uglom na bazis i u pravoj veličini. Pod pravim uglom na treću projekciju bazisa iz svake tačke povuku se izvodnice visine 4 cm i dobijaju tačke  $A_1''', B_1''', C_1'''$  i  $D_1'''$ , odnosno treća projekcija drugog bazisa. Prva projekcija drugog bazisa dobija se za svaku tačku u preseku spona upravne na osu  ${}_1X_3$  iz treće projekcije i normale na trag  $\beta_1$ . Na primer, tačka  $A_1'$  dobija se u preseku spona upravne na  ${}_1X_3$  iz tačke  $A_1'''$  i normale  $n'$  iz tačke A'. Druge projekcije drugog bazisa, tačke  $A_1'', B_1'', C_1''$  i  $D_1''$  nalaze se u preseku spona iz prvih projekcija i drugih projekcija normala  $n''$ .



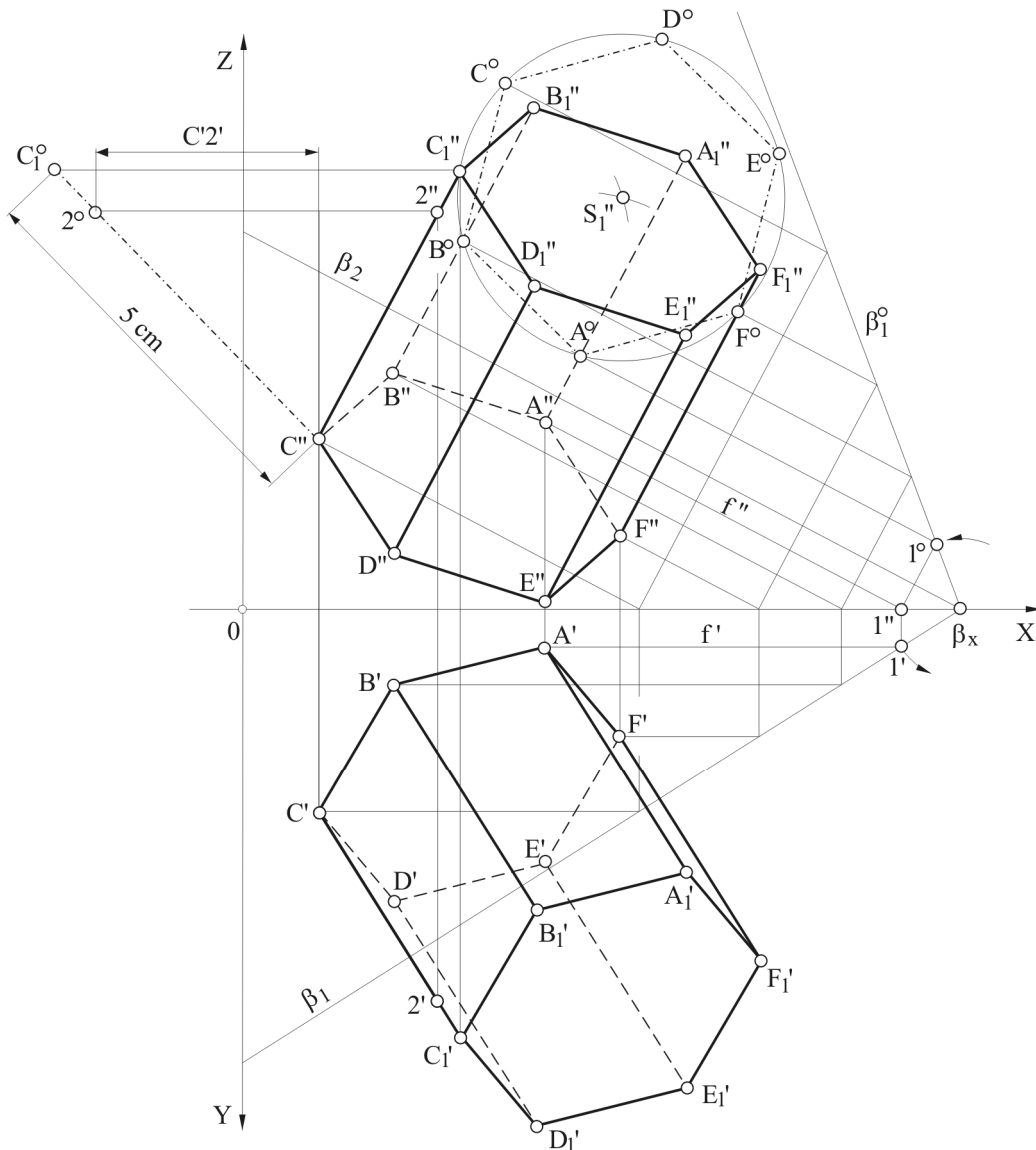
Sl. 9.6: Ortogonalne projekcije četverostrane prave prizme (Zadatak 9.4.)

**Zadatak 9.5.**

0(4;9). Data je ravan  $\beta(9,5;6;5)$  i tačke  $A(4;0,5;?)$  i  $B(2;1;?)$  na njoj. Duž AB predstavlja ivicu bazisa pravilne šestougaone prizme. Bazis prizme ABCDEF leži na ravni  $\beta$ . Nacrtati pravu prizmu visine 5 cm.

Obori se prvi trag ravni  $\beta_1$  i data duž AB na njoj. Duž  $A^\circ B^\circ$  je ivica pravilnog šestougaonika, te je ujedno i poluprečnik opisanog kruga oko šestougaonika (sl. 9.7). Centar kruga i bazisa  $S^\circ$  dobija se u preseku lukova poluprečnika  $R=A^\circ B^\circ$  iz tačaka  $A^\circ$  i  $B^\circ$ . Konstruiše se pravilan šestougaonik ABCDEF i pomoću frontala odrede druga i prva projekcija ovih tačaka. Izvodnice prizme su upravne na ravan  $\beta$ , odnosno nalaze se na normalama iz tačaka bazisa. Projekcije jedne od izvodnica, npr.  $CC_1$  određuje se rotacijom u drugoj projekciji pomoću proizvoljne tačke 2. Odredi se prava veličina duži  $C_2$  ( $C''C_1^\circ=5$  cm) i na njoj od tačke  $C''$  nanese visina prizme od 5 cm, te se dobija tačka  $C_1^\circ$  ( $C''C_1^\circ=5$  cm). Iz tačke  $C_1^\circ$  povuče se horizontalna linija koja u preseku sa  $n''$  iz  $C''$  daje tačku  $C_1'$ . Prva projekcija tačke  $C_1'$  je u preseku spone i normale iz  $C'$ .

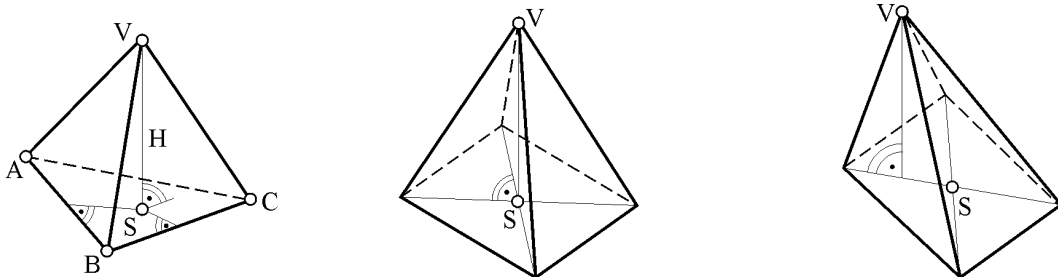
Ostale tačke gornjeg bazisa određuju se iz jednakosti visina izvodnica, kao i jednakosti projekcija izvodnica, kako je opisano u zadatku 9.3.



Sl. 9.7: Ortogonalne projekcije šestostrane prave prizme  
(Zadatak 9.5.)

### 9.1.3. Piramida

Piramida nastaje kada se prava linija (izvodnica) pomera po obimu pravilnog mnogougla (bazisa) tako da prolazi kroz jednu tačku koja se naziva vrh piramide. Bazis piramide može biti isti kao kod prizme. Može biti prava ili kosa (sl. 9.8). Svaka piramida ima jedan bazis, onoliko strana koliko mnogougao ima ivica, onoliko izvodnica koliko mnogougao ima temena i rogljeva za jedan više od temena mnogougla. Strane piramida su trouglovi.



Sl. 9.8: Prave i kose piramide koje za bazis imaju jednakostraničan trougao i kvadrat  
A – jedan od rogljeva, AV – jedna od izvodnica, ABC – bazis, ABV – jedna od strana  
V – vrh piramide, S – središte bazisa, H – visina piramide

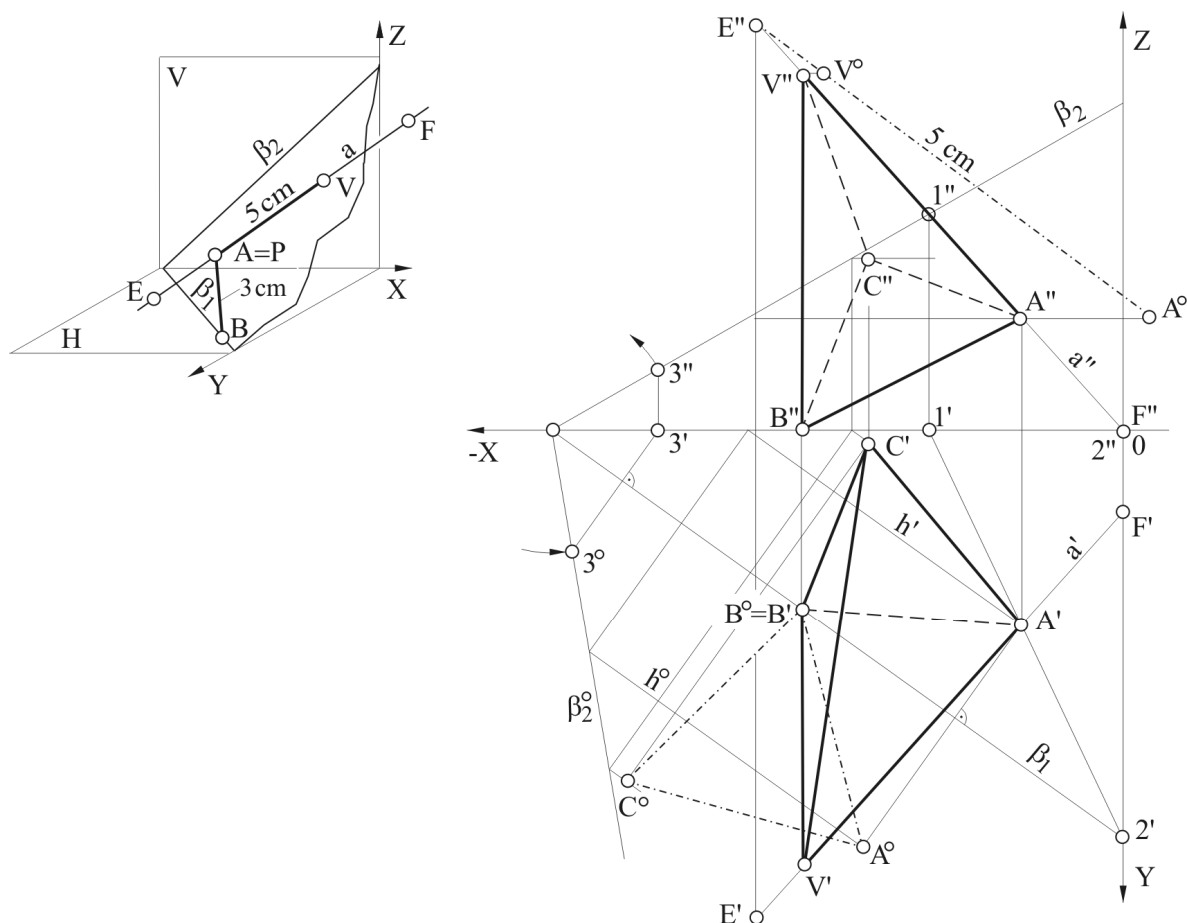


**Zadatak 9.6.**

0(9;6). Na ravni  $\beta(-7;5;4)$  nalazi se bazis trostrane piramide. Izvodnica AV je dužine 5 cm i nalazi se na pravoj  $a$  koja prolazi kroz tačke  $E(-4,5;6;5)$  i  $F(0;1;0)$ . Bazis piramide je jednakostraničan trougao ivice 3 cm. Jedno teme bazisa leži na H ravni.

Rogalj bazisa piramide A nalazi se na pravoj  $a$  koja prolazi kroz tačke E i F i na ravni  $\beta$ , te se može zaključiti da se nalazi na prodoru ove prave kroz ravan  $\beta$ . Drugi rogalj bazisa B nalazi se istovremeno na ravni  $\beta$  i na horizontalnici H, te se može zaključiti da se nalazi na prvom tragu ravni  $\beta_1$  (sl. 9.9, levo). Rastojanje između rogļeva A i B je zadato i iznosi 3 cm.

Prodor, tj tačka A se određuje koristeći pomoćnu ravan koja prolazi kroz pravu  $a$  i upravna je na V ravan. Tačke 1 i 2 su tačke presečnice pomoćne ravni i ravni  $\beta$ . U preseku prve projekcije presečnice (prolazi kroz tačke 1' 2') i prve projekcije prave  $a'$  dobija se  $A'$  a pomoću vertikalne spone do  $a''$  dobija se  $A''$ . Da bi se konstruisao jednakostraničan trougao kao bazis piramide, obori se drugi trag i tačka A, te se dobija  $\beta_2^\circ$  i  $A^\circ$ . Konstruiše se trougao sa jednakim ivicama od 3 cm tako da se drugo teme  $B^\circ$  nalazi na tragu  $\beta_1$ . Dobijene tačke  $B^\circ$  i  $C^\circ$  pomoću horizontala ravni  $\beta$  "vrate" se u prvu projekciju  $B'$  i  $C'$ , a zatim se odredi i druga projekcija tačaka  $B''$  i  $C''$ . Vrh piramide se određuje tako što se odredi prava veličina duži AE (rotacijom u drugoj projekciji) i na njoj iz tačke  $A^\circ$  se nanese 5 cm, tj  $A^\circ V^\circ = 5$  cm. Iz  $V^\circ$  pomoću horizontalne linije odredi se  $V''$ , a  $V'$  je u preseku spone i  $a'$  (sl. 9.9).



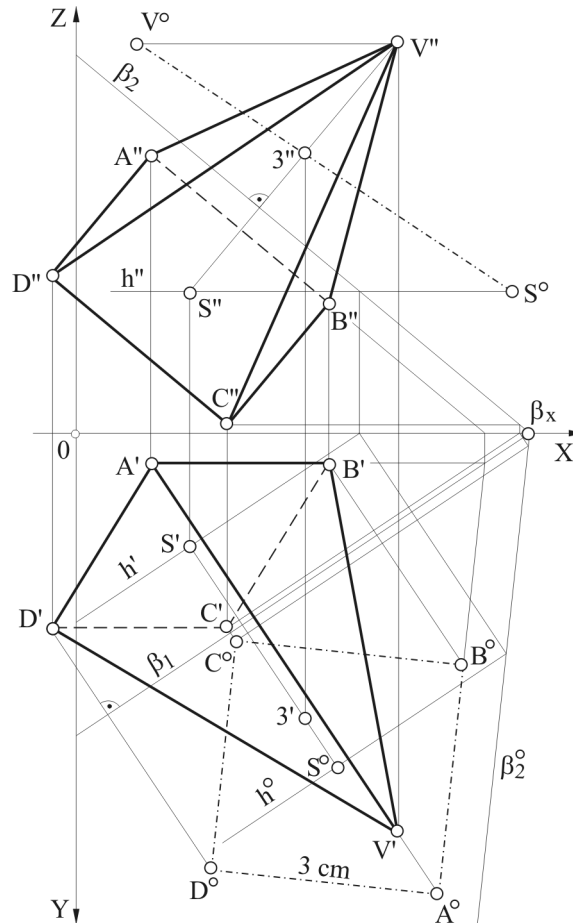
Sl. 9.9: Ortogonalne projekcije trostrane prave piramide (Zadatak 9.6.)

**Zadatak 9.7.**

0(2;6). Na ravni  $\beta(6;4;5)$  nalazi se tačka  $S(1,5;1,5;?)$  kao centar bazisa pravilne prave četverostrane piramide visine 6 cm. Ivica kvadrata bazisa je 3 cm a dve ivice bazisa su paralelne sa V ravni. Nacrtati ortogonalne projekcije piramide.

Pomoću horizontale  $h$  ravni  $\beta$  i njenog drugog prodora (tačke 1'') obori se drugi trag ravni  $\beta$  i odredi središte bazisa  $S^\circ$  iz kojeg se konstruiše kvadrat stranice 3 cm (prava veličina

bazisa), tako da su mu dve ivice paralelne sa  $\beta_2^\circ$  jer treba da su paralelne sa V ravni (sl. 9.10). Na isti način kao u prethodnim zadacima odredi se prva i druga projekcija bazisa ABCD koji leži na ravni  $\beta$  i čiju pravu veličinu smo odredili. Vrh piramide se dobija tako što se odredi prava veličina proizvoljne duži S3 na koju se nanese visina piramide 6 cm ( $S^\circ V^\circ = 6$  cm).

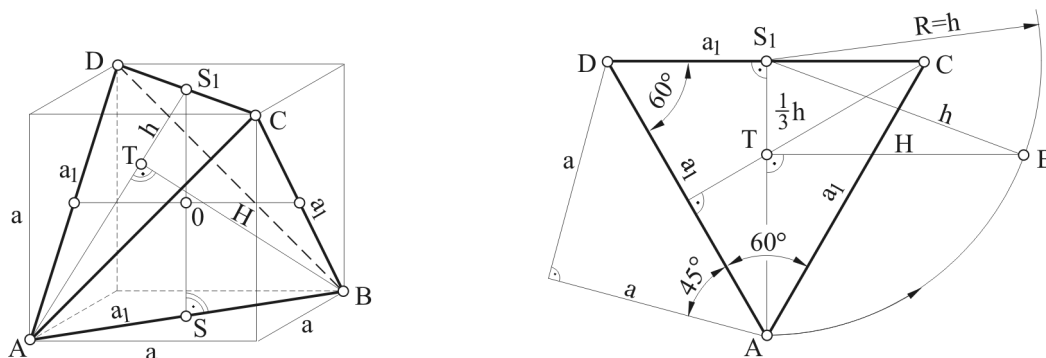


Sl. 9.10: Ortogonalne projekcije četvorostrane prave piramide (Zadatak 9.7.)

#### 9.1.4. Tetraedar

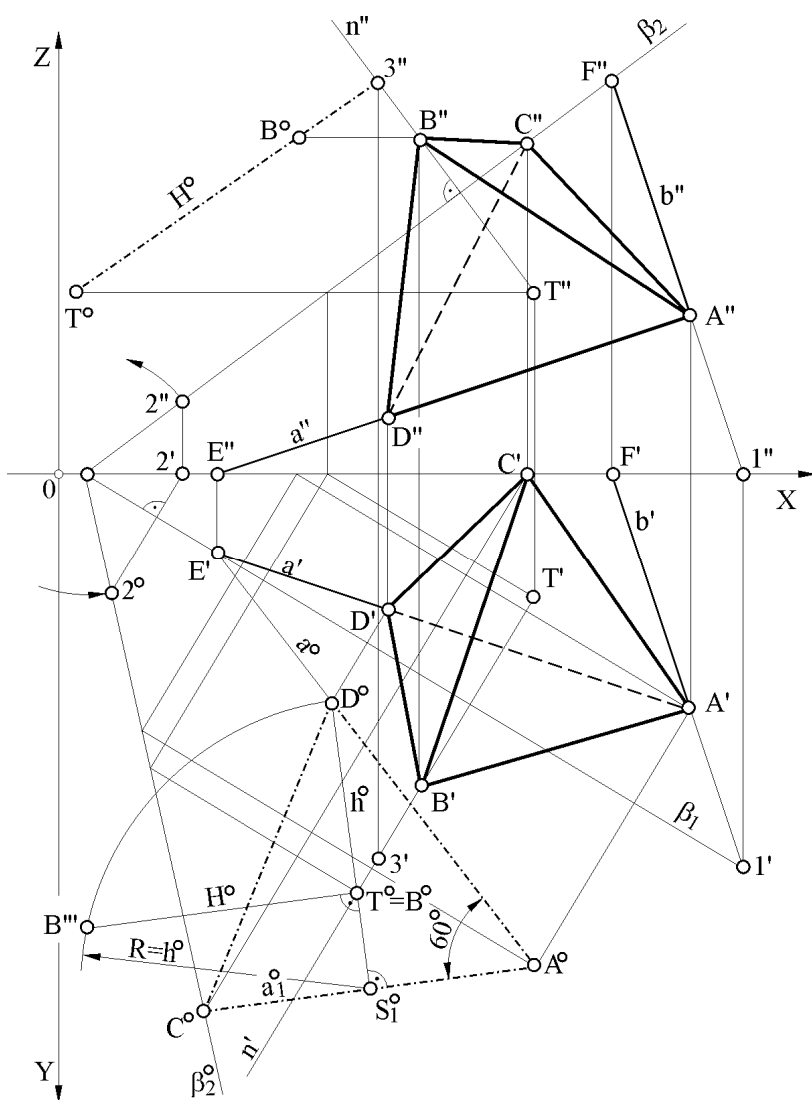
Tetraedar je pravilno rogljasto telo ograničeno sa četiri jednakostranična trougla. Geometrijska struktura tetraedra definisana je kockom koja je oko njega opisana (sl. 9.11). Ivica tetraedra  $a_1$  je dijagonala strane kocke te je stoga pod uglom od  $45^\circ$  na ivice kocke  $a$ . Ima šest jednakih ivica koje međusobno stoje pod uglom od  $60^\circ$  i četiri roglja. Suprotne ivice tetraedra se mimoilaznoupravne, npr. ivica AB i CD, zatim BC i AD itd. Ima tri jednake i međusobno upravne ose  $SS_1$  koje se seku u središtu 0 tetraedra.

Geometrijska veza između parametara tetraedra i kocke data je na sl. 9.11, desno. Visina bočne strane tetraedra  $h$  (ima ih četiri) dobija se kada se iz naspramnog roglja A povuče normala na ivicu tetraedra DC. Telesna visina tetraedra  $H$  (ima ih tri) dobija se kada se iz roglja B spusti normala na suprotnu stranu tetraedra, do tačke T. Tačka T predstavlja težište strane tetraedra i nalazi se na  $1/3h$ . Telesna visina tetraedra  $H$  dobija se u preseku normale na visinu bočne strane iz tačke T i luka radijusa  $R=h$  iz tačke  $S_1$ . Na taj način se dobija i rogalj B koji je naspram strane ACD.



Sl. 9.11: Tetraedar, osnovni parametri i njihov uzajamni odnos

$A$  - jedan od četiri rogla,  $AB=a_1$  - jedna od šest ivica,  $ABC$  - jedna od četiri strane,  $SS_1$  - jedna od tri središnje linije,  $h$  - jedna od četiri visine bočnih strana,  $H$  - jedna od tri telesne visine,  $T$  - jedno od četiri težišta strana



Sl. 9.12: Ortogonalne projekcije tetraedra (Zadatak 9.8.)

**Zadatak 9.8.**

0(1;7). Strana tetraedra  $ACD$  leži na ravni  $\beta$  koja je zadata pravama  $a$  i  $b$ . Prava  $a$  prolazi kroz tačke  $A(8;3;2)$  i  $E(2;1;0)$ , a prava  $b$  kroz tačke  $A$  i  $F(7;0;5)$ . Iвица  $AD$  je na pravoj  $a$ , dok rogalj  $C$  leži na  $V$  ravni.

Odrede se prodori prava  $a$  i  $b$  kroz koje prolaze tragovi ravni  $\beta$  (tačke  $1, E$  i  $F$ ). Obori se drugi trag ravni  $\beta_2$  i prava  $a$  sa njom (sl. 9.12). Iz tačke  $A^\circ$  povuče se pravac pod uglom od  $60^\circ$  na  $a^\circ$  i u preseku sa  $\beta_2^\circ$  dobija se tačka  $C^\circ$  (zato što rogalj  $C$  leži na  $V$  ravni). Duž  $A^\circ C^\circ$  predstavlja pravu veličinu ivice tetraedra  $a_1^\circ$ . Iz rogolja  $D^\circ$  nacrtat se upravno na  $A^\circ C^\circ$  visina bočne strane  $h^\circ$  i dobijaju tačke  $S_1^\circ$  i  $T^\circ$  (na  $1/3h^\circ$ ). Iz tačke  $T^\circ$  povuče se normala na  $h^\circ$ , a iz  $S_1^\circ$  luk poluprečnika  $R=h^\circ$  i u njihovom preseku dobija tačka  $B'''$ . Rastojanje  $B'''T^\circ$  predstavlja pravu veličinu telesne visine tetraedra ( $H^\circ$ ), a  $B^\circ$  leži na  $T^\circ$ . Pomoću oborene veličine strane  $A^\circ C^\circ D^\circ$  odrede se prva i druga

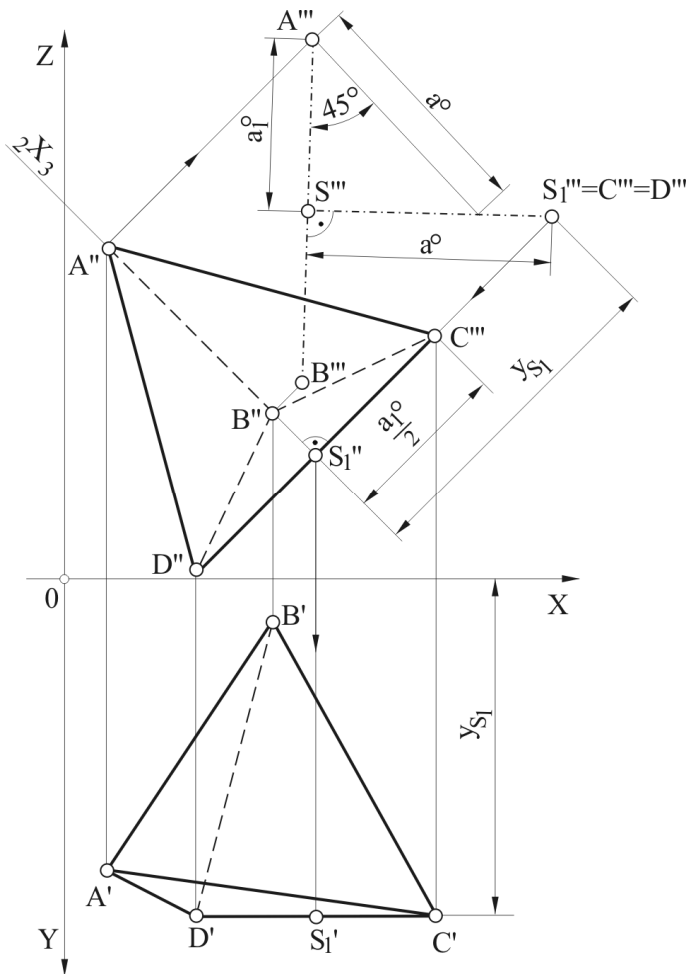
projekcija, kao i težište  $T$  ove strane tetraedra. Rogalj  $B$  se nalazi na normali strane  $ACD$  iz tačke  $T$  na rastojanju  $H^\circ$ , odnosno na normali ravni  $\beta$ . Povuku se projekcije normale ravni  $\beta$  iz

tačke T i odabere proizvoljna tačka na njoj, tačka 3. Odredi se prava veličina duži T3 (rotacijom u drugoj projekciji) i na njoj od tačke T<sup>o</sup> nanese se vrednost H<sup>o</sup>, te se dobija B<sup>o</sup> (T<sup>o</sup>B<sup>o</sup>=H<sup>o</sup>). Na osnovu B<sup>o</sup> odrede se prva i druga projekcija roglja B i spajanjem sa ostalim rogljevima dobijaju se ortogonalne projekcije tetraedra.

### Zadatak 9.9.

0(1;8). Poznata je ivica tetraedra A(0,5;3,5;4), B(2,5;0,5;2). Naspramna ivica CD je paralelna sa V ravni. Nacrtati ortogonalne projekcije tetraedra.

Odredi se prava veličina ivice tetraedra AB transformacijom u jednoj od projekcija, npr. u drugoj. Postavi se ravan  $\pi_3$  tako da osa  ${}_2X_3$  prolazi kroz A''B'' i odredi treća projekcija A'''B''' koja predstavlja pravu veličinu ove ivice (sl. 9.13). Kako je naspramna ivica CD upravna na



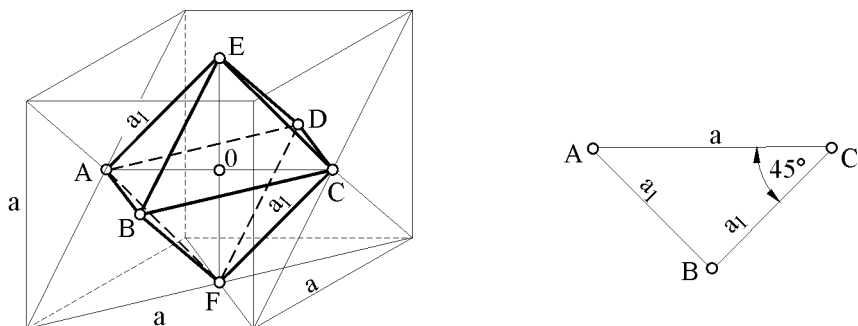
Sl. 9.13: Ortogonalne projekcije tetraedra (Zadatak 9.9.)

ivicu AB u trećoj projekciji će se videti kao tačka na rastojanju stranice kocke  $a^o$  od A'''B''' iz središta ivice S'''.

Ivica kocke  $a^o$  dobija se kada se iz A''' povuče pravac pod uglom od  $45^\circ$  na  $a_1^o$  do normale na  $a_1^o$  iz S'''. Dobijena vrednost  $a^o$  određuje tačku C''', a sa ovom tačkom poklapa se D''' i S1'''. Druga projekcija središta S1 je na osi  ${}_2X_3$  i određuje se pomoću spone na ovu osu iz njene treće projekcije. Prva projekcija ovog središta (tačka S1') je na vertikalnoj sponi iz S1'' i na rastojanju od ose X koje je određeno trećom projekcijom. Naime, y koordinata središta S1 jednaka je rastojanju S1''S1'''. Ivica CD tetraedra paralelna je sa V ravni te će u prvoj projekciji biti paralelna sa osom X, a u drugoj će se projicirati u pravoj veličini. Ivica CD u drugoj projekciji će biti upravna na osu  ${}_2X_3$  jer se u trećoj projicira kao tačka. Stoga se od tačke S1'' na pravac upravna na osu  ${}_2X_3$  na jednu i drugu stranu, nanese vrednost  $a_1^o/2$  i dobijaju se tačke D'' i C''. Prve projekcije ovih rogljeva C' i D' su u preseku vertikalnih spona iz tačaka D'' i C'' i horizontalne linije iz S1'. Spajanjem rogljeva A, B, C i D u obe projekcije dobijaju se projekcije traženog tetraedra.

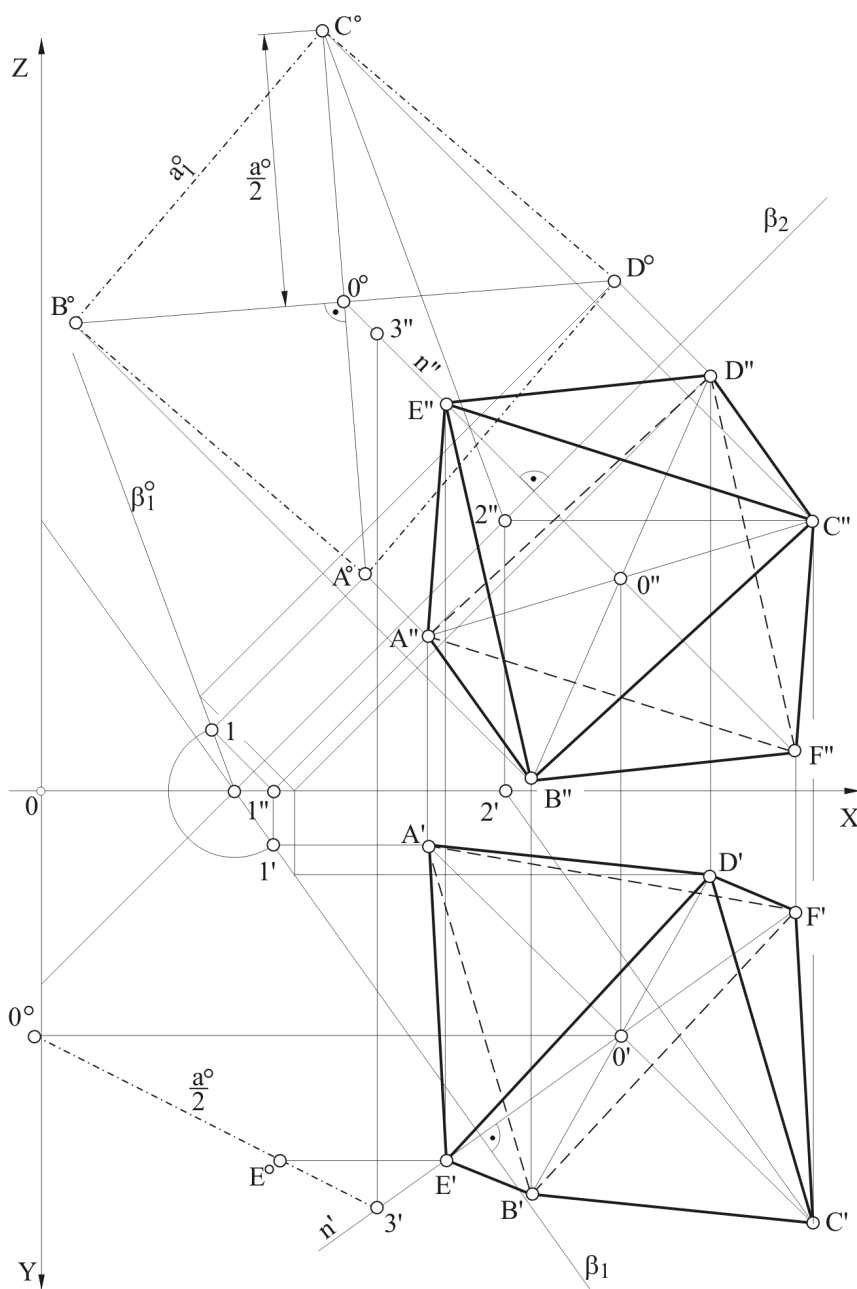
### 9.1.5. Oktaedar

Oktaedar se definiše, kao i tetraedar, kockom koja je opisana oko njega (sl. 9.14). Oktaedar se sastoji od dve bazisa spojene pravilne prave četvorostane piramide. Oktaedar ima tri bazisa (kvadrata) koji su određeni tačkama ABCD ili BEDF ili AECF. Suprotne ivice su međusobno paralelne, npr. BE//FD. Ima tri jednake i međusobno upravne ose čije su dužine jednake ivici kocke a, npr. EF. Središnje linije su upravne na bazise oktaedra i seku se u središtu 0. Oktaedar je ograničen sa osam jednakih jednakostraničnih trouglova. Ivica oktaedra  $a_1$  dobija se na osnovu ivice kocke (sl. 9.14, desno).



Sl. 9.14. Oktaedar, osnovni parametri i njihov uzajamni odnos

$A$  - jedan od šest roglova,  $AB=a_1$  - jedna od dvanaest ivica,  $ABCD$  – jedan od tri bazisa oktaedra (kvadrata),  $EF$  - jedna od tri ose (suprotni roglovi),  $O$  – središte oktaedra



Sl. 9.15: Ortogonalne projekcije oktaedra (Zadatak 9.10.)

**Zadatak 9.10.**

$O(1;11)$ . Data je ravan  $\beta(2,5;-3,5;-2,5)$  i tačke  $A(5;?;2)$  i  $C(10;?;3,5)$  na njoj. Duž  $AC$  je dijagonala bazisa oktaedra koji leži na ravni  $\beta$ . Nacrtati ortogonalne projekcije oktaedra.

Nacrtaju se tragovi ravni  $\beta$  i projekcije tačaka  $A$  i  $C$  na njoj. Obori se prvi trag ravni  $\beta$  i odredi prava veličina dijagonale  $AC$  (tačke  $A^{\circ}C^{\circ}$ ). U oborenom položaju konstruiše se kvadrat čija je dijagonala duž  $A^{\circ}C^{\circ}$  (sl. 9.15). Duž  $O^{\circ}C^{\circ}$  predstavlja polovinu ivice kocke  $a^{\circ}/2$ , a duž  $B^{\circ}C^{\circ}$  ivicu oktaedra  $a_1^{\circ}$ .

Pomoću frontala odredi se druga i prva projekcija bazisa  $ABCD$ . Rogaljevi  $E$  i  $F$  nalaze se na normali ravni  $\beta$  iz središta tetraedra (iz tačke  $O$ ). Rastojanja roglova  $E$  i  $F$  od tačke  $O$  su na  $a^{\circ}/2$ . Da bi se odredile projekcije ovih roglova odabere se proizvoljna tačka  $3$  na normali  $n$  i odredi prava veličina duži  $O3$  (u prvoj projekciji rotacijom).

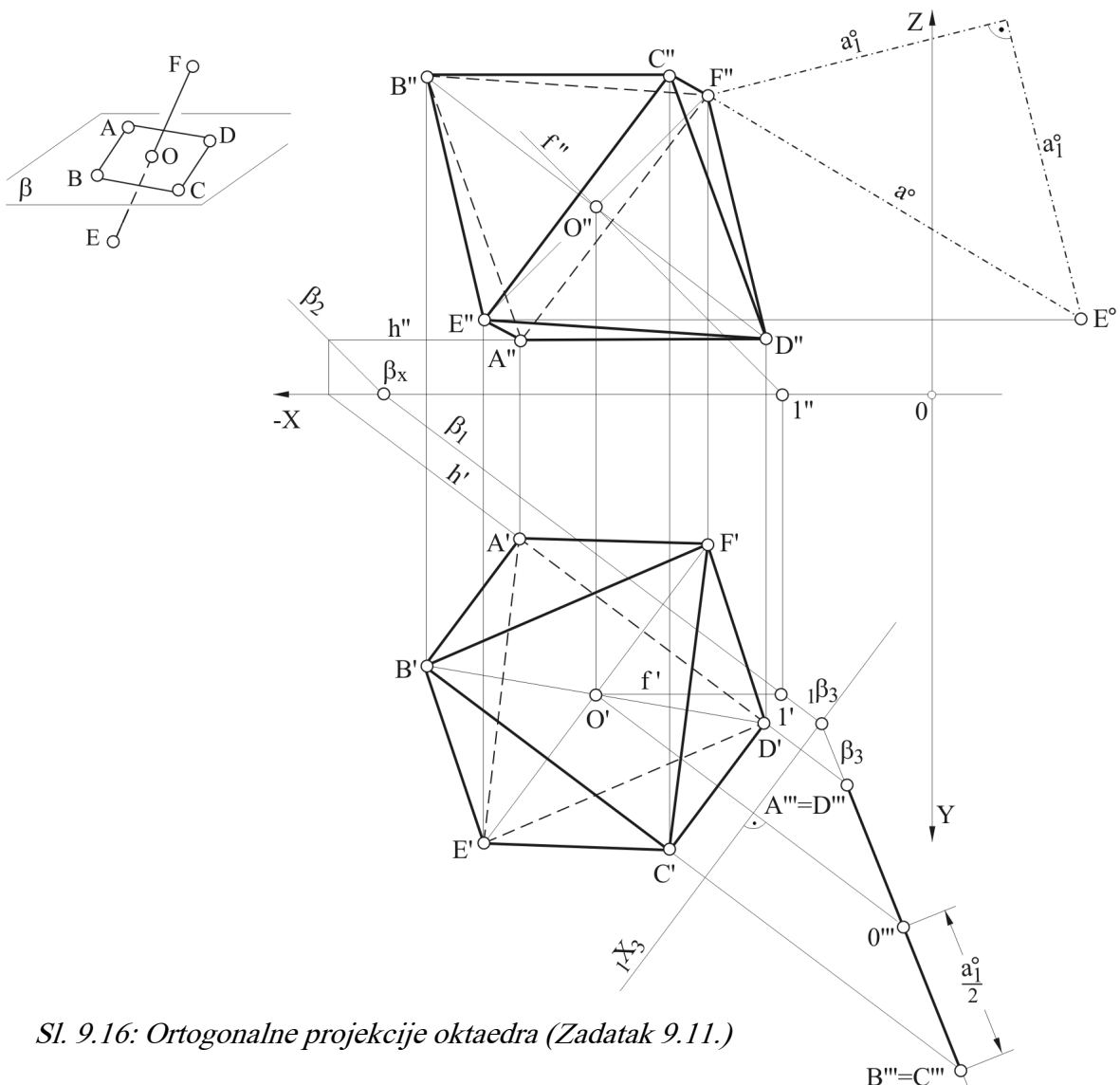
Na duž  $0^{\circ}3'$  od tačke  $0^{\circ}$  nanese se rastojanje  $a^{\circ}/2$  i dobija tačka  $E^{\circ}$ . Na već opisan način odredi se prva i druga projekcija rogla E, a rogajl F se nalazi simetrično dobijenom E u odnosu na  $0$  na normali  $n$ .

### Zadatak 9.11.

$0(10;7)$ . Date su tačke  $E(-6;6;1)$  i  $F(-3;2;4)$  kao suprotni rogjevi oktaedra. Nacrtati ortogonalne projekcije oktaedra tako da su mu dve ivice paralelne sa  $V$  ravni.

Na polovini visine oktaedra (duži  $EF$ ) iz tačke  $0$  postavi se ravan  $\beta$  upravno na ovu duž. Na ravni  $\beta$  leži bazis oktaedra  $ABCD$  (sl. 9.16 levo).

Iz tačke  $0''$  povuče se pravac upravno na  $E''F''$  koji predstavlja drugu projekciju frontale ravni  $\beta$  ( $f'' \perp E''F''$ ) (sl. 9.16). Nacrta se prva projekcija frontale  $f'$  i odredi njen prodor kroz  $H$  ravan (tačka  $1'$ ). Kroz tačku  $1'$  prolazi trag  $\beta_1$  koji je upravno na  $E'F'$ , a iz  $\beta_x$  se nacrta i drugi trag  $\beta_2$  upravno na  $E''F''$ . Odredi se prava veličina ose oktaedra (tačke  $E^{\circ}F''$ ) koja predstavlja pravu veličinu ivice opisane kocke ( $E^{\circ}F''=a^{\circ}$ ) i konstruiše pomoćna slika da bi se dobila ivica oktaedra  $a_1^{\circ}$ . Za određivanje projekcija bazisa oktaedra postavi se ravan  $\pi_3$  paralelno sa osom oktaedra  $EF$  i upravno na  $H$  ravan, tj osa  $1X_3$  je paralelna sa  $E'F'$  i pomoću tačke  $0$  odredi se trag  $\beta_3$  na kojem se bazis projicira kao duž. Bazis u trećoj projekciji jeste duž  $A'''B'''$  koja se dobija na rastojanju  $a_1^{\circ}/2$  od tačke  $0'''$  na jednu i drugu stranu. Treće projekcije rogjeva  $D'''$  i  $C'''$  se poklapaju sa trećim projekcijama rogjeva  $A'''$  i  $B'''$ .



Sl. 9.16: Ortogonalne projekcije oktaedra (Zadatak 9.11.)

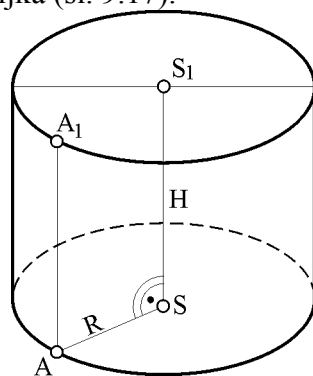
Kako su ivice AD i BC paralelne sa V ravni u prvoj projekciji se vide u pravoj veličini, tj.  $A'D'=B'C'=a_1^\circ$ , odnosno nalaze se na  $h'$  iz ovih tačaka. Spajanjem projekcija svake tačke bazisa sa projekcijama rogljeva E i F dobijaju se ortogonalne projekcije oktaedra.

## 9.2. ROTACIONA TELA

Rotaciona tela imaju za bazis kržnicu ili tačku (lopta). Mogu imati jedan ili dva bazisa oko kojih se nalazi omotač. Omotač se sastoji od beskonačno mnogo međusobno spojenih izvodnica koje mogu biti paralelne ili da se seku u jednoj tački. Izvodnice mogu biti prave ili krive linije. Rotaciona tela, kao i rogljasta mogu biti prava ili kosa. U rotaciona tela spadaju: valjak, kupa, lopta, torus, hiperboloid itd.

### 9.2.1. Valjak (Oblica)

Valjak ima dve kružnice poluprečnika  $R$  kao dva međusobno paralelna bazisa na nekom rastojanju koje predstavlja visinu valjka  $H$ . Kod pravog valjka središnja linija  $SS_1$  je upravna na bazise i predstavlja visinu valjka (sl. 9.17).



Sl. 9.17: Prav valjak i osnovni parametri koji ga definišu

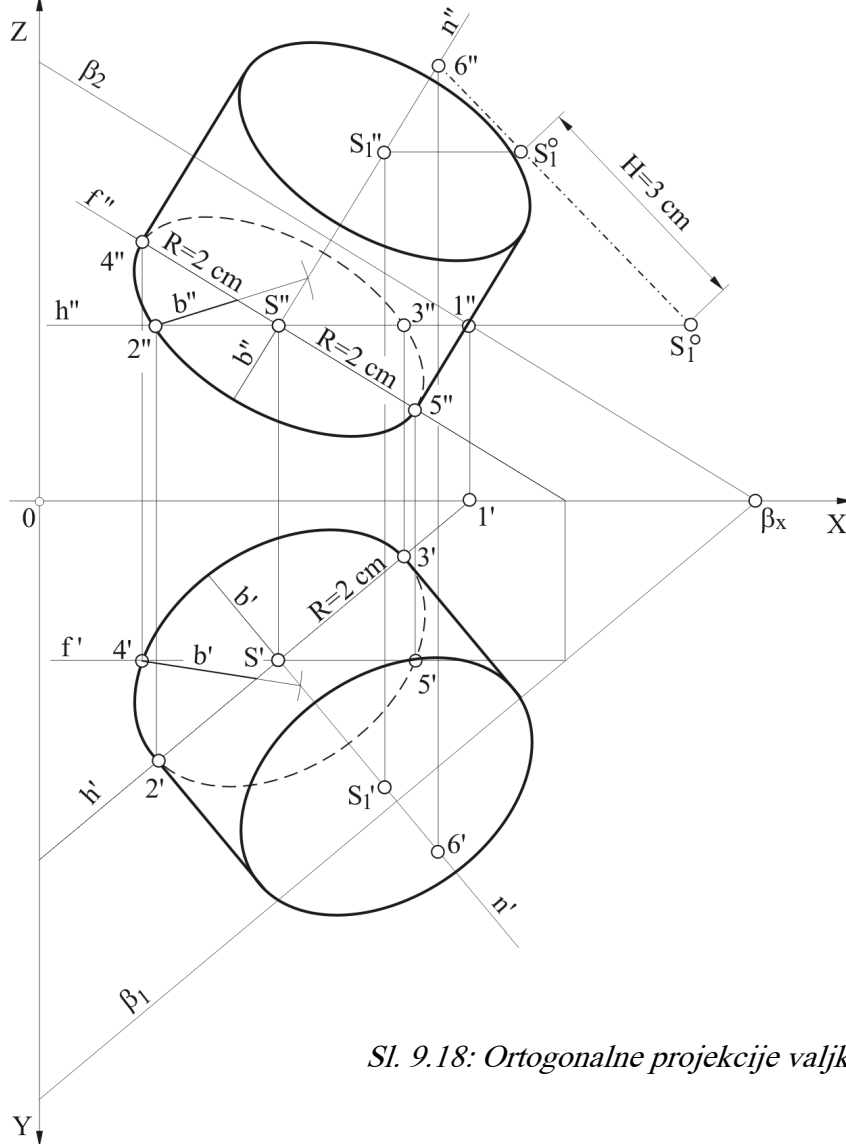
$S, S_1$  - središta bazisa (centar kružnica),  $AA_1$  - jedna od bezkonačno mnogo izvodnica,  $R$  - poluprečnik kruga (bazisa),  $H$  - visina valjka,  $SS_1=H$  - visina valjka

### Zadatak 9.12.

0(1;7). Na ravni  $\beta(9;7,5;5,5)$  je tačka  $S(3;2;?)$  kao centar bazisa pravog valjka poluprečnika  $R=2$  cm visine  $H=3$  cm. Nacrtati ortogonalne projekcije valjka.

Nacrta se ravan  $\beta$  i pomoću njene horizontale  $h$  i frontale  $f$  odredi se tačka  $S$  u obe projekcije (sl. 9.18). Prečnik kruga u prvoj projekciji projicira se u pravoj veličini na  $h'$ , a u drugoj na  $f''$ . Stoga se iz tačke  $S'$  po  $h'$  na jednu i drugu stranu nanese vrednost  $R=2$  cm i dobijaju tačke  $2'$  i  $3'$  koje određuju veliku osu elipse u prvoj projekciji. Druge projekcije ovih tačaka  $2''$  i  $3''$  su na  $h''$ . To isto se uradi i u drugoj projekciji, tj. od tačke  $S''$  na jednu i drugu stranu po  $f''$  nanese se vrednost  $R=2$  cm i dobijaju se tačke  $4''$  i  $5''$  koje određuju veliku osu elipse u drugoj projekciji. Prve projekcije ovih tačaka  $4'$  i  $5'$  su na  $f'$ . Mala osa elipse u prvoj projekciji je upravna na duž  $2'3'$  a njena vrednost se određuje pomoću tačke  $4'$  ili  $5'$ , kako je opisano u osmom poglavlju na sl. 8.24. Sada je poznata velika i mala osa, te se metodom šestara nacrtaju elipse. Na isti način se odredi mala osa elipse u drugoj projekciji koristeći tačku  $3''$  kao tačku na elipsi. Iz tačke  $S$  kao središta bazisa povuče se normala  $n$  ravni  $\beta$  i pomoću proizvoljne tačke na njoj (tačke 6) odredi se  $S_1'$  i  $S_1''$  kako je ranije objašnjeno, tako da je prava veličina rastojanja  $S^\circ S_1^\circ=3$  cm. Iz tačaka  $S_1'$  i  $S_1''$  nacrtaju se identične elipse iz prve i druge projekcije donjeg bazisa. Elipse se spajaju konturnim izvodnicama, te se dobijaju projekcije valjka. Položaj konturnih izvodnica određuju tačke velikih osa u obe projekcije (tačke  $2'3'$  i  $4''5''$ ). Ove tačke su ujedno i granične tačke vidljivosti.

Vidljivost se određuje na isti način kao i kod rogljastih tela. Na prvoj projekciji se uoči tačka 5' jer je na elipsi unutar konture prve projekcije. Gledano odozgo (iz druge projekcije) tačka 5'' je udaljenija od ostalih tačaka, te se 5'' ne vidi što znači da se taj deo elipse ne vidi sve do graničnih tačaka 2' i 3'. Vidljivost u drugoj projekciji se odredi posmatrajući tačku 3''. Prva projekcija ove tačke 3' udaljenija je od posmatrača od drugih tačaka, te se 3'' ne vidi i taj deo elipse sve do graničnih tačaka 4'' i 5''.



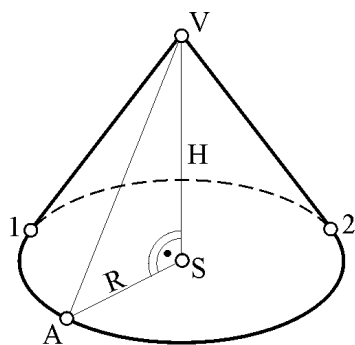
Sl. 9.18: Ortogonalne projekcije valjka (Zadatak 9.12.)

### 9.2.2. Kupa (Konus)

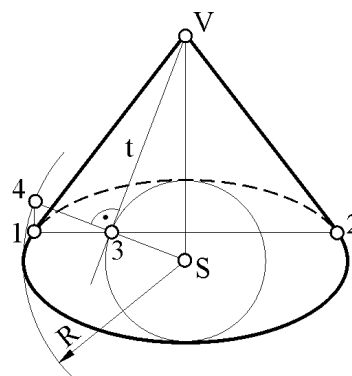
Kupa ima jedan krug za bazis i beskonačno izvodnica koje se seku u jednoj tački, vrhu kupe V. Kupa može biti prava ili kosa. Kod prave kupe normala na bazis iz vrha V prolazi kroz središte bazisa S, te je visina kupe  $H=SV$  (sl. 9.19).

Konturne izvodnice kupe ne polaze iz tačaka velike ose (kao kod valjka), već njihov položaj zavisi od visine kupe H i dobijaju se kako je to prikazano na sl. 9.20. Nacrtaju se dve kružnice (luka) poluprečnika velike i male poluose. Na manju kružnicu iz vrha V povuče se tangenta t i dobija tačka dodira 3. Spoji se središte S i tačka dodira 3 do luka poluprečnika R (velike poluose) i dobija tačka 4. Iz tačke 3 nacrta se linija paralelna sa velikom osom, a iz 4 linija upravna na veliku osu i u njihovom preseku dobija se granična tačka 1 koja predstavlja tačku iz koje polazi konturna izvodnica. Druga granična tačka 2 nalazi se simetrično na drugu stranu u odnosu na središte S. Tačke 1 i 2 su ujedno i granične tačke vidljivosti.





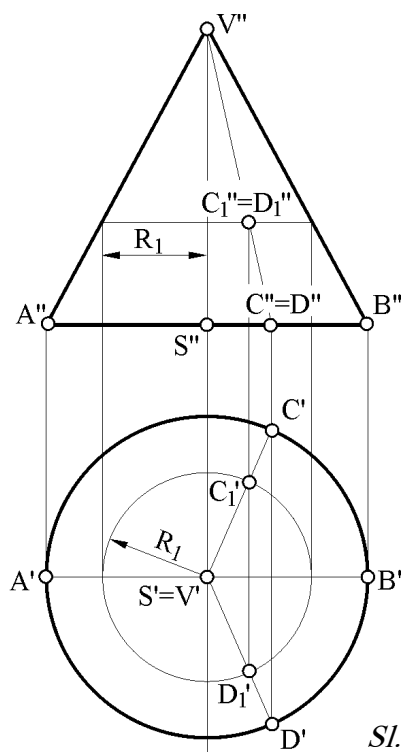
Sl. 9.19: Prava kupa i osnovni parametri koji je definišu  
 $R$  - poluprečnik kruga (bazisa),  $V$  - vrh kuje,  
 $AV$  - jedna od beskonačno izvodnica,  
 $1V$  - konturna izvodnica,  $VS$  - središna osa,  
 $S$  - središte kruga (bazisa),  $H$  - visina kuje  
 $1, 2$  - granične tačke konturnih izvodnica



Sl. 9.20: Određivanje graničnih tačaka ( $1$  i  $2$ ) konturnih izvodnica kuje

### Tačka na omotaču kuje

Ako se tačka nalazi na omotaču kuje tada se nalazi na izvodnici kuje koja prolazi kroz tu tačku. Neka je zadata kupa čiji bazis leži na  $H$  ravni (sl. 9.21) i druga projekcija  $C_1''$  tačke  $C_1$  koja se nalazi na omotaču kuje. Treba odrediti prvu projekciju  $C_1'$ .



Sl. 9.21: Određivanje tačaka  $C_1$  i  $D_1$  na omotaču kuje

Tačka  $C_1'$  se može odrediti na dva načina. Prvi način je da se odredi tačka  $C$  koja je na bazisu i iz koje polazi izvodnica kroz tačku  $C_1$ . Spoji se  $C_1''$  i  $V''$  i dobija druga projekcija izvodnice na kojoj se nalazi  $C''$  (na bazisu u drugoj projekciji). Odredi se  $C'$  i izvodnica u prvoj projekciji ( $C'V'$ ). Tačka  $C_1'$  se nalazi u preseku vertikalne spone iz  $C_1''$  i prve projekcije izvodnice  $C'V'$ .

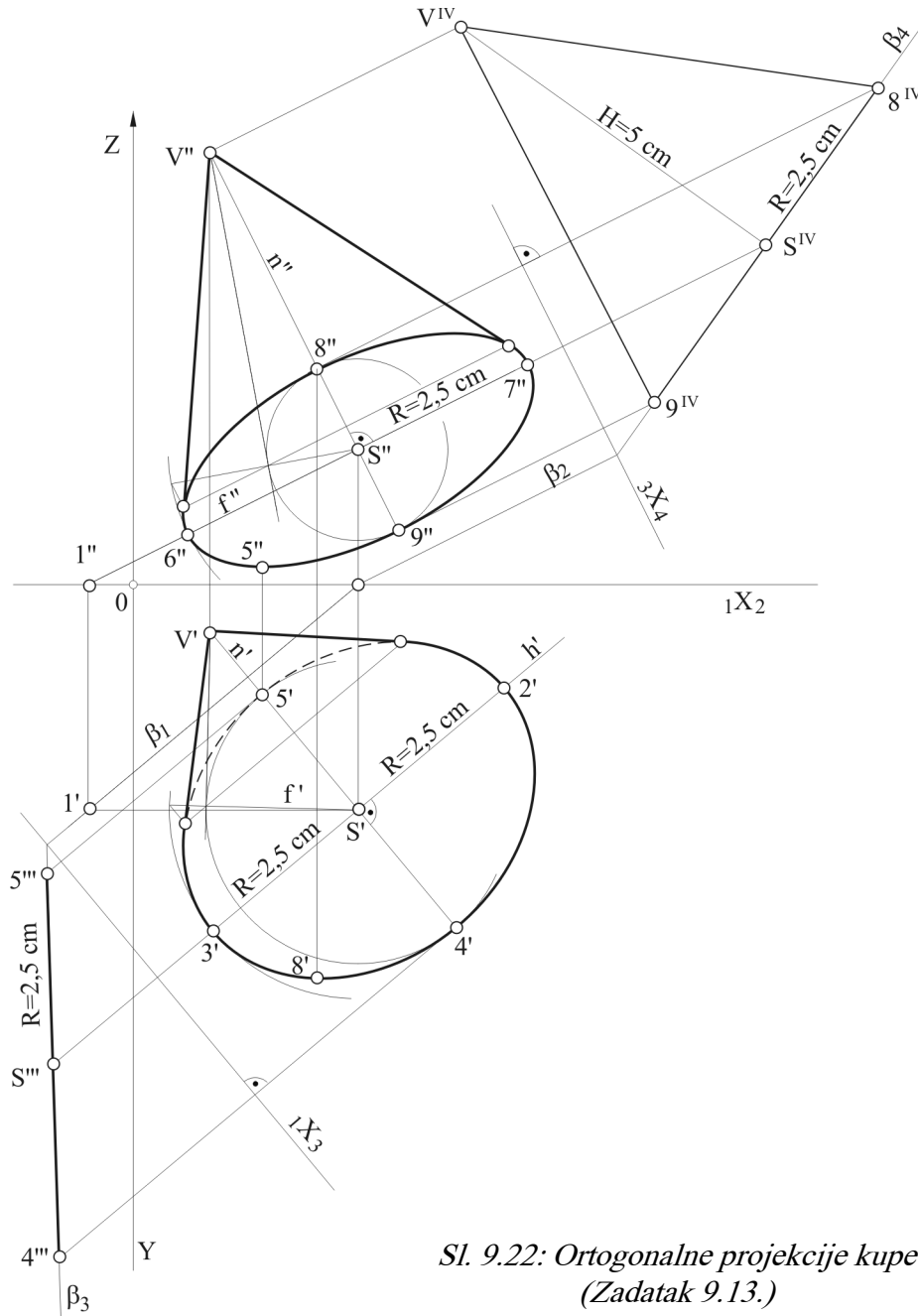
Drugi način je pomoću kruga na kupi koji prolazi kroz tačku  $C_1$  a paralelan je bazisu kuje. Kroz tačku  $C_1''$  povuče se linija paralelna sa osom  $X$  i dobija druga projekcija kruga poluprečnika  $R_1$ , a zatim se nacrti i prva njegova projekcija (krug poluprečnika  $R_1$ ). Prva projekcija  $C_1'$  tačke  $C_1$  dobija se u preseku vertikalne spone iz  $C_1''$  i kruga poluprečnika  $R_1$ . Postoje dve tačke na omotaču kuje čije se druge projekcije poklapaju ( $C_1''=D_1''$ ). Prva projekcija  $D_1'$  tačke  $D_1$  je takođe na krugu  $R_1$  u produžetku vertikalne spone iz  $C_1''$ . U drugoj projekciji tačka  $D_1''$  se vidi, a  $C_1''$  se ne vidi.

### Zadatak 9.13.

0(3;8). Bazis kuje poluprečnika  $R=2,5$  cm leži na ravni  $\beta(3;2,5;-1,5)$  sa centrom u tački  $S(3;3;?)$ . Nacrtati ortogonalne projekcije prave kuje visine  $H=5$  cm.

Nacrtaju se tragovi ravni  $\beta$  i tačka  $S$  na njoj pomoću njene horizontale i frontale. Na  $h'$  iz tačke  $S'$  nanese se na jednu i drugu stranu  $R=2,5$  cm i dobijaju tačke  $2'$  i  $3'$  kao tačke velike ose elipse u prvoj projekciji (sl. 9.22). To isto se uradi i u drugoj projekciji na  $f''$  i dobijaju tačke  $6''$  i  $7''$  kao tačke velike ose elipse u drugoj projekciji. Da bi se odredile male ose elipsi kao i vrh kuje  $V$  postavse dve ravni transformacije  $\pi_3$  i  $\pi_4$ , tako da je osa  $1X_3$  upravna na  $h'$ ,

a osa  ${}_3X_4$  upravna na  $f''$ . Odrede se tragovi  $\beta_3$  i  $\beta_4$  (koristeći projekcije tačke S) na kojima se bazis kupe projicira kao duž jednaka prečniku kruga ( $4'''5'''=8^{IV}9^{IV}=2R=5$  cm). U trećoj i četvrtoj projekciji kupa se vidi kao trougao, a središna osa VS u pravoj veličini ( $V^{IV}S^{IV}=5$  cm). Dovoljno je na jednoj od ovih projekcija, npr. četvrtoj odrediti  $V^{IV}$  i nacrtati trougao  $8^{IV}9^{IV}V^{IV}$  koji predstavlja četvrtu projekciju kupe. Druga projekcija vrha  $V''$  dobija se u preseku spone iz tačke  $V^{IV}$  i normale ravni  $\beta$  iz  $S''$ . Male ose elipse dobijaju se pomoću spona iz tačaka  $8^{IV}$ ,  $9^{IV}$  i  $4'''$ ,  $5'''$ . Granične tačke konturnih izvodnica određene su kao na sl. 9.20.



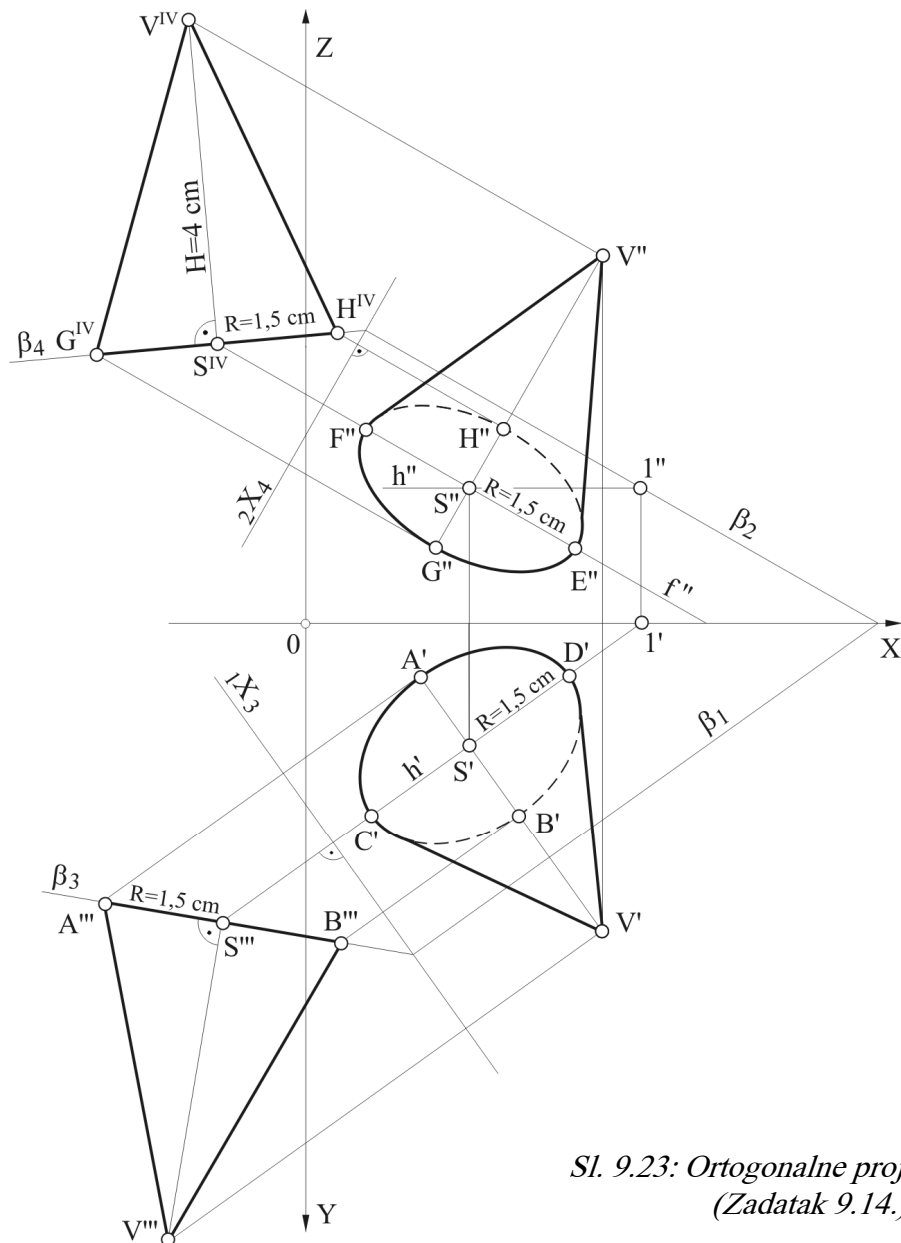
Sl. 9.22: Ortogonalne projekcije kupe  
(Zadatak 9.13.)

#### Zadatak 9.14.

0(5;8). Data je ravan  $\beta(7;5;4)$  i tačka  $S(2;1,5;?)$  na njoj. Bazis kupe leži na ravni  $\beta$ . Nacrtati pravu kupu poluprečnika  $R=1,5$  cm, visine  $H=4$  cm.

Pomoću horizontale  $h$  i frontale  $f$  ravni  $\beta$  kroz središte  $S$  odrede se velike ose elipsi u prvoj i drugoj projekciji, tačke  $C'$ ,  $D'$  i  $E''$ ,  $F''$  (na isti način kao kod zadatka 9.12.). Za određivanje vrednosti male ose i projekcija vrha  $V$  korišćena je transformacija (sl. 9.23). Postavi se ravan  $\pi_3$  i  $\pi_4$  tako da osa  ${}_1X_3$  bude upravna na trag  $\beta_1$ , a osa  ${}_2X_4$  na trag  $\beta_2$ . Odrede

se projekcije  $S'''$  i  $S^{IV}$ , zatim treći i četvrti trag ravni  $\beta$ . Na tragovima  $\beta_3$  i  $\beta_4$  bazis kupe se projicira kao duž jednaka prečniku. U trećoj i četvrtoj projekciji visina kupe  $H$  se projicira u pravoj veličini ( $S'''V'''=H=4$  cm) kao i prav ugao između bazisa i središnje ose kupe. Na osnovu treće projekcije kupe odredi se  $V'$  i mala osa elipse u prvoj projekciji (tačke  $A'$ ,  $B'$ ) a na osnovu četvrte projekcije odrede se tačke  $V''$ ,  $G''$  i  $H''$ . Tačke  $G''$  i  $H''$  su tačke male ose elipse u drugoj projekciji. Metodom šestara nacrtaju se elipse.



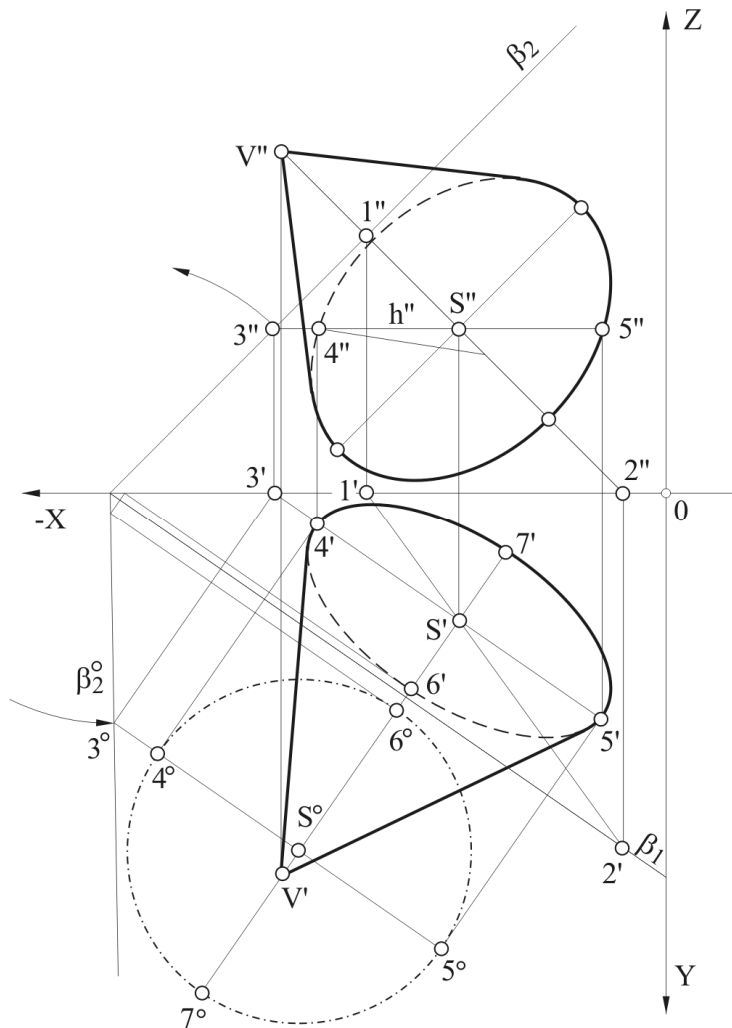
Sl. 9.23: Ortogonalne projekcije kupe  
(Zadatak 9.14.)

### Zadatak 9.15.

0(2;7). Dat je vrh kupe  $V(-4,5;4,5;4)$  i ravan  $\beta(-6,5;4,5;6,5)$ . Na ravni  $\beta$  je bazis prave kupe poluprečnika  $R=2$  cm. Nacrtati ortogonalne projekcije kupe i odrediti vidljivost.

Kroz vrh kupe  $V$  postavi se normala  $n$  ravni  $\beta$ . Prodor normale kroz ravan  $\beta$  je središte bazisa kupe (tačka  $S$ ). Kroz tačku  $S$  nacrtaju se horizontala i frontala ravni  $\beta$ . Obori se drugi trag  $\beta_2$ , te se iz  $S''$  nacrtaju krug poluprečnika  $R=2$  cm i na njemu spregnuti prečnici  $4^{\circ 5'}$  i  $6^{\circ 7'}$  (sl. 9.24). Prečnik  $4^{\circ 5'}$  je paralelan sa tragom  $\beta_2$  a prečnik  $6^{\circ 7'}$  upravan na njega. "Vraćanjem" ovih prečnika u prvu projekciju dobija se velika ( $4'5'$ ) i mala ( $6'7'$ ) osa elipse u

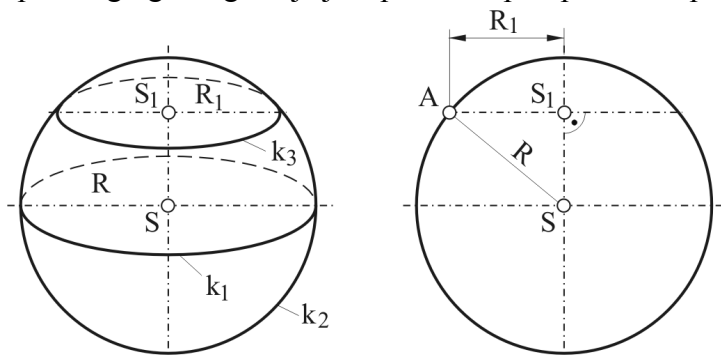
prvoj projekciji. Velika osa elipse u drugoj projekciji je na  $f''$ , a mala osa se dobija pomoću tačke  $4''$  ili  $5''$ .



Sl. 9.24: Ortogonalne projekcije kuje (Zadatak 9.15.)

### 9.2.3. Lopta

Lopta je geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje su podjednako udaljene od središta lopte  $S$  za rastojanje  $R$  koje se naziva poluprečnik lopte. Lopta se može definisati i kao rotaciono telo nastalo rotacijom polovine kruga radijusa  $R$  oko ose koja prolazi kroz središte  $S$  (sl. 9.25). Krugovi lopte čije ravni prolaze kroz središte  $S$  nazivaju se veliki loptini krugovi ( $k_1, k_2, \dots$ ), a oni čije ravni ne prolaze kroz središte su mali loptini krugovi ( $k_3, \dots$ ). Uzajamni odnos poluprečnika malog loptinog kruga ( $R_1$ ) sa središtem u tački  $S_1$  i poluprečnika lopte  $R$  prikazan je na sl. 9.25 desno. Duž  $SS_1$  i poluprečnik malog loptinog kruga  $R_1$  su katete pravouglog trougla čija je hipotenuza poluprečnik lopte  $R$ .

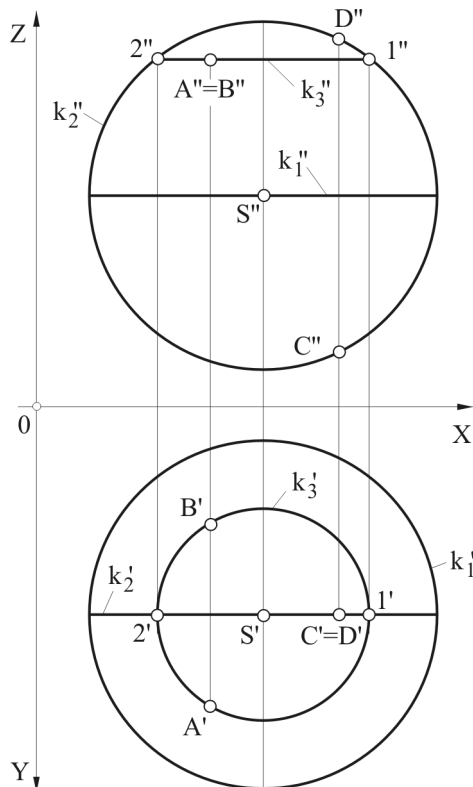


Sl. 9.25: Lopta i parametri koji je definišu

$R$  – poluprečnik lopte,  $S$  – središte lopte,  $k_1, k_2$  – veliki loptini krugovi,  $k_3$  – mali loptin krug,  $R_1$  – poluprečnik malog loptinog kruga,  $S_1$  – središte malog loptinog kruga,  $A$  – tačka na omotaču lopte

### Tačka na omotaču lopte

Ortogonalne projekcije lopte su krugovi poluprečnika lopte  $R$ . Prva projekcija lopte je prva projekcija velikog loptinog kruga  $k_1'$  koji je paralelan sa  $H$  ravni i prolazi kroz središte  $S$ . Druga projekcija ovog loptinog kruga  $k_1''$  je duž jednaka prečniku i paralelna je sa osom  $X$ . Druga projekcija lopte je druga projekcija velikog loptinog kruga  $k_2''$  koji je paralelan sa  $V$  ravni, dok je prva njegova projekcija  $k_2'$  duž jednaka prečniku i paralelna je sa osom  $X$ . Na isti način se vide i mali loptini krugovi koji su paralelni sa  $H$  ili  $V$  ravni. U jednoj projekciji se vide u pravoj veličini a u drugoj kao duži.



Sl. 9.26: Ortogonalne projekcije lopte i tačke na njoj

Kada je neka tačka na omotaču lopte tada se nalazi na loptinom krugu koji kroz nju prolazi. Neka je zadata druga projekcija  $A''$  tačke  $A$  koja se nalazi na omotaču lopte. Treba odrediti njenu prvu projekciju  $A'$ . Najjednostavnije je da se kroz  $A''$  nacrtaju druga projekcija malog loptinog kruga ( $k_3''$ ) koji je paralelan sa  $H$  ravni (sl. 9.26). Tada je druga projekcija malog loptinog kruga duž  $1''2''$  paralelna sa osom  $X$ , a prva projekcija  $k_3'$  je krug čiji je prečnik jednak duži  $1'2'$ , tj. određuju ga vertikalne spone iz drugih projekcija tačaka  $1''$  i  $2''$ . Povuču se vertikalna spona iz  $A''$  i u preseku sa  $k_3'$  dobijaju dva moguća rešenja za prvu projekciju tačke  $A$ , odnosno tačke  $A'$  i  $B'$ . Druge projekcije tačaka  $A$  i  $B$  se poklapaju, tj.  $A''=B''$ , s tim da se tačka  $A''$  vidi, a  $B''$  ne vidi.

Kada je poznata prva projekcija  $C'$  tačke  $C$  na omotaču lopte, druga njena projekcija se određuje na sličan način, postavljanjem velikog loptinog kruga kroz ovu tačku ( $k_2'$ ). U preseku vertikalne spone i  $k_2''$  dobijaju se dve mogućnosti, tj. tačke  $C''$  i  $D''$ .

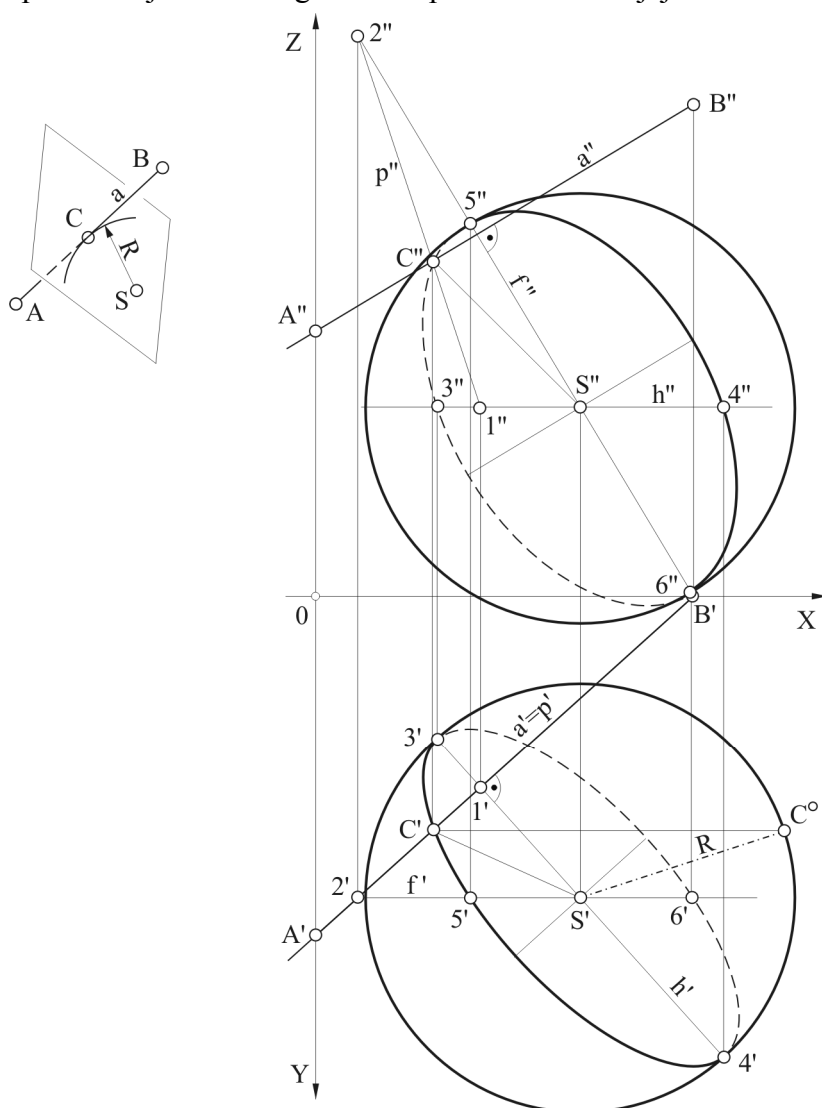
Vidljivost lopte određuje se na isti način kao i vidljivost svih ostalih tela. U prvoj projekciji lopte vidi se sve ono što je na gornjoj polovini lopte (gledano odozgo). U drugoj projekciji lopte vidi se sve ono što je na prednjoj polovini lopte. Stoga se tačka  $D'$  vidi jer je na gornjoj polovini lopte, a  $C'$  se ne vidi jer je na donjoj polovini lopte.

#### Zadatak 9.16.

0(1;9). Data je prava  $a$  tačkama  $A(0;4,5;3,5)$  i  $B(5;0;6,5)$  kao tangenta lopte čije je središte u tački  $S(3,5;4;2,5)$ . Nacrtati par ortogonalnih projekcija lopte i veliki loptin krug koji je upravna na tangentu  $a$ .

Poluprečnik lopte  $R$  dobija se na osnovu tačke  $C$  u kojoj lopta dodiruje (tangira) pravu  $a$  ( $R=SC$ ). Da bi se odredila tačka  $C$  postavi se pomoćna ravan kroz središte  $S$  koja je upravna na pravu  $a$ . Gde prava  $a$  prodire pomoćnu ravan dobija se tačka dodira  $C$ . Pomoćna ravan se definiše horizontalom i frontalom tako da je  $h'\perp a'$  i  $f''\perp a''$  (sl. 9.27). Prodor prave  $a$  kroz ravan koju obrazuju  $h$  i  $f$  (tačka  $C$ ) dobija se na način koji je objašnjen u poglavlju 5 sl. 5.31, koristeći tačke 1 i 2, kao tačke presečnice. Odredi se prava veličina duži  $SC$  (rotacijom u prvoj projekciji) i dobije poluprečnik lopte  $R=S'C'$ . Nacrtaju se krugovi iz  $S'$  i  $S''$  koji

predstavljaju prvu i drugu projekciju lopte. Veliki loptin krug koji je upravan na tangentu  $a$  nalazi se na ravni koja je upravna na tangentu  $a$ , te se velike ose elipse nalaze na prvoj projekciji horizontale  $h'$  i drugoj projekciji frontale  $f''$ . Iz tačke  $S'$  i  $S''$  nanese se poluprečnik lopte  $R$  na jednu i drugu stranu po  $h'$  i  $f''$  i dobijaju se velike ose elipsi. Na osnovu tačaka



velikih osa elipsi ( $3'$ ,  $4'$  i  $5''$ ,  $6''$ ) dobijaju se i male ose elipsi.

Deo elipse u prvoj projekciji od tačke  $3'$  preko  $6'$  do  $4'$  se ne vidi jer su te tačke u drugoj projekciji ( $3''$ ,  $6''$  i  $4''$ ) na donjoj polovini lopte. Deo elipse u drugoj projekciji između tačaka  $5''$ ,  $3''$  i  $6''$  se ne vidi jer su te tačke u prvoj projekciji ( $5'$ ,  $3'$ ,  $6'$ ) na gornjoj polovini lopte. Konturne tačke elipse su one tačke gde se elipsa dodiruje sa projekcijama lopte (krugom poluprečnika  $R$ ). Konturne tačke elipsi su ujedno i granične tačke vidljivosti elipsi. Granične tačke vidljivosti elipsi, kada su one projekcije velikih loptinih krugova, su tačke velikih osa elipsi: u prvoj projekciji  $3'$  i  $4'$ , a u drugoj projekciji su  $5''$  i  $6''$ .

Sl. 9.27: Ortogonalne projekcije lopte (Zadatak 9.16.)

### Zadatak 9.17.

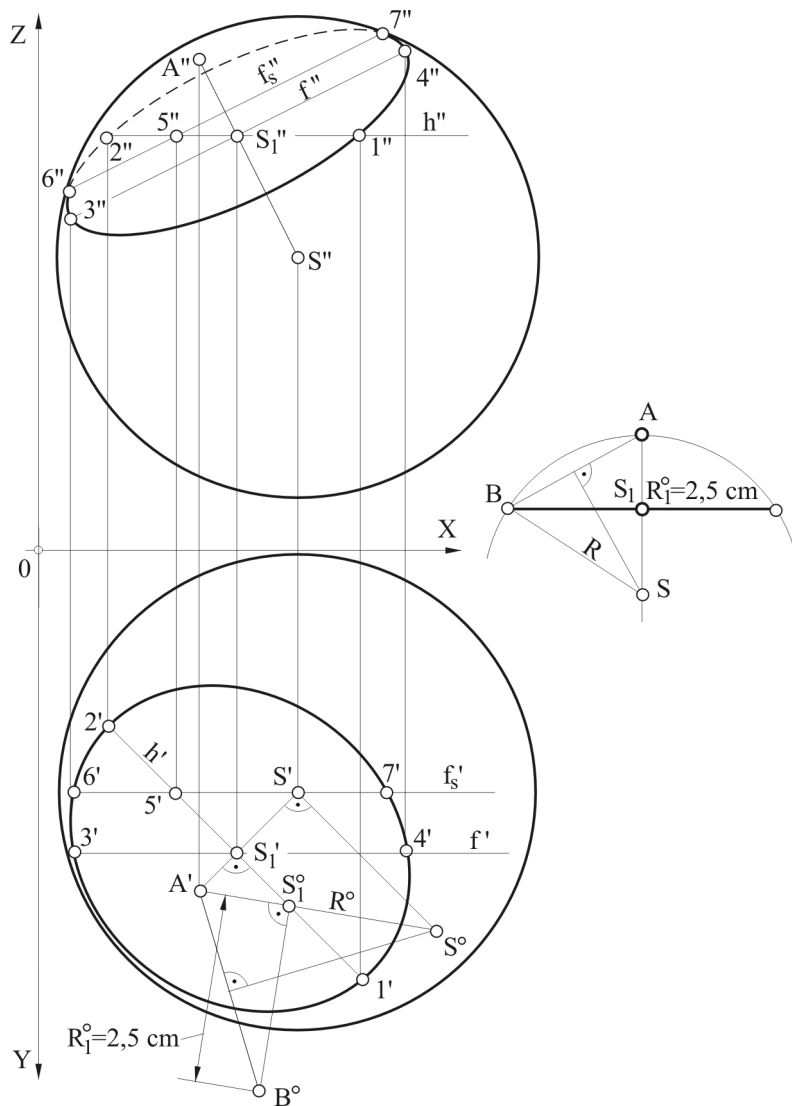
0(1;7). Tačka  $A(2;4,5;5,5)$  nalazi se na omotaču lopte. Mali loptin krug prolazi kroz središte  $S_1(2,5;4;4,5)$  poluprečnika  $R_1=2,5$  cm i upravna je na duž  $AS_1$ . Nacrtati projekcije lopte i mali loptin krug (sl. 9.28, desno).

Odredi se prava veličina  $A'S_1^\circ$  rastojanja  $AS_1$  (trougao pravih veličina). Podigne se normala na  $A'S_1^\circ$  iz tačke  $S_1^\circ$  i na nju nanese  $R_1^\circ=2,5$  cm i dobija tačka  $B^\circ$ . Duž  $B^\circ A'$  predstavlja pravu veličinu tetive lopte. Podigne se normala iz središta tetive i u preseku sa  $A'S_1^\circ$  dobija se tačka  $S^\circ$  i prava veličina poluprečnika lopte ( $R^\circ=A'S^\circ$ ). Prva projekcija  $S'$  središta  $S$  dobija se na pravcu  $A'S_1'$  tako što se spusti normala iz  $S^\circ$  na ovaj pravac.

Iz tačke  $S'$  nacrti se krug poluprečnika  $R^\circ$  i dobija prva projekcija lopte. Druga projekcija središta lopte  $S''$  je u preseku spone iz  $S'$  i pravca  $A''S_1''$ . Iz tačke  $S''$  nacrti se krug poluprečnika  $R^\circ$  i dobija druga projekcija lopte. Projekcije malog loptinog kruga su elipse. Velika osa elipse u prvoj projekciji je na  $h'$  iz  $S_1'$ , a u drugoj projekciji na  $f''$  iz  $S_1''$ . Velika osa elipse u prvoj projekciji dobija se na osnovu poluprečnika  $R_1$  (tačaka  $1'$  i  $2'$ ) na osnovu uslova

da je  $S_1'1'=S_1'2'=R_1$ . Na isti način određuje se velika osa elipse u drugoj projekciji ( $S_1''3''=S_1''4''=R_1$ ). Male ose elipsi određuju se na način koji je opisan u prethodnim zadacima.

Konturne tačke elipse (granične tačke vidljivosti) kao projekcija malih loptinih krugova nisu velike ose elipsi kao što je bilo kod velikih loptinih krugova. Konturne tačke elipse (granične tačke vidljivosti) dobijaju se u preseku  $h'$  koja prolazi kroz  $S_1'$  i  $f_s'$  koja prolazi kroz  $S'$  (tačka 5'). Druga projekcija 5'' tačke 5, pomoću koje se određuju granične tačke vidljivosti



je na drugoj projekciji horizontale  $h''$ . Iz tačke 5'' povuče se  $f_s''$  i u preseku sa drugom projekcijom lopte dobijaju se tačke 6'' i 7'' koje su granične tačke vidljivosti. Deo elipse između tačaka 6'', 2'' i 7'' se ne vidi jer su te tačke u prvoj projekciji (6', 2' i 7') na gornjoj polovini prve projekcije lopte. Elipsa se u prvoj projekciji cela vidi, jer se sve tačke elipse u drugoj projekciji nalaze na gornjoj polovini lopte (sl. 9.28).

#### Zadatak 9.18.

0(7.13). Odrediti projekciju kose kvadratne prizme čiji bazis ABCD leži na ravni koju čine dve prave koje prolaze kroz tačke  $A(-3;10;1)$ ,  $M(0;4;5)$  i  $M$  i  $N(-4;4;10)$ . Dijagonala bazisa  $AC=9$  cm leži na pravoj  $AM$ . Izvodnice kose prizme paralelne su sa  $V$  ravni a sa  $H$  ravni grade ugao od  $30^\circ$ .

Sl. 9.28: Ortogonalne projekcije lopte (Zadatak 9.17.)

#### Zadatak 9.19.

0(12;18). Nacrtati projekcije lopte ako su joj date tri tačke  $A(2;5;3)$ ,  $B(6;9;3)$  i  $C(8;3;7)$  koje leže na omotaču lopte, a centar joj leži na ravni  $\alpha(-7;9;7)$ .

#### Zadatak 9.20.

0(3,14). Data je duž  $V(1;3;10)$   $S((7;7;5)$  kao središnja linija pravog konusa. Prečnik bazisa konusa jednak je visini konusa. Nacrtati ortogonalne projekcije konusa.

## 10. PRESECI PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TELA I RAVNI

Pri određivanju preseka tela sa ravni koriste se različiti načini: pomoću prodora izvodnica kroz ravan sečenja, transformacijom, kolineacijom ili afinitetom itd. Pri tome se dobija zarubljeno telo ograničeno bazisom, omotačem i presečnom površinom. Presečna površina tela nalazi se na ravni sečenja.

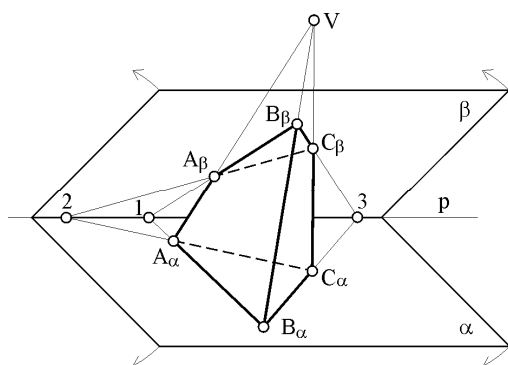
### 10.1. KOLINEACIJA I AFINITET

Zakovitost kolineacije i afiniteta prvi je uočio francuski naučnik Desargua 1648. god. i definisao je teoremu koja glasi: Ako se korespondentne stranice trouglova  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$  (koje leže na ravni  $\alpha$ ) i  $A_\beta B_\beta C_\beta$  (koje leže na ravni  $\beta$ ) seku u tri tačke 1, 2 i 3 koje se nalaze na presečnici  $p$  ravni  $\alpha$  i  $\beta$  (sl. 10.1), tada se prave koje spajaju korespondentna temena trouglova seku u jednoj tački (V).

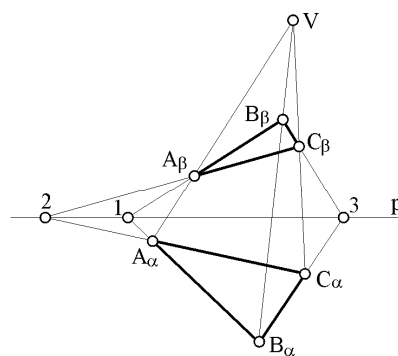
Ova zakonitost između korespondentnih trouglova zadržava se i na ortogonalnim projekcijama, nakon obaranja ravni i njihovog dovođenja na jednu ravan (ravan crtanja) (sl. 10.2). Tačke korespondentnih trouglova povezane su zracima kolineacije. Tačke  $A_\alpha$  i  $A_\beta$  su kolinearne tačke (na istom su pravcu) ili pridružene tačke, što se odnosi i na tačke  $B_\alpha, B_\beta$  i  $C_\alpha, C_\beta$ . Tačka  $A_\beta$  se može shvatiti i kao preslikana tačka  $A_\alpha$  na ravan  $\beta$ . Tačke  $A_\alpha$  i  $A_\beta$  mogu se smatrati i projekcijama tačke A na ravni  $\alpha$  i  $\beta$  koje su dobijene pomoću projekcijskog zraka koji prolazi kroz tačke A i V.

Prave kroz tačke  $A_\alpha, A_\beta$  i V zatim prave kroz tačke  $B_\alpha, B_\beta$  i V itd. nazivaju se zracima kolineacije, a tačka V je centar kolineacije. Presečnica  $p$  ravni  $\alpha$  i  $\beta$  je osa kolineacije. Linije koje spajaju korespondentne stranice trouglova (u korespondenciji su, u vezi su) i osu kolineacije  $p$ , npr. linija  $C_\alpha A_\alpha 2$ ,  $B_\alpha C_\alpha 3$ , zatim  $2 A_\beta C_\beta$ ,  $B_\beta C_\beta 3$  itd. nazivaju se linije kolineacije. Tačke 1, 2 i 3 su tačke kolineacije.

Ako se trougao  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$  shvati kao bazis trostrane piramide koji leži na ravni  $\alpha$ , tačka V kao njen vrh, a trougao  $A_\beta B_\beta C_\beta$  kao površina po kojoj se piramida presekla sa ravni  $\beta$  (presečna površina), jasno je da se ova zakonitost koristi za određivanje preseka ravni i geometrijskih tela čije se izvodnice seku u jednoj tački (piramide, kupe itd.)



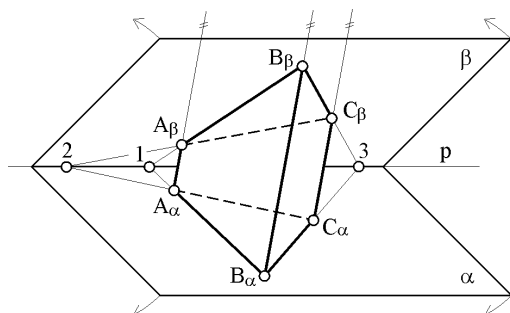
Sl. 10.1. Kolinearna veza dva trougla  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$  i  $A_\beta B_\beta C_\beta$  u prostoru



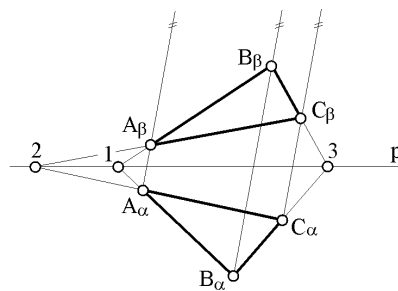
Sl. 10.2. Kolinearna veza dva trougla  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$  i  $A_\beta B_\beta C_\beta$  nakon obaranja ravni

Kada je centar kolineacije u beskonačnosti, zruci kolineacije postaju međusobno paralelni, a korespondentne ivice trouglova zadržavaju istu zakonitost. Ova zakonitost korespondentnih trouglova, kada su zruci kolineacije međusobno paralelni, zove se afinitet, a zruci kolineacije postaju zruci afiniteta, linije kolineacije postaju linije afiniteta itd. (sl. 10.3 i sl. 10.4). Trougao  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$  može da se shvati kao bazis trostrane prizme koji leži na ravni  $\alpha$ , a trougao  $A_\beta B_\beta C_\beta$  kao površina po kojoj se prizma presekla sa ravni  $\beta$  (presečna površina). Zakovitost afiniteta koristi se pri određivanju preseka ravni i tela čije su izvodnice međusobno paralelne (prizme, valjka itd.).





Sl. 10.3: Afina veza dva trougla  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$  i  $A_\beta B_\beta C_\beta$  u prostoru



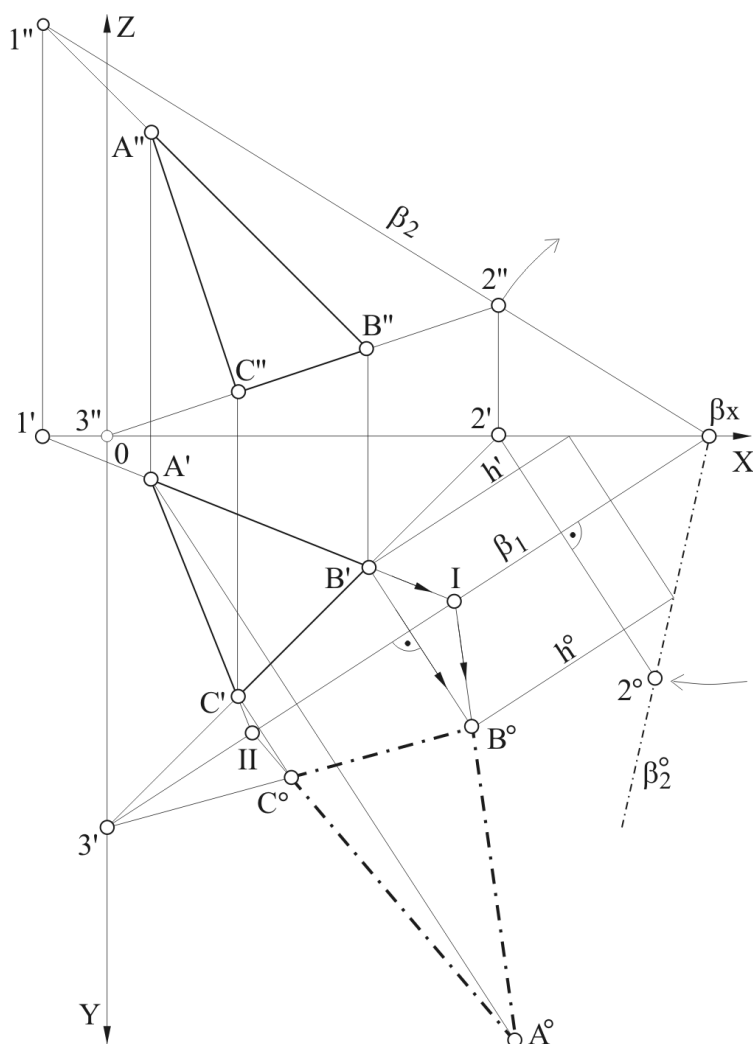
Sl. 10.4: Afina veza dva trougla  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$  i  $A_\beta B_\beta C_\beta$  nakon obaranja ravni

Osobina kolineacije i afiniteta odnose se na aksonometriju, ortogonalne projekcije, ortogonalne projekcije nakon obaranja i oborene položaje (prave veličine), što će se pokazati na primerima koji slede.

**Zadatak 10.1.**

0(2;6). Data je ravan sa tri tačke  $A(0,5;0,5;3,5)$ ,  $B(3;1,5;1)$  i  $C(1,5;3;0,5)$ . Odrediti pravu veličinu trougla kolineacijom.

Označimo ravan na kojoj leže tačke ABC sa  $\square$  Ravan ABC i njegoa prva projekcija su korespondentni trouglovi, a osa kolineacije je osa po kojoj se seku ravan ABC i H ravan jer na



Sl. 10.5: Određivanje prave veličine trougla ABC pomoću kolineacije (Zadatak 10.1.)

njoj leži prva ortogonalna projekcija. Ravan trougla ABC i H ravan seku se po prvom tragu  $\square_1$  ravni  $ABC \square$ . Ravan ABC i njegoa druga projekcija su takođe korespondentni trouglovi; tada je osa kolineacija osa po kojoj se seče trougao ABC i V ravan (drugi trag ravni ABC,  $\square_2$ ). Osim toga međusobno su korespondentne prva projekcija trougla i njegoa prva projekcija i njegoa oborena veličina, kao i druga projekcija i njegoa oborena (prava) veličina itd.

Videli smo da se prava veličina trougla dobija tako što se ravan trougla obori na jednu od projekcijskih ravni H ili V. Stoga se odrede tragovi ravni trougla ABC,  $\beta_1$  i  $\beta_2$  (pomoću prodora ivica trougla) i obori se oko traga  $\beta_1$ , tj odredi se  $\beta_2^\circ$  (sl. 10.5).

Prava veličina trougla ( $A^\circ B^\circ C^\circ$ ) korišćenjem kolineacije određuje se na sledeći način. U produžetku ivice trougla  $A'B'$  (linije kolineacije) do traga  $\beta_1$  (ose kolineacije) dobija se tačka kolineacije I iz koje polazi linija kolineacije koja spaja tačke  $A^\circ$  i  $B^\circ$ . Jedna od ovih dveju tačaka,

pre toga, odredi se pomoću oborene horizontale  $h^\circ$ , npr.  $B^\circ$ . Tada se tačka  $A^\circ$  dobija u preseku linije kolineacije  $IB^\circ$  i spone koja je upravna na  $\beta_1$  iz tačke  $A'$ . Za određivanje tačke  $C^\circ$  koristi se ivica trougla  $A'C'$  kao linija kolineacije i gde ona seče osu kolineacije ( $\beta_1$ ) dobija se tačka kolineacije II. Spoji se tačka II i  $A^\circ$  i dobija linija kolineacije na kojoj se nalazi  $C^\circ$ .

## 10.2. PRESEK PRIZME I RAVNI

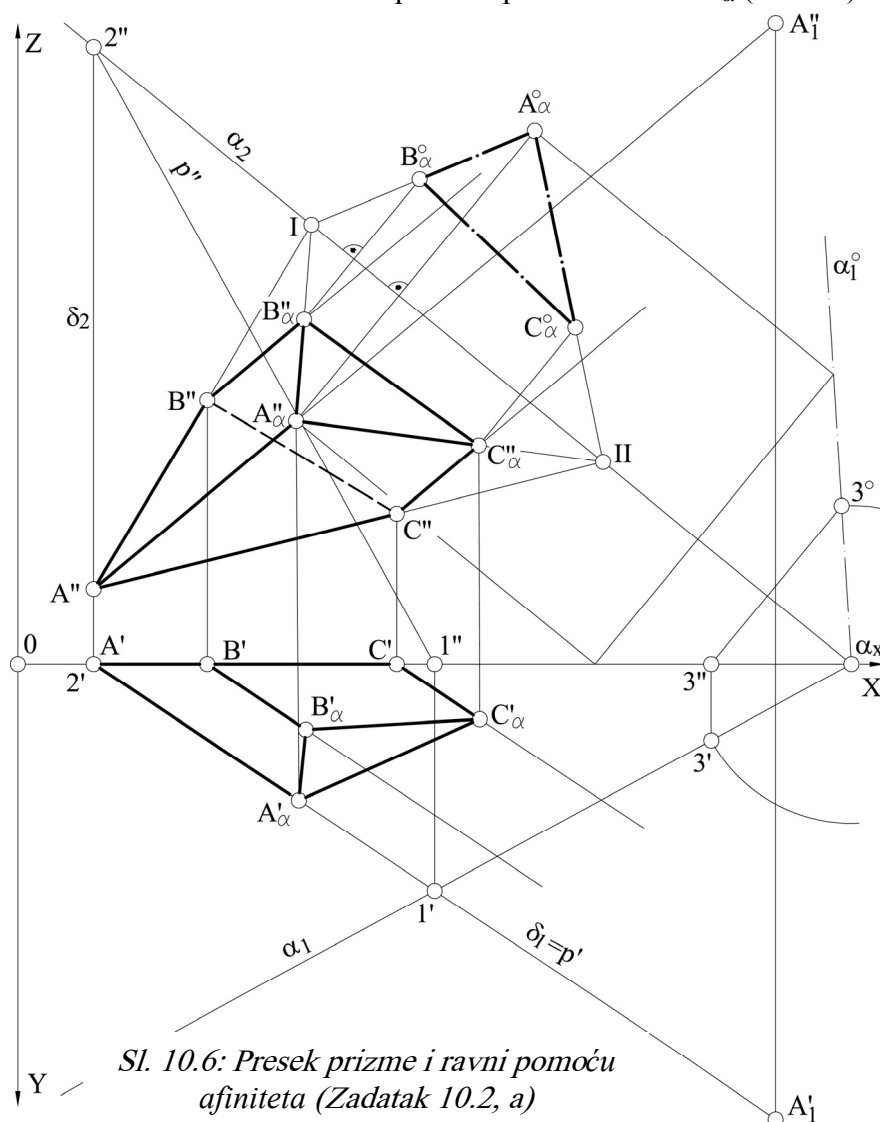
Presekom prizme sa ravni sečenja dobija se zarubljena prizma koju definiše bazis, omotač i presečna površina.

### Zadatak 10.2.

0(2;6). Zadana je kosa trostrana prizma. Bazis leži na vertikalnoj projekcijskoj ravni V i određen je tačkama  $A(1;?,1)$ ,  $B(2,5;?,3,5)$  i  $C(5;?,2)$ . Na izvodnici iz roglja A je  $A_1(10;6;8,5)$ . Nacrtati ortogonalne projekcije donjeg dela zarubljene prizme sa ravni  $\square(11;6;9)$  i pravu veličinu presečne površine na tri različita načina: koristeći afinitet, prodore izvodnica i transformaciju.

#### a) Pomoću afiniteta

Prvo treba definisati osu afiniteta. To je drugi trag  $\alpha_2$  jer bazis prizme leži na V ravni, a presek V ravni i ravni sečenja  $\alpha$  je drugi trag  $\alpha_2$ . Odredi se prodor jedne izvodnice, npr. AV kroz ravan  $\alpha$  kako bi se dobila početna presečna tačka  $A_\alpha$  (sl. 10.6).



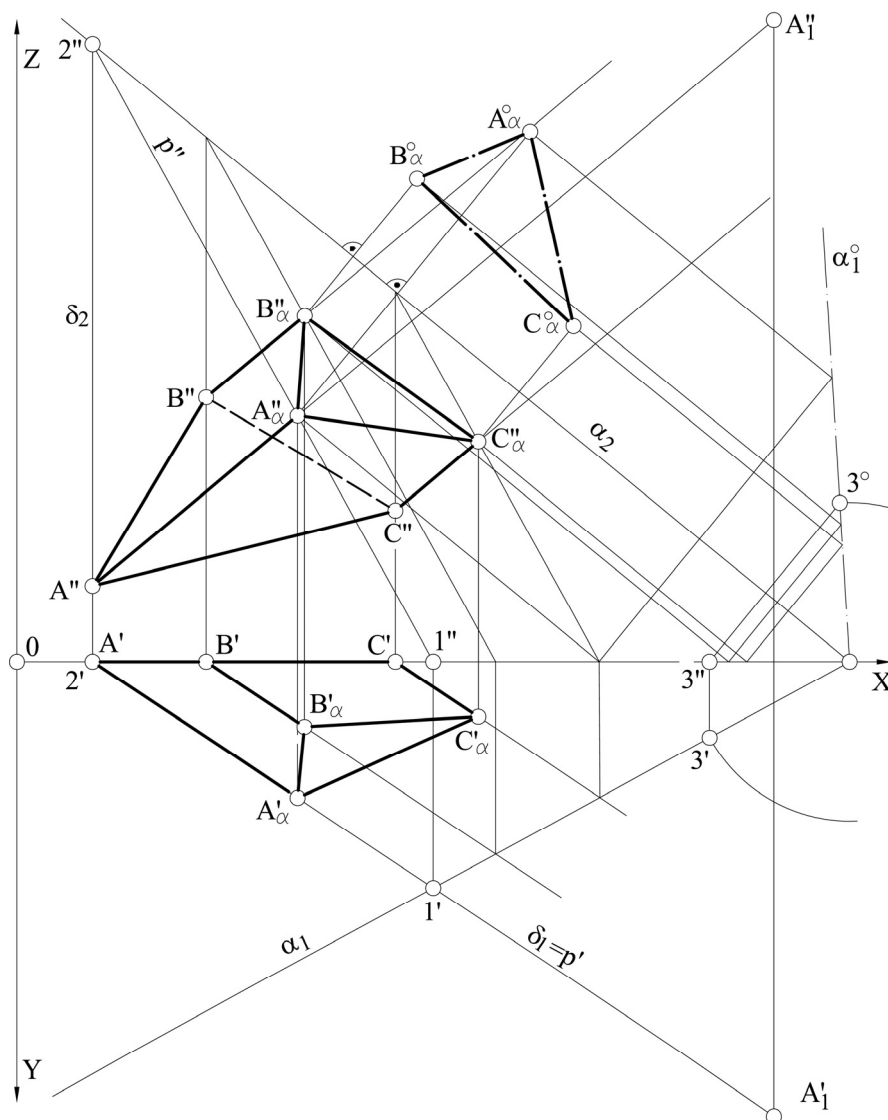
Sl. 10.6: Presek prizme i ravni pomoću afiniteta (Zadatak 10.2, a)

Zatim se povuku linije afiniteta u produžetku ivica bazisa u drugoj projekciji  $A''B''$  i  $A''C''$  do ose afiniteta ( $\alpha_2$ ). Ivicu  $B''C''$  nećemo produžiti jer daleko preseca osu afiniteta. Prvo povučemo liniju afiniteta kroz tačke  $A''B''$  jer je već određena  $A_\alpha''$  i dobija se tačka afiniteta I. Spoje se tačke I i  $A_\alpha''$  i u preseku ove linije afiniteta i izvodnice iz tačke  $B''$  dobija se  $B_\alpha''$ . Da bi odredili  $C_\alpha''$  povučemo liniju afiniteta kroz tačke  $A''C''$  i dobija se tačka afiniteta II. Spoje se tačke II i  $A_\alpha''$  i u preseku ove linije afiniteta i izvodnice iz tačke  $C''$  dobija se

$C''_\alpha$ . Tačke presečne površine u prvoj projekciji  $A'_\alpha$ ,  $B'_\alpha$  i  $C'_\alpha$  dobijaju se pomoću spona i odgovarajući izvodnica u prvoj projekciji.

Zakovitost afiniteta odnosi se i na pravu veličinu presečne površine, te se može odrediti pomoću afini tačaka I i II. Odredi se prvi oboreni trag  $\alpha_1^\circ$  i pomoću frontale kroz tačku  $A''_\alpha$  odredi se njen oboreni položaj,  $A^\circ_\alpha$ . Spoje se tačke I i  $A^\circ_\alpha$  i u preseku ove linije afiniteta i spone iz tačke  $B''_\alpha$  dobija se  $B^\circ_\alpha$ . Spone između druge projekcije i oborene upravne su na drugi trag  $\alpha_2$ . Na isti način dobija se i tačka  $C^\circ_\alpha$ . Spoje se tačke II i  $A^\circ_\alpha$  i u preseku ove linije afiniteta i spone iz tačke  $C''_\alpha$  dobija se tačka  $C^\circ_\alpha$ .

### b) Pomoću prodora izvodnica



Za svaku od tri izvodnice iz tačaka A, B i C postavi se pomoćna ravan i odrede prodori kroz presečnu ravan  $\alpha$ . Iz tačke A to je pomoćna ravan  $\square$  koja je upravna na H ravan i na osnovu tačaka preseka ravni  $\alpha$  i  $\delta$  (tačaka 1 i 2) dobija se presečnica  $p$  (sl. 10.7). U preseku  $p''$  i izvodnice  $A''A_1''$  dobija se  $A''_\alpha$ . Isti postupak se ponovi kroz druge dve izvodnice.

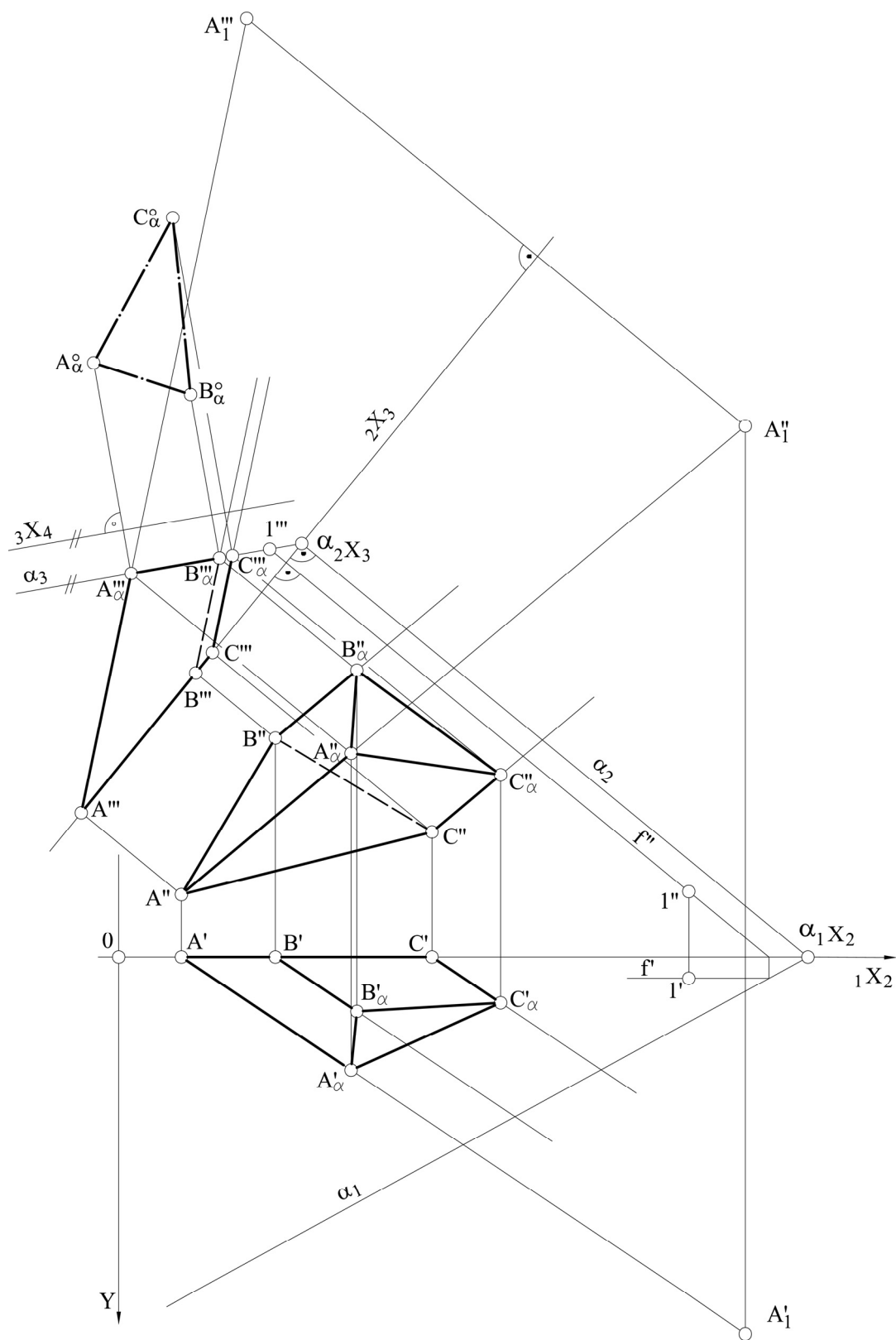
Obari se prvi trag ravnice  $\alpha_1^\circ$ , zatim pomoću oborenih frontala dobija se prava veličina presečne površine,  $A^\circ_\alpha$ ,  $B^\circ_\alpha$  i  $C^\circ_\alpha$ .

Sl. 10.7: Presek prizme i ravni pomoću prodora izvodnica (Zadatak 10.2, b)

### c) Pomoću transformacije

Postavi se ravan transformacije  $\pi_3$  upravno na V ravan i na drugi trag  $\alpha_2$  ( $2X_3 \perp \alpha_2$ ) da bi se dobio bazis u trećoj projekciji kao duž ( $A'''$ ,  $B'''$  i  $C'''$ ). U preseku trećeg traga  $\alpha_3$  i izvodnica u trećoj projekciji, dobija se presečna površina kao duž ( $A_\alpha$ ,  $B_\alpha$  i  $C_\alpha$ ). Treći trag  $\alpha_3$  dobija se koristeći tačku 1 na ravni  $\alpha_3$ . Da bi se dobila prava veličina presečne površine ( $A^\circ_\alpha$ ,  $B^\circ_\alpha$  i  $C^\circ_\alpha$ )

postavi se nova ravan transformacije  $\pi_4$  paralelno sa duži  $A''_\alpha$ ,  $B''_\alpha$  i  $C''_\alpha$ , tj. osa nove ravni  ${}_3X_4$  je paralelna sa ovom duži (sl. 10.8).



Sl. 10.8: Presek prizme i ravni pomoću transformacije (Zadatak 10.2, c)

Da li će se, pri određivanju preseka tela i ravni, koristiti afinitet i kolineacija, prodori izvodnica ili transformacija, zavisi od predmeta crtanja i raspoloživog prostora za crtanje.

Postupak primenom prodora izvodnica je najnepregledniji, jer ima puno pomoćnih linija. Postupak transformacijom zahteva najviše prostora za crtanje. Postupak kolineacijom ili afinitetom ima najmanje pomoćnih linija.

Svejedno koji se postupak koristi, dobija se isto rešenje. Zbog toga što se pri crtanju prave nehotećne greške, svaki zadatak treba rešiti na dva ili više načina i na taj način proveriti dobijeno rešenje.

### Zadatak 10.3.

$O(11;7)$ . Tačke  $A(-3;0,5;0)$ ,  $B(-2;3,5;0)$  i  $C(-0,5;2;0)$  su rogljevi bazisa kose trostrane prizme. Tačka  $A_1(-6,5;2;4)$  je na izvodnici iz roglja A. Odrediti presek prizme i ravni  $\alpha(-6;\infty;4)$  i nacrtati mrežu zarubljene (odsećene) prizme između bazisa ABC i ravni  $\alpha$ .

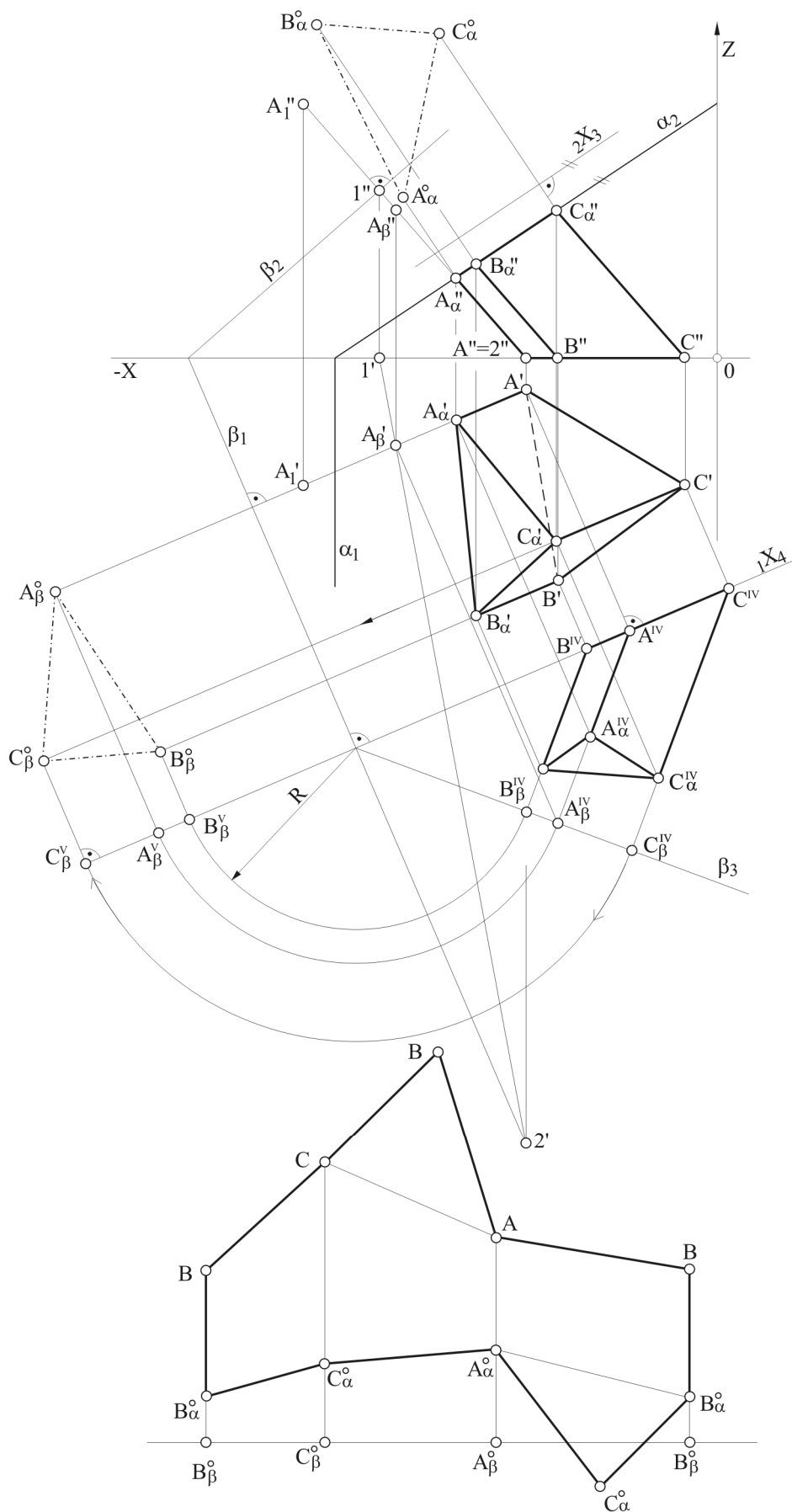
Ravan sečenja  $\alpha$  je upravna na V ravan, te se površina prizme koja se preseklala sa ravni  $\alpha$  (presečna površina) u drugoj projekciji projicira na drugi trag  $\alpha_2$  kao duž  $A_\alpha"C_\alpha"$  (sl. 10.9). Prva projekcija presečne površine ( $A_\alpha"B_\alpha"C_\alpha$ ) dobija se u preseku vertikalnih spona i prvih projekcija izvodnica. Spoje se tačke bazisa ABC sa pridruženim tačkama na ravni  $\alpha$  ( $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ ) u obe projekcije i dobijaju se projekcije zarubljene kose prizme.

Mreža predstavlja crtež razvijenog omotača i bazisa tela na jednoj ravni (na papiru, limu...) čijim se odsecanjem i savijanjem dobija telo u prostoru u pravoj veličini.

Da bi se nacrtala mreža zarubljene prizme potrebno je odrediti prave veličine bazisa, izvodnica, dijagonala strana (zato što je prizma kosa) i presečne površine (trougla  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ ). Bazis se vidi u pravoj veličini u prvoj projekciji jer leži na H ravni. Prava veličina presečne površine ( $A_\alpha^\circ B_\alpha^\circ C_\alpha^\circ$ ) odredi se, npr. transformacijom korišćenjem ravni  $\pi_3$  čija je osa  ${}_2X_3$  paralelna sa drugim tragom  $\alpha_2$ . Prava veličina izvodnica i dijagonala strana može se odrediti rotacijom ili transformacijom. Tačnost mreže zavisi od preciznosti crtanja.

Da bi se dobila preciznija mreža preseče se prizma na proizvoljnom mestu sa pomoćnom ravni  $\beta$  koja je upravna na izvodnice prizme. Tada su tragovi ravni  $\beta$  upravni na projekcije izvodnica ( $\beta_1 \perp A'A'_1$ ,  $\beta_2 \perp A''A''_1$ ). Za određivanje prave veličine presečne površine prizme sa ravni  $\beta$  ( $A_\beta B_\beta C_\beta$ ) koristi se ravan  $\pi_4$  koja je upravna na ravan  $\pi_1$ , tako da je osa  ${}_1X_4$  upravna na trag  $\beta_1$ . Treći trag  $\beta_3$  određuje se pomoću tačke  $A_\beta$  koja se dobija kao prodor izvodnice  $AA_1$  kroz ravan  $\beta$  (pomoću presečnice koju određuju tačke 1 i 2). Odredi se četvrta projekcija zarubljene prizme koja se nalazi između ose  ${}_1X_4$  i traga  $\beta_3$ . U četvrtoj projekciji vide se u pravoj veličini dužine izvodnica od bazisa do presečne površine sa ravni  $\alpha$  i do presečne površine sa ravni  $\beta$ . Prava veličina presečne površine  $A_\beta^\circ B_\beta^\circ C_\beta^\circ$  dobija se tako što se zarotira četvrta projekcija do ose  ${}_1X_4$ . Na osnovu prve i zarotirane četvrte projekcije dobija se  $A_\beta^\circ B_\beta^\circ C_\beta^\circ$ .

Mreža se počinje crtati od omotača i to od najkraće izvodnice (da bi se lakše isekla na papiru, limu...) i sa njome se omotač i završava. Na proizvoljnom mestu povuče se linija na koju se nanese odseći jednaki dužima  $B_\beta^\circ C_\beta^\circ$ ,  $C_\beta^\circ A_\beta^\circ$  i  $A_\beta^\circ B_\beta^\circ$ . Iz ovih tačaka podignu se normale na liniju na kojoj se nalaze odseći. [estarem se prenesu prave veličine dužina izvodnica (iz četvrte projekcije) i dobijaju tačke  $B_\beta^\circ$ ,  $B_\alpha^\circ$ , B, zatim  $C_\beta^\circ$ ,  $C_\alpha^\circ$ , C itd. Izvodnice su na mreži omotača međusobno paralelne kao što su paralelne i na prizmi. Na najdužu ivicu bazisa (AC) "zakači" se prava veličina bazisa (iz prve projekcije A'B'C') koristeći šestar. Takođe, na najdužu ivicu ( $A_\alpha B_\alpha$ ) presečne površine  $A_\alpha^\circ B_\alpha^\circ C_\alpha^\circ$  (poklopca) "zakači" se poklopac, koristeći šestar. Mreža se iseče makazama po spoljanoj konturi, presavija po ivicama i zalepi i na taj način dobija se zarubljena prizma.



Sl. 10.9: Određivanje preseka trostrane kose prizme sa ravni i crtanje mreže (Zadatak 10.3.)

**Zadatak 10.4.**

0(3;11). Data je tačka  $S(2,5;0;2;5)$  kao centar bazisa pravilne šestostrane kose prizme. Tačka  $A(0,5;0;2,5)$  je jedan rogalj na bazisu, a tačka  $A_1(8;5;5,5)$  na izvodnici iz roglja A. Nacrtati ortogonalne projekcije prizme presečene sa ravni  $\beta(9;5;10)$  između bazisa i presečne površine, kao i mrežu tog dela.

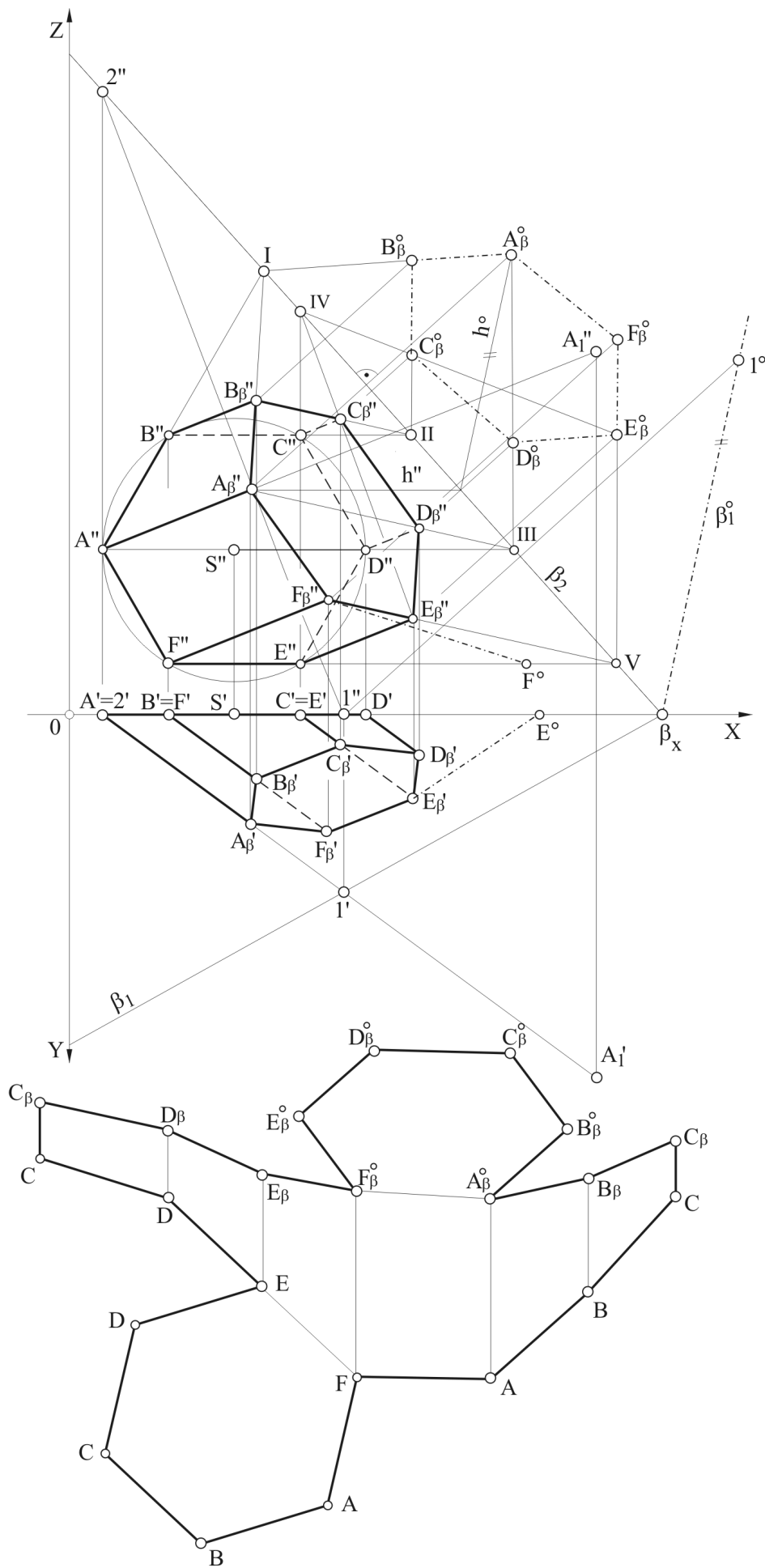
Na osnovu koordinata tačaka S i A može se zaključiti da bazis prizme leži na V ravni. Rastojanje od S" do A" je poluprečnik opisane kružnice oko šestougaonika koji se u drugoj projekciji vidi u pravoj veličini. Konstruiše se šestougaonik i odrede prve i druge projekcije rogljeva A, B, C, D, E i F (sl. 10.10). Nacrtaju se izvodnice iz svih rogljeva paralelno sa izvodnicom  $AA_1$  u obe projekcije.

Odredi se prodor jedne od izvodnica kroz ravan  $\beta$ , npr. izvodnice  $AA_1$  (tačke presečnice su 1 i 2) i dobija se tačka  $A_\beta$  (pridružena tački A). Ostale tačke presečne površine  $B_\beta, C_\beta, \dots$  mogu se odrediti pomoću afiniteta koristeći trag  $\beta_2$  kao osu afiniteta. Kroz tačke A"B" povuče se linija afiniteta i na tragu  $\beta_2$  dobija tačka I. Počinje se od tačke koja je najudaljenija od ose afiniteta kako bi se dobio što precizniji crtež. Spoji se tačka I i  $A_\beta$  i u preseku te linije afiniteta i izvodnice iz tačke B" dobija se  $B_\beta$ ". Prva projekcija ove tačke ( $B_\beta'$ ) je u preseku vertikalne spone i prve projekcije izvodnice iz tačke B'. Na isti način odrede se projekcije i ostalih pridruženih tačaka  $C_\beta, B_\beta$  itd. koristeći tačke afiniteta II, III, IV i V.

Da bi se nacrtala mreža potrebno je odrediti pravu veličinu omotača i presečne površine. Pravu veličinu presečne površine (poklopca) najjednostavnije je odrediti obaranjem traga  $\beta_2$  koristeći već nacrtane linije afiniteta i tačke afiniteta I, II, III, IV i V. Prvo se odredi tačka  $A_\beta^\circ$  pomoću oborene horizontale  $h^\circ$ . Sada se spoje tačke I i  $A_\beta^\circ$  i u preseku ove linije afiniteta i spone upravne na trag  $\beta_2$  iz tačke  $A_\beta$ " dobija se  $A_\beta^\circ$ . Na isti način odrede se i ostale tačke na oborenoj presečnoj površini koristeći linije afiniteta iz tačaka II, III, IV i V.

Prave veličine izvodnica odrede se rotacijom ili trouglom pravih veličina. Prave veličine izvodnica  $EE_\beta$  ( $E_\beta'E^\circ$ ) i  $FF_\beta$  ( $F_\beta'F^\circ$ ) itd. određene su rotacijom. Osim toga treba odrediti i prave veličine jedne od dveju dijagonala svakog nepravilnog četvorougla iz kojih se sastoji omotač, npr.  $DC_\beta^\circ, DE_\beta^\circ$  itd. Određivanje prave veličine dijagonala nije potrebno ako se napravi presek prizme sa pomoćnom ravni koja je upravna na izvodnice, kao u zadatku 10.3, sl. 10.9. Na taj način se smanjuje broj pomoćnih linija.

Proizvoljno se povuče linija na koju se nanese prava veličina ivice CD (iz druge projekcije - C"D"). Iz tačke C, šestarom se nacrtava luk radijusa  $CC_\beta^\circ$ , a iz tačke D luk radijusa koji je jednak pravoj veličini dijagonale  $DC_\beta$ . U preseku ta dva luka dobija se tačka  $C_\beta^\circ$ . Iz tačke D povuče se linija paralelna izvodnici  $CC_\beta^\circ$  i na nju nanese prava veličina izvodnice  $DD_\beta$ . Na isti način se nacrtaju i ostali nepravilni četvorougli omotača. Bazis se nacrtava uz jednu ivicu omotača (EF), a presečna površina (poklopac) uz jednu dužu ivicu ( $F_\beta^\circ A_\beta^\circ$ ).



Sl. 10.10:  
 Određivanje  
 preseka  
 šestostrane kose  
 prizme sa ravni i  
 crtanje mreže  
 (Zadatak 10.4.)



**Zadatak 10.5.**

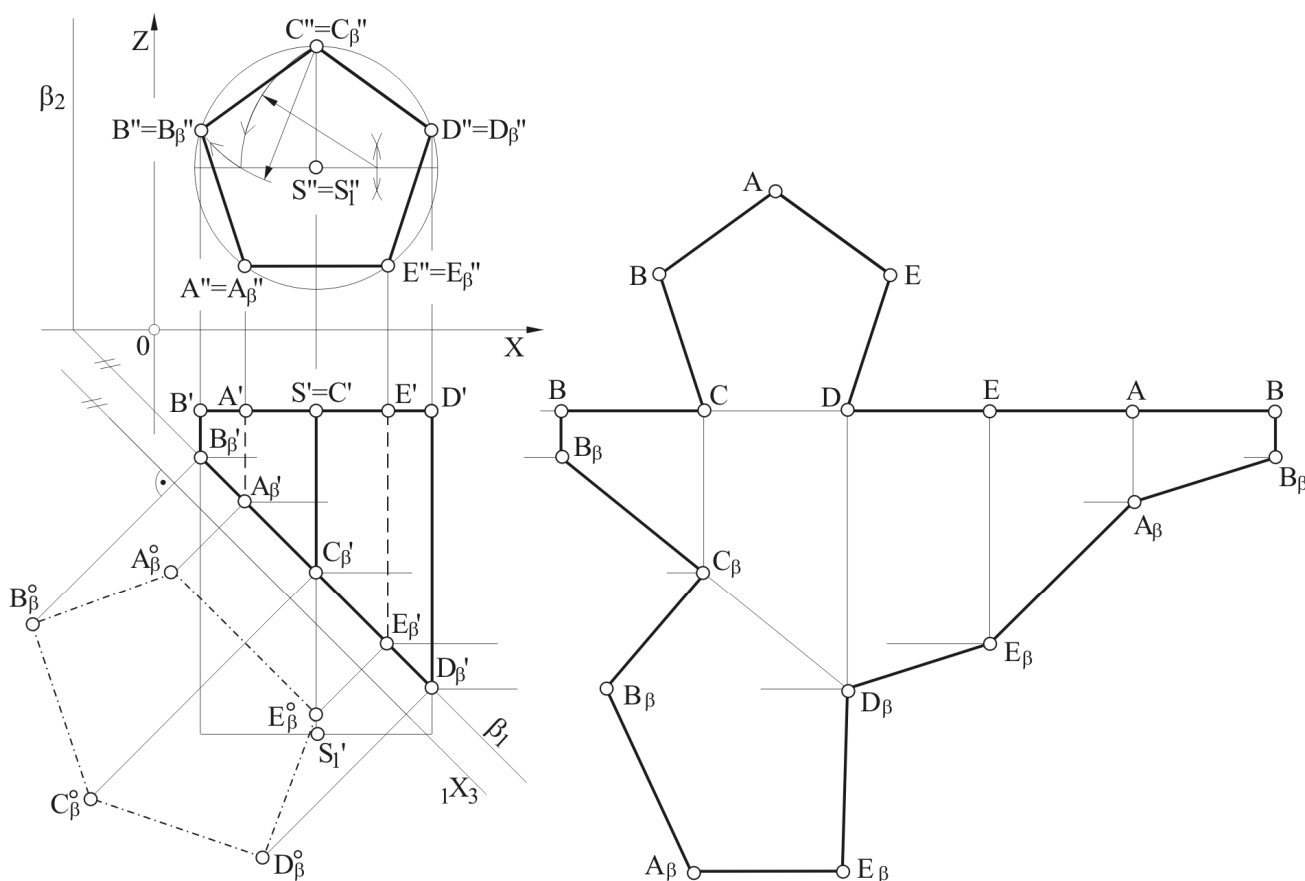
0(3;5). Poluprečnik opisane kružnice oko pravilnog petougona kao bazisa prave prizme je  $R=1,5$  cm. Jedan bazis je u tački  $S(2;1;2)$ , a drugi u  $S_1(2;5;2)$  koji su paralelni sa  $V$  ravni. Jedna ivica bazisa je paralelna sa  $H$  ravni. Nacrtati ortogonalne projekcije prizme presečene sa ravni  $\beta(-1;1;\infty)$  između donjeg bazisa i ravni  $\beta$ , kao i mrežu.

Iz tačke  $S''$  nacrtati se krug poluprečnika  $R=1,5$  cm i konstruiše pravilan petougao tako da je jedna ivica ( $A''E''$ ) paralelna sa osom  $X$  jer je paralelna sa  $H$  ravni. Konstrukcija pravilnog petougona upisanog u kružnici šematski je prikazana na sl. 10.11.

Prva projekcija bazisa ( $A'B'C'D'E'$ ) je paralelna sa osom  $X$  jer je paralelan sa  $V$  ravni, a izvodnice su paralelne sa osom  $Y$ , jer je prizma prava. Presečna površina u prvoj projekciji ( $A_\beta B_\beta C_\beta D_\beta E_\beta$ ) se projicira kao duž na prvom tragu  $\beta_1$  (zato što je ravan  $\beta$  upravna na  $H$  ravan). Druga projekcija presečne površine podudara se sa drugom projekcijom bazisa.

Za crtanje mreže potrebno je odrediti samo pravu veličinu presečne površine, pošto se bazis u drugoj, a izvodnice u prvoj projekciji već vide u pravoj veličini. Prava veličina presečne površine ( $A_\beta^\circ B_\beta^\circ C_\beta^\circ D_\beta^\circ E_\beta^\circ$ ) određena je transformacijom.

Mreža se najjednostavnije može nacrtati uporedo sa prvom projekcijom zbog toga što se pomoću horizontalnih linija mogu preneti prave veličine izvodnica. Kako je prizma prava, razvijeni bazis ( $ABCDE$ ) je na jednoj liniji (uporedo sa prvom projekcijom bazisa).



Sl. 10.11: Određivanje preseka petostostrane prave prizme sa ravni i crtanje mreže (Zadatak 10.5.)

### 10.3. PRESEK PIRAMIDE I RAVNI

Presekom piramide sa ravni sečenja dobija se zarubljena piramida koju definiše bazis, omotač i presečna površina. Izgled omotača zavisi od bazisa i od toga da li je piramida prava ili kosa. Omotač se sastoji iz trouglova različitih oblika. Izgled presečne površine je nepravilan mnogougao, zavisno od bazisa, omotača i ravni sečenja.

#### Zadatak 10.6.

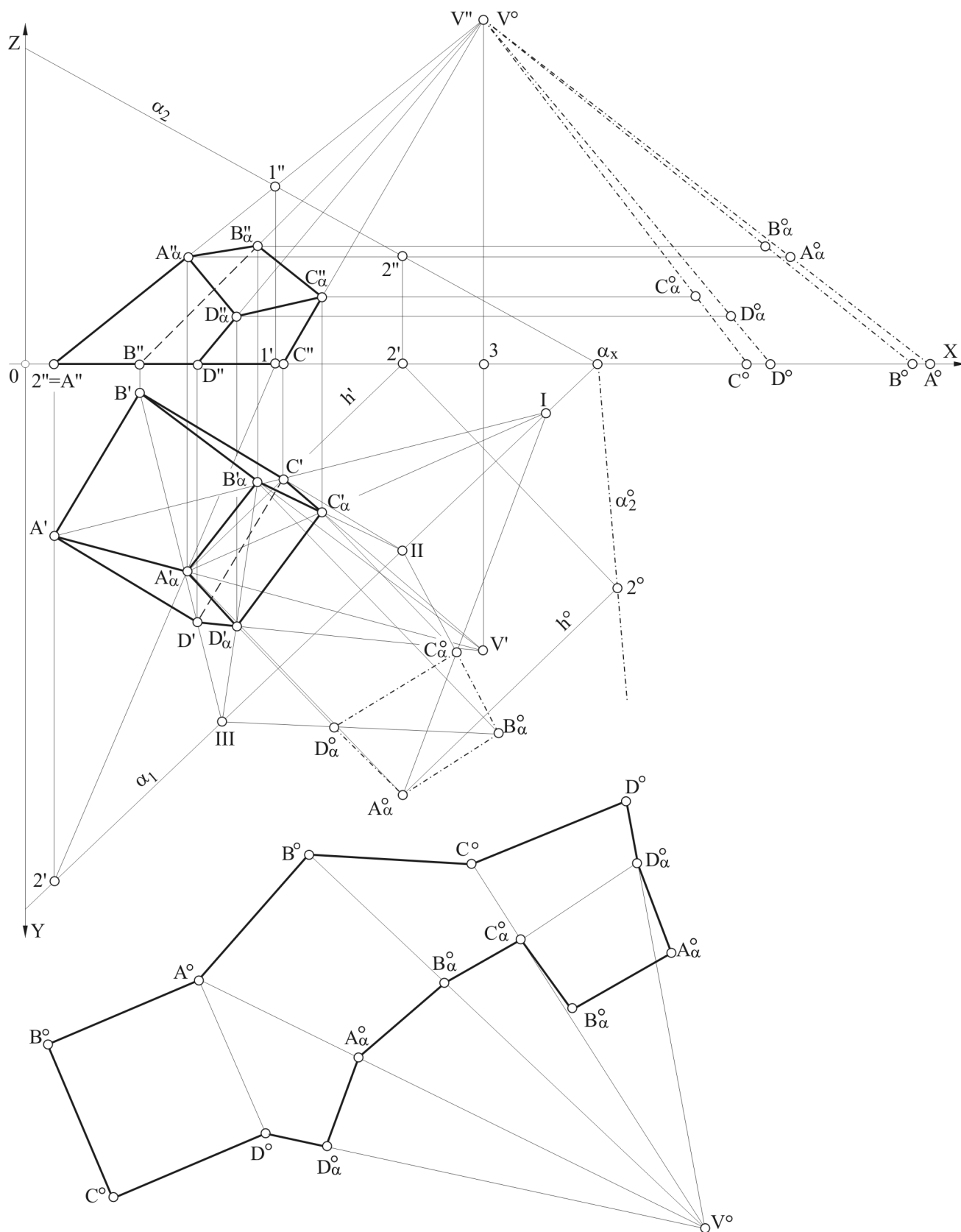
0(2;8). Odrediti presek kose četvorostrane piramide i ravni  $\alpha(10;9,5;5)$  i nacrtati mrežu između bazisa i ravni  $\alpha$ . Bazis piramide je kvadrat ivice  $A(0,5;3;?)$  i  $B(2;0,5;?)$  koji leži na H ravni. Vrh piramide je u tački  $V(8;5;6)$ .

U prvoj projekciji konstruiše se kvadrat stranice  $A'B'$  jer se u ovoj projekciji vidi u pravoj veličini te se dobijaju tačke  $C'$  i  $D'$ . Druga projekcija bazisa ( $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  i  $D''$ ) je na osi  $X$ . Odredi se prodor jedne od izvodnica kroz ravan  $\alpha$ , npr. izvodnice  $AV$  i dobija se tačka  $A_\alpha'$  (sl. 10.12). Druga projekcija ove tačke,  $A_\alpha''$  je u preseku vertikalne spone i izvodnice  $A''V''$ . Ostale tačke presečne površine određene su kolineacijom.

Osa kolineacije je prvi trag  $\alpha_1$ , jer se po ovom tragu seče bazis piramide koji je na H ravni i ravan sečenja  $\alpha$ . Povuču se linija kolineacije kroz tačke  $A'C'$  i dobija tačka kolineacije  $I$ . Spoji se tačka  $I$  sa  $A_\alpha'$  i u preseku ove linije kolineacije i izvodnice  $C'V'$  dobija se  $C_\alpha'$ . Na isti način dobijaju se projekcije i ostalih tačaka presečne površine  $B_\alpha$  i  $D_\alpha$  u obe projekcije.

Prava veličina presečne površine ( $A_\alpha^\circ B_\alpha^\circ C_\alpha^\circ D_\alpha^\circ$ ) dobija se obaranjem traga  $\alpha_2$ , koristeći tačke kolineacije  $I$ ,  $II$  i  $III$  (postupak je detaljno objašnjen u zadacima 10.2, a sl. 10.6 i 10.4, sl. 10.10). Prave veličine izvodnica najlakše je odrediti rotacijom u drugoj projekciji pošto im je zajednička tačka  $V''$ . Od tačke označene sa 3 po horizontalnoj liniji nanose se vrednosti prvih projekcija izvodnica i dobijaju tačke  $A^\circ$ ,  $B^\circ$ ,  $C^\circ$  i  $D^\circ$ . Spajanjem ovih tačaka sa  $V^\circ$  dobijaju se prave veličine izvodnica, kao i prave veličine delova izvodnica do presečne površine  $A_\alpha^\circ B_\alpha^\circ C_\alpha^\circ D_\alpha^\circ$ .

Mreža se počinje crtati od jedne proizvoljno odabrane linije na koju se nanese prava veličina najkraće izvodnice ( $D^\circ V^\circ$ ) kao i tačke  $D_\alpha^\circ$  na njoj. Tačka  $C^\circ$  dobija se u preseku luka radijusa  $R=V^\circ C^\circ$  iz tačke  $V^\circ$  i luka radijusa  $R=D^\circ C'$  iz tačke  $D^\circ$ . Tačka  $C_\alpha^\circ$  dobija se tako što se po izvodnici  $C^\circ V^\circ$  nanese duž  $C^\circ C_\alpha^\circ$  od tačke  $C^\circ$ . Dobijena ivica  $D_\alpha^\circ C_\alpha^\circ$  presečne površine treba da je jednaka toj ivici iz oborenog položaja. Na isti način odrede se i ostale izvodnice i tačke na njoj, a zatim se doda bazis i poklopac (presečna površina).



Sl. 10.12: Određivanje preseka četverostrane kose piramide sa ravni i crtanje mreže (Zadatak 10.6.)

#### 10.4. PRESEK VALJKA I RAVNI

Presekom valjka sa ravni sečenja dobija se zarubljeni valjak koji definiše bazis, omotač i presečna površina. Izgled omotača zavisi od toga da li je valjak prav ili kos. Presečna površina je elipsa, ako ravan sečenja ne seče bazis, već samo omotač.

##### Zadatak 10.7.

0(5;6). Bazis pravog valjka sa središtem i tački  $S(2,5;2,5;?)$  leži na H ravni i ima poluprečnik  $R=1,5$  cm. Visina valjka je 4 cm. Odrediti presek valjka i ravni  $\alpha(8,5;7;4)$  i nacrtati mrežu.

Prva projekcija valjka je krug poluprečnika  $R=1,5$  cm, a druga pravougaonik visine 4 cm. Presečna površina je elipsa, ali se u prvoj projekciji projicira i kružnicu.

Presek se može dobiti crtanjem horizontala ( $h'$  i  $h''$ ), npr. kroz tačke  $A_\alpha, B_\alpha$  itd. U ovom zadatku jednostavnije je koristiti transformaciju. Postavi se ravan  $\pi_3$  da bude upravna na  $\pi_1$  tako da je osa  ${}_1X_3$  upravna na trag  $\alpha_1$ . Odredi se trag  $\alpha_3$  i treća projekcija valjka (sl. 10.13). Presečna površina se cela projicira na trag  $\alpha_3$ , a njena prava veličina odredi se rotacijom treće projekcije (detaljnije objašnjenje ovog postupka dato je u zadatku 7.5, sl. 7.19). Druga projekcija presečne površine dobija se na osnovu treće projekcije iz jednakosti rastojanja:  $E'''E_\alpha''' = E''E_\alpha''$ ,  $A'''A_\alpha''' = A''A_\alpha''$ ,  $F'''F_\alpha''' = F''F_\alpha''$  itd.

Prava veličina bazisa je u prvoj projekciji, a prava veličina izvodnica u drugoj i trećoj projekciji. Podeli se kružnica na proizvoljan broj podeljaka (što više, mreža će biti tačnija), npr. 8 podeljaka, tako da se dobiju tačke A, B, C, D, E i F koje se odrede u prvoj i trećoj projekciji.

Mreža se crta tako što se na horizontalnu liniju (jer je valjak prav) nanese duž jednaka obimu valjka. Obim valjka se može izračunati analitički ili grafički, rektifikacijom kao što je pokazano na sl. 10.13, u sredini desno.

Nacrta se razvijeni omotač na koji se doda bazis (krug) i presečna površina (elipsa iz oborenog položaja).

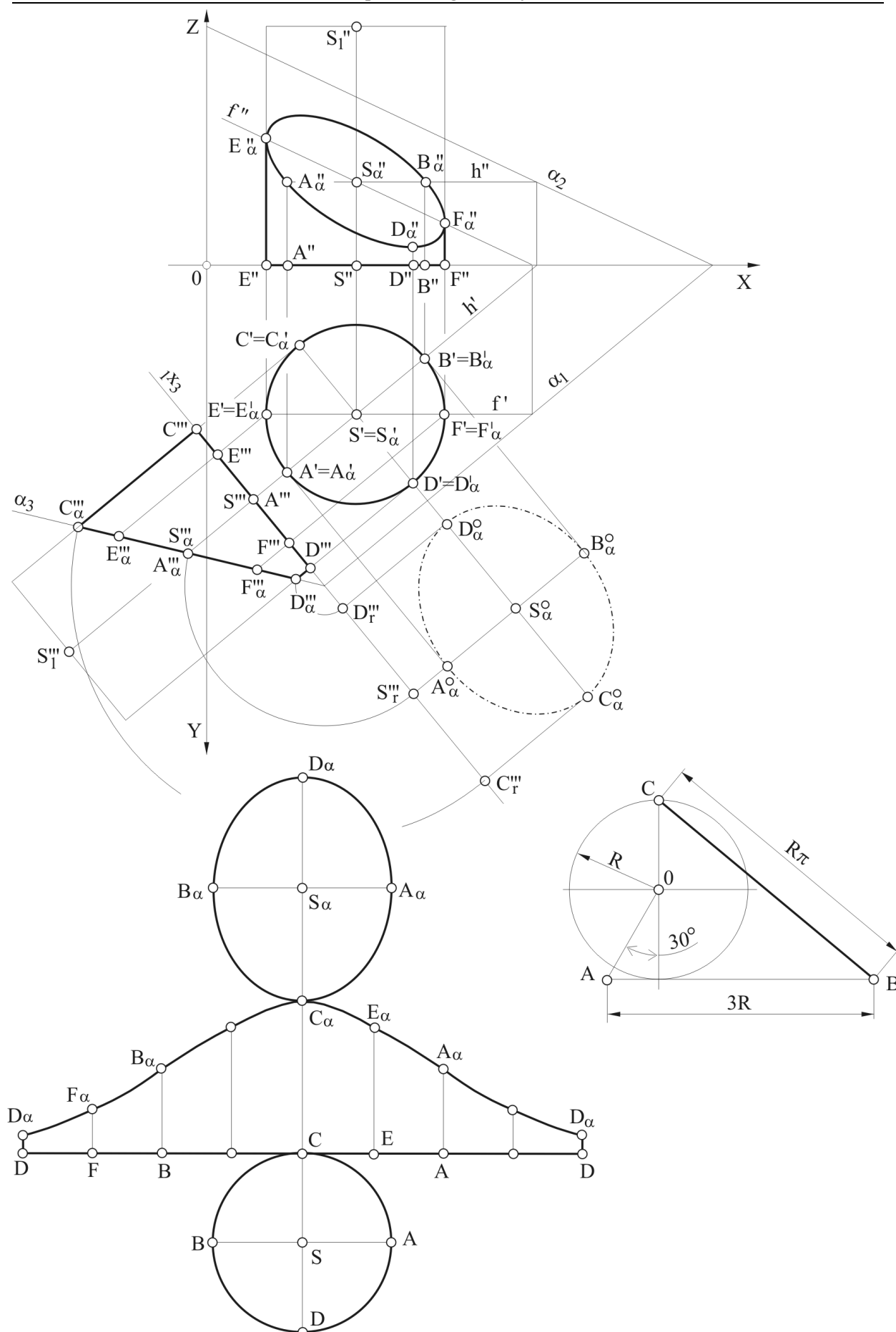
##### Zadatak 10.8.

0(9;7). Valjak poluprečnika  $R=1,5$  cm ima središta bazisa u tačkama  $S(0,5;2,5;2)$  i  $S_1(4,5;2,5;2)$ . Bazisi valjka su paralelni sa profilnom projekcijskom ravni P. Odrediti presek valjka i ravni  $\alpha(6,5;\infty;4,5)$  i nacrtati mrežu. Nacrtati kosu projekciju presečenog valjka.

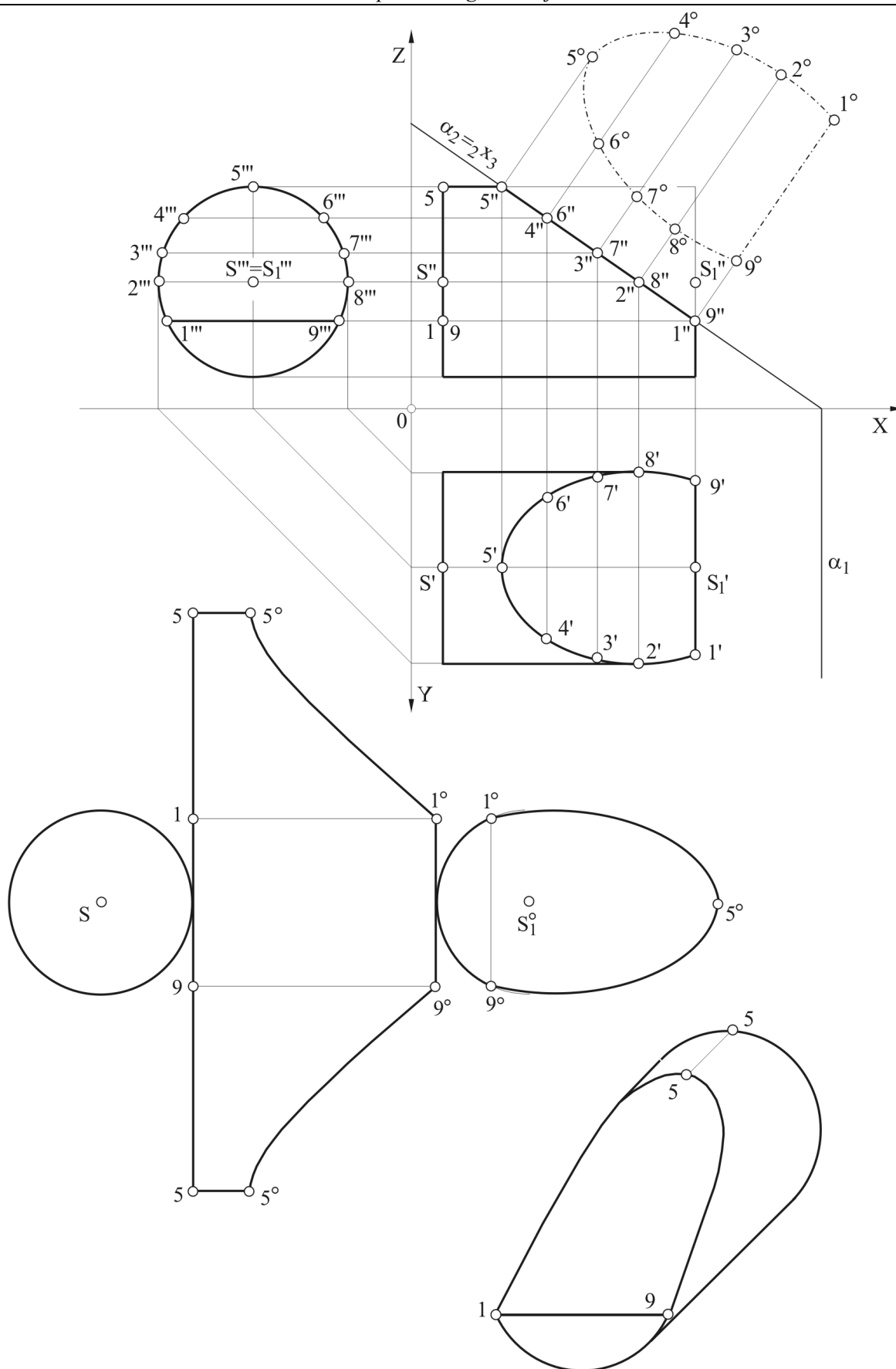
Nacrtaju se sve tri projekcije valjka. Valjak se u prvoj i drugoj projekciji vidi kao pravougaonik, a u trećoj kao krug. Presečna površina u drugoj projekciji se cela projicira na drugi trag  $\alpha_2$  jer je ravan  $\alpha$  upravna na V ravan. S toga se druga projekcija presečne površine podeli na proizvoljan broj podeljaka i obeleže kao na sl. 10.14 (1'', 2''... 9''). Koristeći spone odrede se prvo treće, a zatim i prve projekcije presečnih tačaka (1''', 2''... 9''' zatim 1', 2'... 9').

Za crtanje mreže potrebno je odrediti samo pravu veličinu presečne površine, pošto se izvodnice već vide u pravoj veličini u prvoj i drugoj projekciji, a bazis u trećoj projekciji. Prava veličina presečne površine određena je transformacijom (osa  ${}_2X_3$  leži na drugom tragu  $\alpha_2$ ). Kako je deo bazisa ostao nepresečen, presečna površina od tačke 1 do 9 na donjoj strani, je deo kruga, a na gornjoj strani je deo elipse.

Postupak crtanja kose projekcije biće kasnije objašnjen u poglavlju 14 Aksonometrijski crteži.



Sl. 10.13: Određivanje preseka pravog valjka sa ravni i crtanje mreže (Zadatak 10.7)



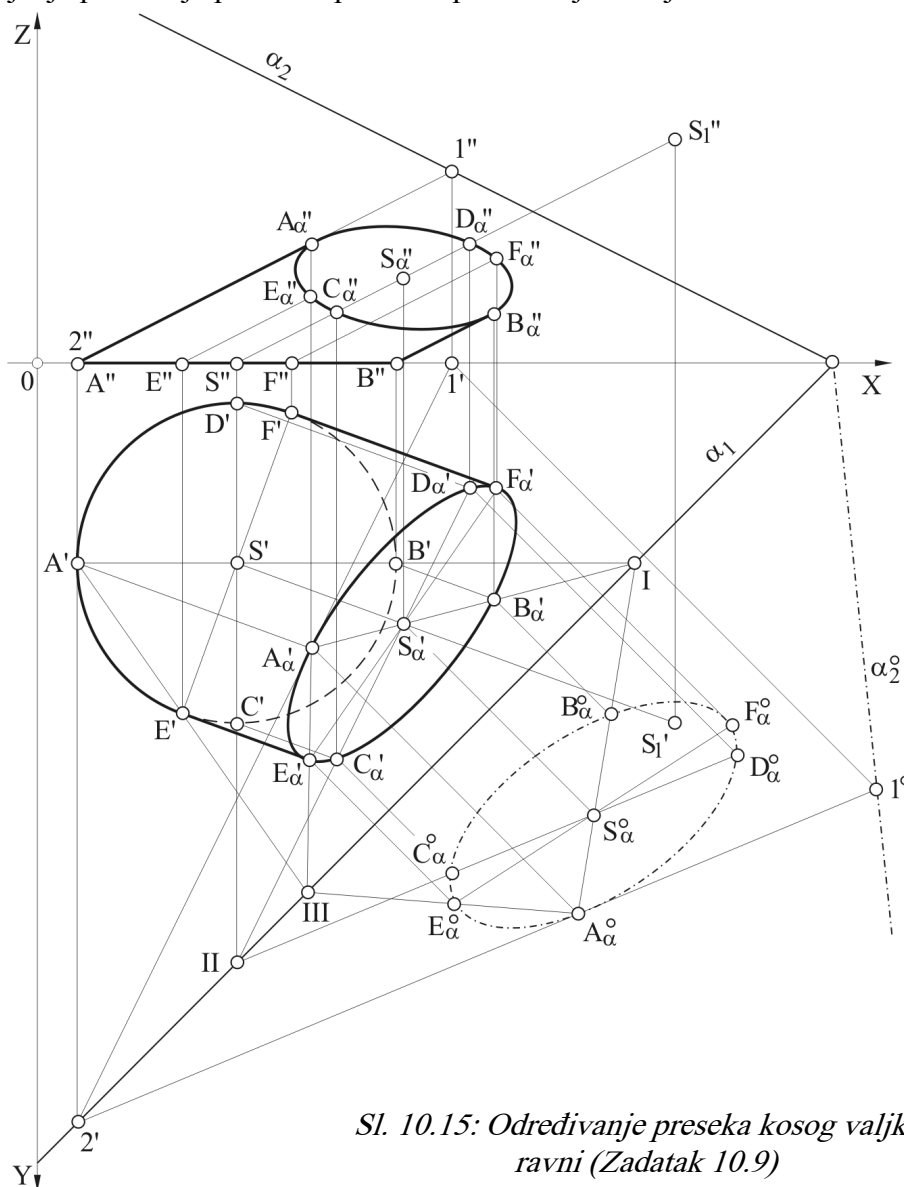
Sl. 10.14: Određivanje preseka pravog valjka sa ravni, crtanje mreže i kose projekcije presečenog valjka (Zadatak 10.8.)

**Zadatak 10.9.**

0(1;10). Odrediti presek kosog valjka sa ravni  $\alpha(10;10;5)$  i pravu veličinu presečne površine. Bazis valjka poluprečnika  $R=2$  cm sa središtem u tački  $S(2,5;2,5;?)$  leži na H ravni, a središte drugog bazisa je u tački  $S_1(8;4,5;3)$ .

Da bi se odredio zarubljeni valjak u ovom zadatku koristiće se afinitet. Odredi se prodor jedne od izvodnica kroz ravan  $\alpha$ , npr. izvodnice iz tačke A. Presečnica pomoću koje se dobijaju projekcije tačke  $A_\alpha$  određena je tačkama 1 i 2 (sl. 10.15). Ostale tačke presečne površine dobijaju se pomoću afiniteta. Osa afiniteta je prvi trag  $\alpha_1$ . Usvoji se određen broj tačaka sa spregnutih prečnika bazisa AB, CD... Spregnuti prečnici su međusobno upravni. Spajanjem tačaka A' i S' dobija se, na tragu  $\alpha_1$ , afina tačka I. U preseku linije afiniteta  $IA_\alpha'$  i izvodnice iz tačke B' dobija se prva projekcija presečne tačke  $B_\alpha'$ . U preseku vertikalne spone iz tačke  $B_\alpha'$  i izvodnice iz tačke B'' dobija se druga projekcija  $B_\alpha''$ . Na isti način se dobijaju projekcije i ostalih presečnih tačaka  $C_\alpha, E_\alpha$  itd. koje su korespondentne tačkama C, E itd. koristeći affine tačke II i III.

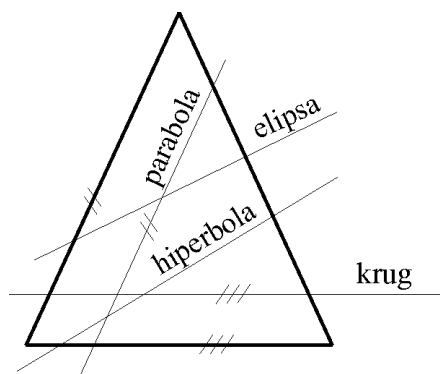
Prava veličina presečne površine  $A_\alpha^\circ, B_\alpha^\circ \dots$  dobija se obaranjem drugog traga  $\alpha_2^\circ$ . Oboren položaj tačke  $A_\alpha$  ( $A_\alpha^\circ$ ) nalazi se na oborenoj presečnici ( $2', 1^\circ$ ). Ostale oborene tačke presečne površine dobijaju se pomoću linija afiniteta, koristeći već nacrtane affine tačke II i III. Za dobijanje preciznije presečne površine potrebno je usvojiti više tačaka na bazisu.



Sl. 10.15: Određivanje preseka kosog valjka i ravni (Zadatak 10.9)

### 10.5. PRESEK KUPE I RAVNI

Zavisno od načina sečenja kupe i ravni dobijaju se različite presečne površine: krug, elipsa, hiperbola ili parabola (sl. 10.16).



Kada je ravan sečenja paralelna sa bazisom presečna površina je krug.

Kada je ravan sečenja pod nekim uglom, a pri tome ne seče bazis, već sve izvodnice dobija se elipsa.

Ako se kupa seče po bazisu sa ravni koja je paralelna sa jednom od izvodnica presečna površina je parabola.

Ako ravan sečenja nije paralelna sa izvodnicom, a seče kupu po bazisu dobija se hiperbola.

Sl. 10.16: Presečne površine kupe i ravni, krug, elipsa, hiperbola i parabola

#### 10.5.1. Presek kupe i ravni po elipsi

##### Zadatak 10.10.

0(2;10). Bazis kupe je poluprečnika  $R=2,5$  cm sa središtem u tački  $S(3;3,5;0)$ . Bazis leži na  $H$  ravni, a visina kupe je  $H=4,5$  cm. Odrediti presek kupe i ravni  $\alpha(12;9,5;5)$  i nacrtati mrežu.

Presek ravni i kupe može se odrediti na više načina: prodorom izvodnica kupe kroz ravan  $\alpha$ , transformacijom ili kolineacijom. U ovom zadatku najjednostavnije je koristiti transformaciju, tako da ravan  $\pi_3$  bude upravna na  $H$  ravan, a osa  $1X_3$  da je upravna na prvi trag ravni sečenja,  $\alpha_1$ .

Treća projekcija bazisa kupe je na osnom tragu  $1X_3$  ograničena tačkama  $A'''$  i  $B'''$ . U trećoj projekciji, kao i u prvoj, vidi se prava veličina visine kupe  $H=4,5$  cm.

Presečna površina je duž na trećem  $\alpha_3$  tragu koji se dobija pomoću proizvoljne tačke na ravni  $\alpha$  (tačke 1). Presečna površina se podeli na željeni broj podeljaka ( $A''_{\alpha}, B''_{\alpha} \dots$ ). Tačka  $A_{\alpha}$  je korespondentna tački  $A$ , tj. nalazi se na izvodnici  $AV$ , tačka  $B_{\alpha}$  nalazi se na izvodnici  $BV$  itd. Treća projekcija  $A'''_{\alpha}$  tačke  $A_{\alpha}$  je u preseku izvodnice  $A'''V'''$  i traga  $\alpha_3$ . Prva projekcija ove tačke  $A_{\square}$  je u preseku spone i prve projekcije izvodnice  $A'V'$ . Druga projekcija ove tačke  $A_{\square}$  je u preseku vertikalne spone iz  $A_{\square}$  i izvodnice  $A''V''$ .

Na isti način se dobijaju prve i druge projekcije ostalih tačaka presečne površine ( $B_{\square}, C_{\square}, D_{\square}$  i td.). Što se više usvoji tačaka na presečnoj površini biće mreža preciznija.

Središte presečne površine  $S_{\square}$  je na polovini duži  $A_{\square} B_{\square}$ . Druga projekcija središta elipse  $S_{\square}$  dobija se pomoću horizontale ravni  $\alpha$  (tačke 2).

Za crtanje mreže potrebna je prava veličina izvodnica kupe (omotača) i presečne površine. Prava veličina izvodnica presečene kupe je u trećoj projekciji ( $A'''A'''_{\alpha}, C'''C'''_{\alpha}, D'''D'''_{\alpha}, B'''B'''_{\alpha} \dots$ ).

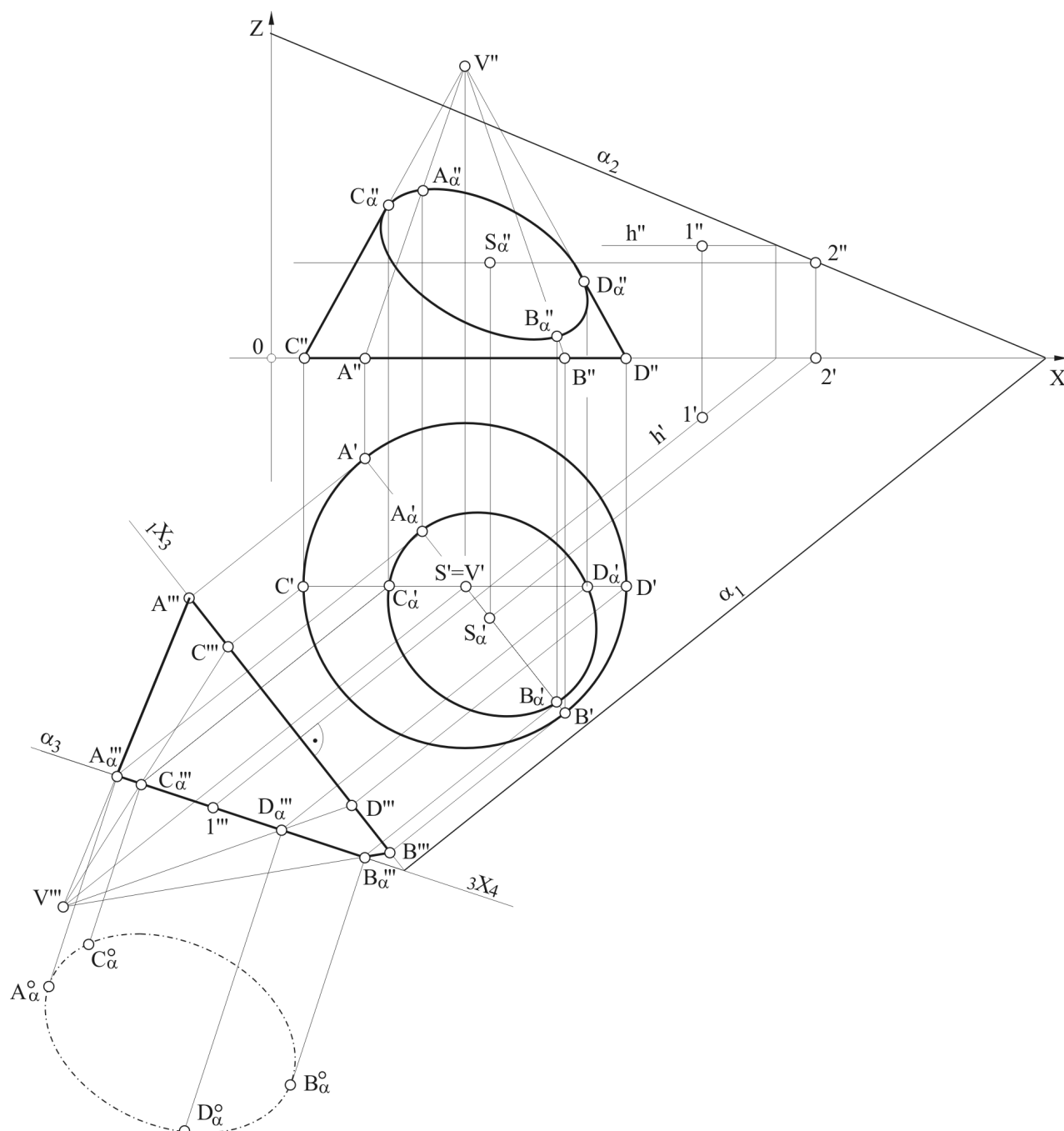
Prava veličina presečne površine dobijena je na transformacijskoj ravni  $\pi_4$  koja je paralelna sa tragom  $\alpha_3$  ( $3X_4 // \alpha_3$ ).

Mreža se crta tako što se prvo odredi ugao  $\varphi$  omotača kupe na osnovu jednačine:

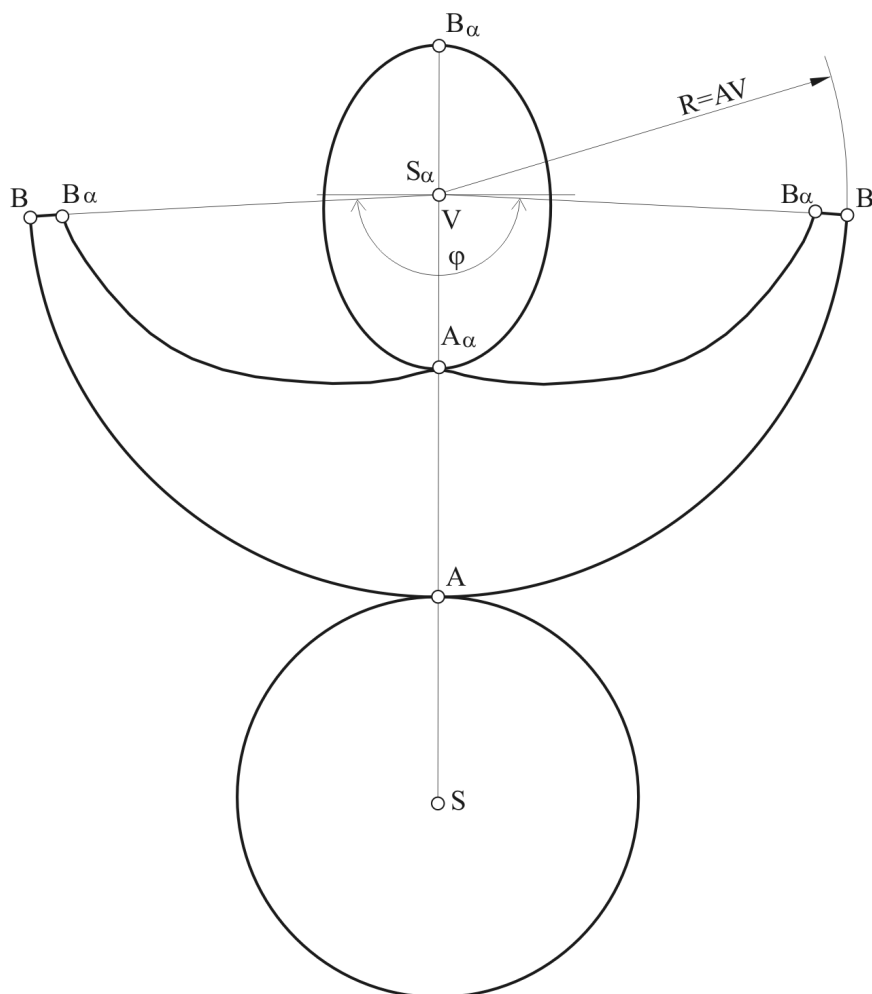
$$\varphi = \frac{360 \cdot R}{A''V''} = \frac{360 \cdot 2,5}{5,15} = 174,75^{\circ}.$$



Od proizvoljno odabrane tačke  $V$  nanese se simetrično na jednu i drugu stranu vrednost polovine ugla  $\varphi$  (sl. 10.18). Iz tačke  $V$  nacrtta se luk čiji je poluprečnik jednak dužini izvodnica ( $R=A''V''$ ) i na taj način dobije se odmotana kružnica bazisa, tj. omotač kupe. Počinje se i završava crtanjem izvodnice iz roglja  $B$ , jer je to najkraća izvodnica.  $BB_\alpha$ . Luk se подели na željeni broj podeljaka kao i bazis. Iz ovih tačaka po izvodnicama nanose se prave veličine koje se vide u trećoj projekciji ( $B''B_\alpha''$ ,  $A''A_\alpha''$ ,  $C''C_\alpha''$ ...  $B''B_\alpha''$ ). Za tačku  $A$  “zakači” se krug, a za tačku  $A_\alpha$  prava veličina elipse.



Sl. 10.17: Presek kupe i ravni po elipsi i crtanje mreže (Zadatak 10.10.)



Sl. 10.18: Mreža kupe presečene sa ravni po elipsi (Zadatak 10.10.)

### 10.5.2. Presek kupe i ravni po paraboli

#### Zadatak 10.11.

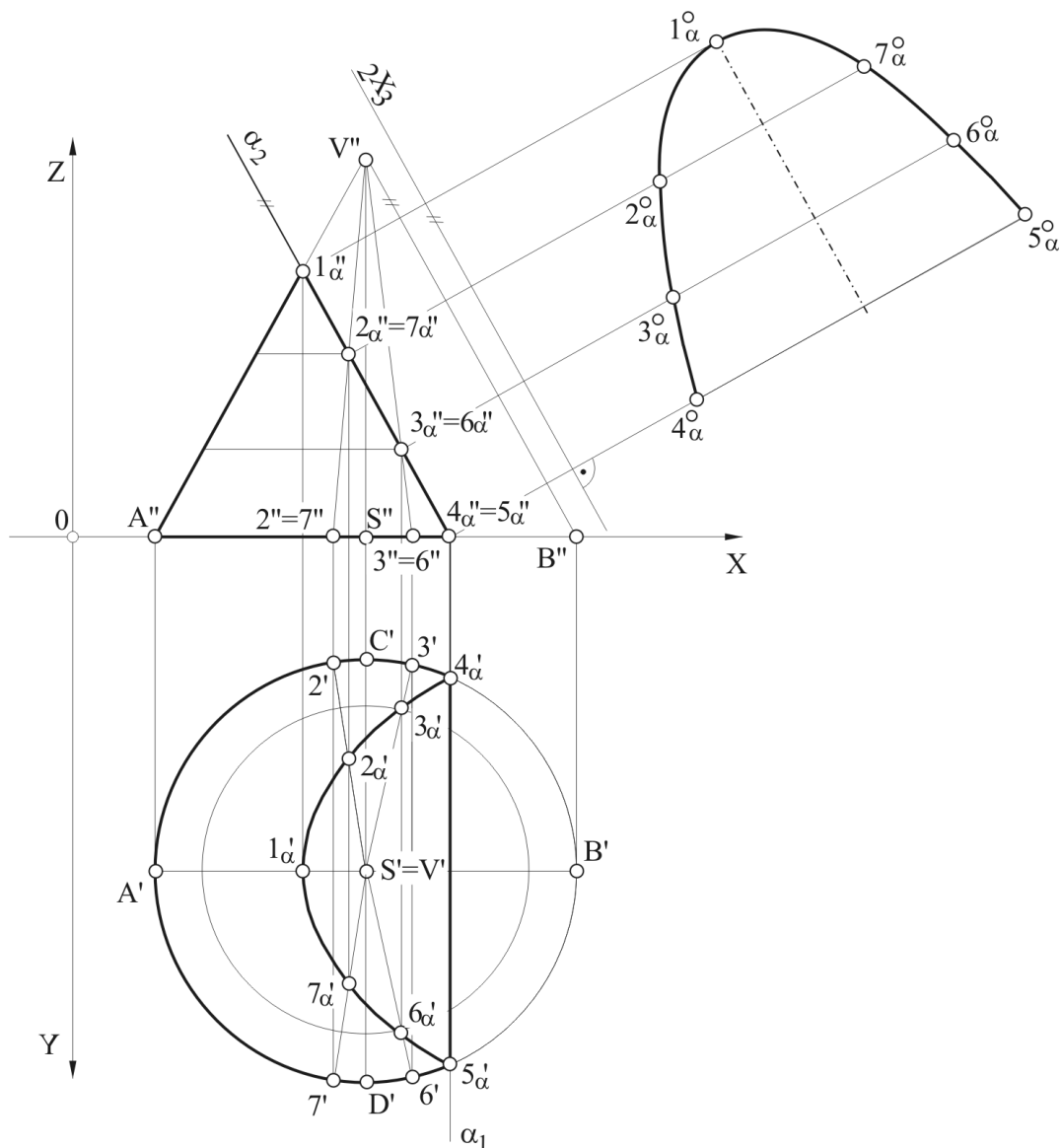
0(3;10). Data je kupa poluprečnika bazisa  $R=2,5$  cm koji leži na H ravni sa središtem u tački  $S(3,5;4;?)$ . Visina kupe je 4,5 cm. Nacrtati ortogonalne projekciju kupe presečene po paraboli sa ravni  $\alpha(4,5;\infty;?)$  i pravu veličinu presečene površine.

Kupa u prvoj projekciji projicira se kao kružnica, a u drugoj kao ravnokrani trougao.

Prvi trag presečne ravni  $\alpha_1$  paralelan je sa osom Y, dok je drugi trag  $\alpha_2$  paralelan je sa konturnom izvodnicom  $B''V''$  (jer se kupa seče po paraboli).

Presečna površina u drugoj projekciji cela se projicira na trag  $\alpha_2$ , (jer je ravan  $\alpha$  upravna na V ravan), te se podeli na proizvoljan broj podeljaka i obeleži kao na sl. 10.19 ( $1_\alpha''$ ,  $2_\alpha''$ ...  $7_\alpha''$ ). Kroz ove tačke iz  $V''$  nacrtaju se izvodnice i odrede njihove pridružene tačke na bazisu ( $A''$ ,  $2''$ ...  $7''$ ). Odrede se prve projekcije ovih tačaka, zatim kroz njih i prve projekcije izvodnica  $A'V'$ ,  $2'V'$ ...  $7'V'$ . Prve projekcije tačaka presečne površine ( $A_\alpha'$ ,  $2_\alpha'$ ...  $7_\alpha'$ ) dobijaju se u preseku prvih projekcija izvodnica i vertikalnih spona iz drugih projekcija odgovarajućih tačaka. Spajanjem prvih projekcija tačaka presečne površine dobija se deformisana parabola.

Prava veličina presečne površine (parabole) određena je transformacijom (osa  $2X_3$  je paralelna sa tragom  $\alpha_2$ ).



Sl. 10.19: Presek kupe i ravni po paraboli (Zadatak 10.11.)

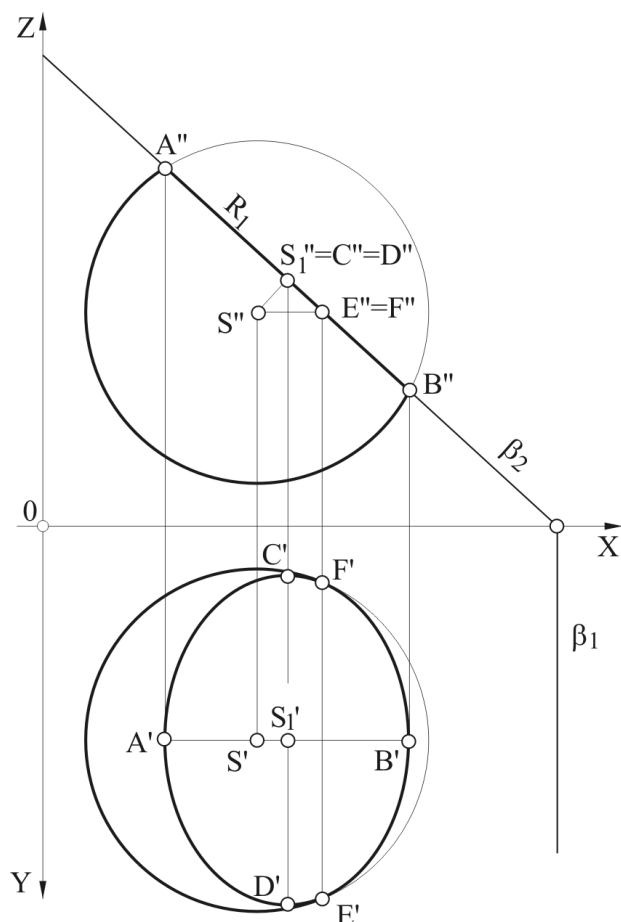
## 10.6. PRESEK LOPTE I RAVNI

U preseku lopte i ravni dobijaju se krugovi koji se u ortogonalnim projekcijama vide kao elipse. Kada ravan sečenja prolazi kroz središte lopte  $S$  dobija se veliki loptin krug, a kada prolazi mimo njega - mali loptin krug.

### Zadatak 10.12.

0(1;7). Odrediti presek lopte poluprečnika  $R=2$  cm sa središtem u tački  $S(2,5;2,5;2,5)$  sa ravni  $\beta(6;\infty;6,5)$ .

Obe projekcije lopte su kružnice u središtu  $S$ . Ravan  $\beta$  je upravna na  $V$  ravan te se cela presečna površina projicira na trag  $\beta_2$  (sl. 10.20). Duž  $A''B''$  predstavlja prečnik  $2R_1$  malog loptinog kruga koji se vidi u pravoj veličini. Iz tačke  $S''$  podigne se normala na duž  $A''B''$  i dobija druga projekcija središta  $S_1''$  malog loptinog kruga (na polovini duži  $A''B''$ ). Prve projekcije tačaka  $A$  i  $B$  određuju se iz uslova da su ovo tačke na omotaču lopte (detaljnije objašnjenje dato uz sl. 9.26). Tačke  $A'$  i  $B'$  nalaze se u preseku linije paralelne sa osom  $X$  iz tačke  $S'$  i vertikalnih spona iz  $A''B''$ .



Prva projekcija presečne površine je elipsa čija je velika osa duž  $C'D'$  dobijena iz uslova  $C'S_1'=S_1'D'=R_1=S_1''A''$ . Konturne tačke elipse (tačke gde se seku elipsa i krug) su tačke  $E$  i  $F$ . Dobijaju se u preseku druge projekcije malog loptinog kruga  $A''B''$  (gde se projicira kao duž) i linije paralelne sa osom  $X$  kroz tačku  $S''$ . Prve projekcije tačaka  $E'$  i  $F'$  su u preseku vertikalne spone i velikog kruga. Ove tačke su i granične tačke vidljivosti. Elipsa je cela vidljiva jer je odstranjen gornji deo presečene lipse.

Mreža lopte se ne crta jer se lopta ne može dobiti savijanjem jedne površine, bez njenog gužvanja.

Sl. 10.20: Crtanje preseka lopte i ravni  
(Zadatak 10.12.)

#### Zadatak 10.13.

0(7;6). Odrediti presek lopte poluprečnika  $R=2$  cm sa središtem u tački  $S(2,5;2,5;2,5)$  i ravni  $\beta(5,5;3,5;6)$ .

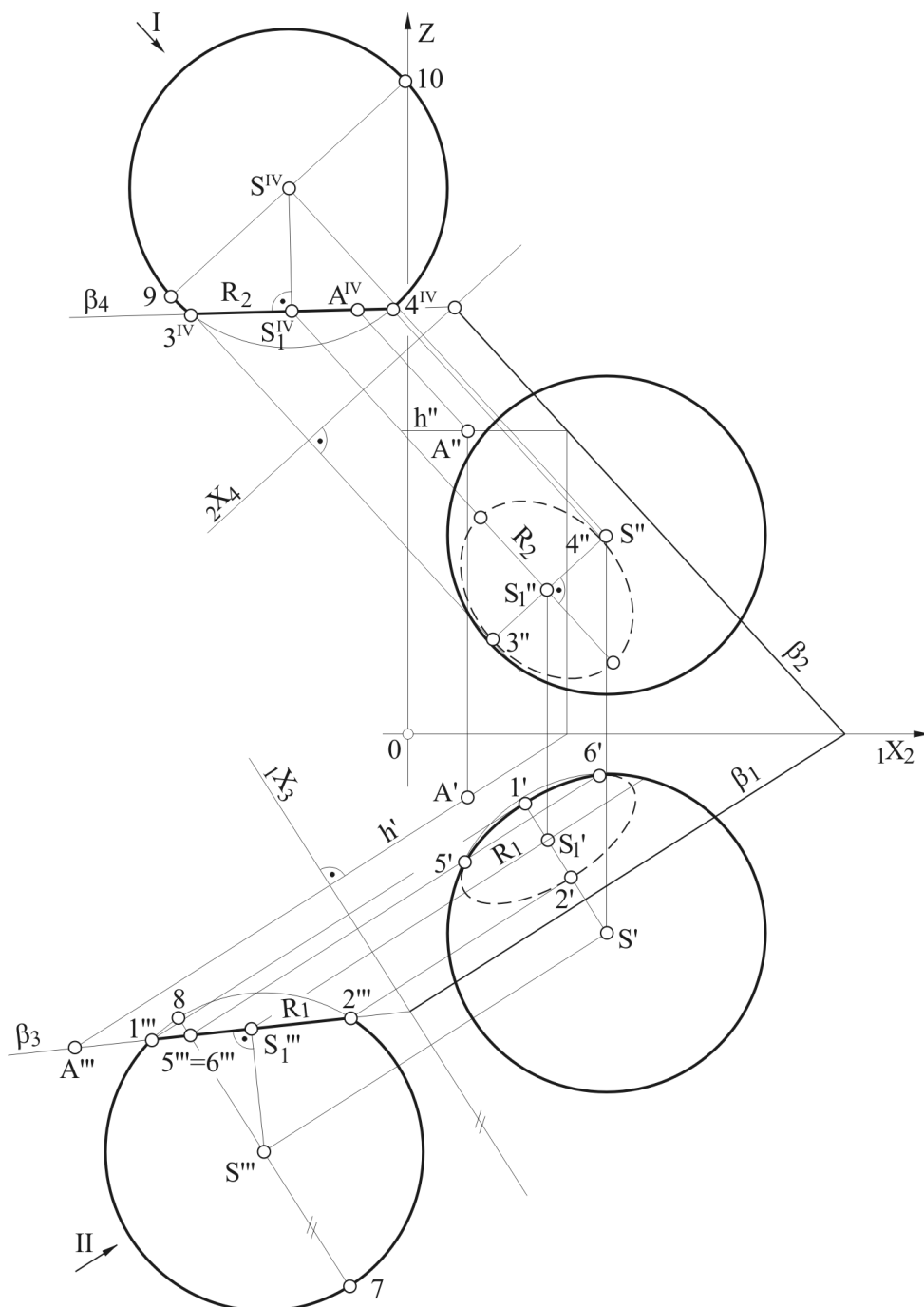
Zadatak je najjednostavnije rešiti koristeći ravni transformacije  $\pi_3$  i  $\pi_4$ . Ravan  $\pi_3$  je upravna na  $\pi_1$  i trag  $\beta_1$ , a ravan  $\pi_4$  je upravna na  $\pi_2$  i trag  $\beta_2$ , tj. osa  ${}_1X_3$  je upravna na trag  $\beta_1$ , a osa  ${}_2X_4$  je upravna na trag  $\beta_2$ . Pomoću jedne proizvoljne tačke na ravni (tačke  $A$ ) odredi se trag  $\beta_3$  i  $\beta_4$  i treća i četvrta projekcija lopte (sl. 10.21). Treća i četvrta projekcija presečne površine ravni i lopte projiciraju se na trag  $\beta_3$  i  $\beta_4$ . Na isti način kao i u prethodnom zadatku 10.12, sl. 10.20 nacrtana se prva i druga projekcija malog loptinog kruga (elipse). Konturne tačke u prvoj projekciji su  $5'$  i  $6'$ , dok ih u drugoj projekciji nema, jer elipsa ne dodiruje krug.

Određivanje vidljivosti presečne površine lopte i ravni određuje se na isti način kao i kod svih ostalih tela. Vidljivost u prvoj projekciji se određuje posmatrajući treću projekciju (u pravcu strelice II). Vidljiva je prednja polovina lopte i sve ono što se na prednjoj polovini nalazi, tj. između tačaka  $8, 1'''$  i  $7$ , a nevidljiva je zadnja polovina lopte između tačaka  $8, 2'''$  i  $7$ . Granica vidljivosti je veliki loptin krug koji je paralelan sa osom  ${}_1X_3$  i koji je određen tačkama  $7$  i  $8$ . Stoga je vidljiv samo deo elipse između tačaka  $5', 1'$  i  $6'$ , dok je ostali deo elipse nevidljiv. Vidljivost elipse u drugoj projekciji određuje se posmatrajući četvrtu u pravcu strelice I. Zadnji deo lopte na kojem se nalazi presečna površina je nevidljiv, te je cela elipsa u drugoj projekciji nevidljiva. Elipsa u drugoj projekciji nema konturnih tačaka (ne dodiruje krug) jer trag  $\beta_4$  ne seče veliki loptin krug koji je paralelan sa osom  ${}_2X_4$  (tačke  $9, S^{IV}$  i  $10$ ).

#### Zadatak 14.

0(2,14). Nacrtati ortogonalne projekcije preseka kose kupe i ravni  $\alpha(16;\infty;6,5)$ . Bazu kupe poluprečnika  $R=4$  cm leži na horizontalnoj projekcijskoj ravni ( $H$ ) sa središtem u tački

$S(10;5;?)$ . Vrh kupe je u tački  $V(4;11;7)$ . Nacrtati donji deo zarubljene kupe i pravu veličinu presečne površine.



Sl. 10.21:  
Određivanje  
preseka lopte  
i ravni  
(Zadatak  
10.13.)

### Zadatak 15.

$0(19;16)$ . Nacrtati ortogonalne projekcije preseka kose piramide i ravni  $\alpha(-12;7;7)$ . Baza piramide je pravilan paralelogram ABCD koji leži na vertikalnoj projekcijskoj ravni (V). Zadati rogaljevi bazisa su  $A(-0,5;?;2)$ ,  $B(-3;?;0)$ ,  $C(-5,5;?;2)$  i vrh  $V(-7;6;9)$ . Nacrtati donji deo zarubljene piramide i odrediti pravu veličinu presečne površine.

### Zadatak 16.

$0_{16,15}$ . Data je tačka  $S(-2,5;?;3)$  kao centar bazisa kosog valjka. Baza valjka leži na vertikalnoj projekcijskoj ravni. Poluprečnik bazisa valjka odrediti iz uslova da bazu dodiruje profilnu projekcijsku ravan. Središte drugog bazisa je u tački  $S_1(-10;7;5)$ . Nacrtati donji deo presečenog valjka sa ravni  $\alpha(-12;7;9)$  i pravu veličinu presečne površine.

## 11. MEĐUSOBNI PRODORI PRAVILNIH GEOMETRIJSKIH TELA

Kada jedno telo prodire u drugo njihove izvodnice međusobno prodiru kroz tela u tačkama, odnosno njihove strane se međusobno seku po linijama. Tačke prodora i linije po kojima se strane tela seku su zajedničke, tj. pripadaju i jednom i drugom telu. Kada bi se spojile sve tačke prodora izvodnica, odnosno sve linije po kojima se seku strane tela, dobio bi se međusobni prodor dva tela.

Određivanje prodora svake izvodnice, pojedinačno kroz tela, bilo bi nepregledno zbog velikog broja pomoćnih linija. Ista situacija bi bila kada bi se pojedinačno određivao međusobni presek strana tela, kao presek dveju ravni sa ili bez određivanja njihovih tragova ravni.

Pri međusobnom prodoru tela njihove strane se seku po dvema izvodnicama. Videli smo da se sve izvodnice pravilnih geometrijskih tela ili seku u jednoj tački (vrhu  $V$ ) ili su međusobno paralelne. To znači da sve strane (površine, ravni sečenja) po kojima se seku dva tela prolaze kroz vrh ili su međusobno paralelne.

### 11.1. MEĐUSOBNI PRODORI ROGLJASTIH TELA

Kada rogljasta tela prodiru jedna u druge njihove se strane međusobno seku po izlomljenim ivicama prodora, a dobijeni prodor posmatran kao izdvojeno telo (jezgro) takođe je rogljasto nepravilno telo.

#### 11.1.1. Međusobni prodor dveju piramida

Neka su zadate dve piramide koje prodiru jedna u drugu (sl. 11.1). Njihovi bazisi se nalaze na istoj ravni  $\pi$ . Sve izvodnice i površine po kojima se seku dve piramide prolaze kroz vrhove piramida  $V_1$  i  $V_2$  što znači da kroz pravu koja spaja vrhove  $V_1$  i  $V_2$ , prolaze sve ravni sečenja. Može biti beskonačno mnogo ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2, \dots$  što zavisi od tela i željene preciznosti. Te ravni sečenja čine familiju ravni ili pramen ravni, a prava kroz koju prolaze naziva se pramenjača  $p_r$ . Znači da u slučaju prodora dveju piramida, pramenjača  $p_r$  prolazi kroz njihove vrhove  $V_1$  i  $V_2$ . Da bi se dobio prodor, piramide se seku sa više ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2, \dots$  (sve do bazisa) koje su paralelne sa pramenjačom  $p_r$ .

#### Određivanje tačaka prodora

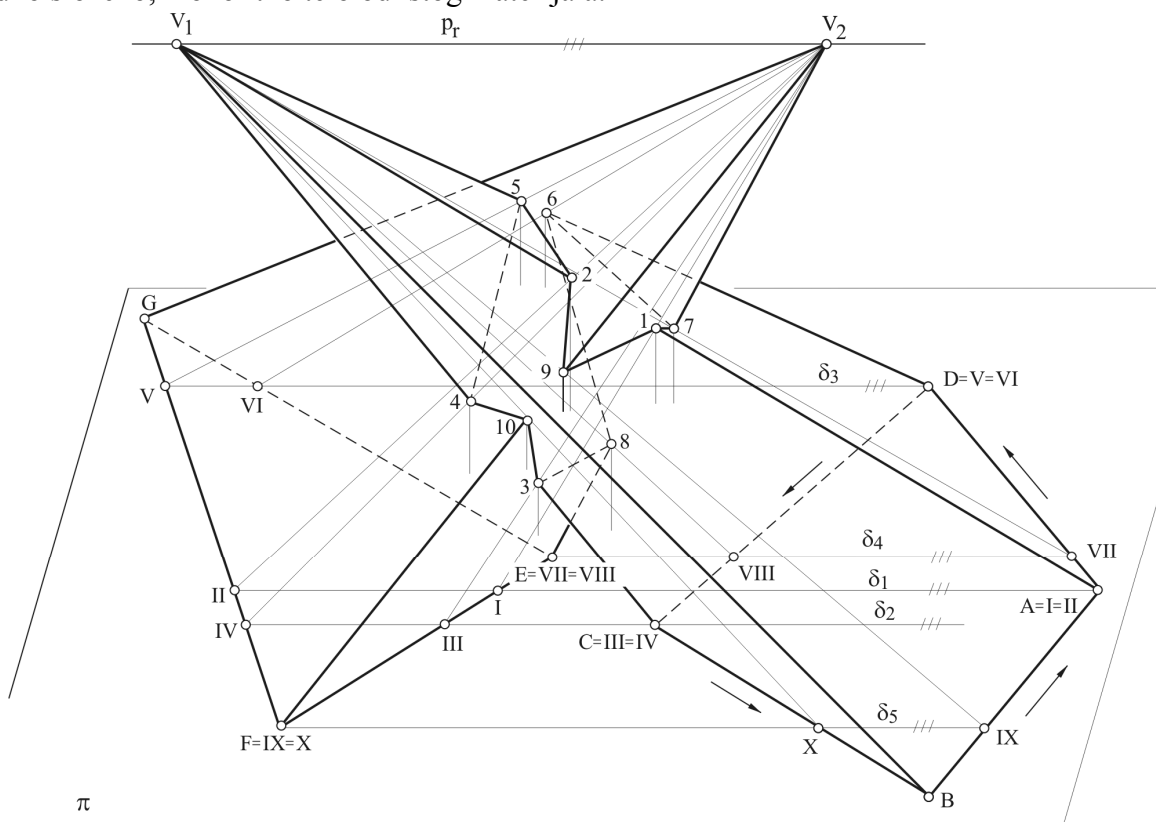
Kod rogljastih tela ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2, \dots$  koje su paralelne sa pramenjačom  $p_r$ , treba da prolaze kroz sve rogljeve tela. Kroz rogalj A povuče se trag prve ravni sečenja  $\delta_1$  i gde seče bazis druge piramide (EFG) dobijaju se presečne tačke I i II. Piramidu sa vrhom u tački  $V_1$  zvaćemo prvom, a sa vrhom u tački  $V_2$  drugom piramidom. U preseku izvodnica iz presečnih tačaka I i II, odnosno  $IV_2$  i  $AV_1$  dobija se tačka 1, a u preseku izvodnica  $IIV_2$  i  $AV_1$  dobija se tačka 2. Tačke 1 i 2 su tačke prodora i pripadaju i jednom i drugom telu. Zatim se kroz rogalj C nacrtatrag druge ravni sečenja  $\delta_2$  koji seče bazis druge piramide u presečnim tačkama III i IV. U preseku izvodnica  $IIIV_2, IIV_2$  i izvodnice  $CV_1$  dobijaju se tačke prodora 3 i 4. Na isti način, piramide se seku kroz rogalj D sa trećom ravni  $\delta_3$  koja je paralelna sa  $p_r$  i dobijaju se presečne tačke V i VI, a u preseku izvodnica  $VIV_2, VIV_2$  i izvodnice  $DV_1$  dobijaju se tačke prodora 5 i 6. Kroz rogalj B nema smisla seći piramide jer ta ravan ne bi sekla bazis EFG, što znači da izvodnica iz ovog roglja ( $BV_1$ ) ne prodire kroz drugu piramidu.

Kada se završi sečenje po rogljevima bazisa prve piramide (ABCD) nastavi se na isti način sečenje po rogljevima bazisa druge piramide (EFG). Trag četvrte ravni sečenja  $\delta_4$  prolazi kroz rogalj E, te se dobijaju presečne tačke VII i VIII, a u preseku izvodnica  $VIIV_1, VIIIV_1$  i izvodnice  $EV_2$  dobijaju se tačke prodora 7 i 8. Kroz rogalj F prolazi peta ravan  $\delta_5$  koja daje presečne tačke IX i X, a u preseku izvodnica  $IXV_1, XV_1$  i izvodnice  $FV_2$  dobijaju se

tačke prodora 9 i 10. Kroz rogalj G nema smisla seći piramidu jer ta ravan ne bi obuhvatila bazis ABCD, znači da izvodnica  $GV_2$  ne prodire kroz prvu piramidu.

### **Spajanje tačaka prodora i određivanje vidljivosti**

Prodor se dobija spajanjem tačaka prodora, pri čemu se određuje i vidljivost. Spajaju se one tačke prodora koje se nalaze na istoj strani obeju piramida, tj. na istoj ivici bazisa obeju piramida. Dve spojene tačke prodora daju ivicu prodora. Ivica prodora predstavlja liniju po kojoj se međusobno seku strane jedne i druge piramide. Da bi se spojile tačke prodora i odredile linije prodora, a time i prodor, krene se od jedne presečne tačke npr. tačke IX u smeru suprotnom od kazaljke na satu oko jednog bazisa npr. oko bazisa prve piramide (BADC). Posle presečne tačke IX nailazi se na tačke I i II koje se nalaze na istoj strani piramide ( $BAV_1$ ), pošto se nalaze na istoj ivici bazisa (BA). Međusobno spajanje ovih tačaka IX, I i II moguće je samo ako se one nalaze na jednoj strani druge piramide, tj. na jednoj od ivica bazisa EF, FG ili GE. Uočavamo da se tačke sečenja IX i I nalaze na ivici EF, a IX i II na ivici FG, te se mogu spojiti tačke prodora 9, 1 i 9, 2. Ivica prodora 9,1 se nalazi na strani  $BAV_1$  prve piramide i istovremeno na strani  $EFV_2$  druge piramide. Ivica prodora 9,1 ustvari predstavlja ivicu po kojoj se ove dve strane prve i druge piramide seku. Ivica 9,1 je vidljiva jer se odgovarajuće presečne tačke IX i I nalaze na vidljivim ivicama bazisa piramida BA i FE, odnosno nalazi se na vidljivim stranama piramida  $BAV_1$  i  $FEV_2$  (gledano sprede). Tačke prodora 9 i 2 daju ivicu prodora 9,2 koja leži na strani  $BAV_1$  prve piramide i na strani  $FGV_2$  druge piramide. Ivica prodora 9,2 je vidljiva jer se odgovarajuće presečne tačke (IX i II) nalaze na vidljivim ivicama bazisa BA i FG. Tačke 1 i 2 se ne spajaju jer se njihove presečne tačke nalaze na različitim ivicama bazisa druge piramide, I je na EF, a II je na FG, iako se nalaze na jednoj izvodnici  $AV_1$ , te ivica prodora 1,2 ne postoji jer piramide u prodoru smatramo za jedno složeno, monolitno telo od istog materijala.



Sl. 11.1: Postupak određivanja međusobnog prodora dveju piramida

Posle tačaka I i II nailazi se na presečne tačke VII, V i VI. Tražimo ove presečne tačke na bazisu druge piramide (EFG) i konstatujemo da se tačke I i VII nalaze na jednoj ivici bazisa

(EF), tačke VII i VI su na ivici EG, a II i V su na ivici FG, te se spajaju tačke 1, 7 zatim 7, 6 i 2, 5.

Tačke 1 i 7 se spajaju i daju ivicu prodora 1,7 koja se nalazi na strani  $ADV_1$  prve piramide i strani  $FEV_2$  druge piramide, te ivica prodora 1,7 predstavlja presečnicu ove dve strane. Ivica prodora 1,7 se vidi jer se njene presečne tačke I i VII nalaze na vidljivim ivicama bazisa AD i FE. Ivica prodora 7,6 predstavlja liniju po kojoj se seku strana  $ADV_1$  prve piramide i strana  $EGV_2$  druge piramide, jer se presečne tačke VII i VI nalaze na ivicama bazisa i EG i AD. Ivica prodora 7,6 se ne vidi jer se presečna tačka VI nalazi na nevidljivoj ivici bazisa EG, iako se presečne tačke VII i VI nalaze na vidljivoj ivici bazisa AD prve piramide.

Da bi se ivica prodora videla moraju sve njene tačke prodora biti na vidljivim obema stranama obeju piramida, tj moraju sve njene presečne tačke biti na vidljivim ivicama bazisa. Ako se samo jedna od presečnih tačaka na ivici bazisa ne vidi, dovoljno samo na jednoj ivici bazisa, ne vidi se cela ta ivica prodora.

Tačke 2 i 5 se spajaju i daju ivicu prodora 2,5 po kojoj se seku strana  $ADV_1$  prve piramide i strana  $FGV_2$  druge piramide, jer se presečne tačke II i V nalaze na ivicama bazisa FG i AD. Ivica prodora 2,5 se vidi jer se njene presečne tačke II i V nalaze na vidljivim ivicama bazisa. Tačke 7 i 5 se ne spajaju, iako se presečne tačke VII i V nalaze na jednoj ivici bazisa AD prve piramide, jer se ne nalaze na jednoj ivici bazisa i druge piramide. Presečna tačka VII nalazi se na ivici bazisa EG, a tačka V na ivici bazisa FG druge piramide. Tačke 5 i 6 ne spajaju se iz istog razloga (V je na GF, a VI je na EG). Tačke 5 i 6 su na jednoj izvodnici  $DV_1$ , a piramide smatramo jednim složenim telom.

Od roglja D kreće se dalje po bazisu prema roglju C i nailazi na presečne tačke VIII, III i IV. Tražeći ove presečne tačke na drugom bazisu (FFG) konstatujemo: da se tačke VIII i VI nalaze na ivici bazisa EG, tačke VIII i III nalaze se na EF i V i IV su na ivici FG, te se spajaju tačke prodora 8 i 6, zatim 8, 3 i tačke 5 i 4.

Tačke 8 i 6 se spajaju jer se njihove presečne tačke VIII i VI nalaze na istim ivicama bazisa obeju piramida (na DC i EG). Ivica prodora 8,6 je ivica po kojoj se seku strane  $DCV_1$  i  $EGV_2$  i ne vidi se, jer su ivice bazisa DC i EG zaklonjene. Tačke 8 i 3 se spajaju i daju ivicu prodora 8,3 po kojoj se seku strane  $DCV_1$  i  $EFV_2$  i ne vidi se, jer je ivica bazisa DC zaklonjena. Tačke 5 i 4 se spajaju jer se njihove presečne tačke V i IV nalaze na ivicama bazisa CD i FG, odnosno po ivici prodora 5,4 seku se strane  $CDV_1$  i  $FGV_2$  piramida. Ivica prodora 5,4 se ne vidi jer je ivica bazisa CD zaklonjena. Tačke 3 i 4 se ne spajaju jer su na izvodnici  $CV_1$ , a piramide čine jedno telo.

Posle tačke C nailazi se na tačku X, te se spajaju tačke 3, 10 i 4, 10. Tačke 3 i 10 se spajaju jer se presečne tačke III i X nalaze na ivicama bazisa CB i EF. Ivica prodora 3,10 je ivica po kojoj se seku strane  $CBV_1$  i  $EFV_2$  i vidi se jer su obe ivice bazisa CB i EF vidljive. Tačke 4 i 10 se spajaju jer se njihove presečne tačke IV i X nalaze na ivicama bazisa CB i FG obeju piramida. Ivica prodora 4,10 je linija sečenja strana  $CBV_1$  i  $FGV_2$  i vidi se, jer ivice bazisa CB i FG nisu zaklonjene.

Iz tačke C stiže se u tačku B i na početak ove analize, u presečnu tačku X odakle se krenulo. Tačke 10 i 9 se ne spajaju jer njihove presečne tačke nisu na zajedničkoj ivici bazisa, X je na CB, a IX na BA. Tačke 9 i 10 su na izvodnici  $FV_2$  i ta ivica prodora ne postoji jer su piramide jedno telo.

Na isti ovaj način se spajaju tačke prodora i određuje vidljivost ivica prodora i kod međusobnih prodora drugih rogljastih tela: prizme i piramide, prizme i prizme itd.

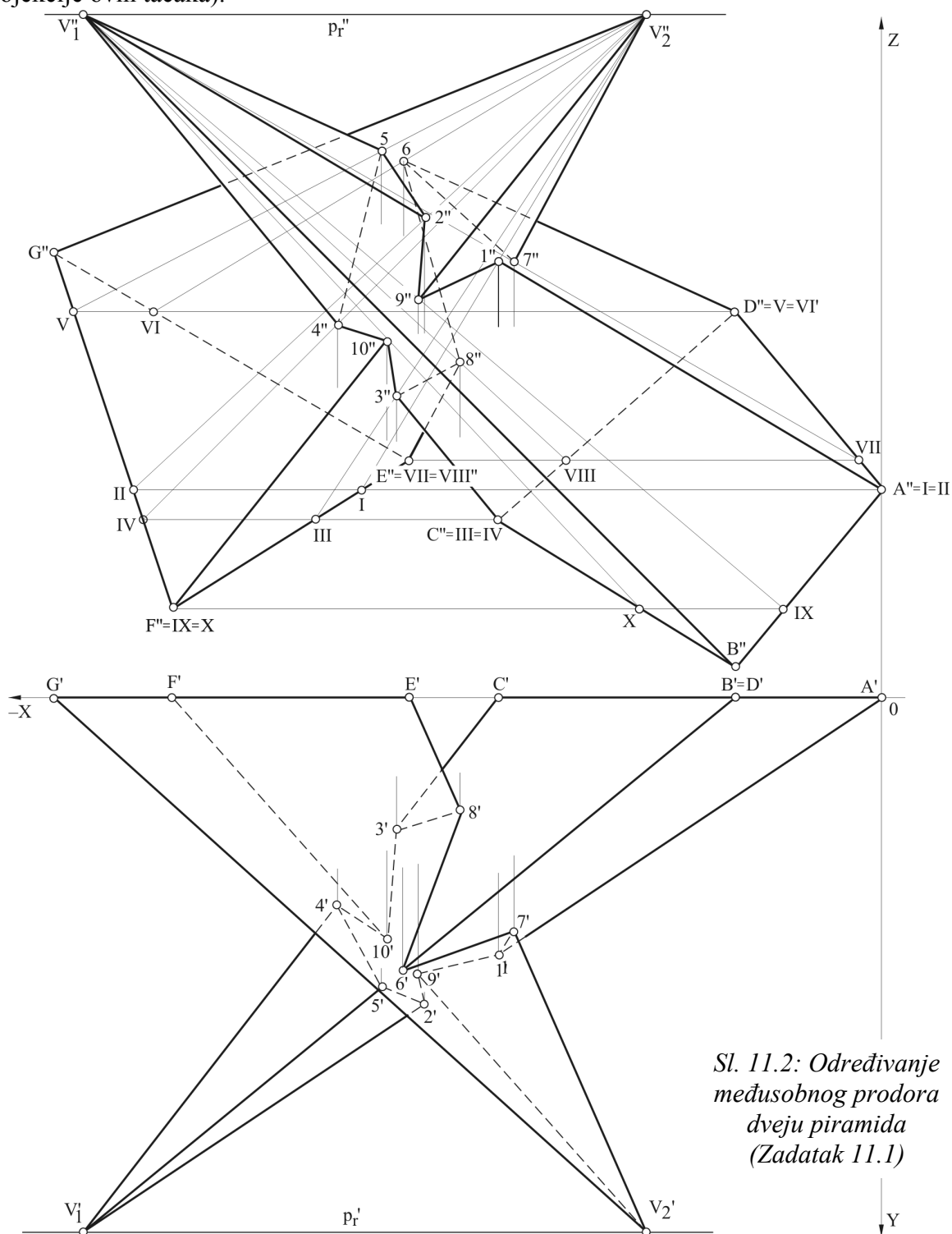
### Zadatak 11.1.

0(6;13). Odrediti ortogonalne projekcije prodora dveju piramida. Prva piramida je zadata tačkama  $A(0;0;3)$ ,  $B(-2,5;0;0,5)$ ,  $C(-6,5;0;2,5)$ ,  $D(-2,5;0;6)$  i  $V_1(-13,5;9;11)$ , a druga tačkama  $E(-8;0;3,5)$ ,  $F(-12;0;1)$ ,  $G(-14;0;7)$  i  $V_2(-4;9;11)$ .



Postupak dobijanja ortogonalnih projekcija prodora je potpuno isti kao što je opisano u prethodnom primeru sa sl. 11.1 kada se posmatrao prodor dveju piramida u prostoru. Pri tome se određuju po dve ortogonalne projekcije svake tačke prodora. Prvo se odrede druge projekcije tačaka prodora zato što bazisi piramida leže na V ravni. Prve projekcije tačaka prodora dobijaju se u preseku vertikalnih spona i prvih projekcija izvodnica na kojima se tačke prodora nalaze (sl. 11.2). Na primer tačka 1'' se nalazi u preseku vertikalne spona iz 1'' i prve projekcije izvodnice A'V<sub>1</sub>'.

Vidljivost ivica prodora određuje se u svakoj projekciji posebno, na način koji je u prethodnom primeru objašnjen. Na primer, vidljive su prve projekcije ivica prodora 8'6' i 6'7', dok ostale nisu jer ih sve zaklanja strana piramide E'G'V<sub>2</sub>' (gledano odozgo sa druge projekcije ovih tačaka).



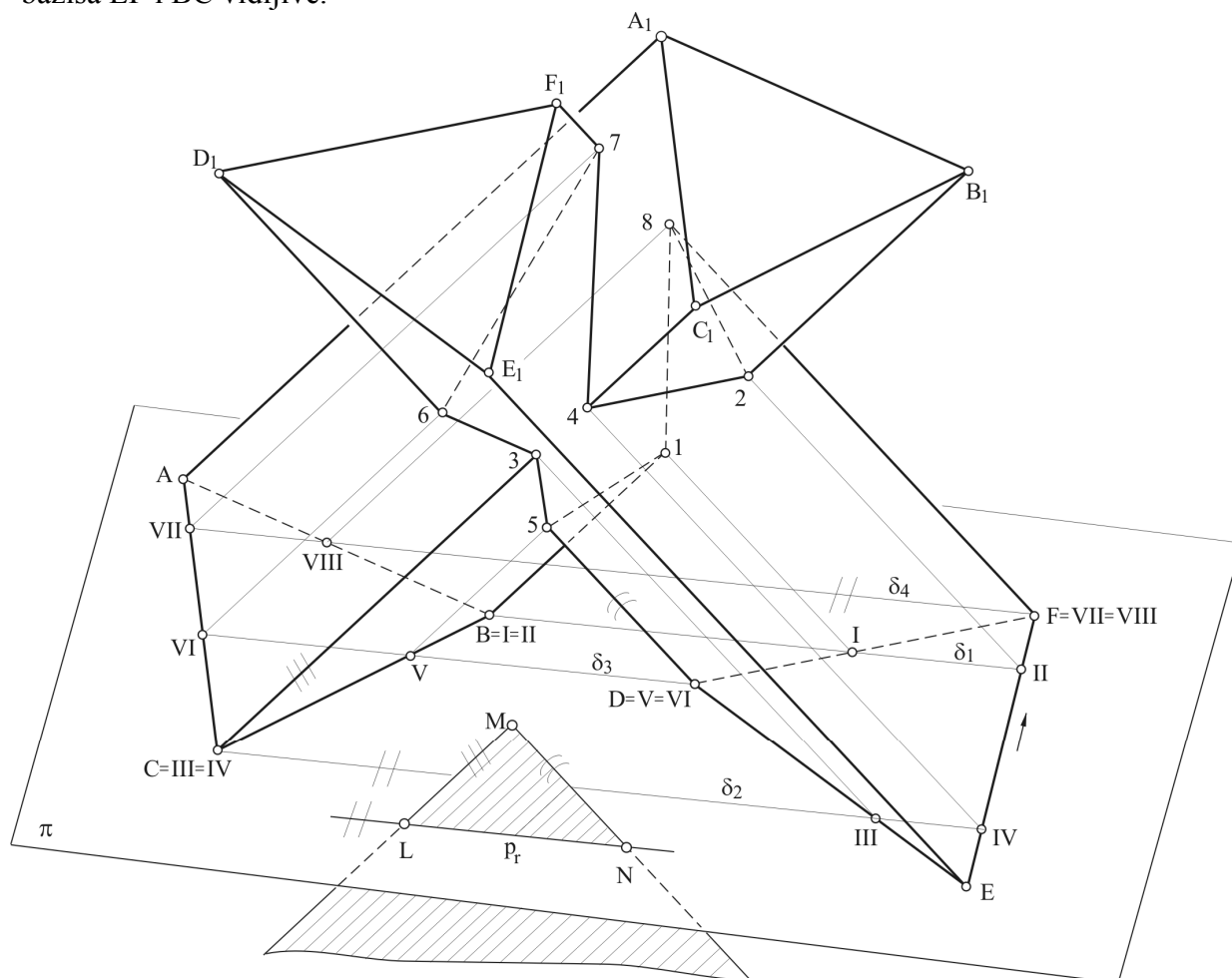
Sl. 11.2: Određivanje međusobnog prodora dveju piramida (Zadatak 11.1)

### 11.1.2. Međusobni prodor dveju prizmi

Pri prodoru dveju prizmi strane im se seku po dvema izvodnicama. Prema tome, ravni sečenja  $\delta$  sadrže po dve izvodnice obeju prizmi. Da bi se dobio prodor dveju prizmi treba ih seći sa ravnima  $\delta_1, \delta_2, \dots$  koje će biti istovremeno paralelne sa izvodnicama obeju prizmi. Trag ravni  $\delta$  dobija se na osnovu tačaka prodora bilo koje dve izvodnice piramida kroz ravan  $\pi$  na kojoj leže bazisi piramida. Stoga se iz proizvoljne tačke M povuku dve linije koje su paralelne sa izvodnicama jedne i druge prizme i gde prodiru ravan  $\pi$  dobijaju se tačke prodora L i N (sl. 11.3). Spajanjem tačaka L i N dobija se projekcija pramenjače  $p_r$  na ravan  $\pi$  i trag ravni sečenja  $\delta$ . Paralelno sa pramenjačom  $p_r$  postavljaju se kroz sve rogljeve jednog i drugog bazisa ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2$  itd.

Na isti način kao kod piramida dobijaju se tačke prodora. Na primer, kroz rogalj B nacrtana se trag prve ravni sečenja  $\delta_1$  koja seče bazis druge prizme DEF u tačkama I i II. Tačke prodora 1 i 2 dobijaju se u preseku izvodnica iz presečnih tačaka I i II, i izvodnice  $BB_1$ .

Postupak spajanja tačaka prodora i određivanje vidljivosti ivica prodora je isto kao i kod prodora piramida, objašnjeno u tački 11.1.1, sl. 11.1. Na primer, spajaju se tačke prodora 2 i 4 jer se njihove presečne tačke II i IV nalaze na ivicama bazisa EF i BC, odnosno ivica prodora 2,4 je presečnica strana  $EFE_1F_1$  i  $CBC_1B_1$  prizmi. Ivica prodora 2,4 je vidljiva jer su ivice bazisa EF i BC vidljive.

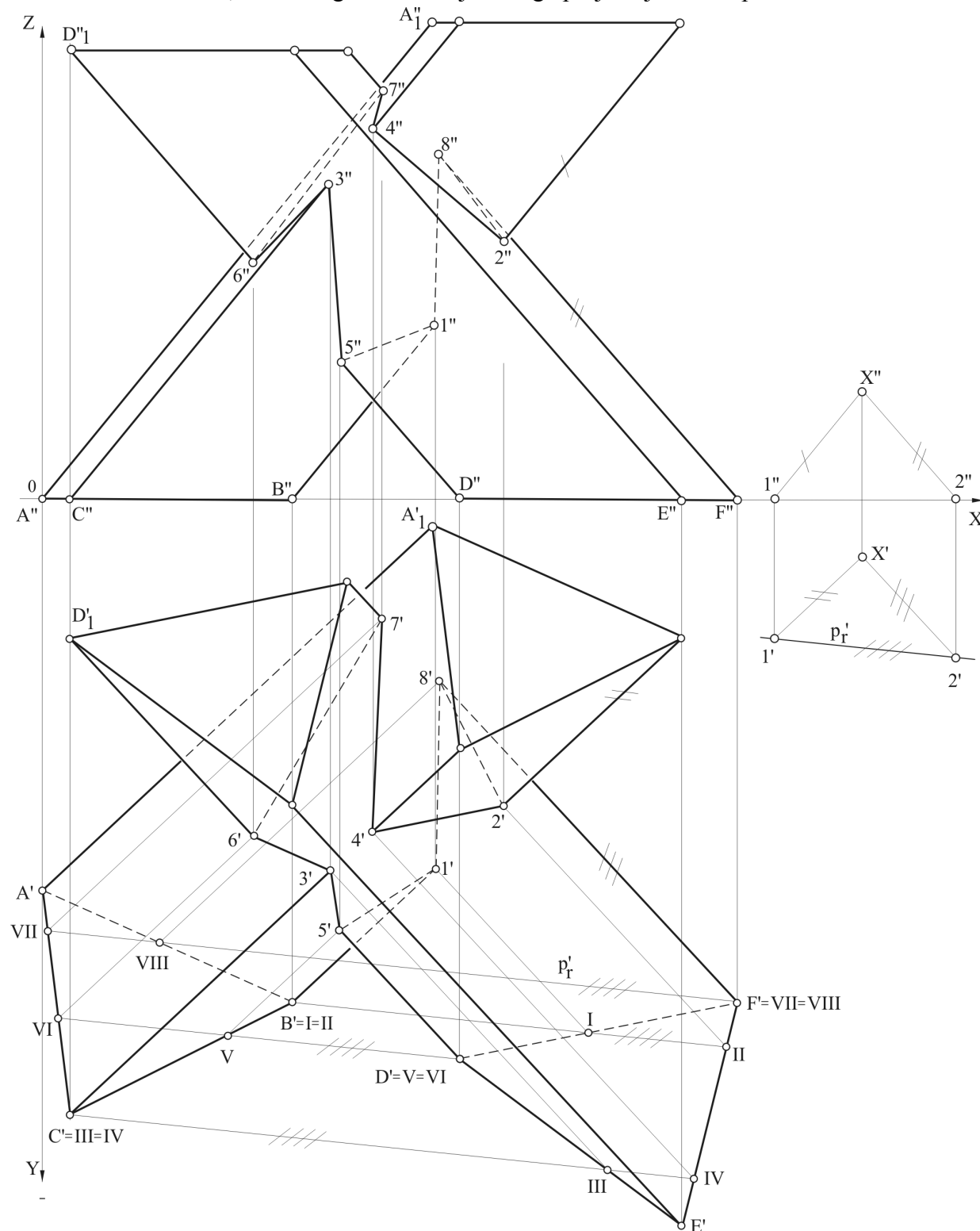


Sl. 11.3: Postupak određivanja međusobnog prodora dveju prizmi

#### Zadatak 11.2.

0(1;9). Odrediti prodor dveju prizmi koje su zadate tačkama  $A(0;7;0)$ ,  $B(4,5;9;0)$ ,  $C(0,5;11;0)$ ,  $A_1(7,5;0,5;8,5)$  i  $D(7,5;10;0)$ ,  $E(11,5;13;0)$ ,  $F(12,5;9;0)$ ,  $D_1(0,5;2,5;8)$ .

Tragovi ravni  $\delta$ , kojima treba seći prizme, odrede se tako što se iz proizvoljne tačke X (iz njenih projekcija  $X'$  i  $X''$ ) povuku pravci paralelni sa projekcijama izvodnica (sl. 11.4). Odrede se prvi prodori ovih izvodnica (tačke  $1'$  i  $2'$ ) čijim spajanjem se dobija prva projekcija pramenjače  $p_r'$ . Tragovi ravni sečenja  $\delta$  su paralelni sa prvom projekcijom pramenjače  $p_r'$  zato što bazisi prizmi leže na H ravni. Povlače se tragovi ravni sečenja  $\delta$  kroz prve projekcije svih roglova. Tačke prodora se prvo određuju u prvoj projekciji, na način koji je opisan u tački 11.1.1. i zadatku 11.1, nakon čega se određuje i druga projekcija tačaka prodora.

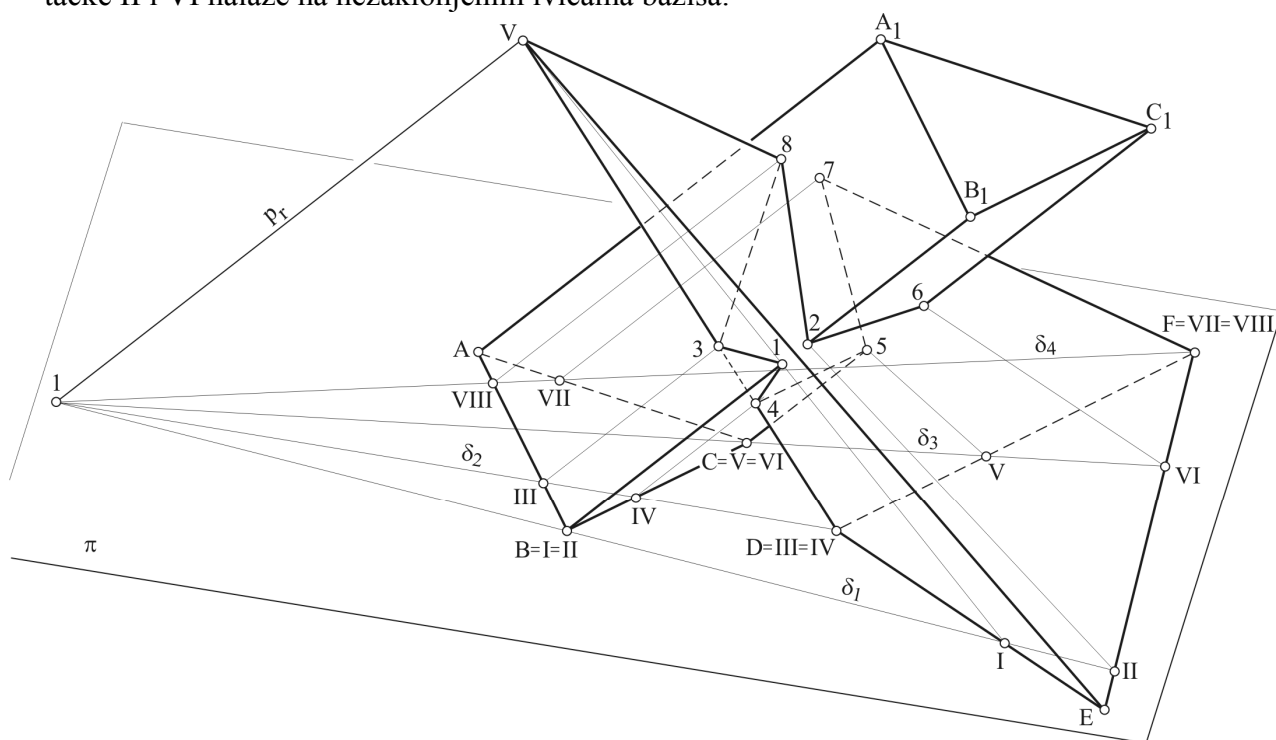


Sl. 11.4: Određivanje međusobnog prodora dveju prizmi (Zadatak 11.2.)

### 11.1.3. Međusobni prodor prizme i piramide

Prizma i piramida se seku po dvema svojim izvodnicama, odnosno sve ravni sečenja  $\delta$  treba da prolaze kroz vrh piramide  $V$  i da budu paralelne sa izvodnicama prizme, tj. da prolaze kroz pramenjaču  $p_r$ . Pramenjača  $p_r$  dobija se tako što se kroz vrh piramide  $V$  povuče linija paralelna sa izvodnicama prizme. Gde pramenjača  $p_r$  seče ravan  $\pi$  na kojoj se nalaze bazisi prizme i piramide dobija se prodor pramenjače  $p_r$  (tačka 1) (sl. 11.5). Kroz prodor (1) prolaze sve ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2, \dots$ . Tačke prodora određuju se na isti način kao u tački 11.1.1, sl. 11.1. Na primer kroz prodor (1) i rogalj  $B$  povuče se trag prve ravni sečenja  $\delta_1$  i gde seče bazis piramide dobijaju se presečne tačke I i II. U preseku izvodnica IV, IIV i  $BB_1$  dobijaju se tačke prodora 1 i 2.

Spajanje tačaka prodora i određivanje vidljivosti ivica prodora je isto kao i u prethodnim zadacima. Na primer spajaju se tačke prodora 2 i 6 jer se njihove presečne tačke II i VI nalaze na ivicama bazisa  $EF$  i  $BC$ , odnosno ivica prodora 2,6 predstavlja ivicu po kojoj se seku strane  $EFV$  piramide i  $BCB_1C_1$  prizme. Ivica prodora 2,6 se vidi jer se njene presečne tačke II i VI nalaze na nezaklonjenim ivicama bazisa.



Sl. 11.5: Postupak određivanja međusobnog prodora prizme i piramide

#### Zadatak 11.3.

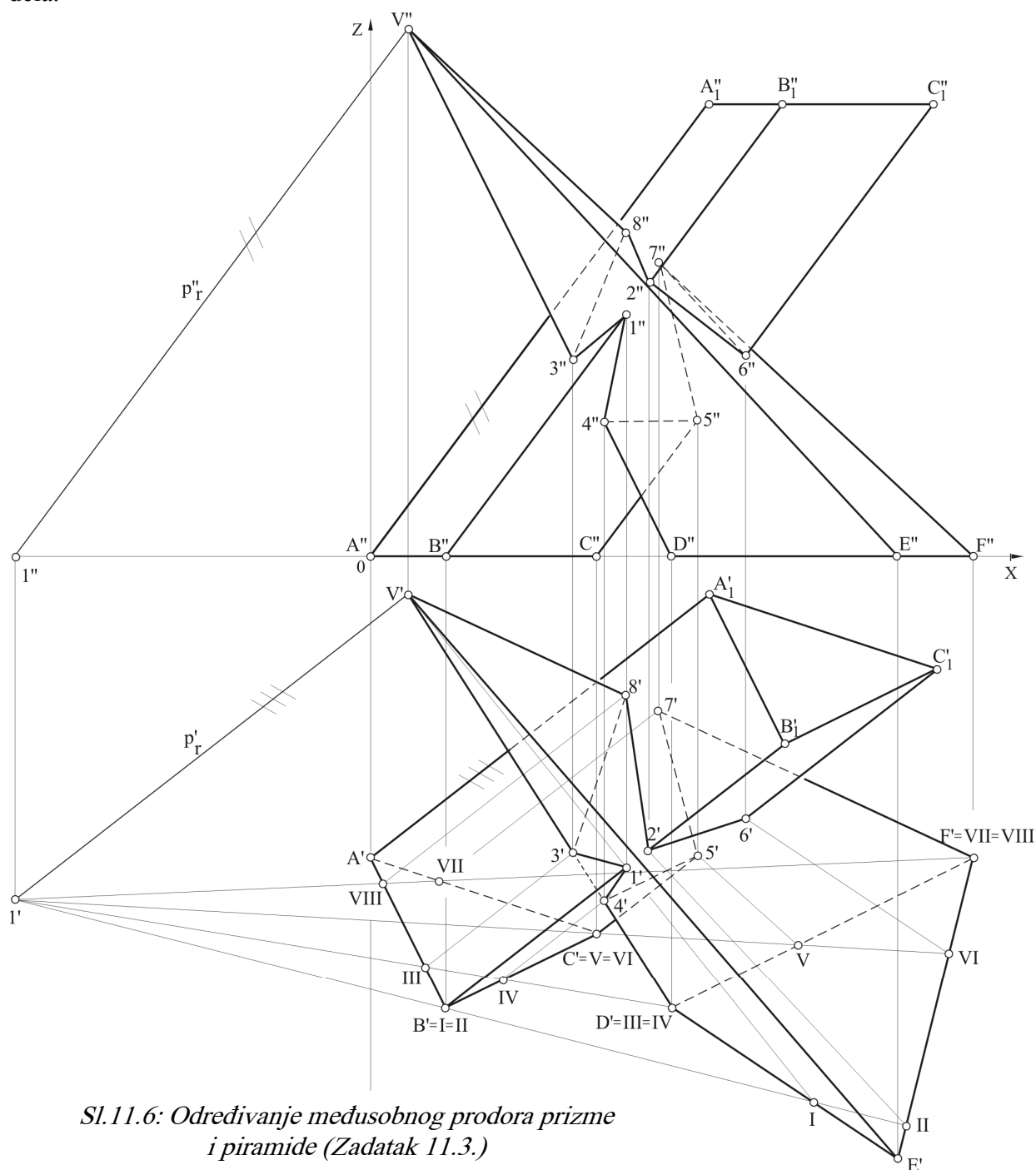
(6;8). Odrediti prodor prizme i piramide. Prizma je zadata tačkama  $A(0;4;0)$ ,  $B(1;6;0)$ ,  $C(3;5;0)$  i  $A_1(4,5;0,5;6)$ , a piramide tačkama  $D(4;6;0)$ ,  $E(7;8;0)$ ,  $F(8;4;0)$  i  $V(0,5;0,5;7)$ . Posebno nacrtati par ortogonalnih projekcija prizme nakon odsecanja piramidom i isečeni deo (jezgro) kao posebno telo.

Nacrtaju se projekcije pramenjače  $p_r$  tako što se iz  $V''$  povuče linija paralelna sa drugom projekcijom izvodnica prizme, a iz  $V'$  linija paralelna sa prvim projekcijama izvodnica prizme. Odredi se prvi prodor pramenjače  $p_r$  (tačka 1') jer bazisi leže na  $H$  ravni. Povuku se linije iz tačke 1' kroz sve prve projekcije roglove bazisa koje predstavljaju tragove prve, druge... itd. ravni sečenja ( $\delta_1, \delta_2, \dots$ ). Linija koja prolazi kroz tačku  $B'$  seče bazis  $D'E'F'$  u tačkama I i II iz kojih se povuku izvodnice piramide (sl. 11.6). U preseku izvodnica  $IV'$ ,  $IIV'$  i  $B'B_1'$  dobijaju se prve projekcije tačaka prodora 1' i 2'. Druge projekcije ovih tačaka su u preseku vertikalnih spona i druge projekcije izvodnice  $B''B_1''$ . Na isti način se dobijaju i ostale tačke prodora.

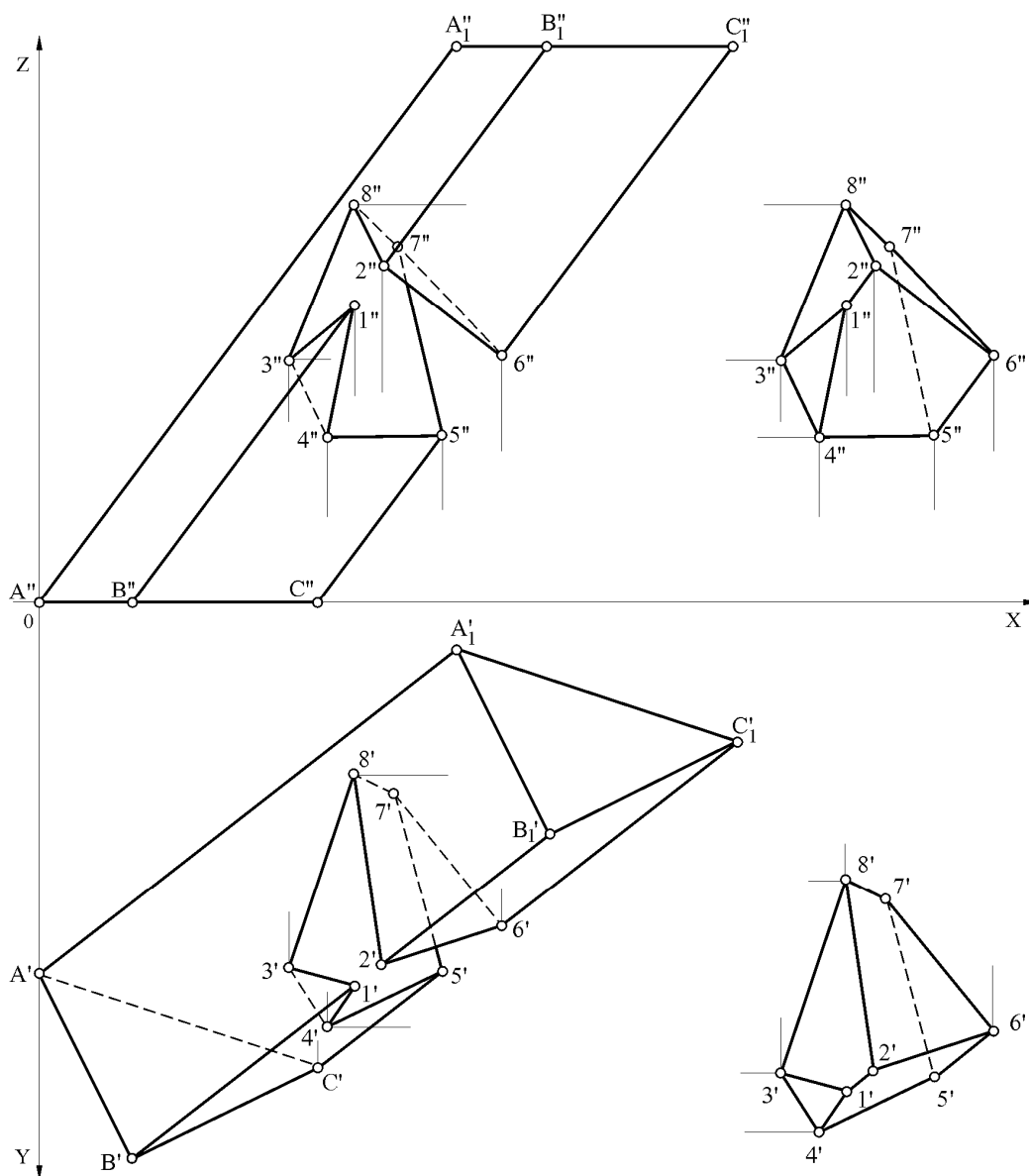
Tačke prodora se spajaju na isti način kao u prethodnim zadacima 11.1 i 11.2, kao i određivanje vidljivosti ivica prodora.

Crtanje samo prizme nakon odsecanja sa piramidom, kao i crtanje isečenog dela (jezgra) svodi se na precrtavanje nakon određivanja projekcija prodora, s tim što se projekcije tačaka prodora koje se nalaze na istoj izvodnici spajaju, tj. spajaju se projekcije tačaka 7, 8 i 3, 4 (sl. 11.7). Projekcije tačaka 1, 2 i 5, 6 se ne spajaju jer su na tom mestu izvodnice  $BB_1$  i  $CC_1$  sasvim presečene. Osim toga razlika je u vidljivosti ivica prodora, koje nisu zaklonjene odstranjenom piramidom. Ivice  $4'5'$ ,  $4''5''$ ,  $3'8'$ , i  $5''7''$  sada postaju vidljive.

Isečeni deo kao posebno telo (jezgro) dobija se precrtavanjem samo ivica prodora na kojem se odredi vidljivost. Sad se crtaju i ivice prodora koje se nalaze na izvodnicama (1,2, zatim 4,3 i 7,8). Samo ivica prodora 5,7 je zaklonjena te se ne vidi, dok se ostale vide. Uporedo sa ortogonalnim projekcijama prizme nacrtaju se ortogonalne projekcije isečenog dela.



Sl.11.6: Određivanje međusobnog prodora prizme i piramide (Zadatak 11.3.)



Sl. 11.7: Prizma nakon prodora piramide i prodor (jezgro) kao posebno telo (Zadatak 11.3.)

#### Zadatak 11.4.

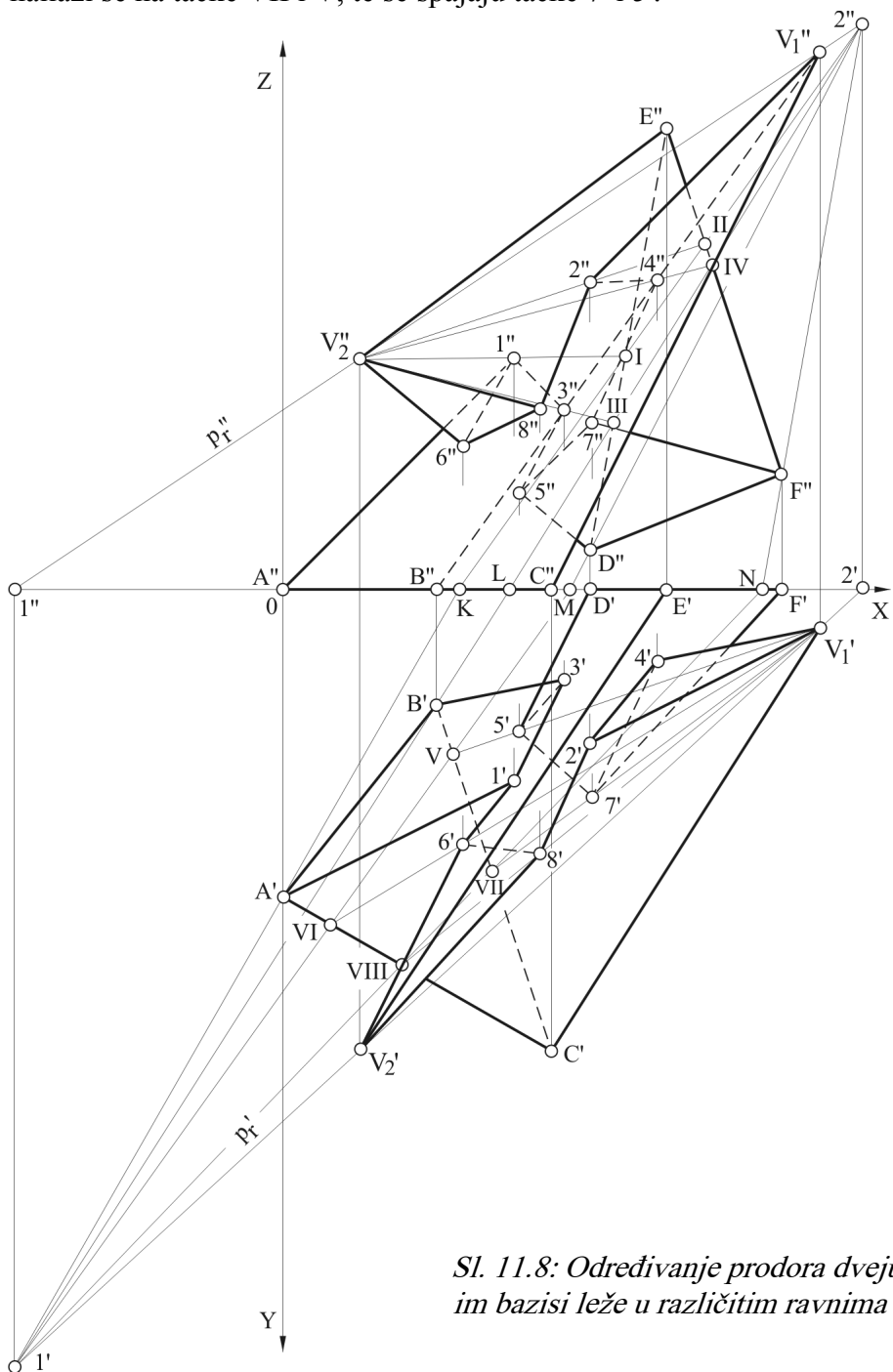
0(4;8). Nacrtati ortogonalne projekcije prodora dveju piramida. Prva piramida je zadata tačkama  $A(0;4;0)$ ,  $B(2;1,5;0)$ ,  $C(3,5;6;0)$  i  $V_1(7;0,5;7)$ , a druga tačkama  $D(4;0;0,5)$ ,  $E(5;0;6)$ ,  $(6,5;0;1,5)$  i  $V_2(1;6;3)$ .

Bazisi piramida leže u različitim projekcijskim ravnima: prvi na H ravni, a drugi na V ravni. Stoga se odrede prvi i drugi prodor pramenjače  $p_r$ . Projekcije pramenjače prolaze kroz projekcije vrhova piramida  $V_1$  i  $V_2$ . Odredi se prvi prodor pramenjače  $p_r$  (tačka 1') kao i drugi prodor (tačka 2'') (sl. 11.8). Kroz prvi prodor (1') povuku se linije koje prolaze kroz rogljeve bazisa koji leži na H ravni (kroz tačke  $A'$ ,  $B'$ ) sve do ose X gde se dobijaju tačke K i L. Spoje se tačke K i L sa drugim prodorom pramenjače (2'') i gde ova linija seku bazis koji leži na V ravni ( $D''E''F''$ ) dobijaju se tačke I i II. U preseku izvodnica  $IV_2''$ ,  $IIV_2''$  i  $A''V_1''$  dobijaju se druge projekcije tačaka prodora 1'' i 2''. Na isti način se dobijaju tačke prodora 3'' i 4'' koristeći liniju kroz rogalj  $B'$ , odnosno tačke III i IV. Kroz rogalj  $C'$  nema smisla crtati liniju sečenja jer ona ne bi obuhvatila bazis na V ravni.

Sada se iz drugog prodora pramenjače (2'') povuku linije kroz tačke bazisa  $F''$  i  $D''$  do ose X, gde se dobijaju tačke N i M. Spoje se tačke M i N sa prvim prodorom pramenjače (1') i

tamo gde ove linije seku bazis koji leži na H ravni (A'B'C') dobijaju se tačke V, VI, VII i VIII. U preseku izvodnica VV<sub>1</sub>', VIV<sub>1</sub>' i D'V<sub>2</sub>' dobijaju se prve projekcija tačaka prodora 5' i 6'. Na isti način se dobijaju i tačke prodora 7' i 8' u preseku izvodnica VIIIV<sub>1</sub>', VIIIIV<sub>1</sub>' i F'V<sub>2</sub>'. Kroz rogalj E'' nema smisla povlačiti liniju sečenja jer ne bi obuhvatila bazis A'B'C'.

Prodor se određuje spajanjem tačaka prodora 1, 2,... do 8 posmatrajući jednu od projekcija na isti način kao i u prethodnim zadacima. Na primer, kada se krene iz tačke A' i pravcu C' nailazi se na presečne tačke VI i VIII, te se spajaju tačke 6' i 8' jer se nalaze istovremeno na dve strane: na A'C'V<sub>1</sub>' prve piramide i na D'F'V<sub>2</sub>' druge piramide. Ivica prodora 6,8 predstavlja liniju po kojoj se seku strane ACV<sub>1</sub> prve piramide i DFV<sub>2</sub> druge piramide. Ivica 6'8' se ne vidi, bez obzira na to što se nalazi na vidljivoj strani A'C'V<sub>1</sub>' jer se istovremeno nalazi i na nevidljivoj strani druge piramide D'F'V<sub>2</sub>'. Da bi se ivica prodora videla mora se naći na obema vidljivim stranama tela. Obilazeći dalje oko trougla A'C'B' nailazi se na tačke VII i V, te se spajaju tačke 7' i 5'.



Kada se obiđe ceo bazis u prvoj projekciji A'B'C' na isti način se analiziraju tačke na bazisu u drugoj projekciji D'E'F'' obilazeći oko njega npr. od roglja F'' u pravcu E''. Pri tome se nailazi se na tačke IV i II, te se spajaju 4'' i 2'' i ova se ivica vidi. Zatim se dolazi do tačkaka I i III, te se spajaju tačke 1'' i 3''.

Na kraju se spajaju projekcije tačkaka 1,6, 3,5, 2,8 i 2,4 jer su na istim stranama tela, iako se to ne vidi po odgovarajućim tačkama I, VI itd. na bazisima, jer im bazisi ne leže na istoj ravni. Vidljivost se određuje analizirajući zaklonjenost svake ivice prodora.

Sl. 11.8: Određivanje prodora dveju piramida kada im bazisi leže u različitim ravnima (Zadatak 11.4.)

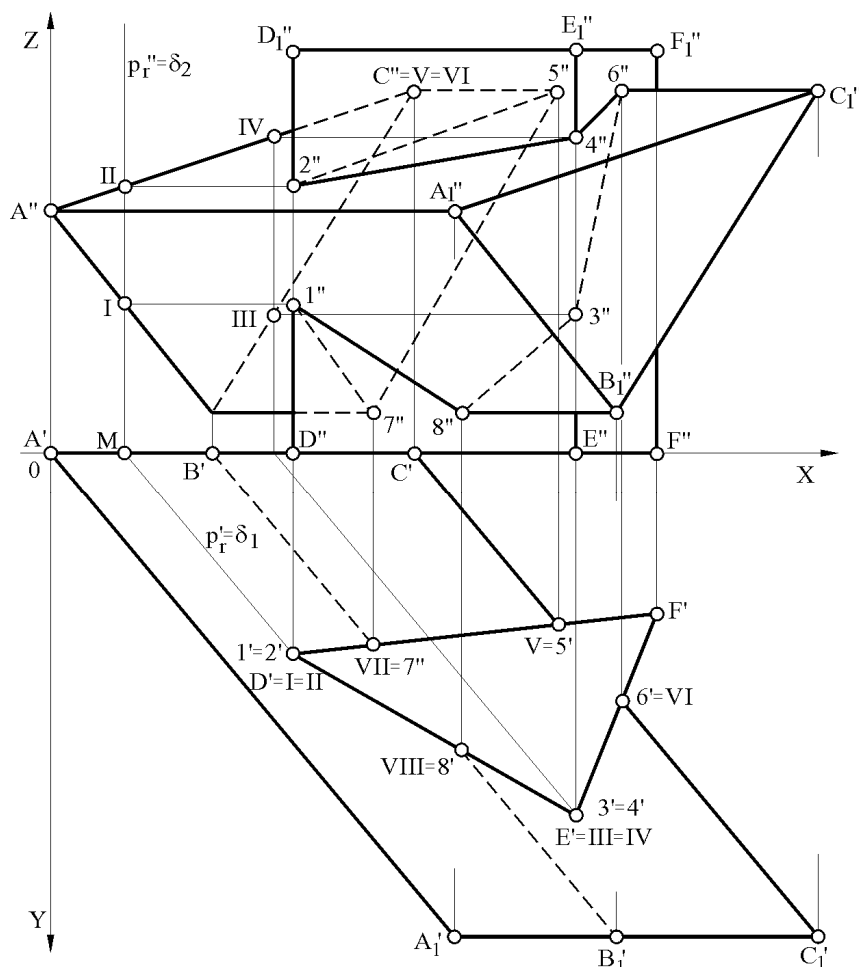
**Zadatak 11.5.**

0(1;6). Odrediti prodor dveju pravih prizmi. Prva prizma je zadata tačkama  $A(0;0;3)$ ,  $B(2;0;0,5)$ ,  $C(4,5;0;4,5)$  i  $A_1(5;6;3)$  a druga tačkama  $D(3;2,5;0)$ ,  $E(6,5;4,5;0)$ ,  $F(7,5;2;0)$  i  $D_1(3;0;5)$ .

Obe prizme se nalaze u specijalnom položaju: bazis prve prizma ABC je paralelan sa P ravni, a njegove izvodnice su paralelne sa H i V ravni; bazis druge prizme DEF leži na H ravni, a njegove izvodnice su paralelne sa V i P ravn (sl. 11.9). U prvoj projekciji druga prizma se cela projicira na bazis D'E'F' koji se vidi u pravoj veličini.

Prva projekcija pramenjače  $p_r'$  je paralelna sa prvim projekcijama izvodnica  $A'A_1'$ ..., a druga projekcija pramenjače  $p_r''$  paralelna je sa drugim projekcijama izvodnica  $D''D_1''$ ...

Prizme se seku sa ravnima  $\delta_1, \delta_2$ ... čiji tragovi prolaze kroz projekcije pramenjače. Ravn



Sl. 11.9: Određivanje prodora dveju prizmi kada su u specijalnom položaju (Zadatak 11.5.)

$\delta$  su upravne na H ravan. Presečne tačke I, II do VIII, kao i tačke prodora  $1', 2'$  do  $8'$  podudaraju se sa tačkama  $D'E'F'$  (jer su izvodnice druge prizme upravne na H ravan). Kroz tačku I, II povuče se linija paralelna sa izvodnicama prve prizme ( $A'A_1'$ ) do ose X gde se dobija tačka M. Iz tačke M se povlači linija paralelna sa izvodnicama druge prizme ( $D''D_1''$ ) i tamo gde seče bazis  $A''B''C''$  dobijaju se presečne tačke I i II. U preseku izvodnica iz ovih tačaka i izvodnice  $D''D_1''$  dobijaju se druge projekcije tačaka prodora  $1''$  i  $2''$ . Na isti način se dobijaju i ostale tačke prodora. Postupak spajanja tačaka, kao i određivanje vidljivosti ivica prodora je isti kao u prethodnom zadatku 11.4, sl. 11.8.

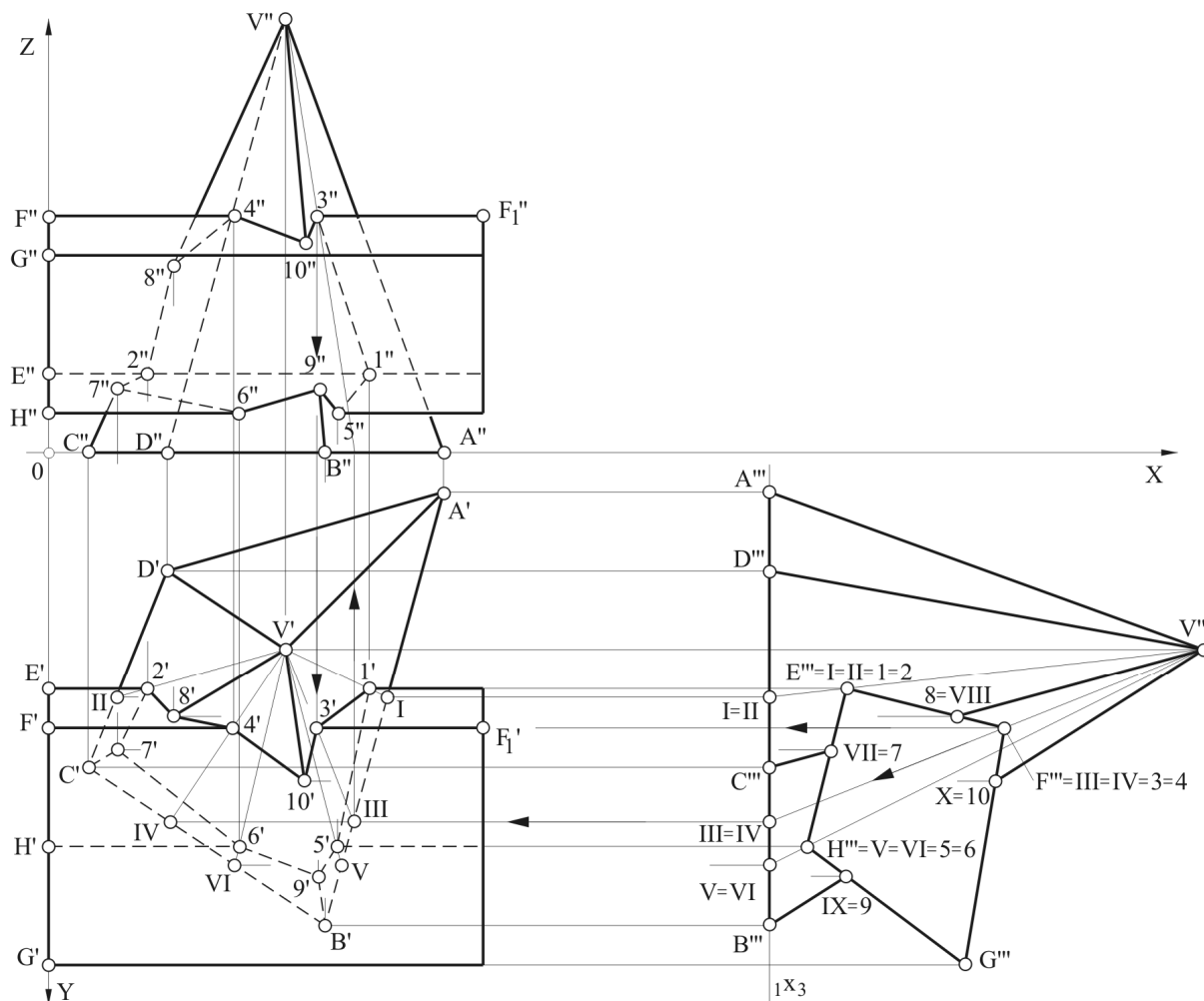
**Zadatak 11.6.**

0(1;7). Odrediti ortogonalne projekcije prodora prave piramide i prave prizme. Piramida je zadata tačkama  $A(5;0,5;0)$ ,  $B(3,5;6;0)$ ,  $C(0,5;4;0)$ ,  $D(1,5;1,5;0)$  i  $V(3;2,5;5,5)$ , a prizma tačkama  $E(0;3;1)$ ,  $F(0;3,5;3)$ ,  $G(0;6,5;2,5)$ ,  $H(0;5;0,5)$  i  $G_1(5,5;6,5;2,5)$ .

Piramida i prizma su u specijalnom položaju; bazis piramide leži na H ravni, a bazis prizme je paralelan sa P ravni dok su joj izvodnice paralelne sa H i V ravni (sl. 11.10). Da bi se odredio prodor ovih tela najjednostavnije je nacrtati još jednu projekciju gde bi se prizma cela projicirala na bazis (kao u prethodnom zadatku 11.5). Stoga se postavlja ravan transformacije  $\pi_3$  koja je upravna na H ravan, tako da je osa  ${}_1X_3$  upravna na prvu projekciju



izvodnica prizme. Treća projekcija bazisa piramide leži na osi  $1X_3$ , a treća projekcija prizme se cela projicira na bazis ( $E''F''G''H''$ ) koji se vidi u pravoj veličini. Presečne tačke I, II do X kao i tačke prodora 1,2 do 10 nalaze se u preseku treće projekcije bazisa prizme i treće projekcije izvodnica piramide. Prva i druga projekcija tačaka prodora određuje se kao u prethodnom zadatku 11.5. Tragovi ravni sečenja u prvoj projekciji paralelni su sa izvodnicama prizme, a u drugoj projekciji prolaze kroz vrh piramide  $V''$ . Postupak dobijanja tačke prodora 3 označen je strelicama.



Sl. 11.10: Određivanje prodora piramide i prizme kada su u specijalnom položaju (Zadatak 11.6.)

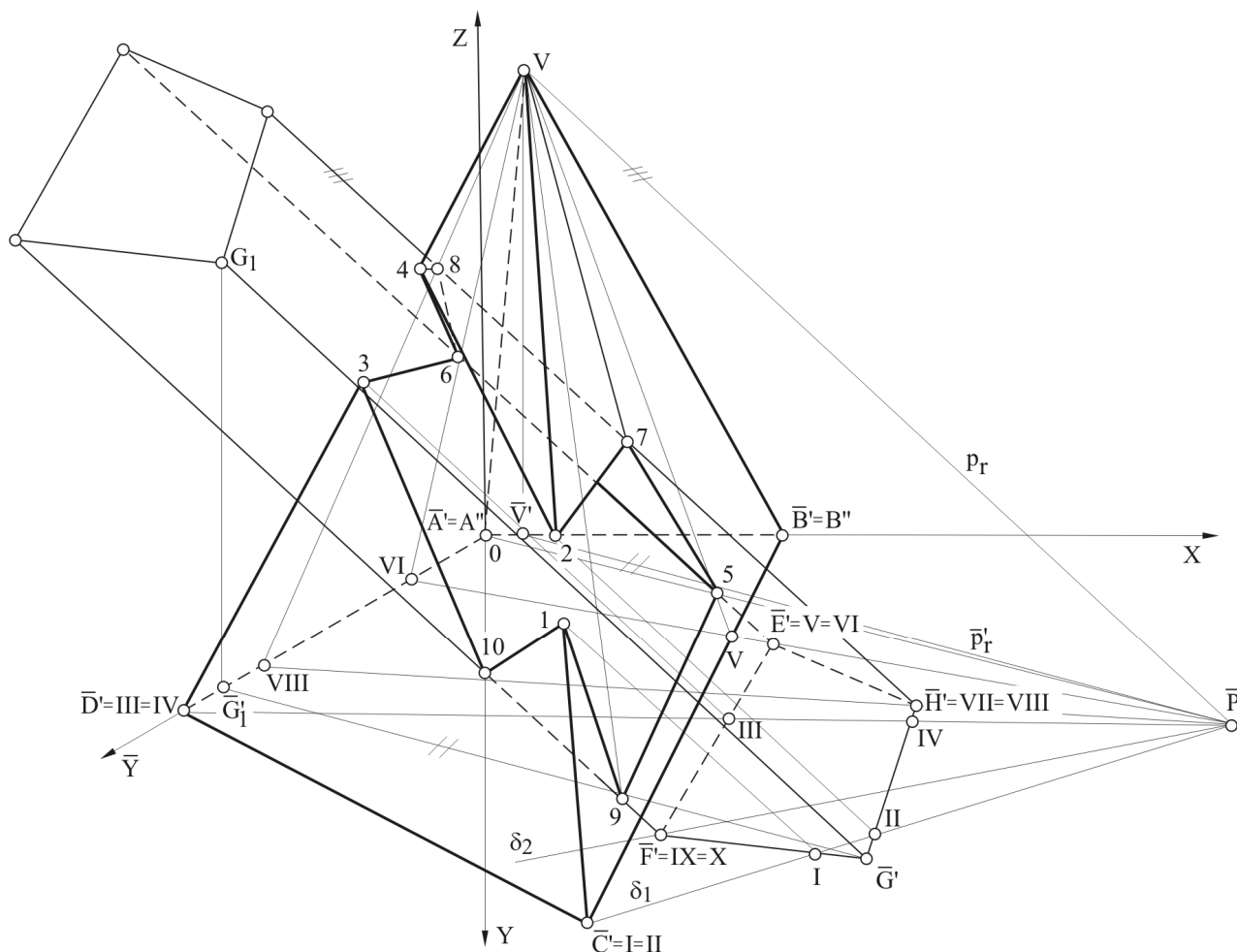
### Zadatak 11.7.

0(6;7). Nacrtati kosu projekciju piramide nakon prodora sa prizmom. Piramida je zadata tačkama  $A(0;0;0)$ ,  $B(3;5;0;0)$ ,  $C(9;9;0)$ ,  $D(0;4;0)$  i  $V(0,5;0;5,5)$ , a prizma tačkama  $E(5,5;2,5;0)$ ,  $F(8;7;0)$ ,  $G(11;7,5;0)$ ,  $H(8,5;3,5;0)$  i  $G_1(0;3;5)$ . Osa  $y$  je pod  $30^\circ$ . Crtati bez skraćjenja 1:1.

Kosa projekcija piramide i prizme se nacrtati bez prethodnog crtanja njihovih ortogonalnih projekcija (zbog preglednosti) kao na sl. 11.11. Crtanje kose projekcije biće objašnjeno u poglavlju 15. Ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2, \dots$  prolaze kroz pramenjaču  $p_r$  koja prolazi kroz vrh piramide  $V$  i paralelna je sa izvodnicama prizme. Stoga treba odrediti prvu kosu projekciju pramenjače  $\bar{p}_r'$  kako bi se odredio njen prodor kroz  $H$  ravan (zato što bazisi piramide i prizme leže na  $H$  ravni). Pramenjača  $p_r$  dobija se tako što se iz vrha  $V$  povuče linija paralelna sa izvodnicama

prizme ( $G_1 \bar{G}'$ ), a njena prva kosa projekcija  $\bar{p}_r'$  dobija se tako što se iz  $\bar{V}'$  povuče pravac paralelan sa  $\bar{G}_1' \bar{G}'$ . U preseku pramenjače i njene prve kose projekcije ( $p_r \bar{p}_r'$ ) dobija se prva kosa projekcija prodora pramenjače, odnosno prvi prodor pramenjače  $\bar{P}'$ .

Iz tačke  $P'$  povlače se linije kroz prve kose projekcije rogljeva bazisa piramide i prizme ( $\bar{C}', \bar{D}' \dots$ ) koje predstavljaju tragove ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2$  itd. U preseku ovih linija i bazisa dobijaju se presečne tačke I, II do X na osnovu kojih se dobijaju tačke prodora 1, 2 do 10. Tačke prodora se spajaju po istom principu kao u prethodnim zadacima, kao i vidljivost.



Sl. 11.11: Kosa projekcija piramide nakon prodora sa prizmom (Zadatak 11.7.)

## 11.2. MEĐUSOBNI PRODOR OBLIH TELA

Kada obla tela prodiru jedna u druge daju kontinualnu nepravilnu krivu ivicu prodora, a sam prodor posmatran kao izdvojeno telo (jezgro) je nepravilnog oblika za krivim kontinualno spojenim linijama.

### 11.2.1. Međusobni prodor valjka i kupe

Kada valjak prodire u kupu međusobno se seku po izvodnicama koje prolaze kroz vrh kupe  $V$  i paralelne su sa izvodnicama valjka, tj. sve ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2 \dots$  prolaze kroz pramenjaču  $p_r$ . Pramenjača  $p_r$  dobija se kada se iz vrha valjka  $V$  povuče linija paralelna za

izvodnicama kupe (isto kao kod prodora piramide i prizme), te ravni sečenja prolaze kroz prodor pramenjače kroz onu ravan na kojoj se nalaze bazisi valjka i kupe.

### Zadatak 11.8.

0(1;8). Odrediti prodor valjka i kupe. Poluprečnik bazisa valjka je  $R_V=2$  cm sa središtem u tački  $0(11;2,5;0)$  i  $0_1(4;10;6)$ . Poluprečnik bazisa kupe  $R_K=4$  cm sa središtem u tački  $S(4;5;0)$ . Vrh kupe je u tački  $V(10,5;9,5;6,5)$ .

Odredi se prodor pramenjače (tačka 9') kroz H ravan (zato što bazisi leže na H ravni) i iz ove tačke povuku se linije koje predstavljaju tragove ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2...$  tako da seku i jedan i drugi bazis (sl. 11.12). [to više ravni sečenja prodor će biti preciznije nacrtan. Prva ravan sečenja  $\delta_1$  seče bazis valjka u tačkama I i I', a bazis kupe tangira u presečnoj tački I. U međusobnom preseku izvodnica valjka i kupe iz ovih tačaka dobijaju se prve projekcije tačaka prodora 1' i 1' (na izvodnici od I do vrha V' kupe). Druga ravan sečenja  $\delta_2$  daje presečne tačke II i II' na bazisu valjka i presečne tačke II i II' na bazisu kupe. U međusobnom preseku izvodnica kupe i valjka iz ovih presečnih tačaka (četiri izvodnice) dobijaju se četiri tačke prodora sve označene sa 2'. Usvojen je ovakav način označavanja da bi, koliko god je to moguće, bilo manje oznaka i zbog jednostavnijeg spajanja tačaka prodora. Na isti način se odrede i ostale tačke prodora.

Tačke prodora se spajaju tako što se krene od presečne tačke I na bazisu valjka i presečne tačke I na bazisu kupe u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu (po levoj strani i jednog i drugog bazisa). Stoga se spajaju prve projekcije tačaka prodora 1', 2'... sve do tačke 8' (leva gornja strana krive). Posle presečne tačke VIII u istom smeru, dolazi se do tačke VII zatim VI, V itd. te se tačka prodora 8' spaja sa 7' (donja tačka 7'), zatim sa 6', 5'... sve do 1'. Kada smo "obišli" ceo krug, krenemo ponovo od presečne tačke I, ali sada u smeru kazaljke na satu (po desnoj strani i jednog i drugog bazisa) i nailazimo na presečnu tačku II na bazisu valjka i presečnu tačku II na bazisu kupe. Stoga se tačka prodora 1' spaja sa 2' zatim sa 3', sve do tačke prodora 8' (desna strana krive). Posle presečne tačke VIII sledi VII, zatim VI, sve do I, te se tačka prodora 8' spaja sa 7', zatim sa 6', 5', sve do 1', čime se kriva zatvorila.

Vidljivost se određuje isto kao i kod rogljastih tela posmatrajući zaklonjenost presečnih tačaka.

## 11.2.2. Međusobni prodor dva valjka

### Zadatak 11.9.

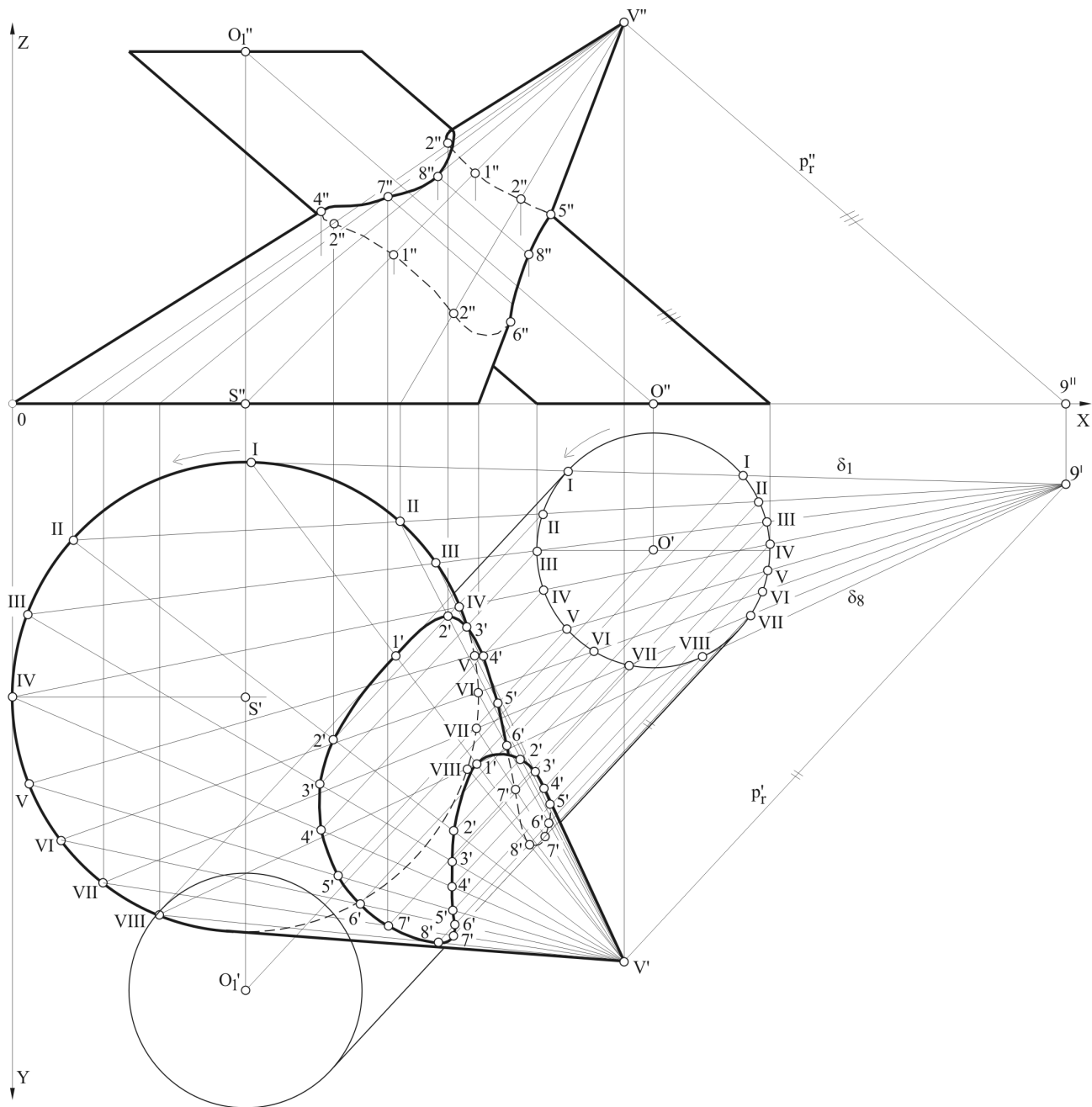
0(4;9). Bazis prvog valjka poluprečnika  $R_1=3$  cm leži na H ravni sa središtem u tački  $S(6;6;0)$ . Visina prvog valjka je  $H=8,5$  cm. Bazis drugog valjka poluprečnika  $R_2=2,5$  cm leži na V ravni u tački  $S_1(7;0;4)$ . Visina drugog valjka je 10,5 cm. Oba valjka su prava. Odrediti kosu projekciju prvog valjka nakon prodora. Osa Y je pod  $30^\circ$ , bez skraćivanja (1:1).

Nacrta se prva i druga ortogonalna projekcija prvog valjka, zatim kosa projekcija oba valjka (sl. 11.13). Kosa projekcija drugog valjka dobija se tako što se sa bazisa  $S_1$  (kruga) povuku izvodnice koje su paralelne sa osom Y. O crtanju kose projekcije biće više rečije kasnije u poglavlju 15.

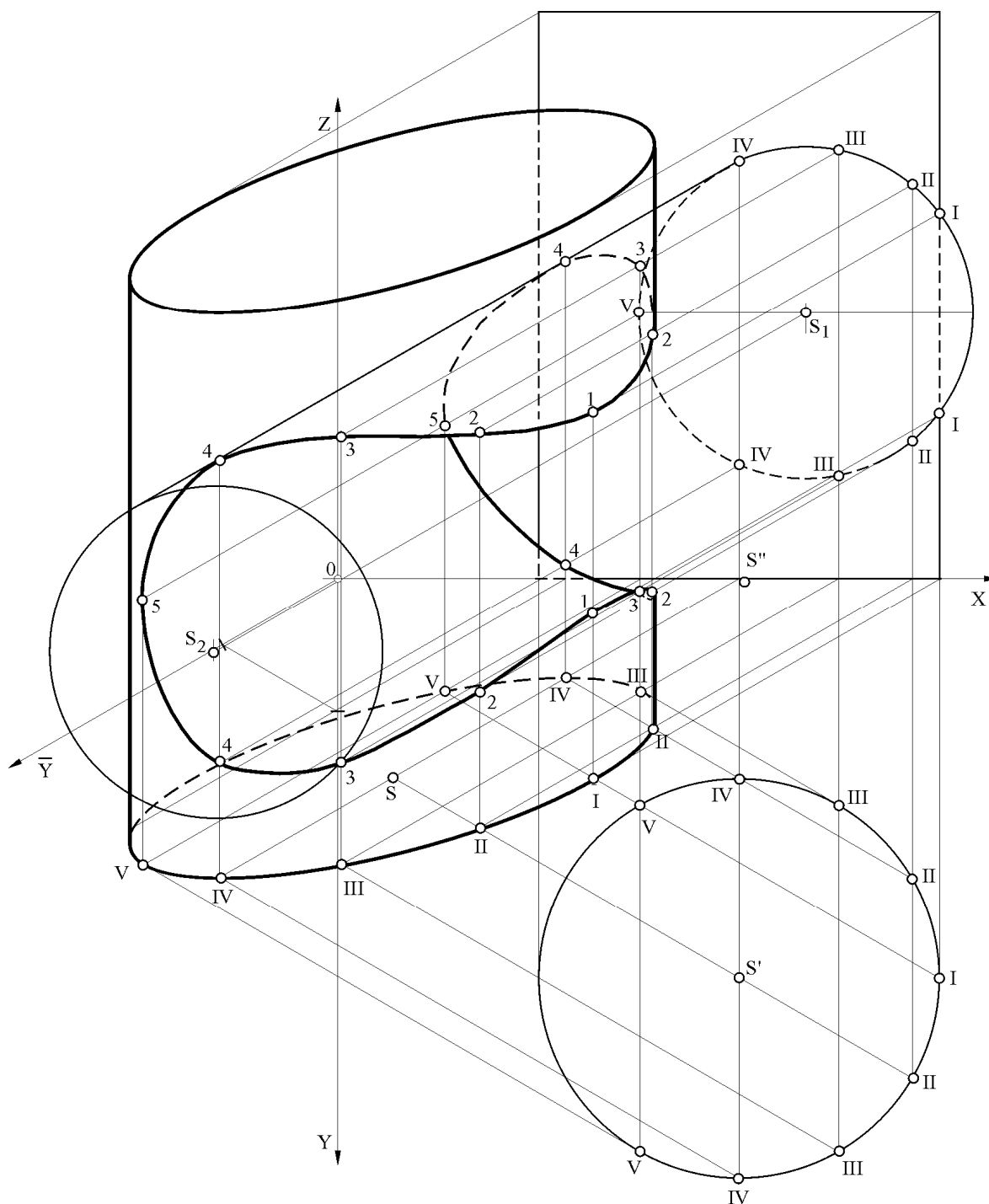
Pošto bazisi valjaka leže na H i V ravni (u specijalnom su položaju), ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2...$  su upravne na H i V ravni, a paralelne sa P ravni. Stoga su tragovi ravni sečenja paralelni sa osama Y i Z.

Na proizvoljnom rastojanju povuku se linije paralelne sa osama Y, Z i gde seku ortogonalne projekcije bazisa dobijaju se presečne tačke I, II do V, a zatim se odrede kose projekcije ovih tačaka. U preseku izvodnica iz ovih presečnih tačaka dobijaju se kose projekcije tačaka prodora 1, 2 do 5 (isto kao u prethodnom zadatku 11.8). Princip spajanja

tačka prodora je, takođe, isti kao u prethodnom zadatku, tako što se bazisi „obidu” dva puta, jednom u smeru kazaljke na satu, a drugi put u suprotnom.



Sl. 11.12: Određivanje prodora valjka i kupe (Zadatak 11.8.)



Sl. 11.13: Kosa projekcija prodora dva valjka (Zadatak 11.9.)

**Zadatak 11.10.**

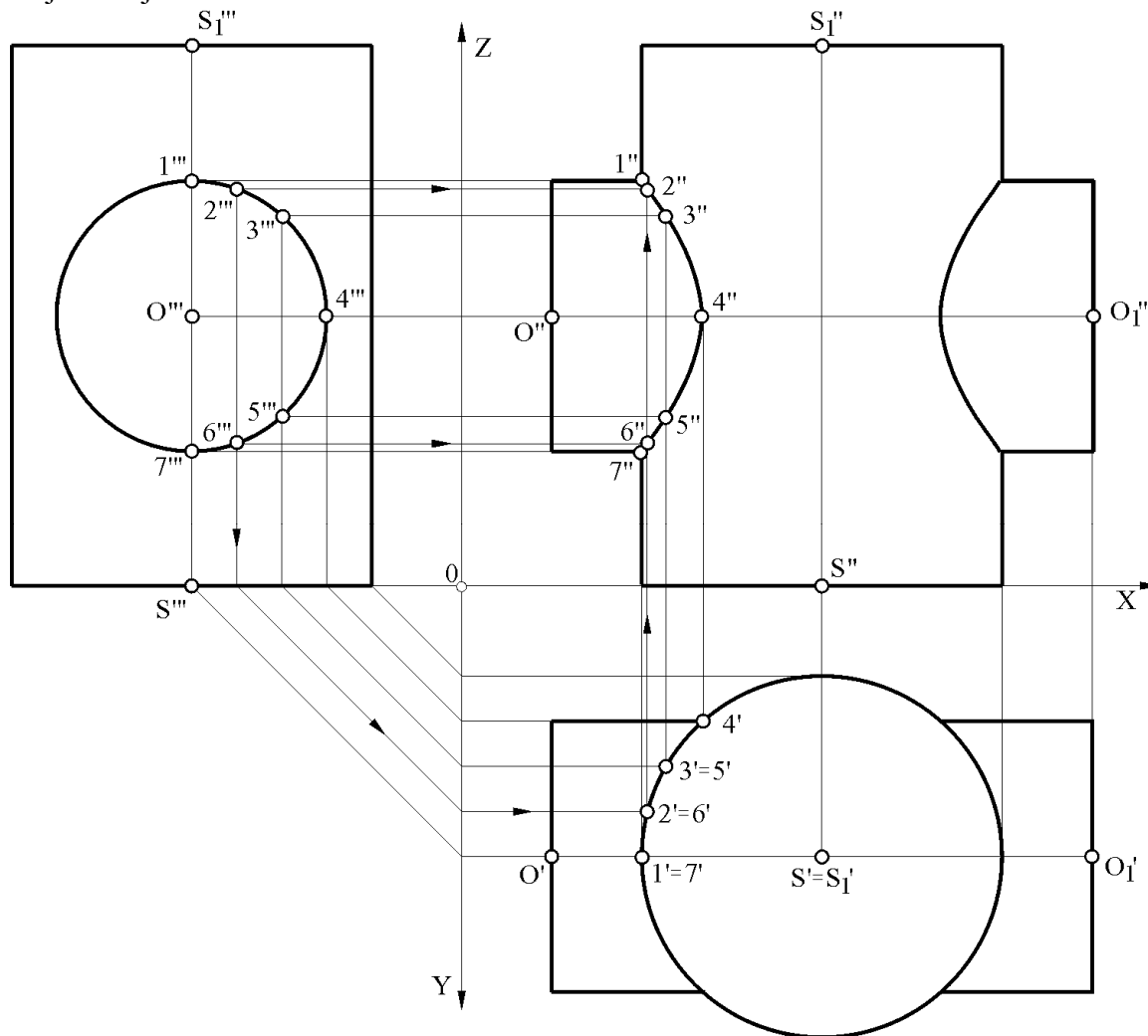
0(5;5). Odrediti prodor dva valjka i nacrtati ih kao jedno složeno telo. Bazis jednog valjka leži na H ravni poluprečnika  $R_1=2$  cm sa središtima bazisa i tačkama  $S(4;3;0)$  i  $S_1(4;3;6)$ . Bazis drugog valjka je paralelan sa P ravni poluprečnika  $R_1=1,5$  cm sa središtima bazisa u tačkama  $0(1;3;3)$  i  $0_1(7;3;3)$ .

Ravni sečenja  $\delta_1, \delta_2, \dots$  su upravne na P i H, a paralelne sa V ravni, te su im tragovi paralelni sa osama X i Z. Stoga je potrebno nacrtati i treću projekciju oba valjka (sl. 11.14).

Na proizvoljnom rastojanju povuku se linije paralelne sa osom Z i tamo gde seku treću projekciju bazisa valjka (krug) dobijaju se presečne tačke i treće projekcije tačaka prodora 1''',

2'''... Prve projekcije tačaka prodora 1', 2'... dobijaju se u preseku izlomljenih spona i prve projekcije bazisa (kruga). Druge projekcije tačaka prodora 1'', 2''... dobijaju se na osnovi prve i treće projekcije ovih tačaka.

Ivica prodora u prvoj i trećoj projekciji projicira se na bazise (krugove), a u drugoj projekciji projicira se u krivu liniju nastalu spajanjem tačaka od 1'' do 8''. Ivica prodora na desnoj strani je simetrična u odnosu na levu stranu.



Sl. 11.14: Međusobni prodor dva valjka (Zadatak 11.10.)

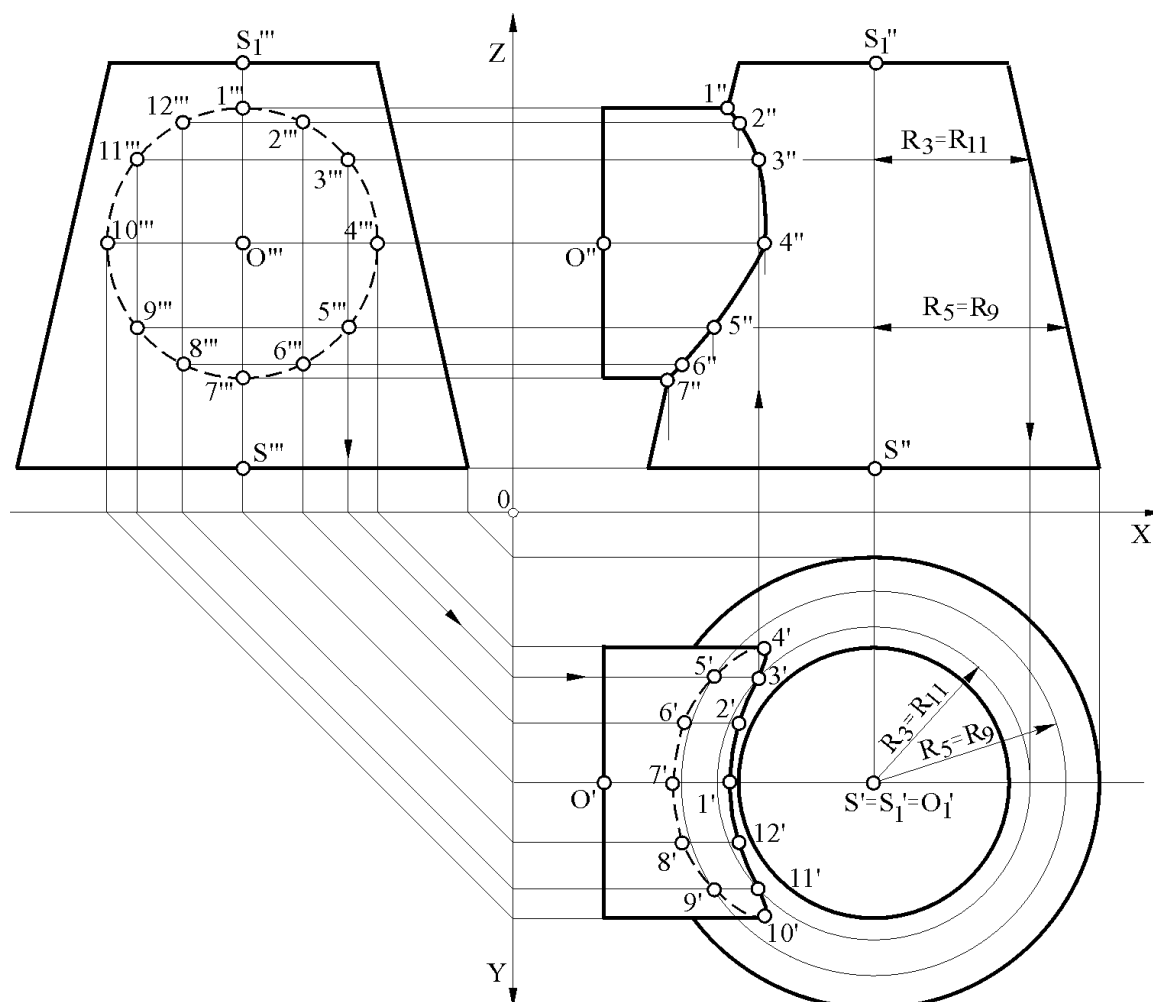
### Zadatak 11.11.

0(7;6). Odrediti prodor valjka i zarubljene kupe i nacrtati ih kao jedno složeno telo. Bazu valjka je paralelna sa P ravni poluprečnika  $R_V=1,5$  cm sa središtem u tačkama  $O(1;3;3)$  i  $O_1(4;3;3)$ . Bazisi zarubljene kupe su paralelni sa H ravni poluprečnika  $R_K=2,5$  cm i  $R_{K1}=1,5$  cm sa središtem u tačkama  $S(4;3;0,5)$  i  $S_1(4;3;5)$ .

Tela treba seći sa ravnima  $\delta_1, \delta_2...$  koje su upravne na P i H, a paralelne za V ravni, te su im tragovi paralelni sa osama X i Z na isti način kao u zadatku 11.10. Takođe, potrebno je nacrtati i treću projekciju oba valjka (sl. 11.15).

Na proizvoljnom rastojanju povuku se linije paralelne sa osom Z i tamo gde seku treću projekciju bazisa valjka (krug) dobijaju se treće projekcije tačaka prodora od 1''' do 12'''. Prve i druge projekcije tačaka prodora nalaze se na izlomljenim i horizontalnim spona iz trećih projekcija i u preseku projekcija izvodnica valjka i izvodnica zarubljene kupe. Iz trećih

projekcija tačaka prodora povuku se horizontalne spona i u preseku sa drugom projekcijom zarubljene kupe dobijaju se poluprečnici  $R_1, R_2=R_{12}$  itd. krugova zarubljene kupe na kojima se nalaze tačke prodora. Na prvoj projekciji iz tačke  $S'$  nacrtaju se krugovi dobijenih poluprečnika i u preseku sa izlomljenim sponama iz treće projekcije dobijaju se prve projekcije tačaka prodora od  $1'$  do  $12'$ . Druge projekcije tačaka prodora se dobijaju na osnovu prvih i trećih projekcija. Spajanjem tačaka prodora od  $1$  do  $12$  dobija se kriva linija kao ivica prodora, s tim da se donji deo krive od tačaka  $4'$  do  $10'$  ne vidi.



Sl. 11.15: Prodor valjka i zarubljene kupe (Zadatak 11.11.)

### Zadatak 11.12.

0(11;13). Odrediti kosu projekciju prodora četverostrane prizme i trostrane piramide. Prizma je zadata tačkama:  $A(1;8;0)$ ,  $B(1;2;5;0)$ ,  $C(7;5;0)$ ,  $D(5;10;0)$  i  $A_1(-3;2;10)$ , a piramida tačkama:  $E(9;11;0)$ ,  $F(9;0;0)$ ,  $G(15;8;0)$  i  $V(-7;1;8)$ . Osa Y je pod  $30^\circ$ , bez skraćenja 1:1.

### Zadatak 11.13.

0(1;16). Odrediti ortogonalne projekcije prvog valjka nakon prodora sa drugim. Prvi valjak ima središta bazisa u tačkama  $S_1(4;4;3)$  i  $S_2(14;4;13)$  poluprečnika  $R_1=3$  cm. Bazisi prvog valjka su pod uglom od  $45^\circ$  prema H ravni. Bazis drugog valjka poluprečnika  $R_2=3$  cm leži na V ravni u tački  $S_3(10;0;8)$ .

## 12. KOTIRANA PROJEKCIJA

Kotirana projekcija je deo nacrtne geometrije koja se bavi proučavanjem metoda za crtanje zemljišta (terena), puteva, kanala itd. tj. velikih pejzažnih prostora.

### 12.1. RAZMERA CRTANJA (OZNAČAVANJE DIMENZIJA)

Kotirana projekcija (kao i druge vrste creža) crta se u razmeri koja se obavezno označava na crtežu. Razmerom crtanja definišu se dimenzije predmeta crtanja na kotiranoj projekciji na pet različitih načina.

**Prvi način** je oznakom 1:10, 1:20, 1:100, 1:1000 itd i predstavlja osnovni način označavanje razmere na kotiranoj projekciji. Prva brojka 1 znači da je to vrednost dužine u prirodi (u stvarnosti) izraženo u metrima (1 m). Druga brojka 10, 20, 100, 1000 itd. je broj kojim se deli jedan metar (1 m).

Na primer ako je razmera 1:100, sledi da je  $\frac{1\text{ m}}{100} = 0,010\text{ m}$ , što znači da se dužina od 1 m u prirodi (stvarnosti) predstavlja na crtežu sa 0,010 m, tj. sa 10 mm. Ako se 1 m izrazi kao 1000 mm sledi da je  $\frac{1000\text{ mm}}{100} = 10\text{ mm}$ , znači isto da se 1 m u prirodi na crtežu predstavlja sa 10 mm.

Na primer razmera, 1:400 znači da se dužina od 1m u prirodi predstavlja sa 2,5 mm na crtežu ( $1000:400=2,5\text{ mm}$ ).

**Drugi način** je relacijom  $1\text{ m} \stackrel{\text{R}}{\Rightarrow} 10\text{ mm}$ , što je samo drugi način izražavanja razmere 1:100. Ovaj način se koristi u tekstualnom (opisnom) delu tehničke dokumentacije.

**Treći način** je relacijom  $U_L = \frac{1\text{ m}}{10\text{ mm}}$ , što je samo još jedan način izražavanja razmere 1:100. Ovako napisana razmera crtanja znači da se 1 m iz prirode predstavlja na crtežu sa 10 mm. Ovaj način se takođe koristi u tekstualnom (opisnom) delu tehničke dokumentacije.

Definisanje dimenzija predmeta na crtežu na prva tri načina pomoću razmere (1:100 ili  $1\text{ m} \stackrel{\text{R}}{\Rightarrow} 10\text{ mm}$  ili  $U_L = \frac{1\text{ m}}{10\text{ mm}}$ ) koristi se samo tada kada smo sigurni da se crtež neće pri umnožavanju smanjivati ili uvećavati.

Ako je razmera 1:200 znači da se 1 m u prirodi predstavlja sa 5 mm na crtežu ( $1000/200=5$ ), što se može pisati i kao  $U_L = \frac{1\text{ m}}{5\text{ mm}}$  ili  $1\text{ m} \stackrel{\text{R}}{\Rightarrow} 5\text{ mm}$ . Tada bi prava veličina duži od 23 mm sa crteža bila  $L^0 = L \cdot U_1 = 23\text{ mm} \cdot \frac{1\text{ m}}{5\text{ mm}} = 4,6\text{ m}$ . Da je razmera, npr. bila 1:300 ( $1\text{ m} \stackrel{\text{R}}{\Rightarrow} 3,3\text{ mm}$ ) tada bi prava veličina iste duži od 23 mm sa crteža, u stvarnosti bila 6,96 m ( $L^0 = L \cdot U_1 = 23\text{ mm} \cdot \frac{1\text{ m}}{3,3\text{ mm}} = 6,96\text{ m}$ ).

Ako treba izračunati razmeru crtanja za neku duž čija je vrednost u prirodi 2 m, a na crtežu je želimo predstaviti sa 40 mm, tada se određuje iz relacije  $U_L = \frac{2\text{ m}}{40\text{ mm}} = \frac{1\text{ m}}{20\text{ mm}}$ , tj.  $1000:X=20$ , sledi da je  $X=1000:20=50$ , te je razmera u kojoj treba crtati 1:50 ( $1000:50=20$ ), tj.  $1\text{ m} \stackrel{\text{R}}{\Rightarrow} 20\text{ mm}$ .



Na crtežu se mogu koristiti dve različite razmere, jedna za vrednosti na horizontalnoj ravni, a druga za vrednosti visina (kota).

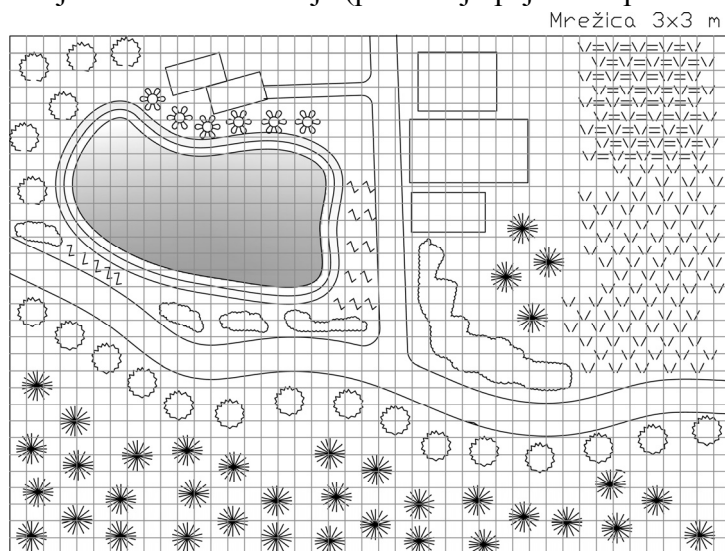
**Četvrti način** označavanje razmere je razmernikom koji se nacrtava na samom crtežu. Označavanje dimenzija pomoću razmernika koristi se u topografiji (kartografiji) i na crtežima pejzažnih prostora. Razmernik se nacrtava na vidnom mestu iznad crteža. Dužina polja na razmerniku (crnog i belog) u datom primeru jednaka je dužini 1 m u prirodi (sl. 12.1).



Sl. 12.1: Označavanje razmere (dimenzionisanje) pomoću razmernika

Definisanje dimenzija razmernikom je pogodno zbog neophodnih smanjenja ili uvećanja crteža pri umnožavanju. Kada se crtež umanjuje, istovremeno se umanjuje i razmernik, tako da dimenzije nacrtanog crteža ostaju iste.

**Peti način** označavanja razmere crtanja, odnosno definisanja dimenzija nacrtanog predmeta je pomoću mrežice. Preko crteža nacrtava se mrežica vrlo tankim linijama na određenom rastojanju koji se naznači na crtežu i na taj način se dimenzioniše ceo crtež (sl. 12.2). Dimenzionisanje pomoću mrežice koristi se za crteže kod kojih ima veoma mnogo detalja za dimenzionisanje (pri crtanju pejzažnih prostora).



Sl. 12.2: Dimenzionisanje pomoću mrežice

Pored ovih postoje i druge mogućnosti za označavanje dimenzija nacrtanog predmeta na drugim vrstama crteža iz oblasti tehnike, građevine itd.

## 12.2. KOTIRANA PROJEKCIJA TAČKE

Tačka je potpuno i jednoznačno definisana sa dvema ortogonalnim projekcijama, jer sadrže sve tri koordinate  $x$ ,  $y$  i  $z$ , kao rastojanja od projekcijskih ravni ( $P$ ,  $V$  i  $H$ ). Prva ortogonalna projekcija sadrži koordinate  $x$  i  $y$ . Druga ortogonalna projekcija je potrebna samo zbog koordinate  $z$ .

Ako se prvoj ortogonalnoj projekciji  $A'$  tačke  $A$  doda rastojanje od horizontalne projekcijske ravni ( $z$  koordinata), dobija se kotirana projekcija  $A'(2)$  tačke  $A$  (sl. 12.3), gde je  $z$  koordinata tačke  $A$  jednaka 2 dužinske mere.

Rastojanje od  $H$  ravni, tj. koordinata  $z$  stavlja se u zagradu; izražava se u  $m$  ili nekoj drugoj dužinskoj jedinici i naziva se kota, a ovaj način crtanja, kotirana projekcija. Kota se može shvatiti i kao visina na kojoj se nalazi tačka  $A$ . Kada tačka leži na  $H$  ravni, njena  $z$

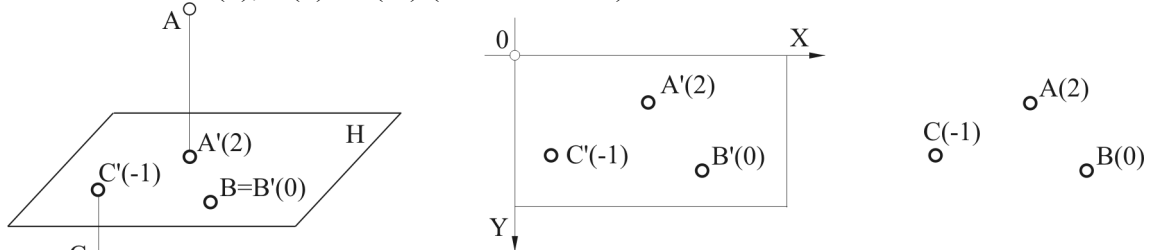
koordinata je nula (0), te je njena kota nula (0), kao npr.  $B'(0)$ . Kota može biti i sa negativnim predznakom (-) kada je tačka ispod H ravni, npr.  $C'(-1)$ .

Na ovaj način se crtanje maksimalno pojednostavljuje, jer je druga ortogonalna projekcija nepotrebna.

**Kotirana projekcija je zapravo prva ortogonalna projekcija (na horizontalnoj projekcijskoj ravni H) kojoj se dodaju z koordinate (kote).**

Da bi se horizontalna ravan H dovela u vertikalni položaj (ravan crtanja) obara se na isti način kao i kod ortogonalnih projekcija oko ose X za  $90^\circ$  prednjim krajem na dole. Nakon obaranja H ravan se predstavlja osama X i Y i koordinatnim početkom 0. Zajedno sa ravni obaraju se i kotirane projekcije (sl. 12.3. u sredini).

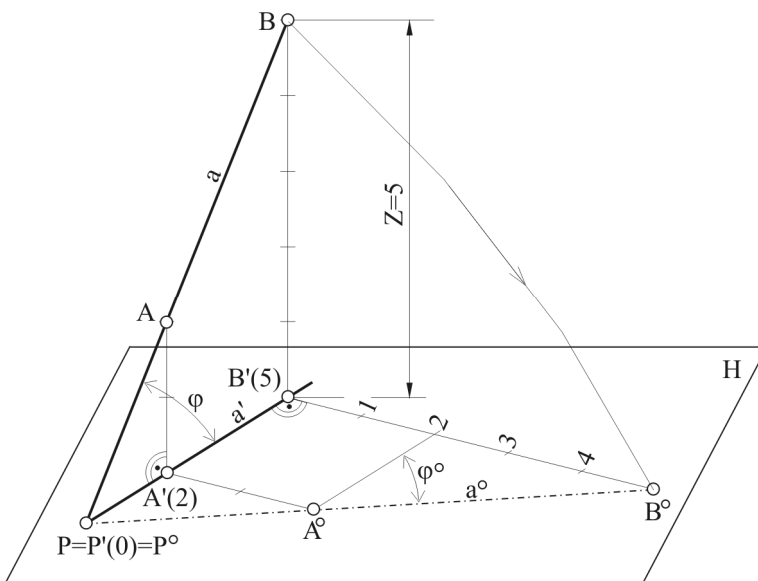
Kako je H ravan neograničena, njeni obrisi se ne crtaju, kao ni ose X i Y. Da bi se imao referentni položaj (koordinatni početak 0) usvaja se da je osa X gornja horizontalna ivica papira, a osa Y leva vertikalna ivica papira na kojem se crtaju projekcije. Zbog jednostavnosti pisanja, prva projekcija se ne označava kao u ortogonalnoj projekciji sa prim ('), već samo tačke sa kotama:  $A(2)$ ,  $B(0)$  i  $C(-1)$  (sl. 12.3 desno).



Sl. 12.3: Kotirana projekcija tačaka A, B i C: u prostoru, nakon obaranja H ravni i način crtanja (bez ravni, osa i oznaka prim za prvu projekciju)

### 12.3. KOTIRANA PROJEKCIJA PRAVE (DUŽI)

Prava je definisana dvema tačkama, te je kotirana projekcija prave definisana kotiranjem projekcijom dveju tačaka, npr.  $A'(2)$  i  $B'(5)$  (sl. 12.4). Ako se prava a obori oko prve projekcije  $a'$  na H ravan, dobiće se prava veličina duži  $A^\circ B^\circ$ , kao i prava veličina nagibnog ugla  $\varphi^\circ$  prave a prema ravni H. Tačka  $B^\circ$  dobija se kada se iz  $B'$  podigne spona upravna na  $a'$  i nanese vrednost z koordinate (kote, visine h). Spajanjem prodora prave a kroz H ravan (tačke  $P^\circ=P(0)$ ) i tačke  $B^\circ$  dobija se prava veličina duži  $P^\circ B^\circ$ , kao i prava veličina nagibnog ugla  $\varphi^\circ$

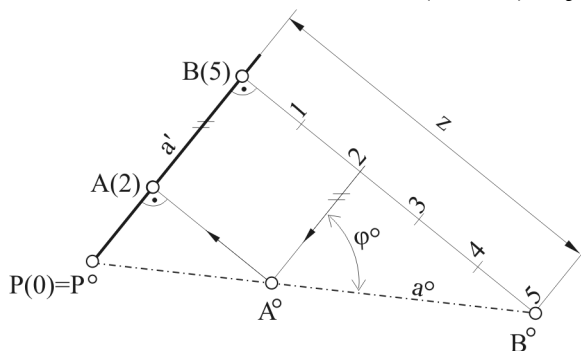


Sl. 12.4: Kotirana projekcija prave a koja je zadata tačkama A i B u prostoru

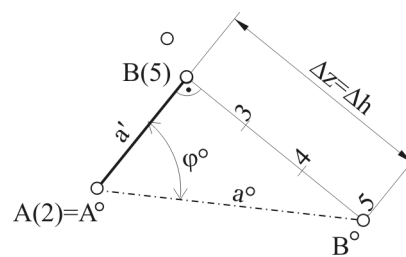
prave a prema H ravni. Na taj način je dobijen trougao pravih veličina, kao što bi se dobio i postupkom transformacije. Radi što jednostavnijeg obeležavanja nagibni ugao  $\varphi^\circ$  prave a prema H ravni nazivaće se i nagibnim uglom i obeležavati samo sa  $\varphi$ .

Nakon obaranja H ravni kotirana projekcija prave a data je na sl. 12.5, gde je određena i tačka  $A(2)$ , tako što se iz drugog podeljka povuče linija paralelna sa  $a'$  do  $a^\circ$ , a odatle upravno na  $a'$ . Ako je tačka prodora P daleko, prava veličina duži  $A^\circ B^\circ$  može se dobiti obaranjem oko neke bliže

tačke npr. tačke A (sl. 12.6). Tada se na liniju koja je upravna na  $a'$  iz tačke B(5) nanese vrednost razlike kota tačaka B i A ( $\Delta z = \Delta h$ ) koja, u ovom primeru, iznosi 3.



Sl. 12.5: Kotirana projekcija prave  $a$  koja je zadata tačkama A i B nakon obaranja H ravni (određivanje prave veličine duži obaranjem oko prodora P)



Sl. 12.6: Određivanje prave veličine duži AB, obaranjem oko tačke A

### 12.3.1. Graduiranje prave

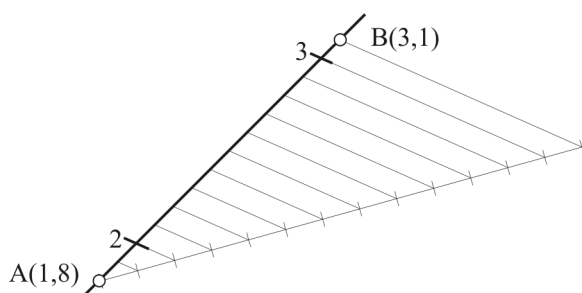
Kada su kote tačaka koje definišu pravu zadate decimalnim brojevima, potrebno je na kotiranoj projekciji označiti i cele brojeve. Označavanje celih kota na kotiranoj projekciji prave, naziva se graduiranje prave.

Neka je kotirana projekcija prave  $a$  zadata tačkama A(1,8) i B(3,1) koju treba graduirati. Odredi se razlika kota zadatih tačaka A i B ( $3,1 - 1,8 = 1,3$ ). Na liniju, proizvoljno povučenu iz jedne od tačaka npr. tačke A, nanese se trinaest istih podeljaka, čija je vrednost takođe proizvoljna (sl. 12.7). Spoji se krajnji, trinaesti podeljak sa tačkom B i paralelno sa tim pravcem povuku linije i iz ostalih podeljaka do kotirane projekcije prave  $a$ . Na taj način se duž između tačaka A i B podeli na 13 istih podeljaka. Drugi podeljak od tačke A(1,8) je kota 2, a od nje deseti podeljak je kota 3.

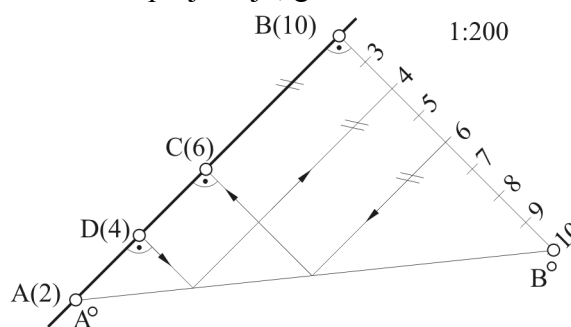
### 12.3.2. Određivanje tačke na pravoj

Ako se tačka nalazi na pravoj tada se njena kotirana projekcija nalazi na kotiranoj projekciji prave kao i oboreni položaj na oborenom položaju prave.

Ako na duži A(2)B(10) treba odrediti tačku C(6), prvo se odredi prava veličina duži AB° (sl. 12.8). Iz podeljka broj 6 povuče se linija paralelna sa kotiranom projekcijom prave do prave veličine, zatim odatle upravno na kotiranu projekciju prave (u pravcu strelica) gde se dobija tražena tačka C(6). Na isti način, ali obrnutim redom, odredila bi se kota neke proizvoljne tačke D, kada je data njena kotirana projekcija. Iz tačke D povuče se linija upravna na kotiranu projekciju prave do njene prave veličine, zatim odatle paralelno sa kotiranom projekcijom prave do linije upravne na kotiranu projekciju, gde se očitava kota 4.



Sl. 12.7: Graduiranje prave



Sl. 12.8: Određivanje tačaka C i D na duži AB

### 12.3.3. Interval prave i

Interval prave  $i$  predstavlja rastojanje dve tačke na kotiranoj projekciji, čija je razlika kota jednaka jedan (1). Na slici 12.9 označen je interval  $i$  između tačaka 7 i 8 (B i C). Ista vrednost je  $i$  između bilo kojih drugih tačaka na toj pravoj, čija je razlika kota jednaka jedinici, npr. između tačaka 6 i 7, zatim 8 i 9 itd. Interval  $i$  izražava se dužinskim jedinicama i to najčešće u m. Na ovom primeru je  $i=1,3$  m. Ova vrednost se dobija kada se duž  $\overline{78}=13$  mm pomnoži sa razmerom  $U_L = \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ mm}}$  (razmera crtanja je 1:100).

Horizontalna prava ima beskonačno veliki interval ( $i=\infty$ ), a vertikalna prava ima interval jednak nuli ( $i=0$ ). **Što je veća vrednost intervala prave  $i$ , prava je manje nagnuta i obrnuto.**

### 12.3.4. Pad prave p

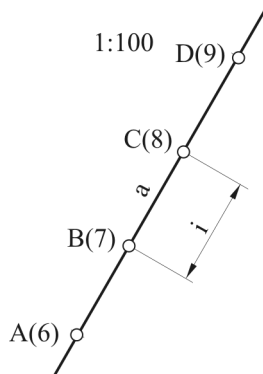
Pad prave  $p$  predstavlja odnos razlike kota dve tačke i rastojanja njihovih kotiranih projekcija, tj. predstavlja vrednost tangensa nagibnog ugla prave  $\text{tg}\varphi=\Delta h/AD$ . Pad prave predstavlja recipročnu vrednost intervala  $i$ , tj.  $p=\frac{1}{i}$ . Smer pada prave označava se strelicom i to od više ka nižoj vrednosti kota (sl. 12.10).

Pad prave  $p$  može se izraziti na tri različita načina:

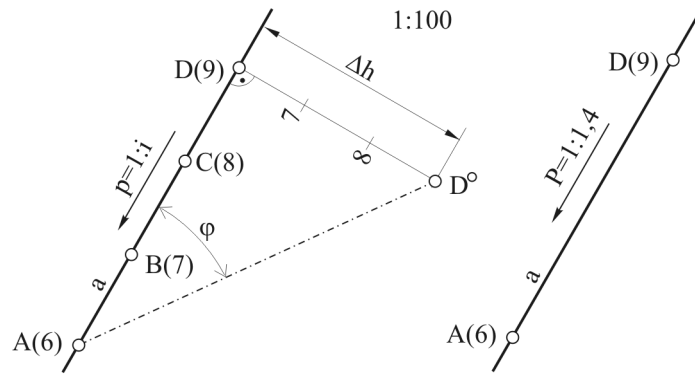
- veličinom nagibnog ugla  $\varphi$  prave a,
- prema definiciji pada prave  $i$
- u procentima (%).

**Veličina nagibnog ugla  $\varphi$**  prave a određuje se iz trougla pravih veličina (sl. 12.10). U datom primeru je  $p = \text{tg}\varphi = \frac{\Delta h}{AD} = \frac{3}{4,2} = 0,71428$ , te je ugao nagiba prave a prema H ravni  $\varphi=\text{arctg}\varphi=35^\circ 35'$ . Duž AD predstavlja kotiranu projekciju čija se vrednost dobija prema izrazu  $AD = \overline{AD} \cdot U_L = 42 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ mm}} = 4,2 \text{ m}$ . Rastojanje  $\Delta h$  predstavlja duž  $DD^\circ$ , tj. razliku kota tačaka D i A.

**Prema definiciji pad prave** jednak je količniku 1 m i intervala prave, tj.  $p=\frac{1}{i}$  ili drugačije zapisano  $p=1:i$ . U ovom primeru (sl. 12.10) interval prave jednak je  $i = \overline{78} \cdot U_L$ , tj.  $i = 14 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ mm}} = 1,4 \text{ m}$ . Tada je pad prave  $p = \frac{1}{1,4}$  ili drugačije zapisano  $p=1:1,4$ . Ova vrednost se označi na kotiranoj projekciji prave (sl. 12.10 desno).



Sl. 12.9: Interval prave  $i$



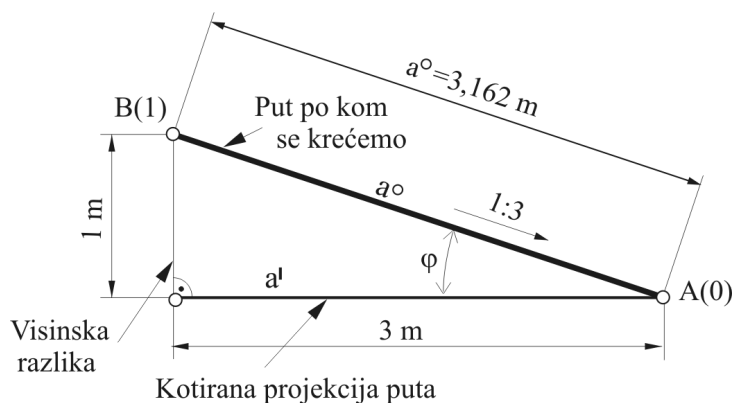
Sl. 12.10: Pad prave  $p$

**Pad prave izražen u procentima** se dobija tako što se vrednost tangensa nagibnog ugla prave  $\varphi$  pomnoži sa 100. U ovom primeri je  $\text{tg}\varphi=0,71428$ , te je pad prave izražen u procentima  $p=71,428\%$ .

Za dati primer pad prave je:  $\varphi=35^{\circ}35'$ ;  $p = \frac{1}{1,4}$  ili  $p=1:1,4$  i  $p=71,428\%$ .

**Što je veća vrednost pada prave  $p$ , prava je strmija i obrnuto.**

U praktičnoj primeni pad prave (puta, kanala...) najčešće se izražava odnosom 1:i koji se piše na kotiranoj projekciji prave. Neka je ta vrednost, npr. 1:3 (sl. 12.11), što znači da je na svaka 3 m dužine na kotiranoj projekciji, visinska razlika 1 m, tj. interval prave je  $i=3$  m. Vrednost tangensa nagibnog ugla  $\varphi$  je  $\text{tg}\varphi = \frac{1}{3} = 0,33333$ , ugao nagiba je  $\varphi=18,43^{\circ}$ , a pad izražen u procentima je  $p=33,33\%$ . Stvarna dužina dela prave (puta po kojem možemo hodati i koji možemo izmeriti) je hipotenuza ovog pravouglog trougla. Stvarna dužina dela prave  $a^{\circ}$  jednaka je  $a^{\circ} = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,162$  m.



Sl. 12.11: Prikaz pada prave  $p$

### Zadatak 12.1.

Pad prave  $b$  je  $18\%$ . Odrediti sve ostale parametre kotirane projekcije prave  $b$ .

Pad prave je  $p = \frac{1}{i} = 0,18$ , odakle je interval  $i = \frac{1}{0,18} = 5,555$  m, te je  $p=1:5,555$ . Nagibni

ugao prave  $b$  je  $\varphi = \arctg 0,18 = 10,20^{\circ}$ . Stvarna dužina prave  $b^{\circ}$  između dve tačke na pravoj čija je visinska razlika 1 m je  $b^{\circ} = \sqrt{1^2 + 5,555^2} = 5,644$  m.

### Zadatak 12.2.

Data je prava  $a$  tačkama  $A(1;5;2)$  i  $B(5;1;6,3)$ . Odrediti:

- pravu veličinu duži  $A^{\circ}B^{\circ}$ ,
- ugao nagiba  $\varphi$  prave  $a$  prema  $H$  ravni,
- interval  $i$  prave  $a$ ,
- pad  $p$  prave  $a$ ,
- prodor prave  $a$  kroz  $H$  ravan,
- tačku  $C$  na pravoj  $a$  koja ima kotu  $5,8$  i
- kotiranu projekciju i kotu tačke  $D(4;?;?)$  na pravoj  $a$ .

a) Usvoji se razmera crtanja, npr. 1:100, tako da se 1 m u prirodi predstavlja sa 10 mm na crtežu ( $1000:100=10$ ), odnosno razmera je  $U_L = \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ mm}}$ . Nacrta se kotirana projekcija duži  $i$

odredi njena prava veličina Sa slike 12.12 dobija se prava veličina duži AB prema relaciji da je  $A^0B^0 = AB^0 \cdot U_L = 71 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ mm}} = 7,1 \text{ m}$ .

b) Ugao nagiba  $\varphi$  prave a prema H ravni određuje se iz relacije  $\text{tg}\varphi = \frac{\Delta z}{AB} = \frac{4,3}{5,6} = 0,76785$ , te je  $\varphi \approx 37,51^\circ$ . Rastojanje AB jednako je

$$AB = \overline{AB} \cdot U_L = 5,6 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ mm}} = 5,6 \text{ m}.$$

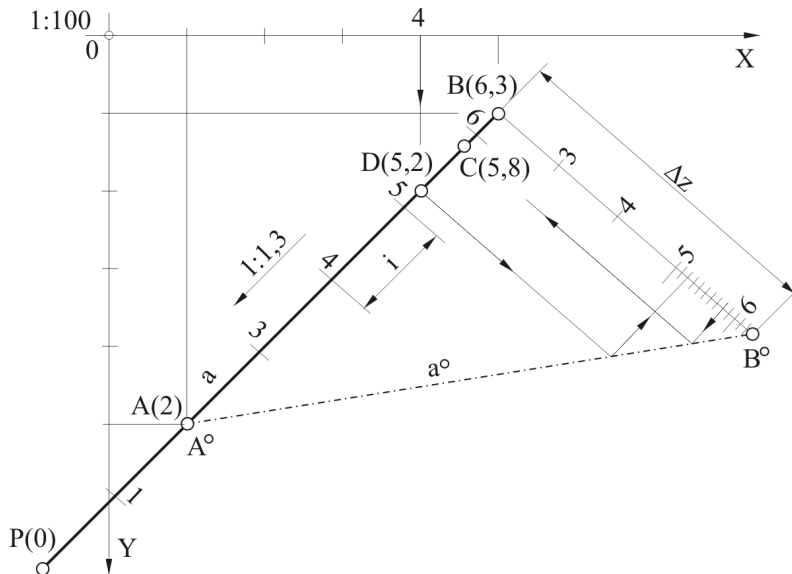
c) Interval "i" prave a je dužina jednog intervala, npr.  $\overline{45}$  pomnoženag sa razmerom  $U_L$ , te je  $i = 13 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ mm}} = 1,3 \text{ m}$ .

d) Pad prave a jednak je  $p = \frac{1}{i} = \frac{1}{1,3} = 1:1,3 = 0,76923$  ili 76,92 % i označen je strelicom.

e) Prodor P prave a kroz H ravan dobija se tako što se odredi tačka sa kotom (0). tj. od tačke A(2) nanesu se u smeru pada prave vrednosti dva intervala i.

f) Tačka C(5,8) dobija se tako što se sa prave upravne na kotiranu projekciju prave iz tačke 5,8 povuče linija u pravcu strelica do prave veličine duži, zatim do kotirane projekcije prave a.

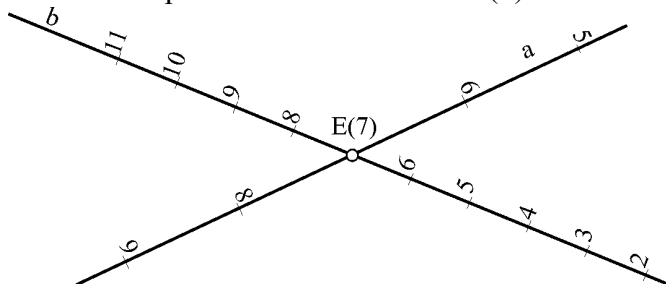
g) Kotirana projekcija tačke D dobija se tako što se iz podeljka 4 sa ose X povuče spona do kotirane projekcije prave a, dok se njena kota (5,2) dobija na način koji je već objašnjen.



Sl. 12.12: Određivanje prave veličine duži  $A^0B^0$ , intervala  $i$ , pada  $p$  i tačaka C i D na duži (Zadatak 12.2.)

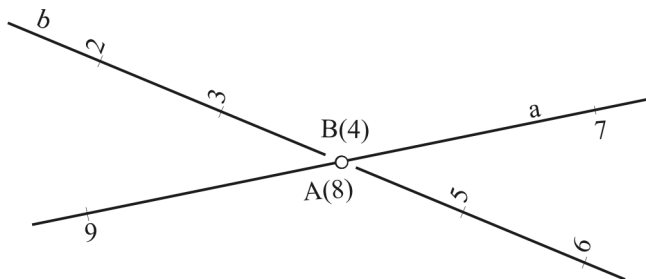
### 12.3.5. Kotirana projekcija presečnih, mimoilaznih i paralelnih prava

Kada se dve prave seku njihova zajednička tačka (presečna tačka) na kotiranoj projekciji ima istu kotu, posmatrana kao tačka na jednoj i kao tačka na drugoj pravoj. Na primeru sa sl. 12.13 tačka E(7) ima istu kotu kada se posmatra kao tačka na pravoj a i kao tačka na pravoj b, što znači da se prave a i b seku u tački E(7).



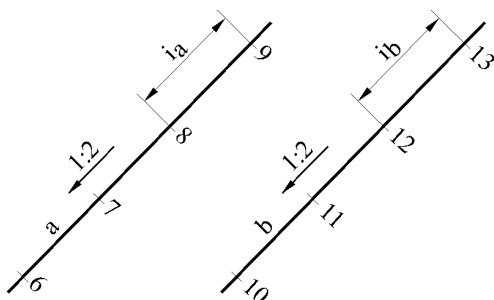
Sl. 12.13: Kotirana projekcija presečnih prava a i b (presečna tačka E ima istu kotu)

Kada se dve prave mimoilaze njihova presečna tačka sa kotirane projekcije nema istu kotu (sl. 12.14). Presečna tačka A na pravoj a ima kotu (8), a na istom mestu na kotiranoj projekciji je i tačka B na pravoj b čija je kota (4). Pošto su im kote različite, tačke A i B nemaju isti položaj u prostoru, te se ove dve prave a i b mimoilaze. Prava a je iznad, a prava b ispod, te se na mestu sečenja njihovih kotiranih projekcija prava b ne vidi.

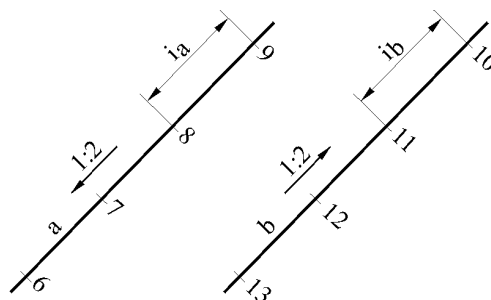


Sl. 12.14: Kotirana projekcija mimoilaznih prava (presečna tačka ima različite kote)

Kada su dve prave međusobno paralelne tada su im: kotirane projekcije međusobno paralelne, isti intervali prava ( $i_a = i_b$ ), iste vrednosti pada ( $p_a = p_b$ ) i isti smerovi pada (sl. 12.15). U slučaju da nešto od navedenog nije ispunjeno prave nisu paralelne, kao npr. prave a i b sa sl. 12.16. nisu međusobno paralelne, iako su im kotirane projekciju paralelne, imaju iste vrednosti intervala, iste vrednosti pada, jer su im suprotni smerovi pada.



Sl. 12.15: Kotirana projekcija paralelnih prava

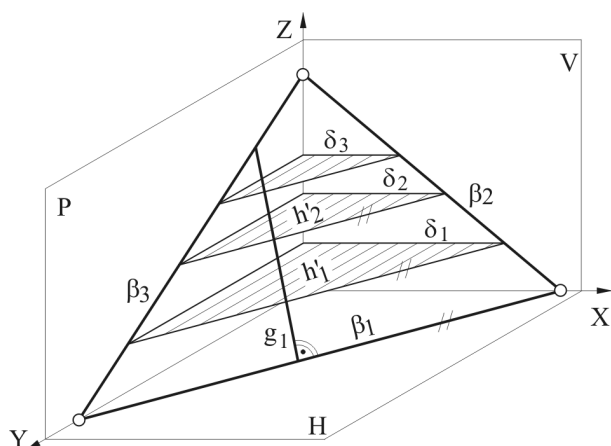
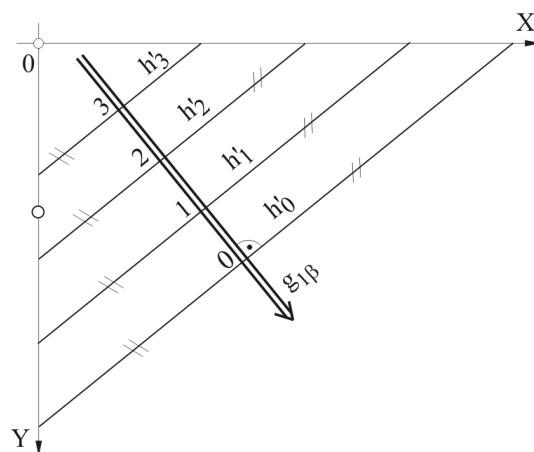


Sl. 12.16: Prave a i b nisu međusobno paralelne

#### 12.4. KOTIRANA PROJEKCIJA RAVNI

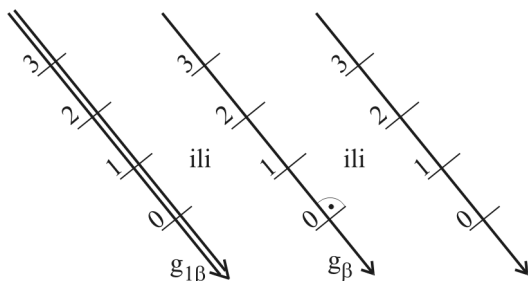
Kada se proizvoljna pločasta ravan  $\beta$  iseče sa ravnima  $\delta_1, \delta_2, \dots$  koje su paralelne sa H ravni, čija su međusobna rastojanja jednaka jednoj dužinskoj jedinici i čija su rastojanja od H ravni celi brojevi (1, 2, ...) dobijaju se horizontale h (paralelne su sa H ravni i prvim tragom  $\beta_1$ ) (sl. 12.17). Prve projekcije ovih horizontala  $h_1', h_2', \dots$  nazivaju se izohipsama ravni. Pored izohipsi na kotiranoj projekciji ravni crta se i prva nagibnica  $g_1$  ravni  $\beta$  koja je upravna na prvi trag  $\beta_1$  i na izohipse. Prva nagibnica ravni naziva se linijom glavnog pada. Ravan na kotiranoj projekciji predstavlja se izohipsama (horizontalama) i linijom glavnog pada (prvom nagibnicom). Izohipse su međusobno paralelne i upravne na liniju glavnog pada. Linija glavnog pada je prava na ravni  $\beta$  koja zaklapa isti ugao sa H ravni kao i ravan  $\beta$ . Ugao svih ostalih proizvoljnih prava na ravni  $\beta$  prema H ravni je manji od ugla koji zaklapa linija glavnog pada.

Nakon obaranja horizontalne projekcijske ravni obaraju se i izohipse (prve projekcije horizontala), kao i linija glavnog pada (prva projekcija prve nagibnice  $g_1'$ ) (sl. 12.18). Prva projekcija prve nagibnice najčešće se crta dvema međusobno paralelnim linijama. Izohipse se označavaju kotama koje se pišu uz liniju glavnog pada. Linija glavnog pada ima strelicu usmerenu od većih ka manjim kotama.

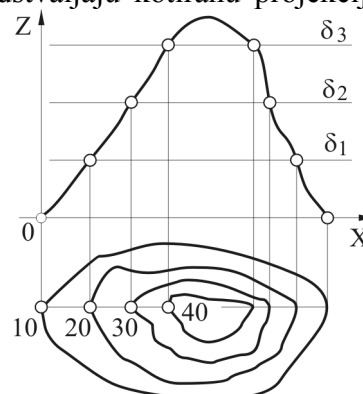
Sl. 12.17: Kotirana projekcija ravni  $\beta$  u prostoruSl. 12.18: Kotirana projekcija ravni  $\beta$  nakon obaranja H ravni

Ravan se na kotiranoj projekciji još jednostavnije prikazuje i to samo linijom glavnog pada (prvom projekcijom prve nagibnice) i smerom pada. Izohipse (prve projekcije horizontala) se ne crtaju, već se označavaju njihove kote, a podrazumeva se da su upravne na liniju glavnog pada (sl. 12.19).

Ravan koja nije pločasta, već valovita kakav je teren u prostoru, takođe se na kotiranoj projekciji, crta pomoću izohipsi (sl. 12.20). Konfiguracija zemljišta (teren) zamišljeno se iseče sa hirizontalnim ravnima  $\delta_1, \delta_2, \dots$  čije su kote celi brojevi i dobijene figure (zatvorene ili otvorene krive linije) su izohipse, koje predstavljaju kotiranu projekciju tog zemljišta.



Sl. 12.19: Označavanje ravni sa linijom glavnog pada



Sl. 12.20: Kotirana projekcija terena (zemljišta)

#### 12.4.1. Nagibni ugao $\varphi_{\beta}$ , interval $i_{\beta}$ i pad $p_{\beta}$ ravni $\beta$

Parametri koji definišu ravan u vidu ploče (pločastu ravan) su oni parametri koji definišu njegovu liniju glavnog pada (prvu nagibnicu).

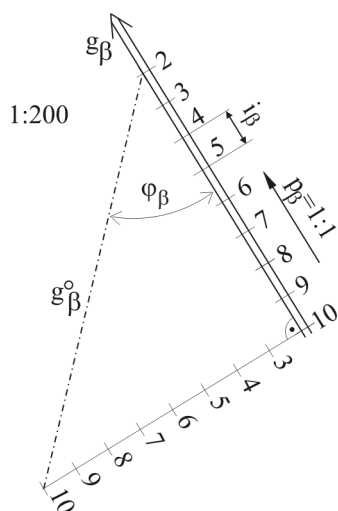
Ugao nagiba  $\varphi_{\beta}$ , interval  $i_{\beta}$  i pad  $p_{\beta}$  ravni  $\beta$  određuje njegova linija glavnog pada (sl. 12.21). Obaranjem linije glavnog pada dobija se nagibni ugao ravni  $\beta$  prema H ravni  $\varphi_{\beta}$ . Interval  $i_{\beta}$  je rastojanje dve tačke na kotiranoj projekciji linije glavnog pada čija je razlika kota jedan. Razmera crtanja na ovom primeru je 1:200, tj.  $U_L = 1 \text{ m} / 5 \text{ mm}$  ( $1000:200 = 5 \text{ mm}$ ), ili  $1 \text{ m} \Rightarrow 5 \text{ mm}$ . Interval ravni  $i_{\beta}$  je, npr. duž  $\overline{45}$  umnožena sa razmerom  $U_L$ , te je



$i_{\beta} = \overline{45} \cdot U_L = 5 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{5 \text{ mm}} = 1 \text{ m}$ . Pad  $p_{\beta}$  se određuje iz jednakosti  $p_{\beta} = \frac{1}{i_{\beta}} = \frac{1}{1} = 1$  ili 100 %.

Ugao  $\varphi_{\beta}$  ravni  $\beta$  prema H ravni je  $\text{tg } \varphi_{\beta} = 1$ , odnosno  $\varphi = 45^{\circ}$ .

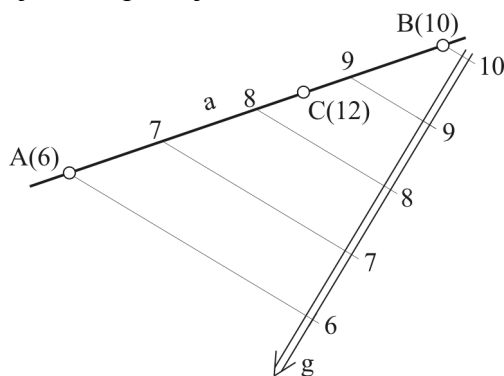
**Što je veća vrednost pada ravni  $p_{\beta}$ , ravan je strmija i obrnuto. Što je veća vrednost intervala ravni  $i_{\beta}$ , ravan je manje strma i obrnuto.**



Sl. 12.21: Nagibni ugao  $\varphi_{\beta}$  interval  $i_{\beta}$  i pad  $p_{\beta}$  ravni  $\beta$

#### 12.4.2. Prava i tačka na ravni

Prava je na ravni ako presečne tačke izohipsi ravni i prave imaju iste kote. Tačka je na ravni ako se nalazi na pravoj koja je na ravni. Neka je zadata ravan čija je linija glavnog pada kao na sl. 12.22. Prava a je na ravni jer se seče sa izohipsama ravni u tačkama čije su kote iste (6, 7, 8...). Tačka A(6) je na ravni jer ima istu kotu kao prava a, koja je na ravni. Tačka C(12) nije ni na pravoj, niti na ravni.



Sl. 12.22: Prava a i tačka A leže na ravni, tačka C ne leži na pravoj, niti na ravni

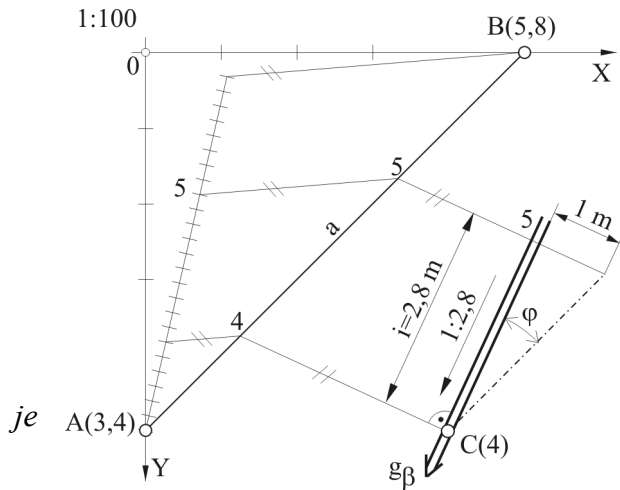
#### Zadatak 12.3

Odrediti interval, pad i nagibni ugao ravni  $\beta$  prema H ravni. Ravan  $\beta$  je zadata tačkama A(0;5;3;4), B(5;0;5;8) i C(4;5;4). Razmeru crtanja usvojiti.

Usvojena je razmera crtanja 1:100. Nacrtaju se kotirane projekcije zadatih tačaka A, B i C. Kroz dve tačke, npr. A i B povuče se prava a koja se izgradi (sl. 12.23). Graduiranje prave objašnjeno je uz sliku 12.7.

Izohipsa ravni dobija se kada se spoji kota 4 sa prave a i tačka C čija je kota, takođe, 4. Linija glavnog pada dobija se kada se iz tačke C povuče linija upravna na izohipsu 4C(4). Sledeći podeljak (5) na liniji glavnog pada dobija se tako što se iz kote 5 sa duži AB povuče još jedna izohipsa paralelna sa izohipsom 4. Odredi se prava veličina intervala 4,5 i dobija nagibni ugao  $\varphi_{\beta}$ .

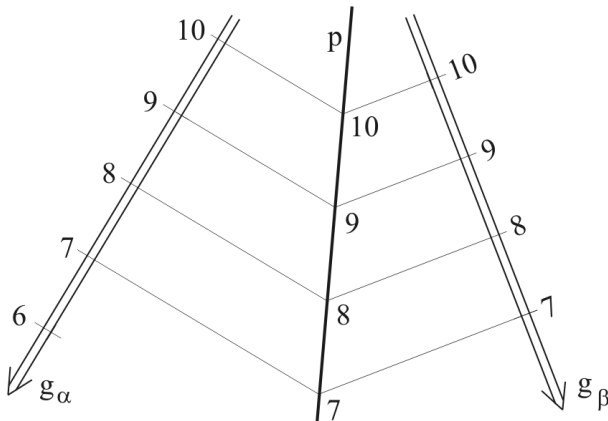
Interval  $i_\beta$  predstavlja odsečak  $\overline{45}$  pomnožen sa razmerom  $U_L = \frac{1\text{ m}}{10\text{ mm}}$ , tj.  $i_\beta = 28\text{ mm} \frac{1\text{ m}}{10\text{ mm}} = 2,8\text{ m}$ . Pad ravni  $\beta$  je  $p_\beta = \frac{1}{i_\beta} = \frac{1}{2,8} = 1:2,8 = 0,35714 = 35,71\%$ . Ugao  $\varphi_\beta$  dobija se iz relacije da je  $\text{tg } \varphi_\beta = 0,35714$ , te je  $\varphi_\beta \approx 19^\circ$ .



Sl. 12.23: Određivanje  $i_\beta$ ,  $p_\beta$  i  $\varphi_\beta$  ravni koja zadata tačkama A, B i C (Zadatak 12.3.)

#### 12.4.3. Presek dveju ravni

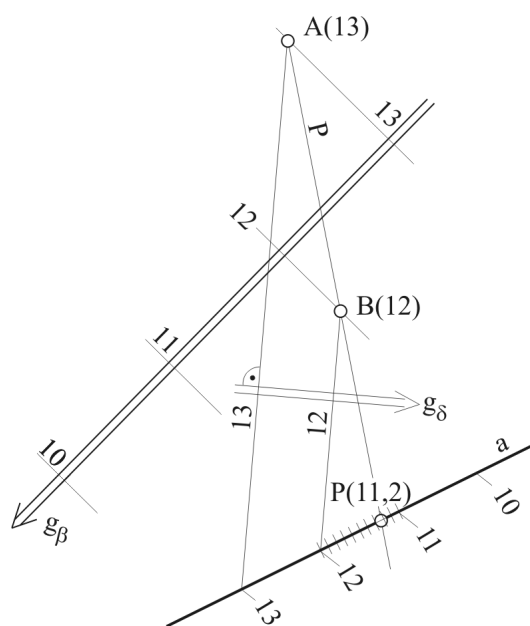
Presek dveju ravni dobija se u preseku izohipsi ravni čije su vrednosti kota iste. U preseku dveju ravni dobija se presečnica p (sl. 12.24). Neka su zadate ravni  $\alpha$  i  $\beta$  linijama glavnog pada  $g_\alpha$  i  $g_\beta$  čiju presečnicu treba odrediti. U preseku izohipsi sa istim kotama, npr. 7 i 7, zatim 8 i 8 itd. dobijaju se tačke koje određuju presečnicu p ravni  $\alpha$  i  $\beta$ .



Sl. 12.24: Određivanje preseka dveju ravni (presečnice p)

#### 12.4.4. Prodor prave kroz ravan

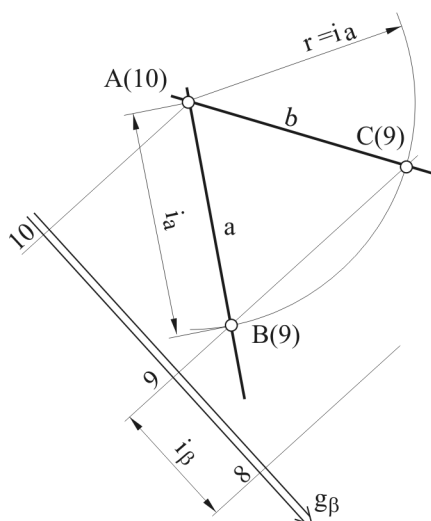
Prodor prave a kroz ravan  $\beta$  koja je zadata linijom glavnog pada  $g_\beta$  određuje se na isti način kao kod ortogonalnih projekcija. Postavi se pomoćna ravan  $\delta$  kroz pravu a i odredi presečnica p ravni  $\beta$  i pomoćne ravni  $\delta$ . Izohipse pomoćne ravni  $\delta$  su proizvoljne. U preseku prave a i presečnice p dobija se prodor P prave a kroz ravan  $\beta$  koja je zadata linijom glavnog pada  $g_\beta$  (sl. 12.25). Kroz cele podeljke prave a proizvoljno se nacrtaju izohipse pomoćne ravni  $\delta$ . U preseku izohipsi sa istim kotama (13 sa 13 i 12 sa 12) dobijaju se tačke A(13) i B(12) koje određuju presečnicu p. U preseku presečnice p i prave a dobija se prodor P prave a kroz ravan  $\beta$ . Graduiranjem podeljka od 11 do 12 dobija se kota prodora P(11,2).



Sl. 12.25: Određivanje prodora P prave  $a$  kroz ravan  $\beta$  zadatu linijom glavnog pada  $g_\beta$

#### 12.4.5. Prava na ravni sa određenim padom

Prave na ravni imaju različite padove. Najveći pad ima linija glavnog pada, a najmanji isohipse. Kada se želi nacrtati prava  $a$  na ravni  $\beta$  sa određenim (zadatim) padom tada se iz proizvoljne tačke na izohipsi ravni (tačke  $A(10)$ ) nacrtaju radijus  $r = i_a$  i gde seče susednu izohipsu ravni dobijaju se tačke  $B(9)$  i  $C(9)$  (sl. 12.26). Spajanjem tačke  $A$  sa  $B$  i  $C$  dobijaju se dve mogućnosti za pravu  $a$  koja leži na ravni  $\beta$ , a ima nagib  $i_a$  koji je bio zadat. Pri tome mora biti ispunjen uslov da je  $i_a > i_\beta$ , jer ne može biti prava na ravni sa manjim intervalom od intervala ravni, ili, drugim rečima, ne može biti prava na ravni, a da ima veći pad od pada ravni.



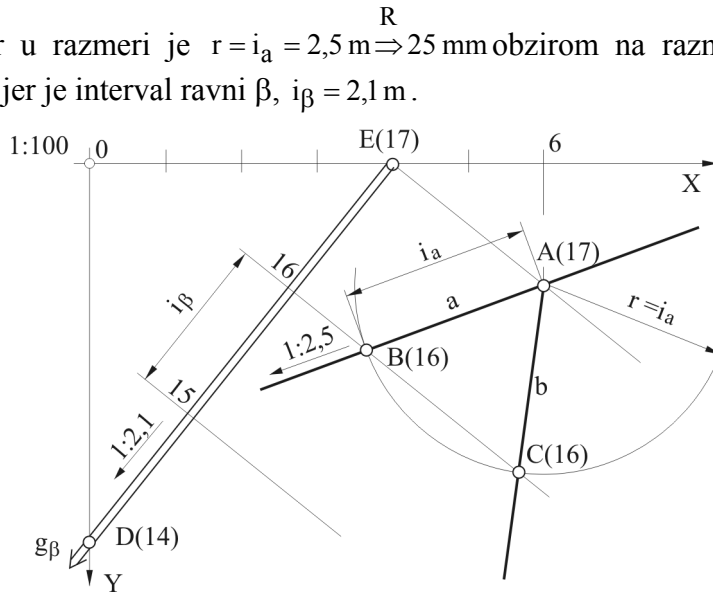
Sl. 12.26: Prava na ravni sa zadatim padom

#### Zadatk 12.4.

Kroz tačku  $A(6;?;17)$  nacrtati pravu  $a$  čiji je pad  $p=1:2,5$  tako da leži na ravni  $\beta$  čija je linija glavnog pada određena tačkama  $D(0;5;14)$  i  $E(4;0;17)$ .

Nacrta se linija glavnog pada, izgradi se i povuku izohipse ravni (sl. 12.27). Iz šestog podeljka sa ose  $X$  spusti se spona do izohipse kote 17 i u preseku sa njom dobija se kotirana projekcija tačke  $A(17)$ . Iz tačke  $A$  šestarom otvora  $r = i_a = 2,5$  m nacrtaju se luk  $u$  u preseku sa susednom izohipsom (16) dobijaju se tačke  $B$  i  $C$ , a time i tražene prave  $a$  i  $b$ . Vrednost

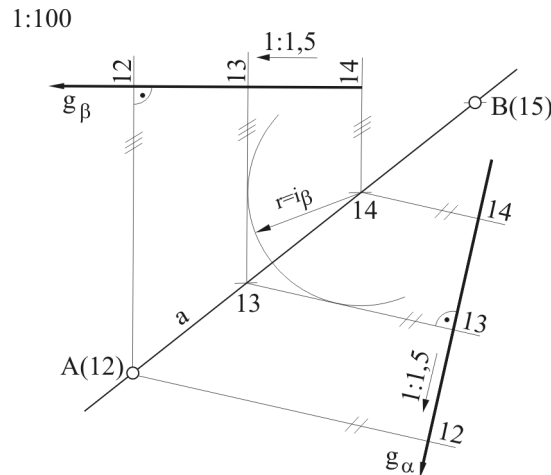
radijusa  $r$  u razmeri je  $r = i_a = 2,5 \text{ m} \Rightarrow 25 \text{ mm}$  obzirom na razmeru 1:100. Pad ravni  $\beta$  je  $p_\beta = 1:2,1$ , jer je interval ravni  $\beta$ ,  $i_\beta = 2,1 \text{ m}$ .



Sl. 12.27: Crtanje prave  $a$  i  $b$  sa zadatim padom  $i_a$  (Zadatak 12.4.)

#### 12.4.6. Ravan određenog pada kroz pravu

Ovde se zadatak postavlja obrnuto nego u prethodnoj tački. Treba postaviti ravan pod određenim padom, a da pri tome prolazi kroz pravu. Neka je zadata prava tačkama  $A(0;4;12)$  i  $B(6;0;15)$  kroz koju treba postaviti ravan pada  $p_\beta = 1:1,5$ . Tada se iz celog podeljka sa prave  $a$ , npr. podeljka 14 nacrtava krug radijusa  $r = i_\beta = 1,5 \text{ m} \Rightarrow 15 \text{ mm}$  (jer je razmera 1:100) što predstavlja interval linije glavnog pada tražene ravni (sl. 12.28). Iz susednog podeljka (13) povuče se linija, tako da tangira kružnicu, koja predstavlja izohipsu tražene ravni. Uvek postoje dve mogućnosti za traženu ravan, koje su određene linijama glavnog pada  $g_\beta$  i  $g_\alpha$ .



Sl. 12.28: Crtanje ravni određenog pada kroz pravu

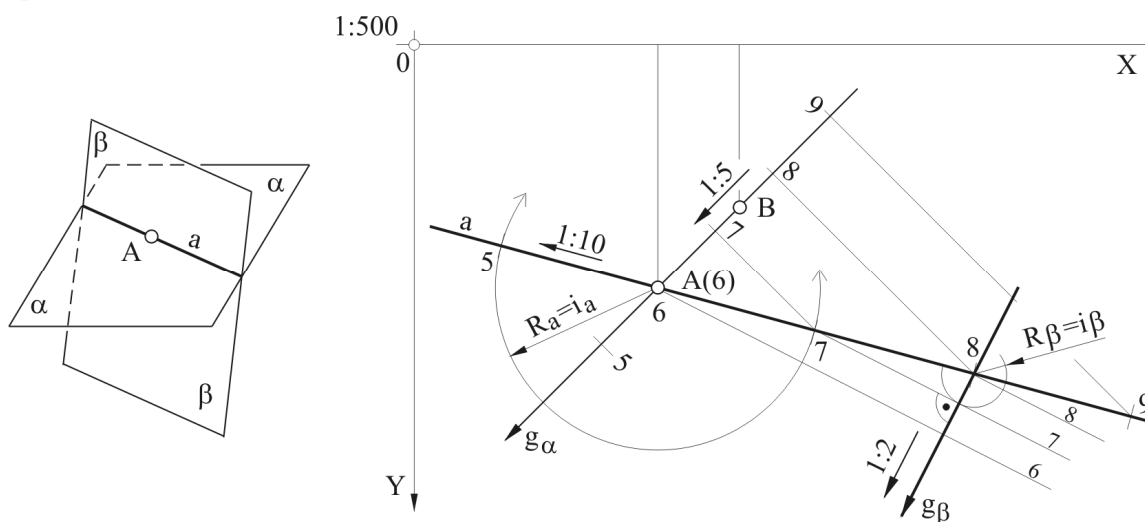
#### Zadatak 12.5.

Ravan  $\alpha$  je zadata nagibnicom koja prolazi kroz tačke  $A(3;3;6)$  i  $B(4;2;?)$  sa padom  $p_\alpha = 20\%$ . Nacrtati pravu  $a$  koja leži na ravni  $\alpha$  i prolazi kroz tačku  $A$  sa padom  $p_a = 10\%$ , zatim kroz ovu pravu  $a$  postaviti ravan  $\beta$  sa padom  $p_\beta = 50\%$  (sl. 12.29, levo).

Nacrta se i izgradura linija glavnog pada ravni  $\alpha$  ( $g_\alpha$ ). Pad ravni  $\alpha$  je 20%, tj.  $p_\alpha = 20\%$ , odakle je interval ravni  $i_\alpha = 5$  m ( $i_\alpha = 1/0,2 = 5$  m), što u usvojenoj razmeri 1:500

iznosi 10 mm ( $1\text{ m} \stackrel{R}{\Rightarrow} 2\text{ mm}$ ). Iz tačke A kroz koju treba da prolazi prava a nacrtana luk radijusa  $R_a = i_a = 10$  m, što u razmeri iznosi 20 mm, jer je pad prave a,  $p_a = 10\%$ , odakle je  $i_a = 10$  m. U preseku ovog radijusa i susednih izohipsi ravni  $\alpha$  (izohipsi 5 ili 7) dobija se interval prave a koja se na taj način izgraduirala. Spajanjem tačke A(6) i kote 5 prave a, dobija se kotirana projekcija prave a.

Linija glavnog pada ravni  $\beta$  dobija se tako što se iz proizvoljnog podeljka prave a (npr. podeljka 8) nacrtana luk čiji je poluprečnik jednak  $R_\beta = i_\beta = 2$  m, jer je  $p_\beta = 50\%$ , odakle je  $i_\beta = 2$  m, što u razmeri iznosi 4 mm. Iz susednog podeljka 7 prave a povuče se tangenta na ovaj luk i tako dobija izohipsa ravni  $\beta$ . Linija glavnog pada ravni  $\beta$ ,  $g_\beta$  je upravna na dobijenu izohipsu 7. Na proizvoljnom mestu nacrtana se linija glavnog pada ravni  $\beta$  (sl. 12.29). Analizom postavke i rešenja zadatka uočava se da tačka A pripada pravoj a i ravnima  $\alpha$  i  $\beta$ , jer posmatrana kao tačka na njima ima uvek kotu 6.



Sl. 12.29: Međusobni odnos tačke, prave i ravni (Zadatak 12.5.)

## 12.5. PRIMENA KOTIRANE PROJEKCIJE

Kotirana projekcija ima primenu u izradi tehničke dokumentacije velikih prostora: za izgradnju i održavanje meliorativnih objekata, za prikazivanje zemljišta i njegove pripreme za izgradnju građevinskih objekata, za izgradnju puteva, kanala i sl. kao i pri izradi projekata pejsažne arhitekture.

### 12.5.1. Određivanje i crtanje nasipa i useka

Pri uređivanju zemljišta (realnog terena) potrebno je neke delove poravnati, neke usecati, nasipati, bušiti za polaganje cevi, za tunele i slično ili prokopati kanale za odvodnjavanje i navodnjavanje itd. sve zavisno od naših potreba i želja.

#### Određivanje granice useka i nasipa za plato

Na zatečenom nagnutom zemljištu, ako želimo napraviti ravan plato (horizontalan, bez nagiba) ili horizontalan put, neke delove zemljišta je potrebno usecati, a neke nasipati. Granica useka i nasipa se dobija u preseku isohipsi platoa i terena jednakih vrednosti kota.

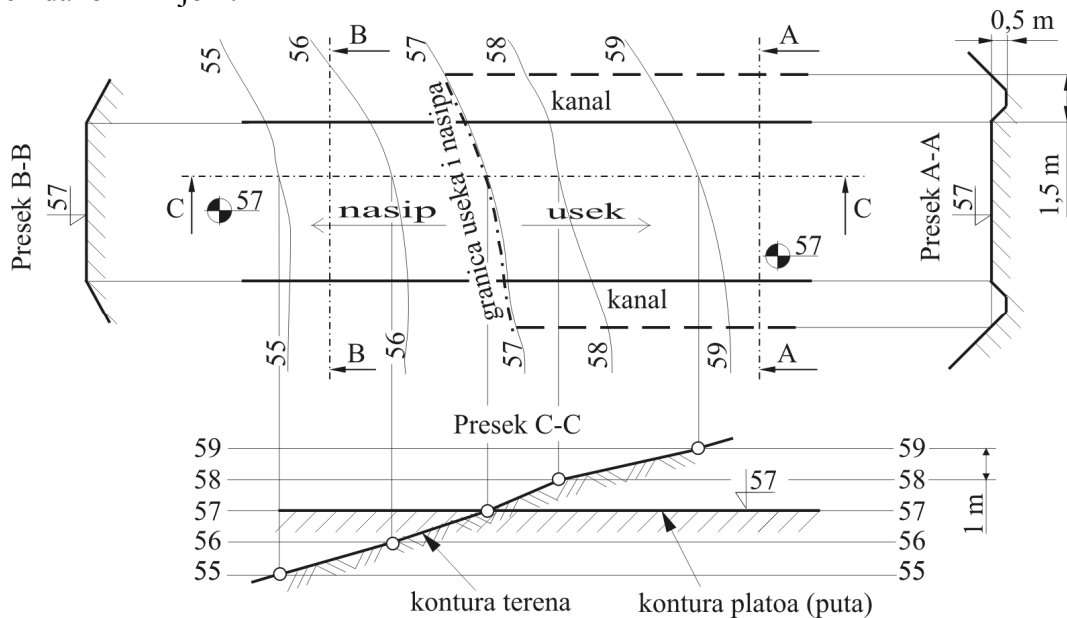
Granica useka i nasipa na primeru sa sl. 12.30 je u preseku izohipse terena kote 57 i puta kote 57 i obično se crta linijom crta, tačka crta.

Grafički simbol za označavanje vrednosti kota u pogledu odozgo je  $\ominus \overset{57}{\rule{0.5ex}{0.4pt}}$ , a u pogledu spreda  $\sqrt{\overset{57}{\rule{0.5ex}{0.4pt}}}$ .

Na desnu stranu od granice useka i nasipa, izohipse terena 57, potrebno je teren useći kako bi se dobio horizontalan put. Na desnoj strani su kote terena 58 i 59 veće od potrebne kote puta 57, te je na toj strani usek. Levo od granice, kote terena 56 i 55 su manje od potrebne kote puta 57, te je na toj strani potrebno nasuti teren da bi se dobio horizontalan put.

Znači, usek je onaj deo platoa koji treba useći (iskopati) jer treba da je niži od terena, a nasip predstavlja onaj deo platoa koji treba nasuti, jer treba da je viši od terena, da bi ceo plato bio horizontalan na koti 57.

Na delu puta gde je usek, potrebno je napraviti kanal za odvod atmosferskih padavina, određenog oblika i širine. Najčešće je to kanal širine  $3 \times 0,5$  m, dubine 0,5 m sa padom bočnih strana kanala 1:1. Pored toga kanal treba da ima i uzdužni pad, o čemu neće biti reči, jer nije deo ovog predmeta. Dimenzije kanala zavise od širine puta, količine padavina, vrste zemljišta itd. što je propisano određenim standardima i tehničkim normama. Kanal se obično crta isprekidanom linijom.



Sl. 12.30: Određivanje granice useka i nasipa za plato i crtanje preseka

Na kotiranoj projekciji potrebno je nacrtati određen broj uzdužnih i poprečnih zamišljenih preseka, što zavisi od toga šta crtamo i za koje potrebe crtamo. Na sl. 12.30 nacrtana su dva poprečna preseka sa ravnima A-A i B-B i jedan uzdužni sa ravni C-C. Zamišljeno se preseče teren i put sa ravni sečenja koja je upravna na teren po liniji sečenja (označena osnom linijom) i posmatra se presek u smeru strelica. Dobijena ortogonalna projekcija okrene se za  $90^\circ$  u smeru strelica preseka i nacrtava se uporedo sa kotiranom projekcijom na levoj ili desnoj strani, zavisno od toga gde ima mesta, a može se nacrtati na bilo kojem drugom mestu. Sa presekom A-A prikazan je deo puta na kojem će biti usek, a sa ravni B-B deo gde će biti nasip. Uzdužni presek (C-C) se crta ispod ili iznad kotirane projekcije, ili na nekom drugom mestu. Što veći broj preseka detaljnije će se prikazati teren i put.

Uzdužni presek (i svi ostali) dobija se na taj način što se povuku linije paralelne sa ravni sečenja C-C na međusobnom rastojanju od 1 m u razmeri. Označe se kote od niže ka višoj, 55 56... Povuču se linija za plato na koti 57 i stavi odgovarajuća oznaka  $\sqrt{\overset{57}{\rule{0.5ex}{0.4pt}}}$ . Od tačaka sečenja

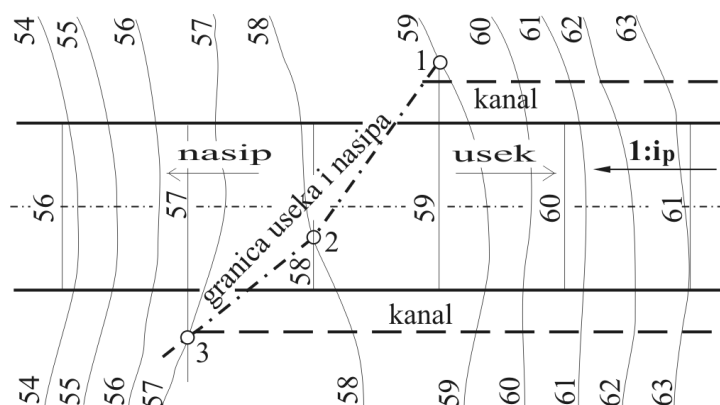
izohipsi terena i presečne ravni C-C povlače se linije do odgovarajući kota na preseku C-C. Dobijene tačke se spoje i dobija se kontura terana.

Presek platoa, puta... (svoga onog što se na terenu pravi) šrafira se uz konturu platoa u smeru ka središtu zemlje. Šrafura za sve ono što na terenu pravimo su tanke međusobno paralelne linije prvenstveno pod uglom od  $45^\circ$  usmerene na jednu ili drugu stranu  $////$ . Kontura terena (zatečeno stanje) šrafira se naizmeničnom šrafurom  $\\//\\//\\//$  ili unakrsnom  $\\times\\times\\times\\times\\times\\times$ , takođe usmerenom ka središtu zemlje.

### **Određivanje granice useka i nasipa za put sa padom**

Granica useka i nasipa za put sa padom ( $1:i_p$ ) na realnom terenu koji je zadat izohipsama dobija se spajanjem tačaka preseka izohipsi puta i terena čije su kote iste (sl. 12.31). U preseku izohipsi 59 puta i 59 terena dobija se tačka 1, u preseku izohipsi 58 puta i 58 terena dobija se tačka 2, a u preseku izohipsi 57 dobija se tačka 3. Spajanjem tačaka 1, 2 i 3 dobija se granica useka i nasipa. Ostale izohipse puta i terena se ne seku. Potrebne su najmanje dve presečne tačke izohipsi da bi se dobila granica useka i nasipa.

Na desnoj strani od granice useka i nasipa je usek (treba useći u teren) zato što su kote terena (63, 62...) veće od potrebnih kota puta (61, 60...). Na levoj strani od granice useka i nasipa je nasip (teren treba nasuti) jer su potrebne kote puta (56, 57) veće od kota terena (54, 55).



Sl. 12.31: Određivanje granice useka i nasipa za put sa padom

### **Crtanje pojasa nasipa i useka za plato**

Nakon određivanja granice useka i nasipa potrebno je odrediti i nacrtati pojas usecanja u teren, kao i pojas nasipanja terena da bi se dobio zadati plato.

**Pri izradi platoa izohipse nasutog i iskopanog terena su paralelne sa ivicama platoa, bez obzira koji oblik ima. Pojas nasipa, kao i useka dobija se u preseku istoimenih (sa istim vrednostima kota) izohipsi terena i izohipsi nasipa i useka koje okružuju plato.**

### **Zadatak 12.6.**

Na pločastom terenu (zemljištu) čija linija glavnog pada prolazi kroz tačke A(4;19;8) i B(7;4;20) treba napraviti horizontalni ravan plato na koti 14 čiji je oblik zadat tačkama C(11;9;?), D(14;11;?), E(13;15;?) i F(8;5;14;?) i označiti pojas useka i nasipa. Pad nasipa je  $p_n = 1:0,75$ , a pad useka je  $p_u = 1:0,5$ .

Nacrta se i uzgradiura linija glavnog pada terena koja prolazi kroz tačke A i B. Nacrtaju se izohipse terena (8, 9... 20) i položaj tačaka platoa C, D, E i F pomoću zadatih koordinata x i y (sl. 12.32). Spajanjem tačaka CD, DE, EF i FC dobijaju se ivice platoa na koti 14. Iznad platoa CDEF kote terena su veće (15, 16...) a ispod su manje (13, 12...), što znači da postoji granica useka i nasipa.

Kako je u pitanju plato, granica useka i nasipa dobija se u preseku kota platoa i terena iste vrednosti (14). Tamo gde izohipsa 14 sa linije AB glavnog pada terena seče plato, dobijaju se tačke G i H koje imaju kotu 14. Linija GH predstavlja granicu nasipa i useka (sl. 12.32, dole).

Deo terena od granične linije GH prema tačkama EF je niži od platoa, što se vidi na osnovu izohipsi terena (13, 12...), te je taj deo platoa potrebno nasutu. Deo platoa od granične linije GH prema tačkama C i D je usek, jer su ove tačke kote 14 niže od kota terena (15, 16...).

Pri izradi platoa izohipse nasutog i iskopanog terena su paralelne sa ivicama platoa. U ovom primeru izohipse useka su paralelne sa ivicama platoa HC, CD i DG, a izohipse nasipa su paralelne sa ivicama platoa GE, EF i FH.

Nacrtaju se linije glavnog pada (nagibnice) koje su upravne na izohipse (ivice platoa) i izgrađiraju se. S obzirom na razmeru crtanja 1:100, rastojanja između izohipsi nasipa su  $7,5$

mm, jer je interval nasipa  $i_n = 0,75 \text{ m} \Rightarrow 7,5 \text{ mm}$ , a rastojanja između izohipsi useka su  $5 \text{ mm}$ ,

jer je interval useka  $i_u = 0,5 \text{ m} \Rightarrow 5 \text{ mm}$ .

Na primer, linija glavnog pada nasute ravni čije su izohipse paralelna sa ivicom EF ima prvu kotu 14, drugu 13, zatim 12 itd. jer se nalaze iznad terena. To važi i za kote izohipsi koje su paralelne sa ivicama EG i FH. Teren na ovom delu nasipamo, sve dotle, dok se ne izjednače kote nasipa i terena.

Linija glavnog pada usečene ravni čije su izohipse paralelna sa ivicom CD ima prvu kotu 14, drugu 15, zatim 16 itd. jer se nalaze ispod terena, odnosno nalaze se na delu useka. To važi i za izohipse paralelna sa ivicama HC i DG. Teren na ovom delu usecama sve dotle, dok se ne izjednače kote useka i terena.

Pojas nasipa, kao i useka dobija se u preseku istoimenih (sa istim vrednostima kota) izohipsi terena i izohipsi nasipa i useka koje okružuju plato. Na primer, tačka 1 pojasa useka HM dobija se u preseku kote 15 izohipse terena i kote 15 izohipse usečene ravni paralelne sa ivicom HC. Tačka 2 dobija se u preseku kote 16 izohipse terena i kote 16 izohipse usečene ravni paralelne sa ivicom HC itd. Spajanjem tačaka H, 1, 2, 3, 4... 6, 5 i G dobija se pojas useka, ograničen tačkama H, M, N i G.

Presečnice  $p_1$  i  $p_2$  tri usečene ravni koje okružuju plato, dobijaju se u preseku istoimenih kota izohipsi usečenih ravni (sa istim vrednostima kota). Na primer, presečnica  $p_1$  dobija se u preseku izohipsi paralelnih sa ivicama HC i CD koje imaju iste kote (15 i 15, zatim 16 i 16...) i predstavlja simetralu ugla ovih dveju ravni usecanja.

Na isti način se dobija i pojas nasipa oivičen tačkama HK, KJ i JG. Na primer, tačka 9 pojasa nasipa, dobija se u preseku kote 13 izohipse terena i kote 13 izohipse nasute ravni paralelne sa ivicom FH. Tačka 10 dobija se u preseku kote 10 izohipse terena i kote 10 izohipse nasute ravni paralelne sa ivicom FH itd. Spajanjem tačaka H, 9, 10... 13 i G dobija se pojas nasipa, ograničen tačkama H, K, J i G.

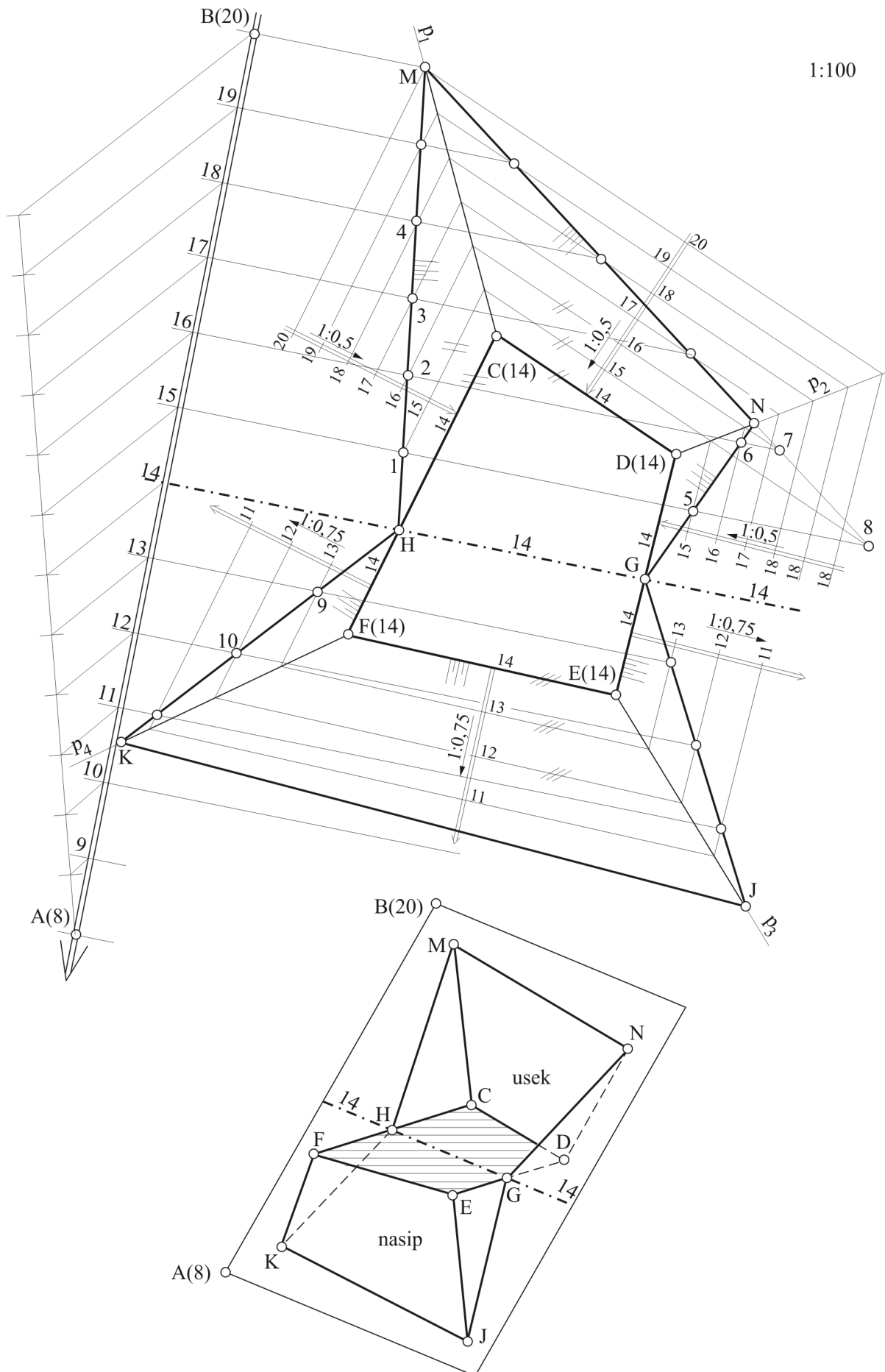
Grafičkim simbolom  $\parallel\parallel$  označi se smer oticanja atmosferskih padavina (od kraćih ka dužim linijama -  $\nabla$ ).

Aksonometrijski prikaz terena (pločaste ravni), platoa, pojasa useka i nasipa prikazan je na sl. 12.32 dole.

Na osnovu ovakvih crteža sa potrebnim brojem preseka, može se izračunati količina zemlje (materijala) koja će se dobiti usecanjem i količina zemlje koja je potrebna da bi se teren nasuo, da bi se izračunali troškovi zemljanih radova.

Vrednosti pada nasipa i useka zavise od mnogobrojnih faktora i okvirno su propisane standardima i tehničkim normama. Pad usecanja, uglavnom je veći od pada nasipanja,  $p_u > p_n$  (strmija je ravan usecanja od ravni nasipanja) ili drugačije izraženo, uglavnom je interval nasipa veći od intervala useka,  $i_n > i_u$ .

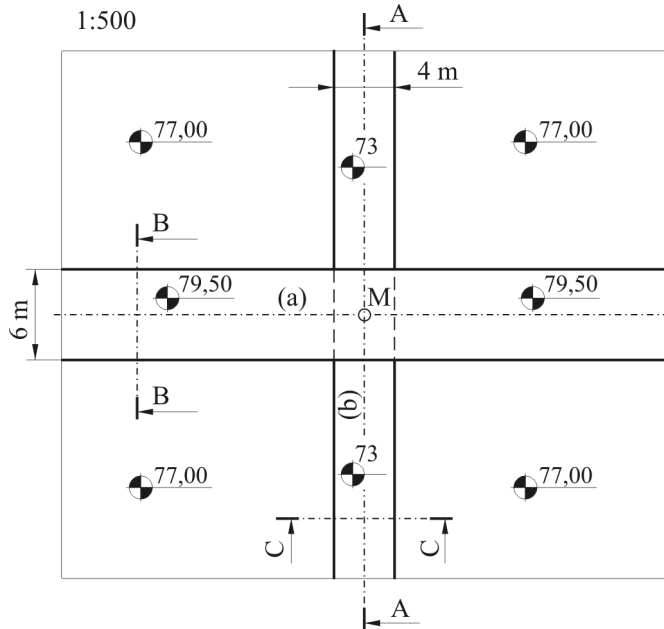




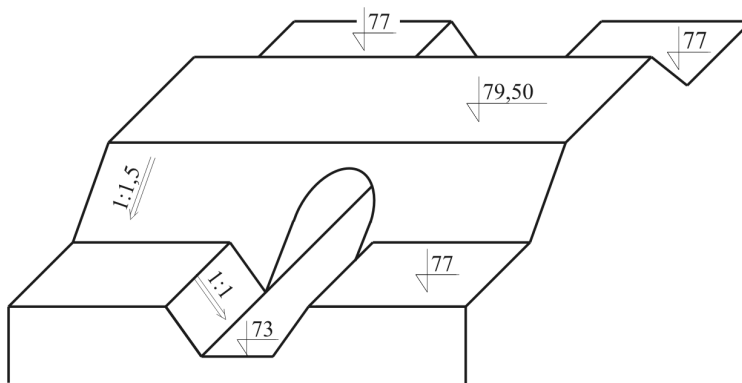
Sl. 12.32: Kotirana projekcija pojasa nasipa i useka platoa (Zadatak 12.6.)

**Zadatak 12.7.**

Odrediti pojas nasipa i useka puta (a) i kanala (b) koji treba da se naprave na ravnom i horizontalnom terenu na koti 77,00. Put je širok 6 m, dno kanala 4 m, a ostali zadati podaci dati su na sl. 12.33. Usvojiti da je pad nasipa puta  $p_{np} = 1:1,5$ , a pad useka kanala  $p_{uk} = 1:1$ . Ose puta i kanala seku se u tački M pod pravim uglom. Propust kanala je širine dna kanala sa polucilindričnim svodom. Nacrtati preseke A-A, B-B i C-C. Razmera crtanja je 1:500. Skica postavke zadatka nacrtana je i u kosoj projekciji na sl. 12.34.



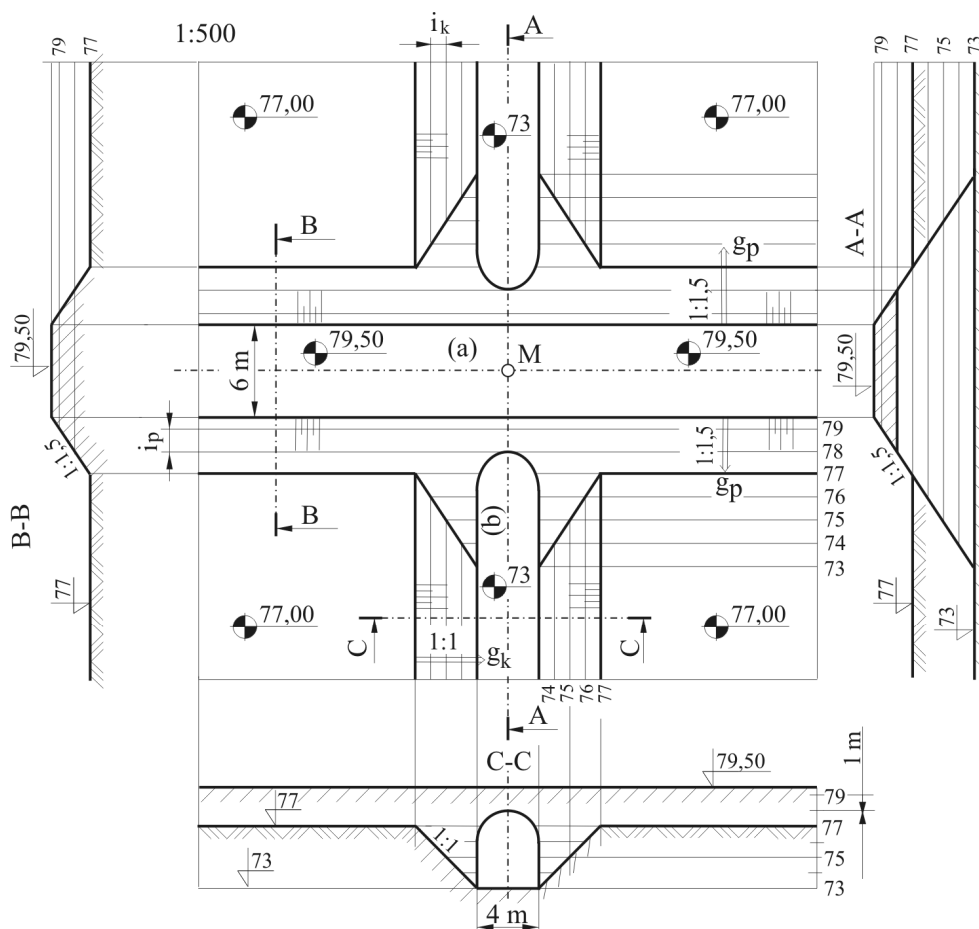
Sl. 12.33: Postavka zadatka 12.7.



Sl. 12.34. Kosa projekcija postavke zadatka 12.7

Nacrtaju se dve horizontalne linije simetrične u odnosu na tačku M širine 12 mm, pošto se  $\overset{R}{6\text{ m}}$  u prirodi u razmeri 1:500 ( $1\text{ m} \Rightarrow 2\text{ mm}$ ) predstavljaju sa 12 mm ( $6 \times 1000 / 500 = 12\text{ mm}$ ) koje predstavljaju put (a). Na isti način nacrtaju se dve paralelne linije simetrične u odnosu na tačku M na rastojanju od 8 mm i upravne na put koje predstavljaju kanal (b) (sl. 12.35).

Nacrtaju se nagibnice puta  $g_p$  (na jednu i drugu stranu puta), koje predstavljaju nasip puta sa jedne i druge strane i njene izohipse intervala od  $i_p = 1,5\text{ m}$  koji u razmeri 1:500 iznosi 3 mm ( $i_p = 1,5\text{ m} \Rightarrow 3\text{ mm}$ ). Takođe se nacrtaju nagibnice kanala  $g_k$ , koje predstavljaju usek kanala sa obe strane puta i izohipse useka na rastojanju od  $i_k = 1\text{ m}$ , a u razmeri 2 mm. Presečnica ravni nasipa i ravni useka dobija se u preseku izohipsi nasipa i useka sa istim vrednostima kota, na način kako je objašnjeno u zadatku 12.6.



Sl. 12.35: Kotirana projekcija puta i kanala (Zadatak 12.7.)

Poprečni presek se dobija kada se put i kanal zamišljeno preseku sa pomoćnom ravni koja je upravna na teren, po osi koja je označena sa A-A i dobijena ortogonalna projekcija okrene za  $90^\circ$  u smeru strelica A-A. Osa A-A predstavlja trag sečenja pomoćne ravni. Da bi se označilo da je to zamišljen, a ne stvaran presek, deo zemljišta koji je došao u dodir sa ravni sečenja, ili se želi u tom preseku pokazati, označi se šrafurom. Na isti način odredi se presek sa ravni B-B i C-C.

Na preseku A-A prikazan je nasuti deo puta od kote 77,00 do kote 79,50 i usek do dna kanala kote 73,00. Na preseku B-B prikazan je samo put od početne kote 77,00 i nasuti deo puta do kote 79,50. Na preseku C-C prikazan je kanal nastao usekom od kote 77,00 do kote 73,00 sa nasutim putem u pozadini.

### Zadatak 12.8

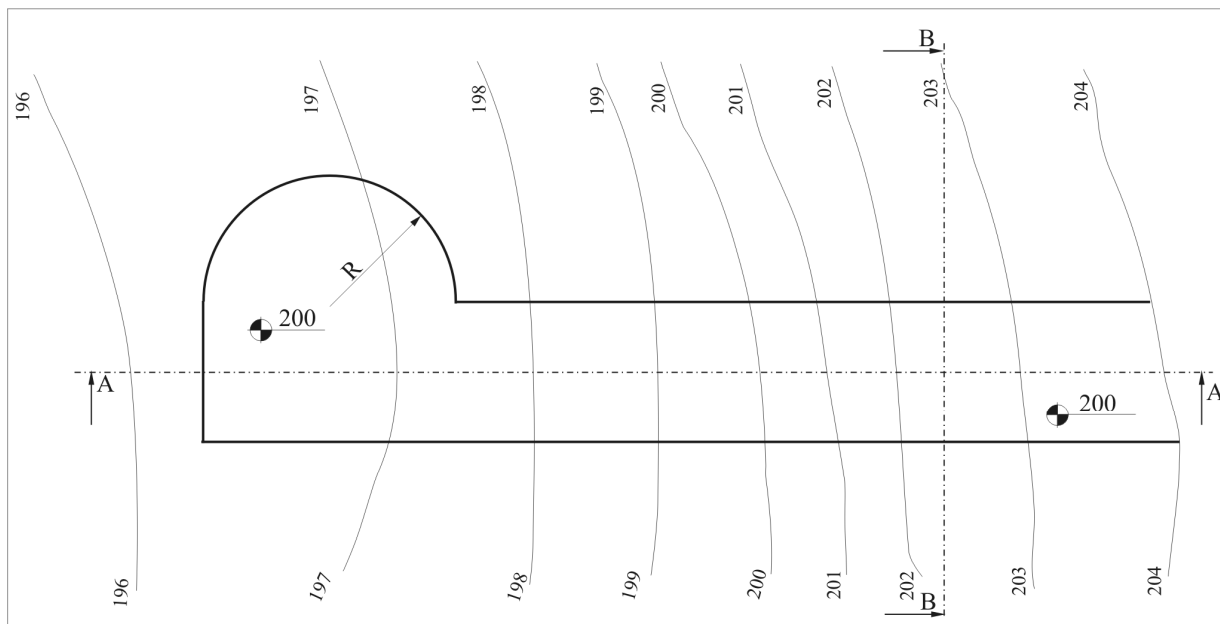
Nacrtati kotiranu projekciju horizontalanog platoa na koti 200, odrediti granični pojas useka i nasipa i nacrtati preseke sa ravnima A-A i B-B (sl. 12.36). Teren je zadat izohipsama od kote 196 do kote 204. Pad useka je  $p_u = 1:1$ , a nasipa  $p_n = 1:1,5$ . Širina kanala je  $b_k = 1$  m.

Granica useka i nasipa dobija se u preseku isohipse 200 terena i platoa koji je na koti 200 (sl. 12.37). Iznad od ove granice je usek, jer su kote platoa manje od kote terena, dok je ispod nasip, jer su kote platoa veće od kote terena.

Na delu useka predviđen je kanal ukupne širine od 1 m što u razmeri iznosi 5 mm, jer je razmera  $1:200$  ( $1 \text{ m} \Rightarrow 5 \text{ mm}$ ).

Oko platoa na delu gde je usek nacrtaju se izohipse na rastojanju od 5 mm ( $i_u = 1 \text{ m} \Rightarrow 5 \text{ mm}$ ) računajući od ivice kanala, a na delu gde je nasip izohipse na rastojanju od 7,5 mm ( $i_n = 1,5 \text{ m} \Rightarrow 7,5 \text{ mm}$ ) računajući od kontura platoa. Izohipse nasipa i useke su paralelne sa konturnim ivicama platoa.

1:200



Sl. 12.36: Određivanje pojaseva useka i nasipa horizontalnog platoa (postavka zadatka 12.8)

U preseku istoimenih izohipsi useka ili nasipa i terena dobijaju se granice pojasa useka i nasipa (sl. 12.37). Na primer u preseku izohipse platoa kote 200 (kraj kanala) i isohipse terena kote 200 dobija se tačka pojasa 1. U preseku izohipse useka kote 201 i isohipse terena kote 201 dobija se tačka pojasa 2. U preseku izohipse useka kote 202 i isohipse terena kote 202 dobija se tačka pojasa 3 itd. Spajanjem tačaka 1, 2, 3 itd. dobija se pojas useka sa jedne, kao i sa druge strane puta. Na isti način se dobija pojas nasipa.

Preseci A-A i B-B dobijaju se kao što je opisano uz sliku 12.30. Za dobijanje poprečnog preseka sa ravni sečenja B-B potrebno je nacrtati potreban broj horizontalnih linija na rastojanju od 5 mm što u razmeri predstavlja 1 m u stvarnosti. Prvo se crta put sa izohipsama useka, a zatim izohipse terena, ili obrnuto, svedjedno je.

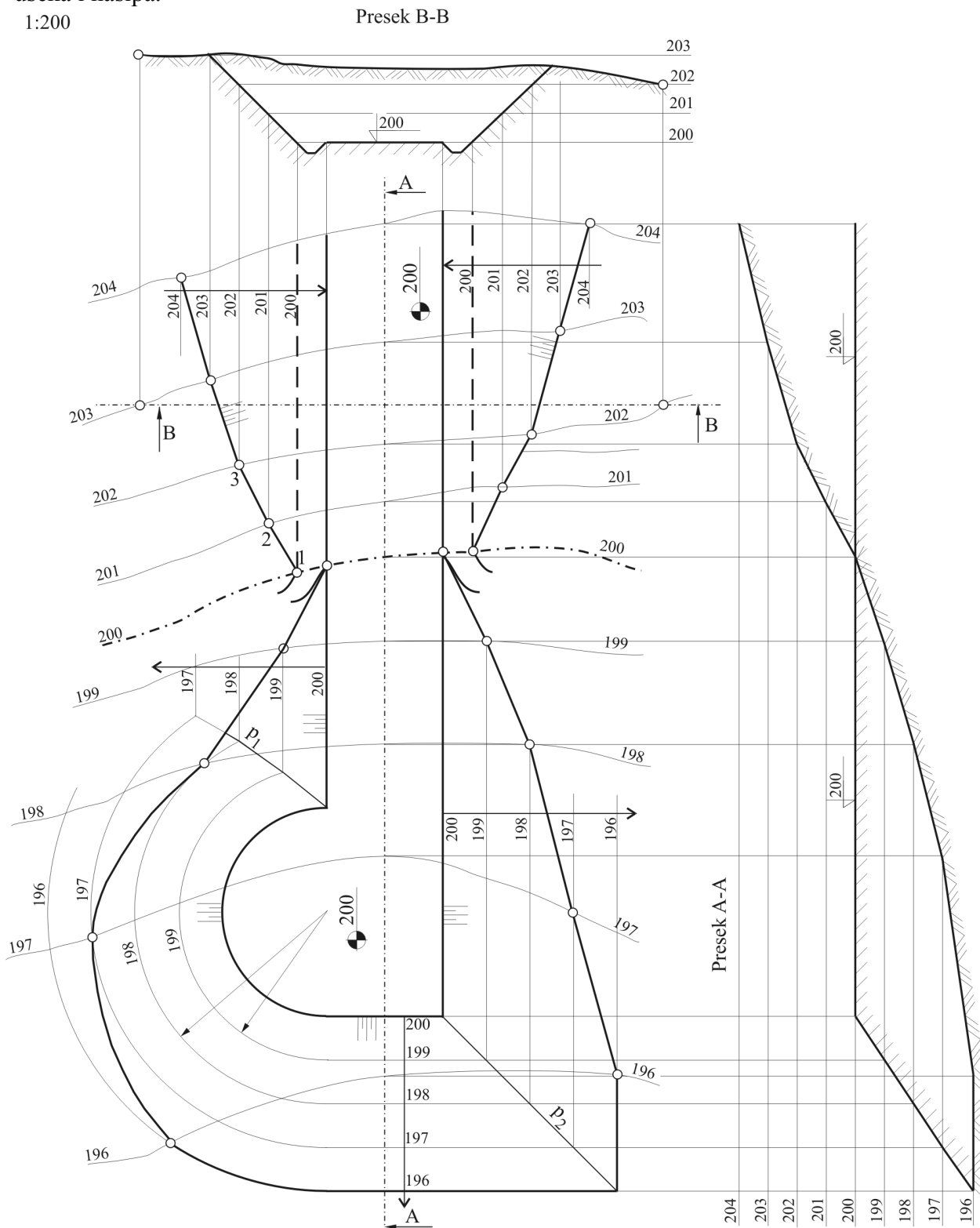
U produžetku pomoćnih vertikalnih linija sa ivica puta i kanala dobija se poprečni presek puta na koti 200 kao i kanala. Od tačaka sečenje izohipsi useka i ravni sečenje B-B povlače se pomoćne vertikalne linije do odgovarajućih kota na horizontalnim linijama. Tačke poprečnog preseka useka (kontura puta sa usekom) dobijaju se u preseku pomoćnih vertikalnih i horizontalni linija, sa istim vrednostima kota. Za crtanje poprečnog preseka terena, takođe se povlače pomoćne vertikalne linije iz tačaka preseka ravni sečenja B-B i izohipsi terena. U preseku ovih vertikalnih i horizontalnih linija sa istim kotama dobijaju se tačke poprečnog preseka terena (kontura terena). Deo između konture puta sa usekom i konture terena treba iskopati.

Uzdužni presek sa ravni A-A dobija se na isti način.

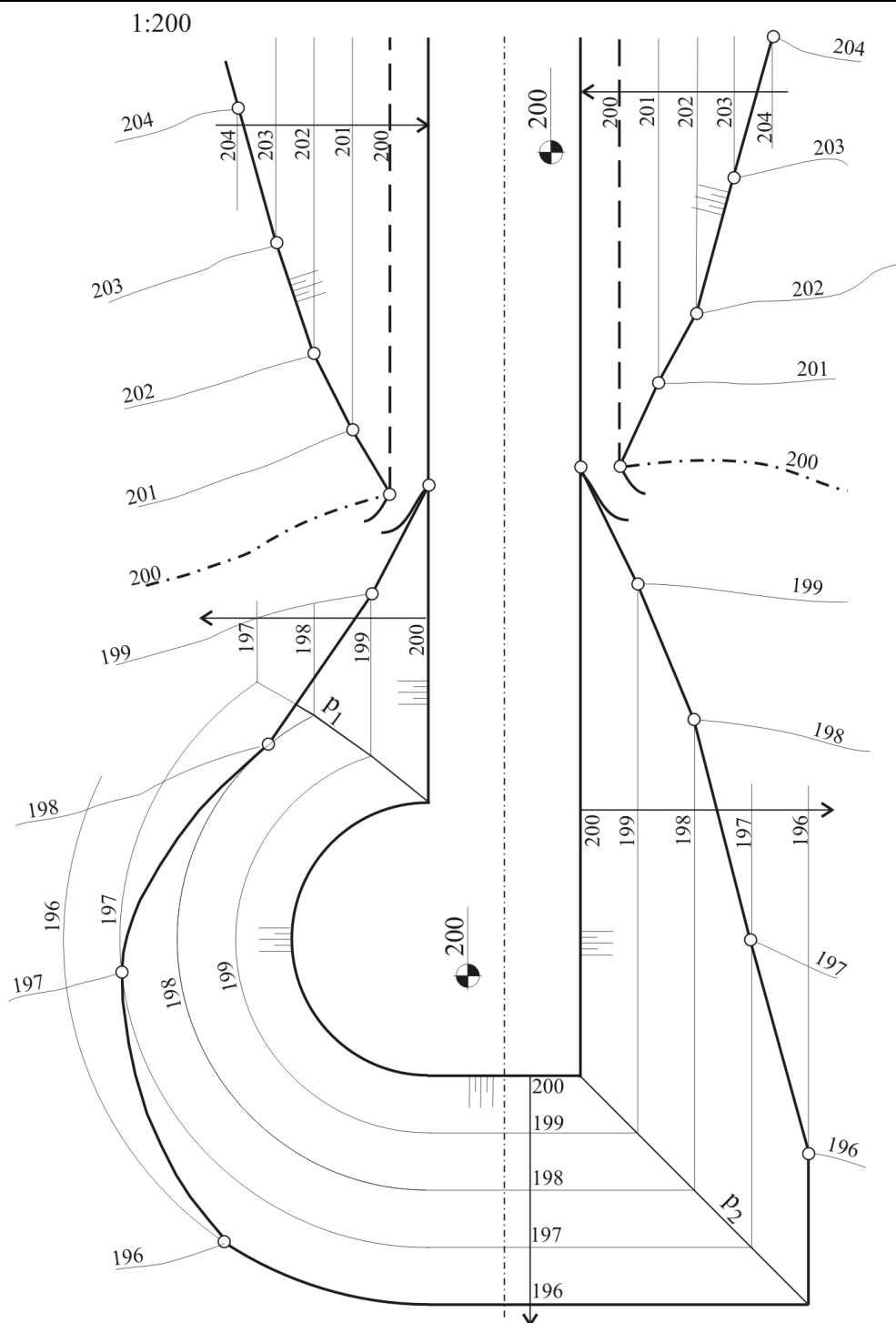
Mesto isticanje atmosferskih padavina iz kanala, prikazuje se šematski grafičkim simbolom  $\searrow$ .

U preseku istoimenih izohipsi ravni nasipa (sa istim vrednostima kota) dobijaju se presečnice nasutog terena (presečnica  $p_1$  i  $p_2$ ). Presečnica useka ne postoji, jer put na delu useka nema promena konturnih linija.

Kada se napravi put na zadatom terenu prema sl. 12.37, kotirana projekcija urađenog puta data je na sl.12.38. Više ne postoje, te se i ne crtaju izohipse terena na delu platoa i pojasa useka i nasipa.



Sl. 12.37: Određivanje pojasa useka i nasipa horizontalnog platoa na realnom terenu (Zadatak 12.8)



Sl. 12.38: Kotirana projekcija napravljenog platoa (Zadatak 12.8)

### Crtanje pojasa nasipa i useka za put sa padom

Kada je put sa padom izohipse pojasa useka i nasipa nisu paralelne sa ivicom puta već su pod nekim uglom na ivicu puta, kako je dato detaljno objašnjenje uz sliku 12.28.

### Zadatak 12.9

Nacrtati kotiranu projekciju puta sa nagibom, pojas useka i nasipa i preseke sa ravnima A-A i B-B (sl. 12.39). Pad useka je  $p_u = 1:1$ , a nasipa  $p_n = 1:1,5$ . Širina kanala je 1 m.

Na slici je zadata kota tačke A(116), pad puta 1:4 i njegov smer pada. Interval puta je 4 m, što u razmeri iznosi 20 mm (prema razmeri 1:200,  $1\text{ m} \Rightarrow 5\text{ mm}$ ). Prvo se nacrtaju izohipse puta i označe njihove kote. Zatim se odredi granica useka i nasipa. Kako je put sa padom granica useka i nasipa dobija se u preseku izohipsi 119, 120 i 121 puta i istih izohipsi terena. Niže od ove granice, kote terena "brže" rastu od kota puta, te imamo usek, dok je iznad nasip (sl. 12.40).

Kada je put sa padom izohipse pojasa useka i nasipa nisu paralelne sa ivicom puta već su pod nekim uglom na ivicu puta. Da bi se nacrtale izohipse pojasa useka, na nekoj od kota puta (npr. na koti 122 sa leve strane) sa ivice kanala nacrtaju se polovina kružnice čiji je poluprečnik

$R_u$  jednak intervalu useka ( $R_u = i_u = 1\text{ m} \Rightarrow 5\text{ mm}$ ). Iz susedne kote puta sa većom kotom (iz kote 123), jer pri usecanju kote useka rastu, povuče se tangenta na ovu kružnicu i tako dobija

pravac izohipsi useka na toj levoj strani puta. Linija glavnog pada je upravna na dobijenu izohipsu koja se izgradi sa zadatim intervalom od 1 m. Paralelno dobijenoj izohipsi povuče se i ostale i označe kao na sl. 12.40 (120... 125). Na isti način se nacrtaju izohipse i na desnoj strani puta. U preseku istoimenih izohipsi (istih vrednosti kota) useka i terena dobijaju se tačke čijim spajanjem se dobija pojas useka.

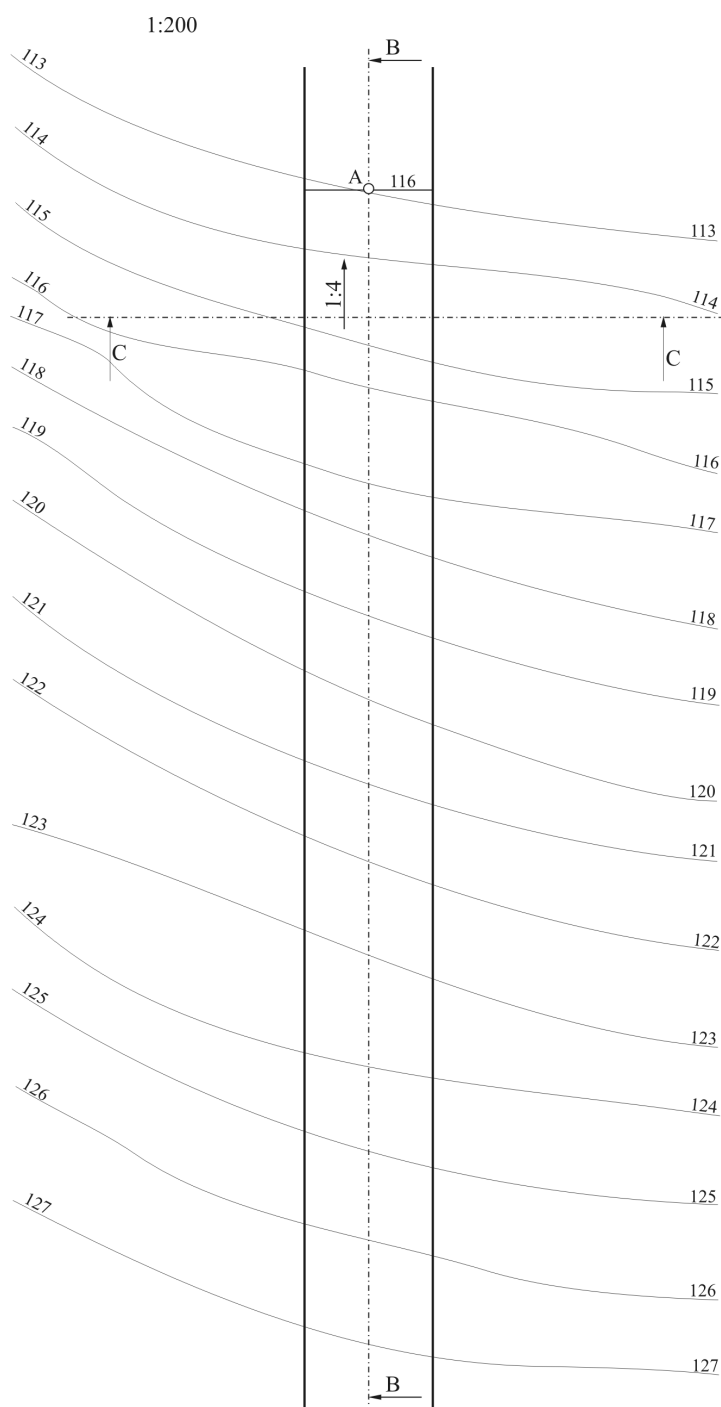
Isohipse puta na delu gde je nasip dobijaju se na isti način, tako što se iz jedne kote sa ivice puta (npr. 117) nacrtaju kružnica poluprečnika

$R_n = i_n = 1,5\text{ m} \Rightarrow 0,75\text{ mm}$ .

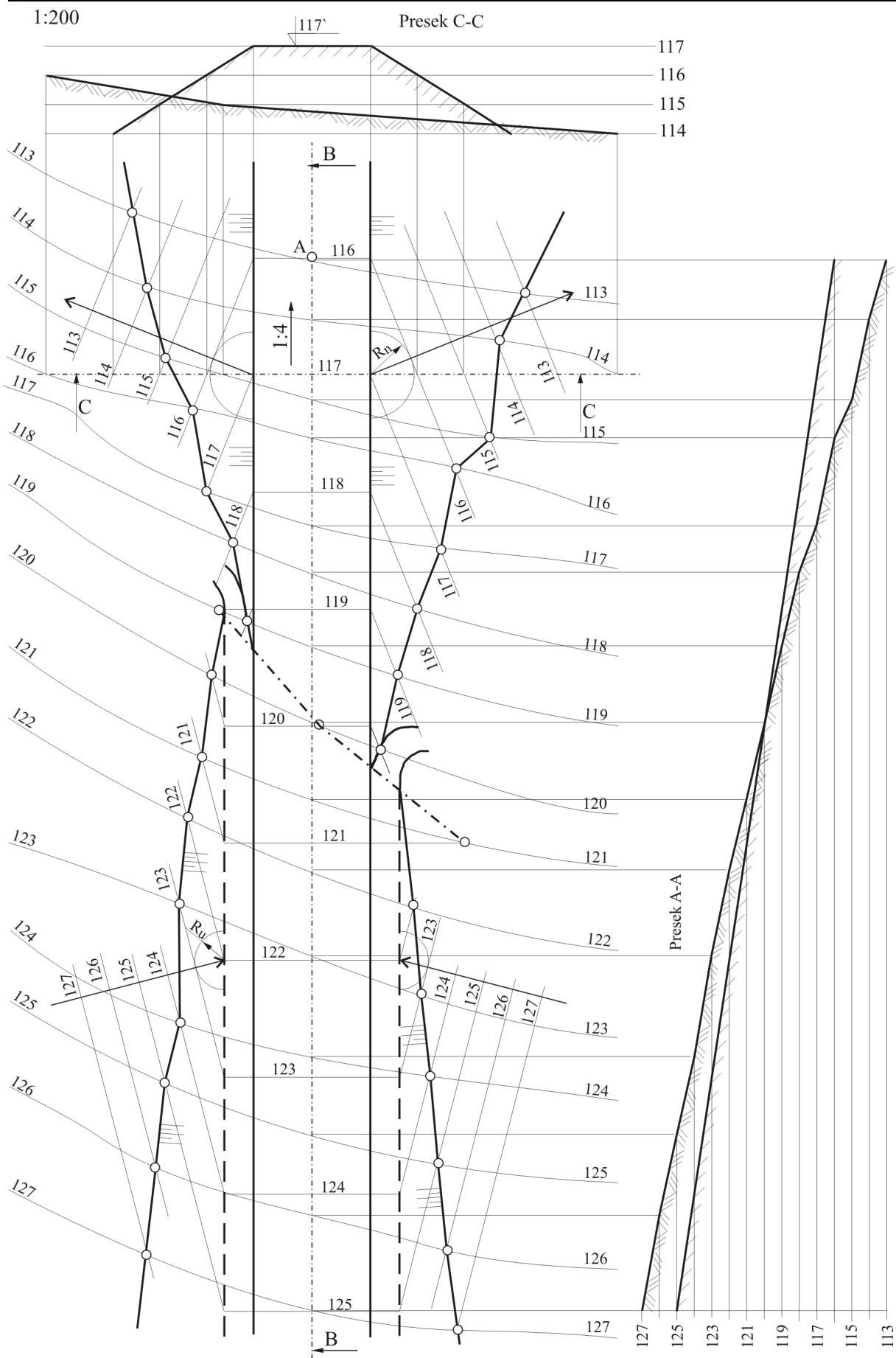
Iz susedne manje kote puta (116), jer pri nasipanju kote nasipa se smanjuju, povuče se tangenta na kružnicu i dobija izohipsa nasipa. Pravac upravan na nju je linija glavnog pada nasipa. Ostale izohipse nasipa su na rastojanju

$i_n = 1,5\text{ m} \Rightarrow 0,75\text{ mm}$ . U preseku istoimenih izohipsi (istih vrednosti kota) nasipa i terena dobijaju se tačke koje ograničavaju pojas nasipa.

Kotirana projekcija napravljenog puta iz zadatka 12.9 prikazana je na sl. 12.41.

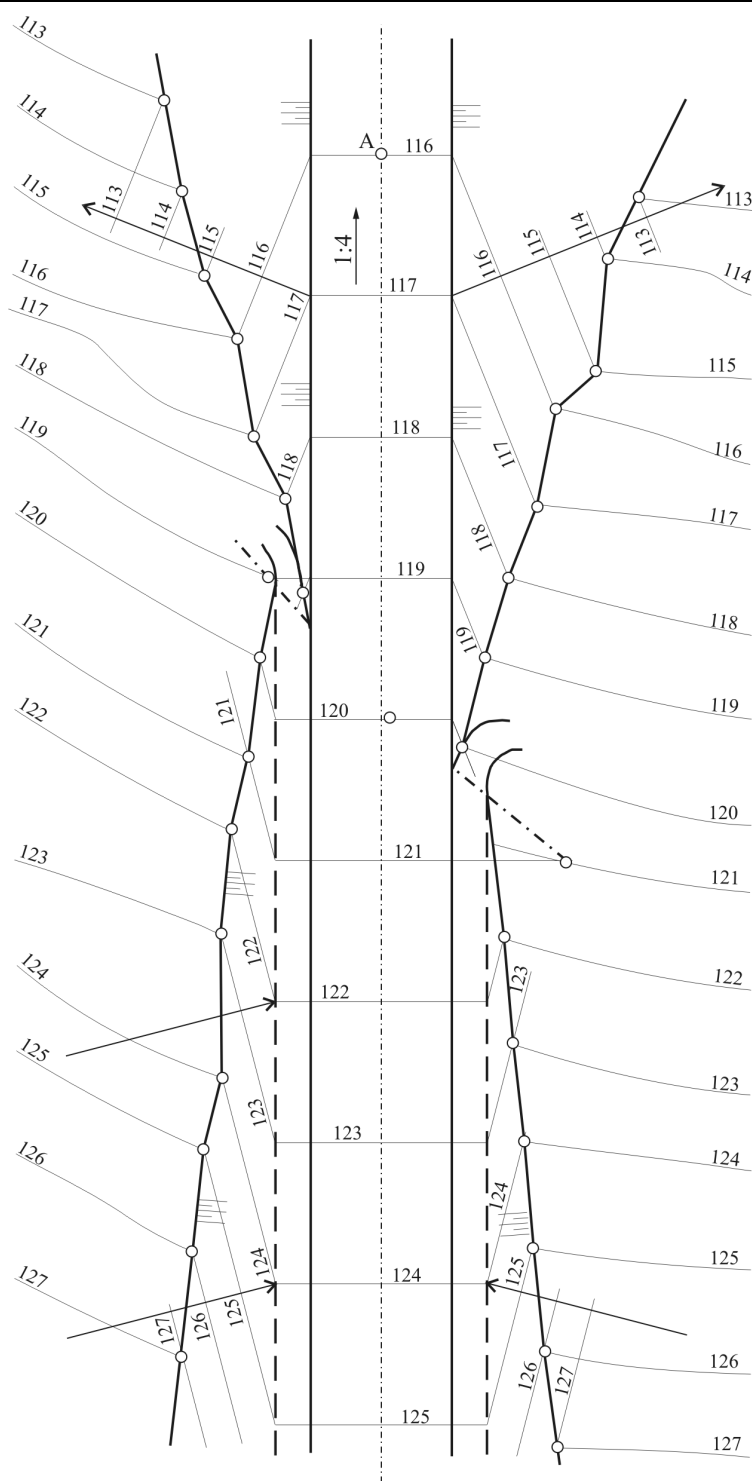


Sl. 12.39: Određivanje pojasa useka i nasipa puta sa padom (postavka zadatka 12.9)



Sl. 12.40: Određivanje pojasa useka i nasipa puta sa padom (Zadatak 12.9)





Sl. 12.41: Kotirana projekcija napravljenog puta sa padom (Zadatak 12.9)

### Zadatak 12.10

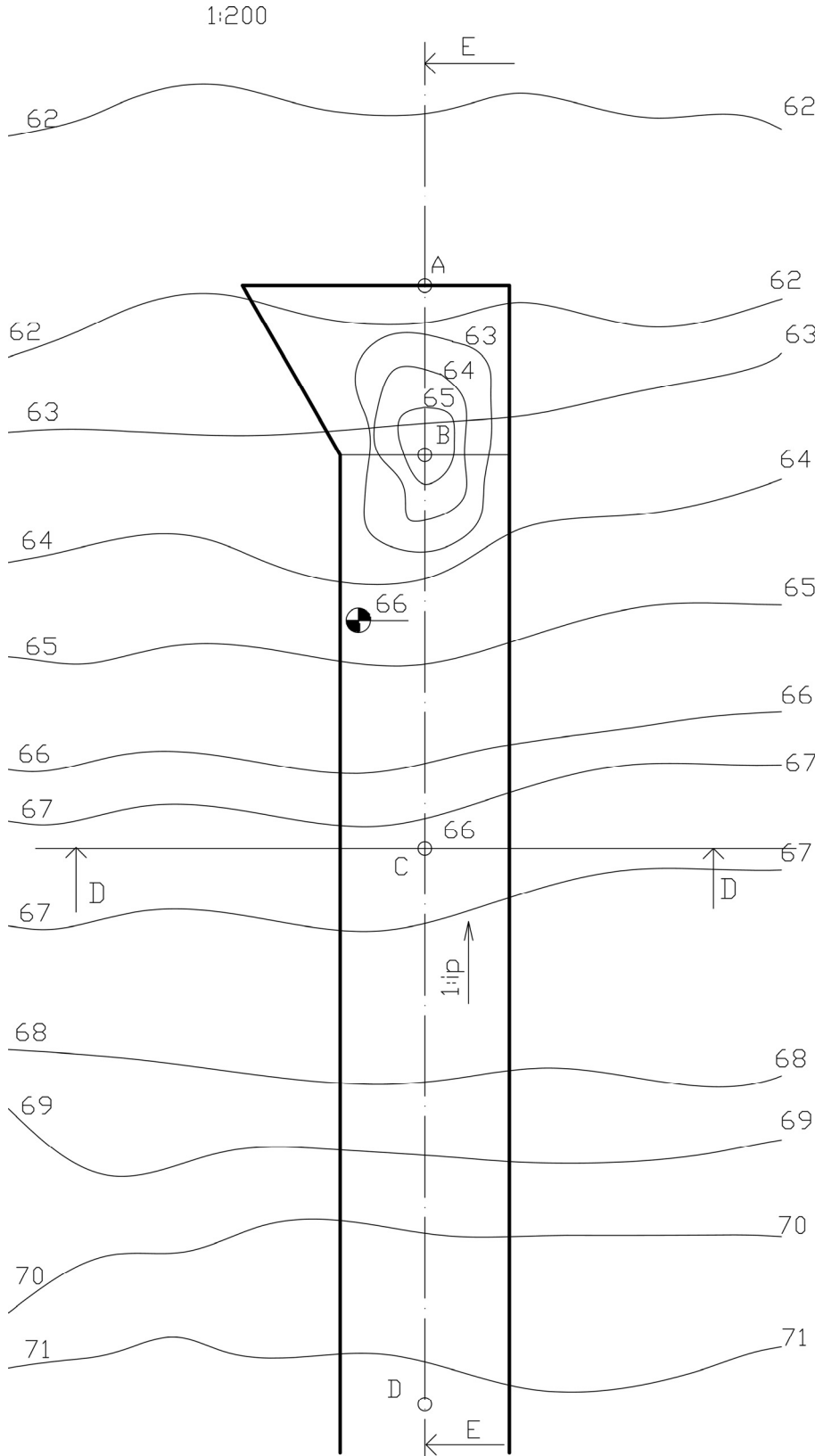
Zadat je horizontalni plato između tačaka A i C i put stalnog pada  $p_p = 16,666\%$  između tačaka C i D. Pad useka je  $p_u = 1:1$ , a nasipa  $p_n = 1:1,5$ . Širina kanala je 1 m. Nacrtati kotiranu projekciju puta, pojas useka i nasipa i preseke sa ravnima D-D i E-E. Razmera crtanja je 1:200 (sl. 12.42).

Interval puta jednak je  $i_p = \frac{1}{p_p} = \frac{1}{0,16666} = 6 \text{ m}$ , što na crtežu iznosi  $30 \text{ mm}$  ( $1 \text{ m} \Rightarrow 5 \text{ mm}$ ).

Nakon označavanja izohipsi puta odredi se granica useka i nasipa (to je izohipsa terena kote 66).

Deo puta iznad ove granice je nasip, jer su kote puta veće od kote terena. Izohipse nasipa za deo puta od granice do tačke A paralelne su sa konturama puta na rastojanju intervala nasipa  $i_n = 1,5 \text{ m} \Rightarrow 0,75 \text{ mm}$  (sl. 12.43).

Od granice useka i nasipa (kote terena 66) do tačke C je, takođe plato, ali je potreban



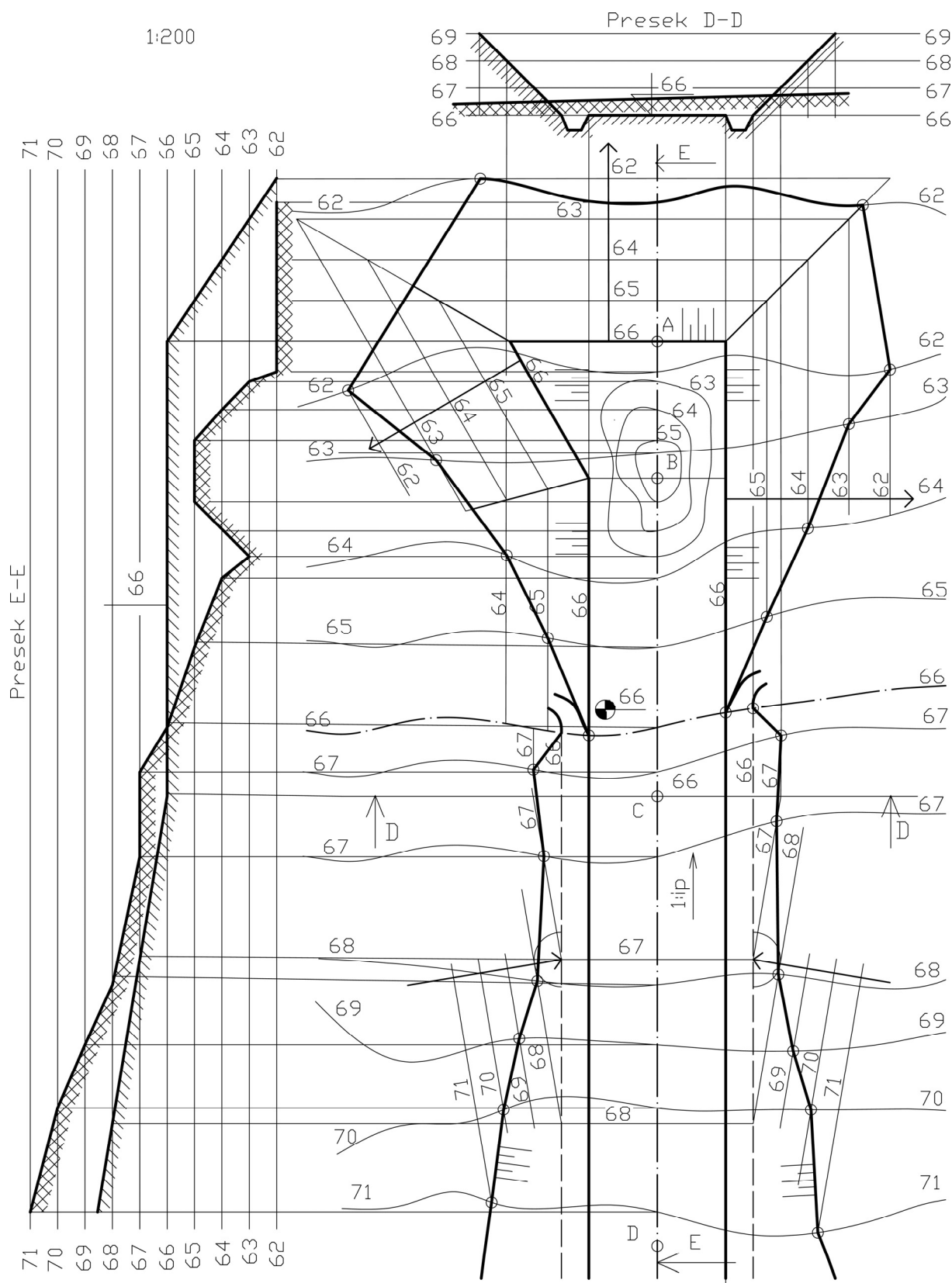
usek. Uzohipse useka (66 i 67) su paralelne sa ivicama puta na rastojanju od 5 mm što u razmeri predstavlja interval useka od 1 m  $(i_u = 1 \text{ m} \Rightarrow 0,5 \text{ mm})$ .

Deo puta ispod tačke C je usek na putu sa padom, te se na nekoj od kote puta (npr. 67) skraja kanala nacrtu polovina kružnice poluprečnika

$r_u = i_u = 1 \text{ m} \Rightarrow 5 \text{ mm}$ .

Iz susedne izohipse puta sa većom kotom (68), jer je usek i pri usecanju kote useka rastu, povuče se tangenta na kružnicu. Tangenta predstavlja izohipsu ravni usecanja.

Sl. 12.42:  
Postavka zadatka  
12.10.



Sl. 12.43: Određivanje pojasa useka i nasipa (Zadatak 12.10)

**Zadatak 12.11.**

Zadat je horizontalni plato između tačaka A i B na koti 15 i put stalnog pada od  $p_p = 25\%$  između tačaka B i C. Pad useka je  $p_u = 1:1$ , a nasipa  $p_n = 1:1,5$ . Širina kanala na delu useka je 1m. Nacrtati preseke sa ravnima D-D i E-E. Razmera crtanja je 1:250, (sl. 12.44).

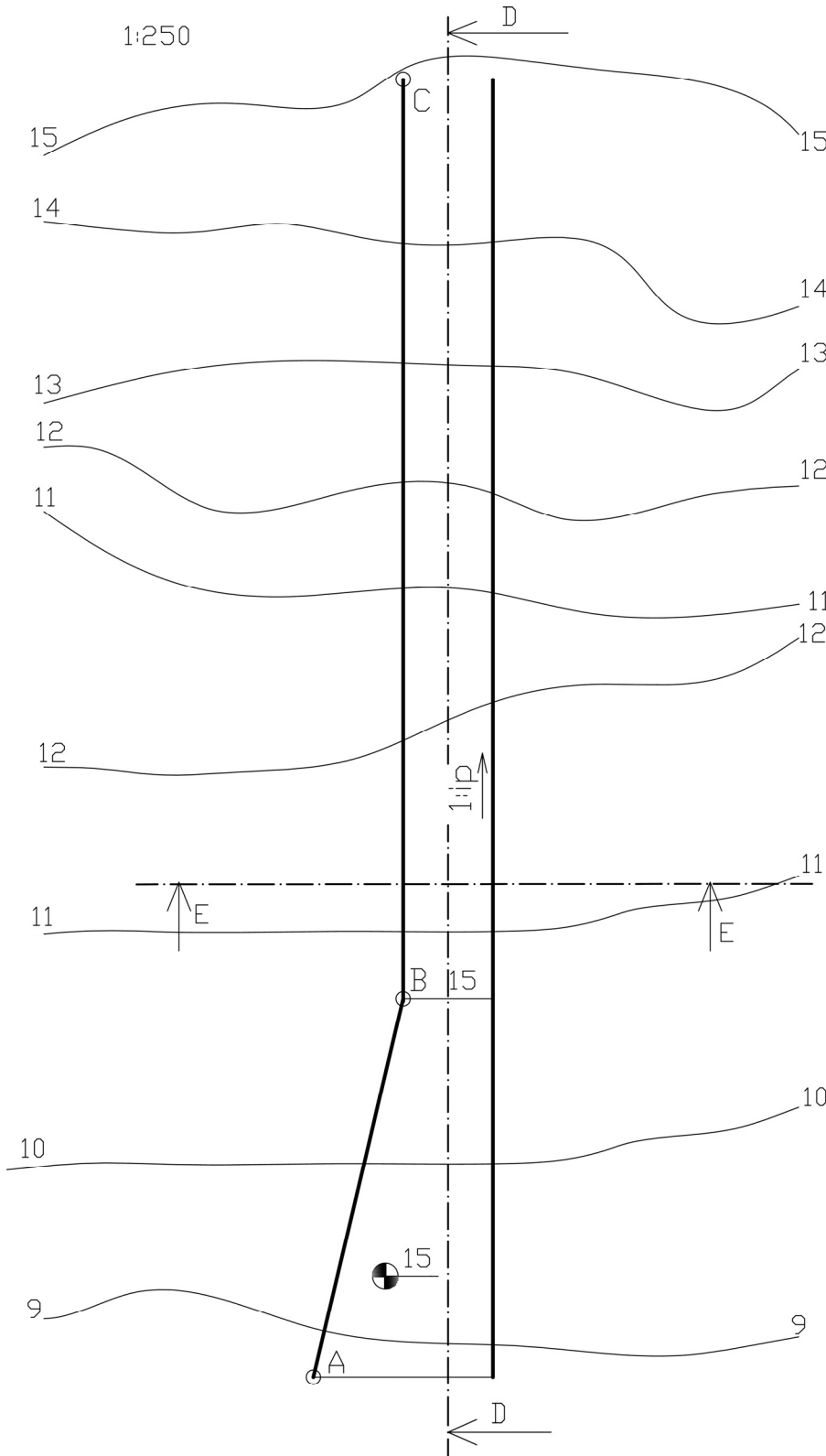
Interval puta između tačaka B i C jednak je  $i_p = \frac{1}{p_p} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ m}$ , što na crtežu iznosi 16 mm prema zadatoj razmeri 1:250 ( $1000/250=4 \text{ mm}$ ,  $1 \text{ m} \Rightarrow 4 \text{ mm}$ ). Nakon označavanja izohipsi puta odredi se granica useka i nasipa. Granica se dobija u preseku izohipsi puta 11 i 12 i izohipsi terena 11 i 12. Analizom odnosa izohipsi puta i terena zaključuje se da je deo iznad granice usek (kote puta su manje od kote terena), a ispod granice je nasip, jer su kote puta veće od kote terena.

Na delu useka nacrtana se kanal paralelno sa ivicom puta na rastojanju 4 mm (sl. 12.45).

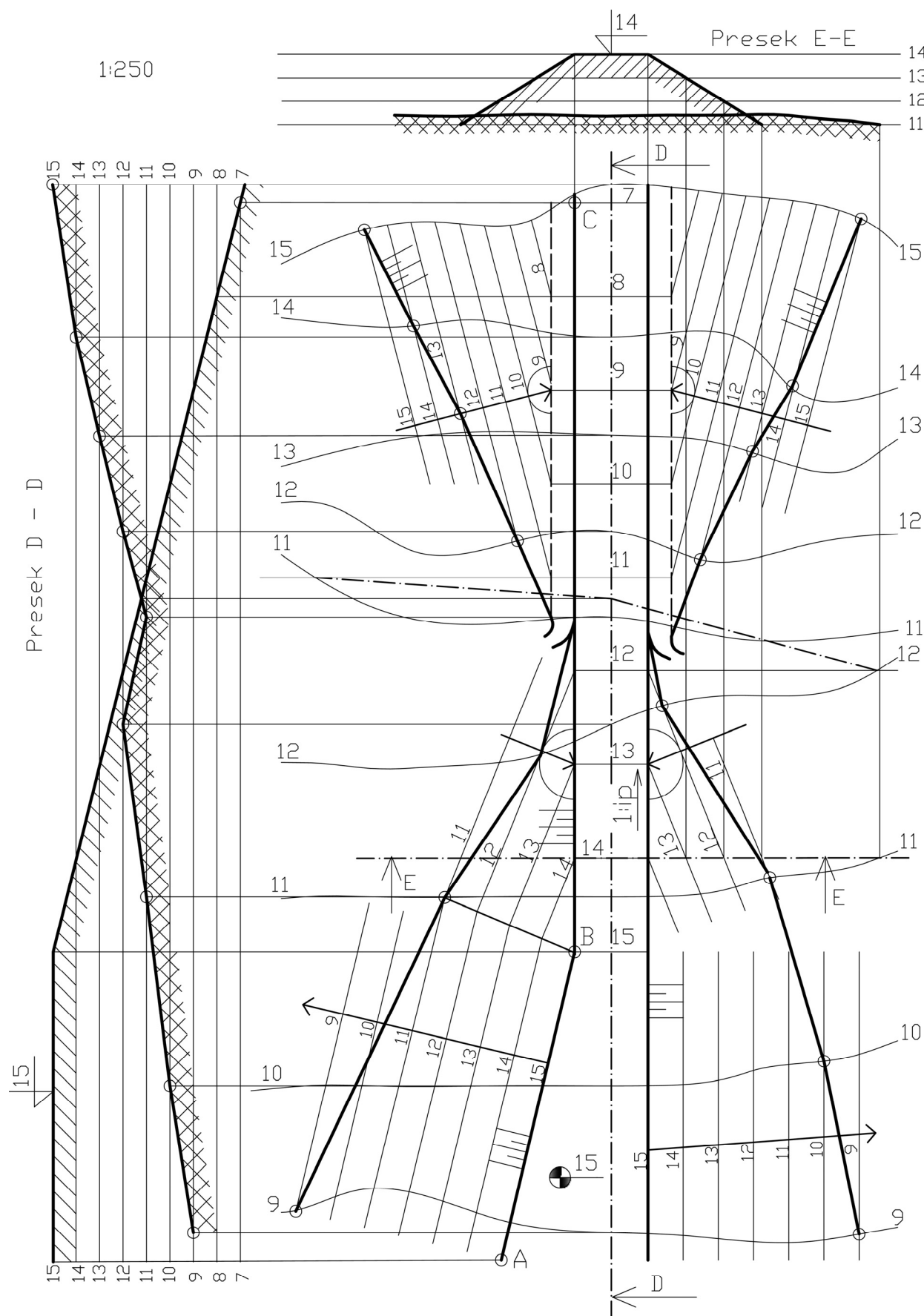
Od tačke A do B izohipse nasipa intervala  $i_n = 1,5 \text{ m}$  su paralelne sa ivicama puta, jer je na tom delu put horizontalan.

Od tačke B do granice useka i nasipa izohipse nasipa intervala  $i_n = 1,5 \text{ m}$  su pod uglom, jer je na tom delu put sa padom (nagibom).

Od granice useka i nasipa izohipse useka intervala  $i_u = 1 \text{ m}$  su pod uglom jer je na tom delu put sa padom (nagibom).



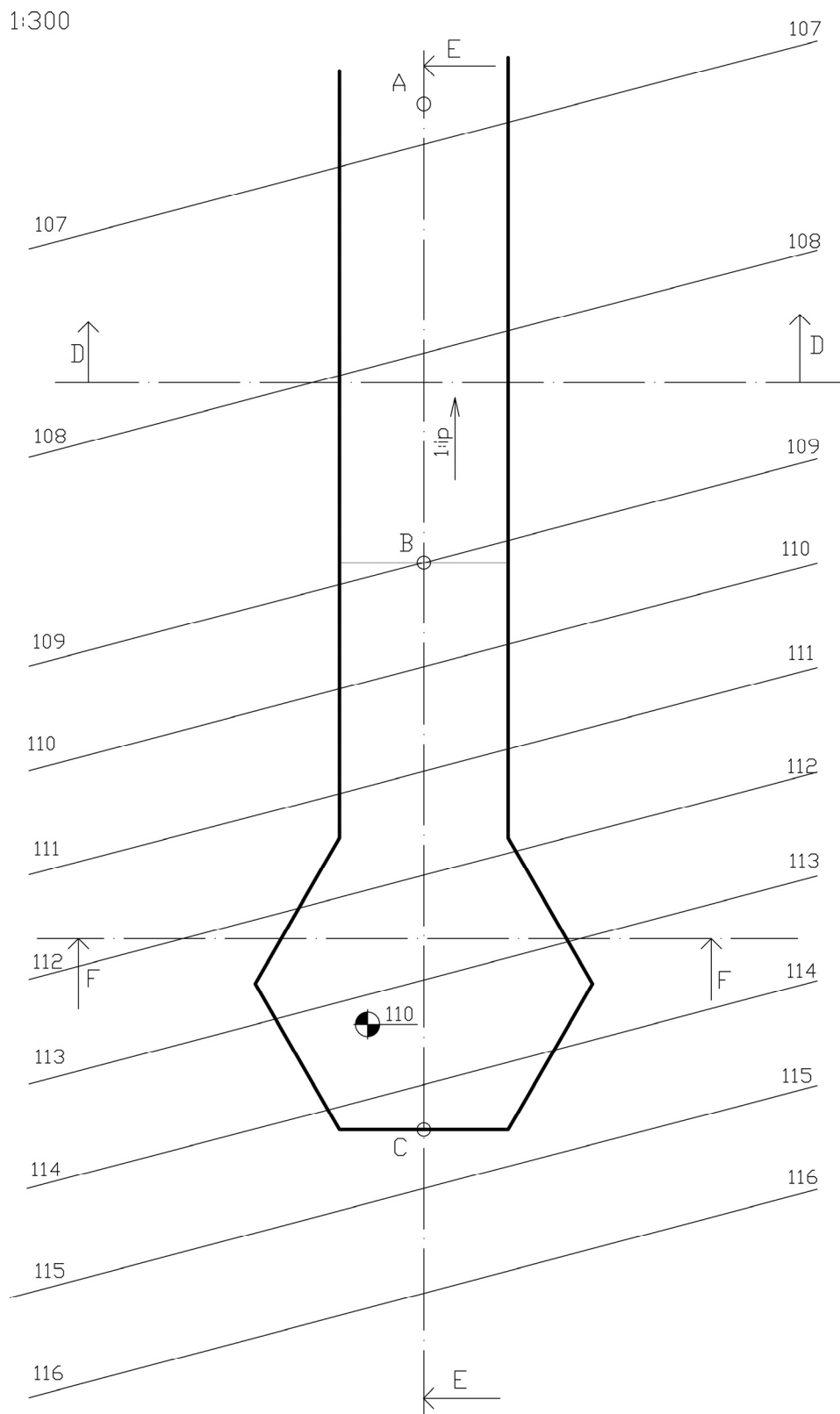
Sl. 12.44: Postavka zadatka 12.11.



Sl. 12.45: Određivanje pojasa useka i nasipa (Zadatak 12.11)

**Zadatak 12.12.**

Zadat je horizontalni plato između tačaka B i C na koti 110 i put stalnog pada između tačaka A i B intervala  $i_p=8$  m. Pad useka je  $p_u=1:1,5$ , a nasipa  $p_n=1:2$ . Širina kanala je 1,5 m. Nacrtati kotiranu projekciju puta, pojas useka i nasipa i preseke sa ravnima E-E i D-D. Razmera crtanja je 1:300, (sl. 12.46).

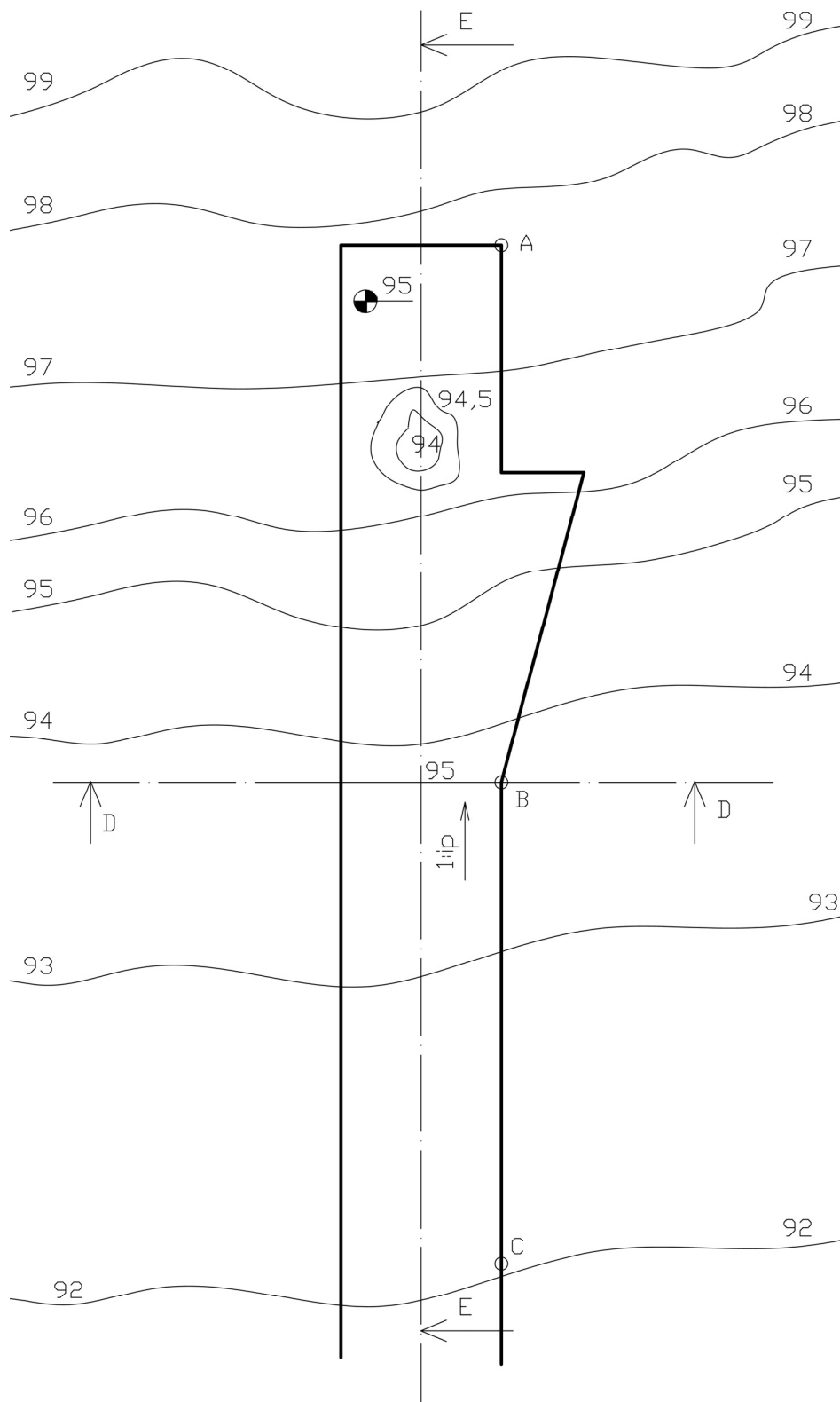


Sl. 12.46: Postavka zadatka 12.12.

**Zadatak 12.13.**

Zadat je horizontalni plato između tačaka A i B na koti 95 i put talnog pada 1:5 između tačaka B i C. Pad useka je  $p_u = 1:1$ , a nasipa  $p_n = 1:1,5$ . Širina kanala je 1m. Nacrtati kotiranu projekciju puta i preseke sa ravnima E-E i F-F. Razmera crtanja je 1:210, (sl. 12.47).

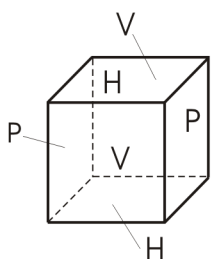
1:210



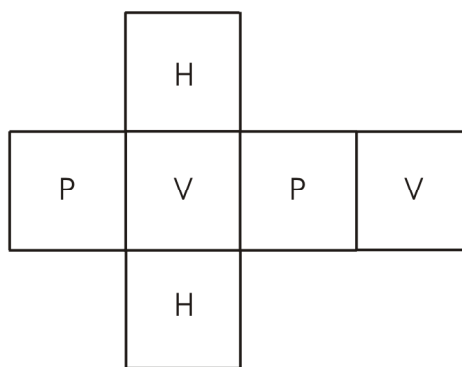
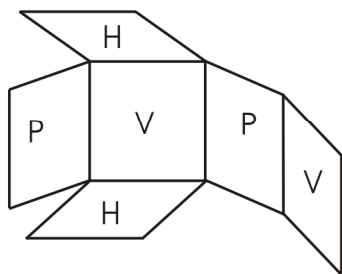
Sl. 12.47: Postavka zadatka 12.13

## 13. ORTOGONALNI CRTEŽI

Ortogonalni crteži ili 2D (dvodimenzionalni) crteži su takvi, gde se predmeti crtaju u dve dimenzije u više ortogonalnih pogleda (projekcija). Projekcijski zraci su međusobno paralelni i upravni na projekcijske ravni. Predmet crtanja postavlja se u prostor omeđen sa šest međusobno upravanih, odnosno paralelnih ravni. Zbog toga se za svaki predmet može nacrtati šest osnovnih ortogonalnih pogleda. Prostor sa šest međusobno upravanih ravni je kocka sa svojih šest strana (sl. 13.1). Kocka ima po dve paralelne strane, odnosno po dve: horizontalne - H, vertikalne - V i profilne - P projekcijske ravni. Predmet crtanja se zamišljeno postavi unutar kocke, tako da su mu što više površina paralelne sa stranama kocke. Strane kocke (projekcijske ravni) obaranjem se, kao na sl. 13.2, dovode u jednu ravan - ravan crtanja, tj. vertikalnu ravan. Zadnja verikalna strana (V) kocke je u sredini, dok su ostale oko nje. Horizontalne ravni se obaraju na dole i gore, a profilne sa strane, na levo i na desno. Prednja vertikalna ravan se obara na desnu stranu pored profilne. Na taj način se strane kocke (projekcijskih ravni) obaraju sve dotle dok se ne dovedu u jednu ravan, zadnju vertikalnu ravan V (ravan crtanja), koja se nalazi u sredini (sl. 13.2).



Sl. 13.1: Kocka, kao šest projekcijskih ravni

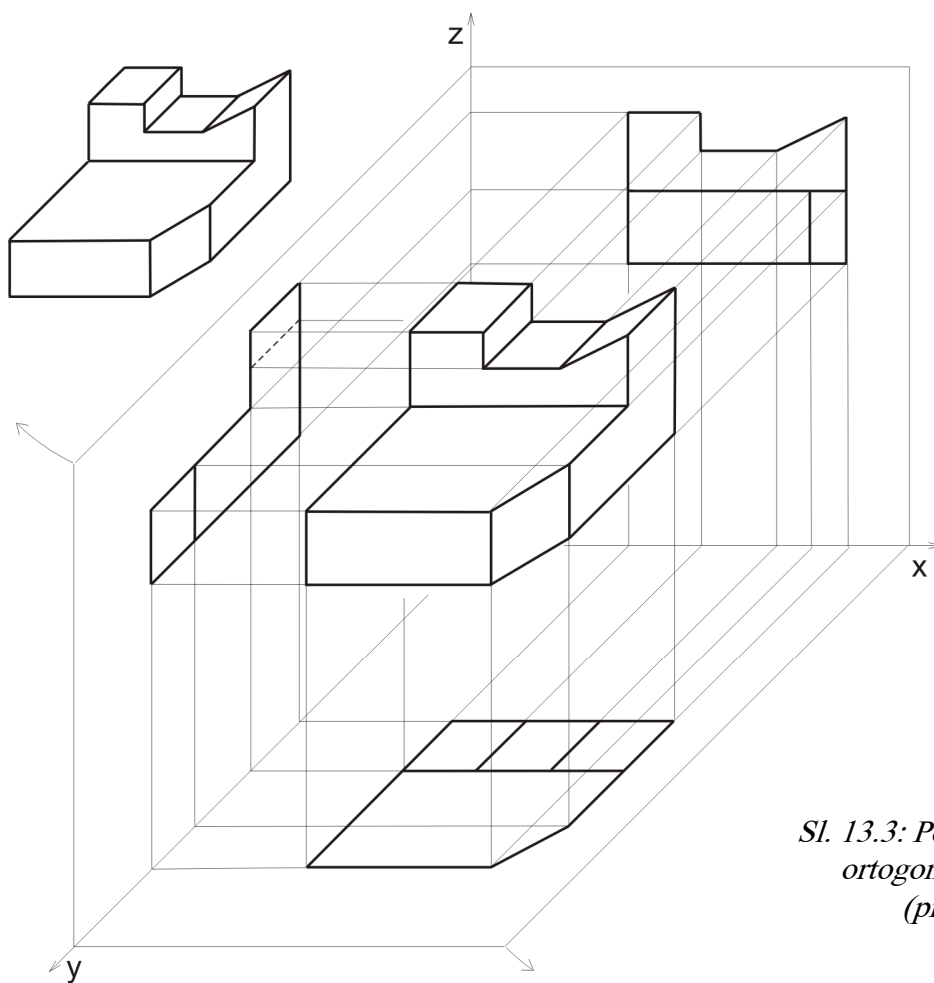


Sl. 13.2: Obaranje projekcijskih ravni

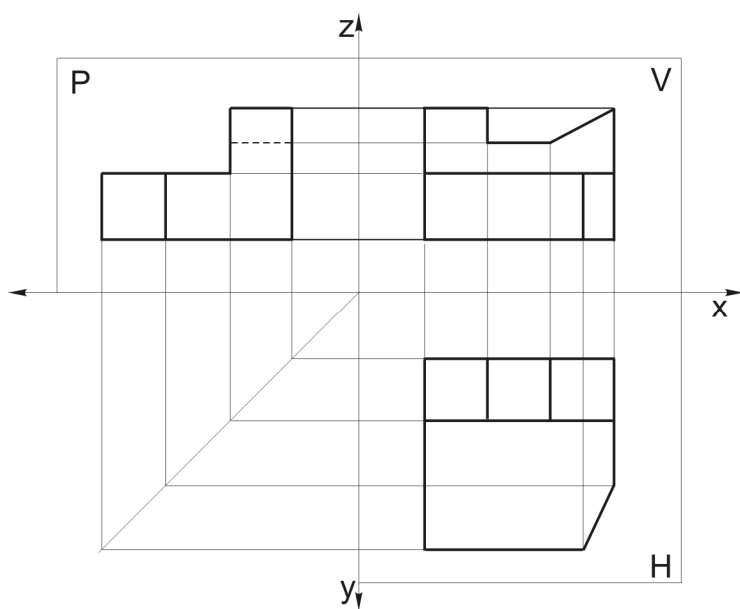
### 13.1. POSTUPAK DOBIJANJA ORTOGONALNOG CRTEŽA

Ortogonalne projekcije (ortogonalni pogledi) dobijaju se korišćenjem međusobno paralelnih projekcijskih zraka koji su upravni na projekcijske ravni. Postupak dobijanja ortogonalnih pogleda prikazan je na sl. 13.3 i zasniva se na principima nacrtne geometrije. Projekcijski zraci obuhvataju predmet crtanja i gde probijaju projekcijske ravni daju tačke čijim spajanjem se dobijaju pogledi. Korišćenjem projekcijskih zraka koji su upravni na vertikalnu, horizontalnu i profilnu ravan dobijaju se tri osnovna pogleda. Svaki pogled predstavlja izgled predmeta samo sa jedne strane i to posmatrano upravno na tu stranu. Vidljive ivice i konture predmeta crtaju se debelom punom linijom, a nevidljive isprekidanom. Da bi se ortogonalni pogledi nalazili u jednoj ravni, obaraju se horizontalna i profilna projekcijska ravan za  $90^\circ$  oko ose X i Z, kao na sl. 13.3, tako da se dovedu na vertikalnu ravan. Sa projekcijskim ravnima obaraju se i ortogonalni pogledi (sl. 13.4), kao i projekcijski zraci.





*Sl. 13.3: Postupak dobijanja ortogonalnih pogleda (projekcija)*



*Sl. 13.4: Ortogonalni pogledi nakon obaranja ravni*

Delovi projekcijskih zraka između projekcija nazivaju se sponama. Spone koje su prave, bilo vertikalne ili horizontalne nazivaju se direktnim sponama. Direktnne spone spajaju poglede na horizontalnoj i vertikalnoj ravni, zatim poglede na vertikalnoj u profilnoj ravni. Izlomljene spone su one koje spajaju poglede na horizontalnoj i profilnoj ravni i nazivaju se indirektnim sponama.

Ortogonalni crtež se dobija kada se zadrže samo ortogonalni pogledi, a sve ostalo se izbriše (projekcijske ravni, spone, ose itd.). Zavisno od vrste crteža i od toga gde se koristi, na ovim pogledima se označe dimenzije, oznake za kvalitet obrađenih površina, tolerancije itd.

Tehnički crteži, odnosno crteži tehničke dokumentacije moraju imati odgovarajuće zaglavlje koje treba da je po zadržaju i izgledu prilagođeno predmetu crtanja i korisnicima crteža. Zaglavlje treba da ima rubrike u koje se upisuju: naziv i broj predmeta crtanja (Klizač, 6.01), vlasnik crteža (Poljoprivredni fakultet Novi Sad), lice koje je crtež nacrtalo (Obad Srećko), lice koje je crtež proverilo (Gligorić Bojan), potpis lica koje je crtež definitivno odobrilo (S275JR), datumi nastanka crteža (03.08.1996, 12.09.1996., 05.11.1996.), merilo (1:1), materijal (S275JR) itd.

Jedan od različitih vrsta tehničkih crteža, dat je na crtežu broj 6.01.

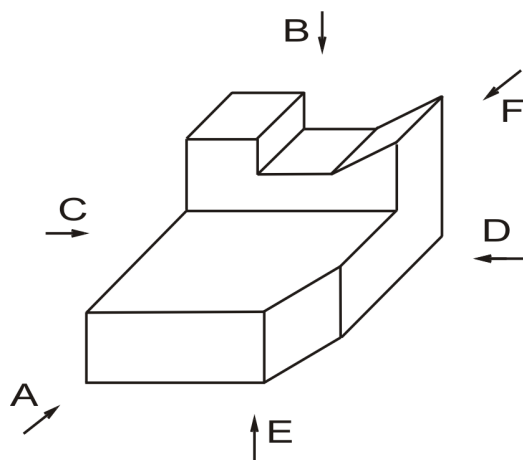
### 13.2. RASPORED POGLEDA (PROJEKCIJA)

Za svaki predmet može se nacrtati šest osnovnih ortogonalnih pogleda (projekcija). Pogledi se raspoređuju na različite načine. U praksi se koriste:

- Evropski raspored pogleda i
- Američki raspored pogleda.

Osim ova dva načina rasporeda pogleda, može se koristiti i proizvoljan raspored. Međutim, takav raspored pogleda je nepovoljan za one koji koriste, tj. čitaju crtež.

Bez obzira na to koji se raspored pogleda koristi predmet se pri crtanju posmatra kao što je prikazano na sl. 13.5. Predmet crtanja postavi se u odabrani položaj u odnosu na projekcijske ravni i više se ne pomera, tako da što više površina predmeta bude paralelno sa projekcijskim ravnima. Pomera se crtač i nalazi se u šest različitih položaja, u položaju: A - спреда, B - odozgo, C - sleva, D - zdesna, E - odozdo i F - straga, kako je to prikazano na slici 13.5.



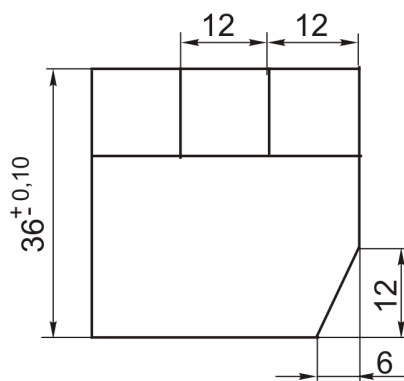
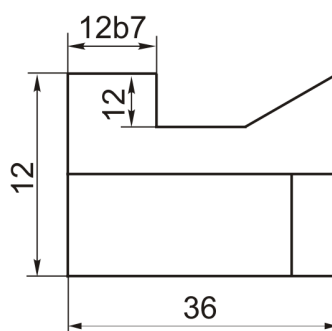
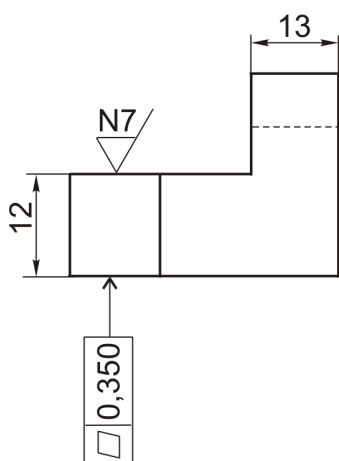
Sl. 13.5: Položaj crtača pri crtanju ortogonalnih pogleda

A - pogled спреда (glavni), B - pogled odozgo,  
C - pogled slevo, D - pogled zdesna,  
E - pogled odozdo, F - pogled straga

#### 13.2.1. Evropski raspored pogleda

Kod evropskog rasporeda pogleda, dobijeni pogledi se obaraju u smeru posmatranja, znači suprotno od posmatrača, tako da se predmet crtanja nalazi u sredini, između oka crtača i dobijenog pogleda (sl. 13.6). Oznaka (simbol) za evropski raspored projekcija dat je na sl. 13.7. Sastoji se od dva ortogonalna pogleda konusnog valjka (spređa i slevo). Ova oznaka se crta iznad zaglavlja za crtež (crtež broj 6.01). Oznaka za evropski raspored se ne mora crtati ako ce crteži koristiti na evropskom tržištu, međutim ako se isti ti crteži koriste na američkom ili nekom drugom tržištu, tada je oznaka obavezna. To isto se odnosi i na oznaku za američki raspored. Oznaku za njihovo tržište ne crtaju, a za naše i druga tržišta su obavezni da je nacrtaju. Oznaka se crta tankom punom linijom na površini veličine oko 1,5 cm<sup>2</sup>.

12b7	-0,150
	-0,168

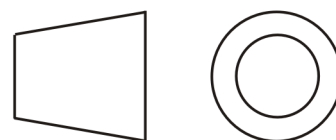
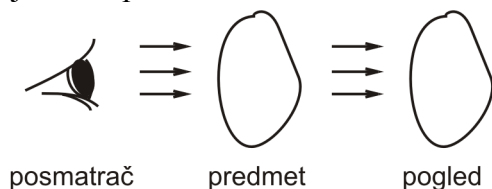


				Merilo: 1:1	
				S275JR	
			Datum	Ime	
			Obradio	03.08.2012.	Obad Srećko
			Ispitao	12.09.2012.	Gligorić Bojan
			Stand.		
			Označio	05.11.2012.	<i>[Signature]</i>
				Poljoprivredni fakultet Novi Sad	
				6.01	
				List	
St.i	Izmene	Datum	Ime		

KLIZAČ

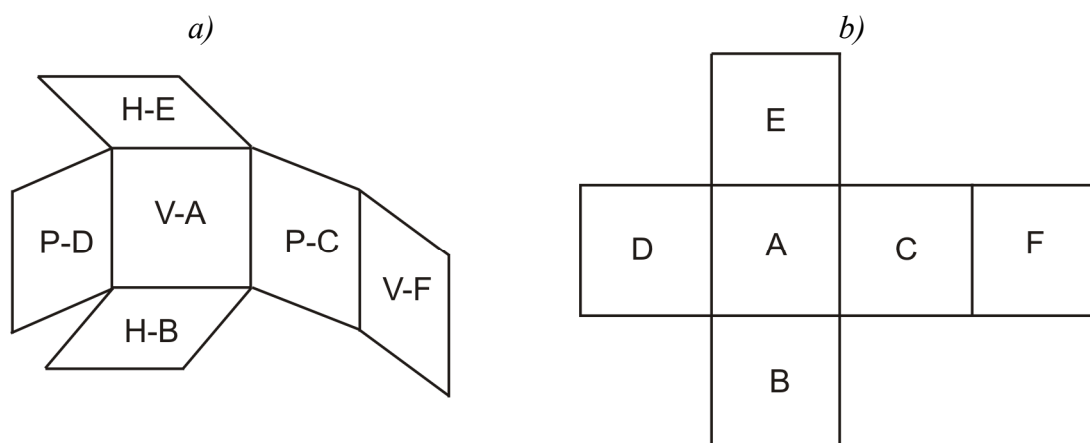
Pogled spreda je glavni pogled. Dobija se na zadnjoj vertikalnoj ravni V (sl. 13.8,a), crta se u sredini i obeležava sa A. Pogled odozgo je ispod A i obeležava se sa B. Pogled sa leve strane predmeta crta se na desnoj strani glavnog pogleda A i obeležava sa C. Pogled sa desne strane obeležava se sa D i nalazi se sa leve strane pogleda A. Pogled odozdo je pogled E i crta se iznad A. Pogled od straga označava se sa F i crta se sa desne strane pogleda A, a pored C.

Raspored osnovnih pogleda nakon obaranja projekcijskih ravni dat je na sl. 13.8,b. Pogledi raspoređeni po evropskom rasporedu, na crtežu se ne označavaju sa slovima A, B, C... jer se to podrazumeva da se samo tako mogu rasporediti.



Sl. 13.6: Položaj posmatrača, predmeta i pogleda kod evropskog rasporeda

Sl. 13.7: Oznaka za evropski raspored pogleda

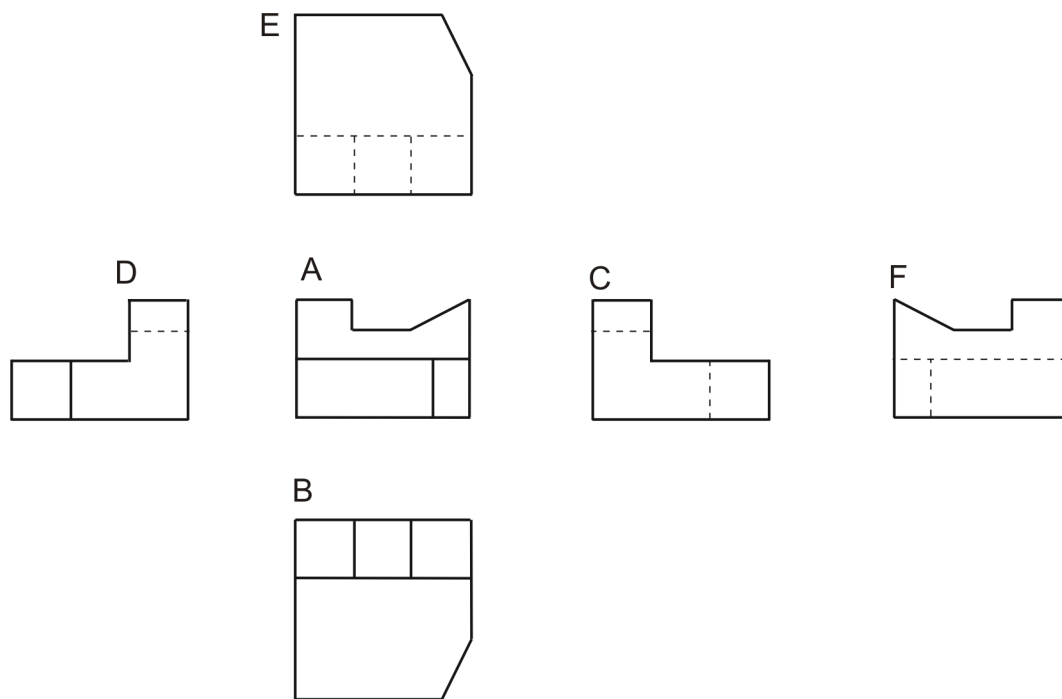


Sl. 13.8: Raspored pogleda po evropskom načinu  
a) pre obaranja ravni, b) nakon obaranja ravni,  
A - pogled spreda (glavni), B - pogled odozgo, C - pogled sleva, D - pogled zdesna,  
E - pogled odozdo, F - pogled straga

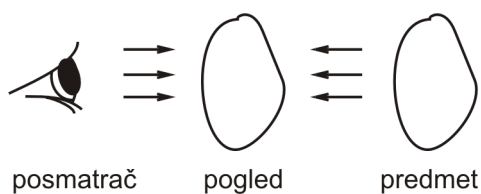
Za predmet sa sl. 13.5 nacrtano je šest ortogonalnih pogleda i raspoređeni su po evropskom rasporedu (sl. 13.9). Pogledi na ovom crtežu su označeni sa slovima A, B, C, D, E i F samo zbog jednostavnije edukacije početnika.

### 13.2.2. Američki raspored pogleda

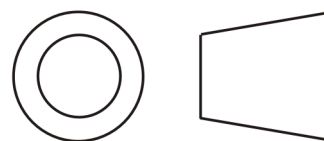
Kod američkog rasporeda pogleda dobijeni pogledi se obaraju prema crtaču, suprotno od smera posmatranja, tako da se dobijeni pogled nalazi u sredini između oka crtača i predmeta crtanja (sl. 13.10). Oznaka za američki raspored, takođe se sastoji od konusnog valjka kao za evropski, ali je pogled sleva nacrtan na levoj strani (sl. 13.11). Glavni pogled, takođe se obeležava sa A, nalazi se na zadnjoj vertikalnoj ravni u sredini (sl. 13.12,a), kao i kod evropskog rasporeda pogleda. Pogled odozgo B nalazi se iznad, a pogled odozdo E ispod pogleda A. Pogled sa leve strane C je na levoj, a sa desne strane D na desnoj strani pogleda A. Pogled od straga je desno od pogleda A, a pored D. U odnosu na evropski, kod američkog rasporeda zamenjena su mesta pogledima B i E i C i D. Raspored pogleda nakon obaranja projekcijskih ravni dat je na sl. 13.12,b.



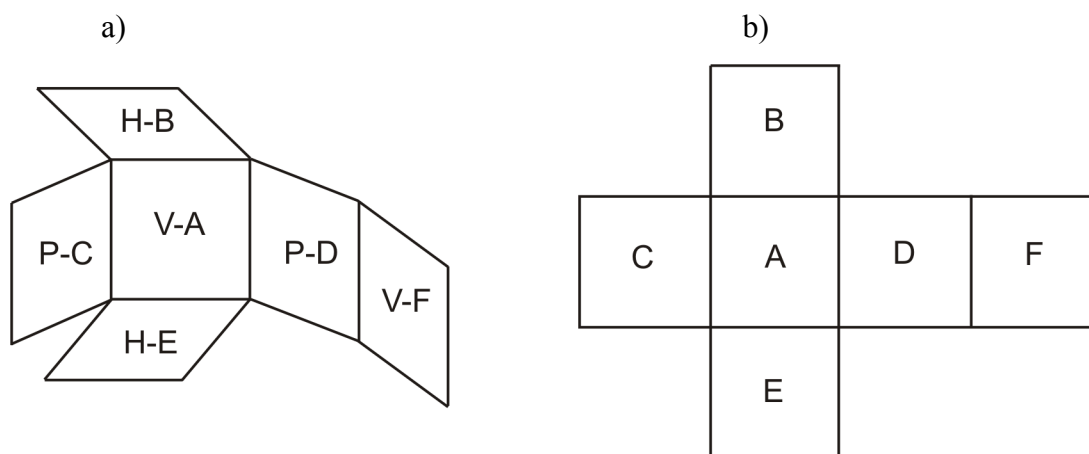
Sl. 13.9: Osnovni pogledi po evropskom rasporedu



Sl. 13.10: Položaj posmatrača, pogleda i predmeta kod američkog rasporeda



Sl. 13.11: Oznaka za američki raspored

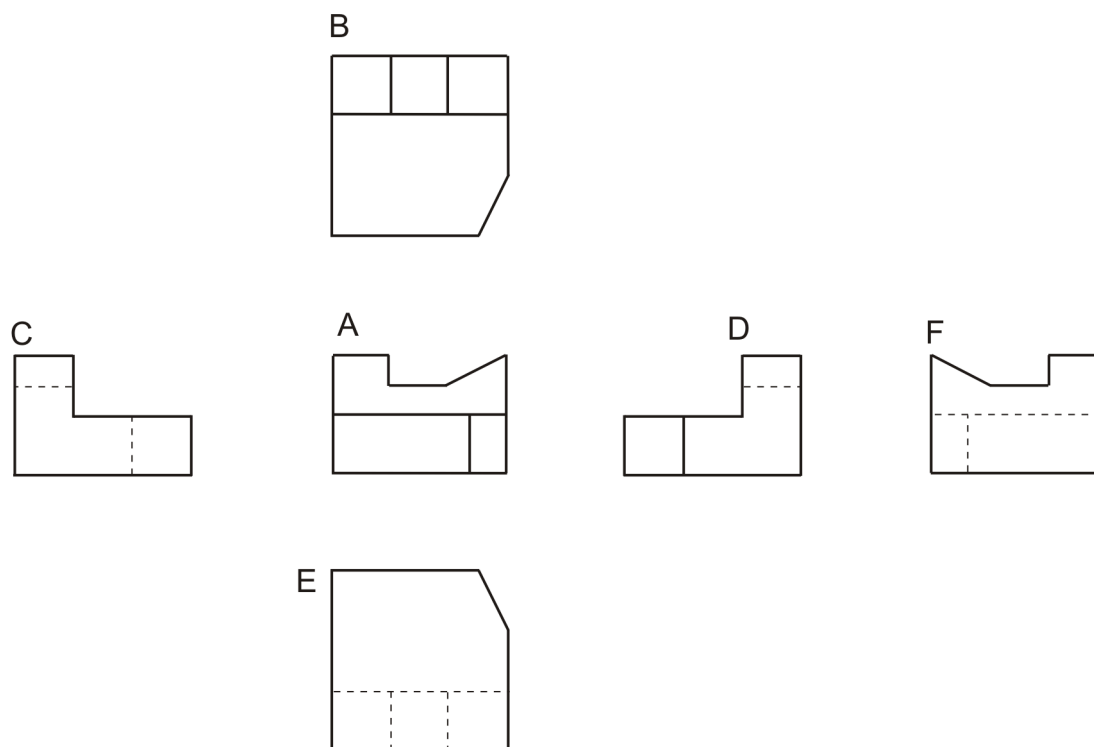


Sl. 13.12: Raspored pogleda po američkom načinu

a) pre obaranja, b) nakon obaranja

A - pogled spreda (glavni), B - pogled odozgo, C - pogled sleva, D - pogled zdesna, E - pogled odozdo, F - pogled straga

Za predmet sa sl. 13.5 nacrtani su šest pogleda i raspoređeni po američkom rasporedu (sl. 13.13). Pogledi raspoređeni po američkom rasporedu, na crtežu se ne označavaju sa slovima A, B, C... jer se to podrazumeva da se samo tako mogu rasporediti. Pogledi na ovom crtežu su označeni sa slovima A, B, C, D, E i F samo zbog jednostavnije edukacije početnika.



Sl. 13.13: Osnovni pogledi prema američkom rasporedu

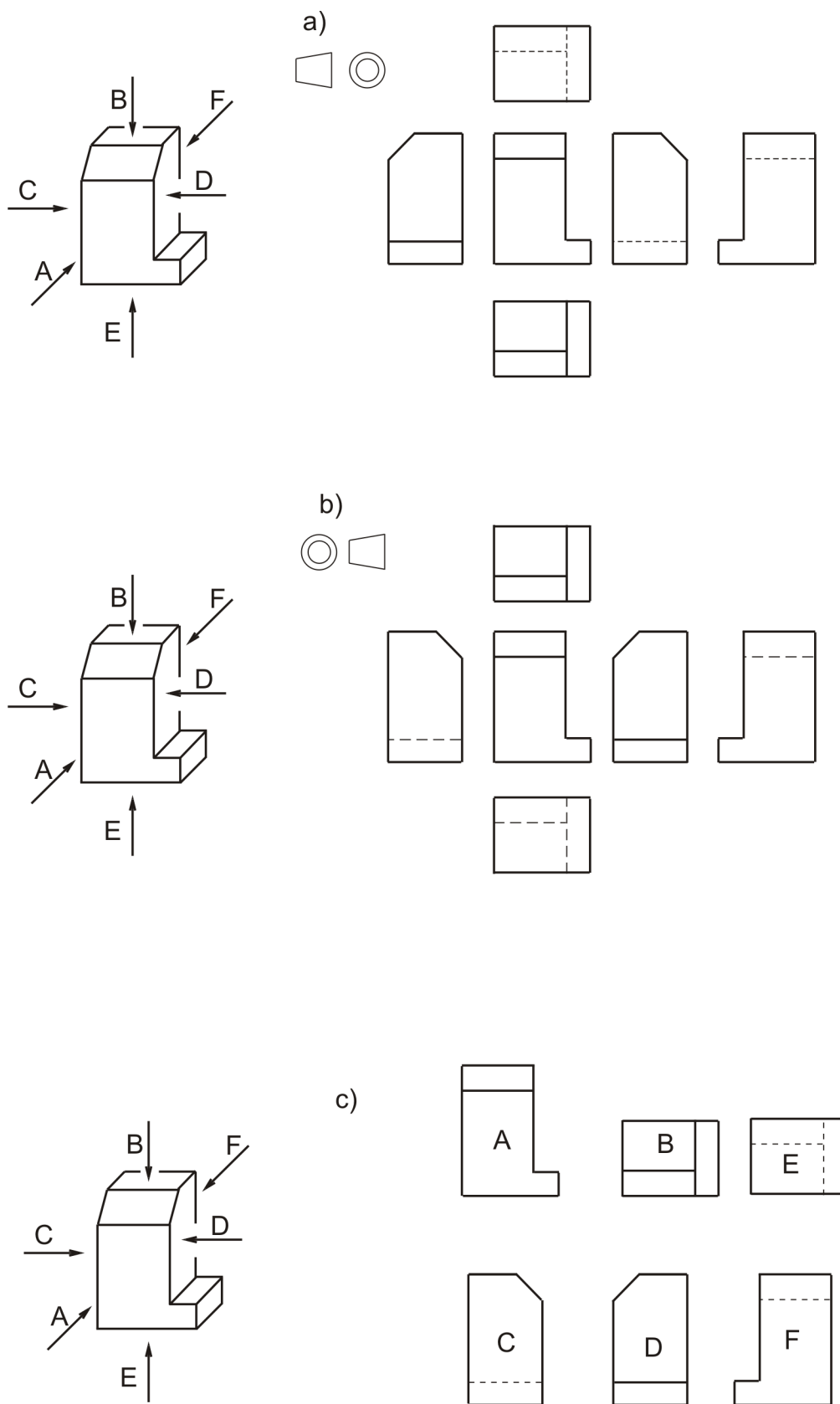
Za predmet na sl. 13.14 nacrtano je šest ortogonalnih pogleda po evropskom, američkom i proizvoljnom rasporedu pogleda.

Ako se koristi proizvoljan raspored pogleda tada se mora označiti način dobijanja pogleda, tj. moraju se označiti slovima A, B, C, D, E i F.

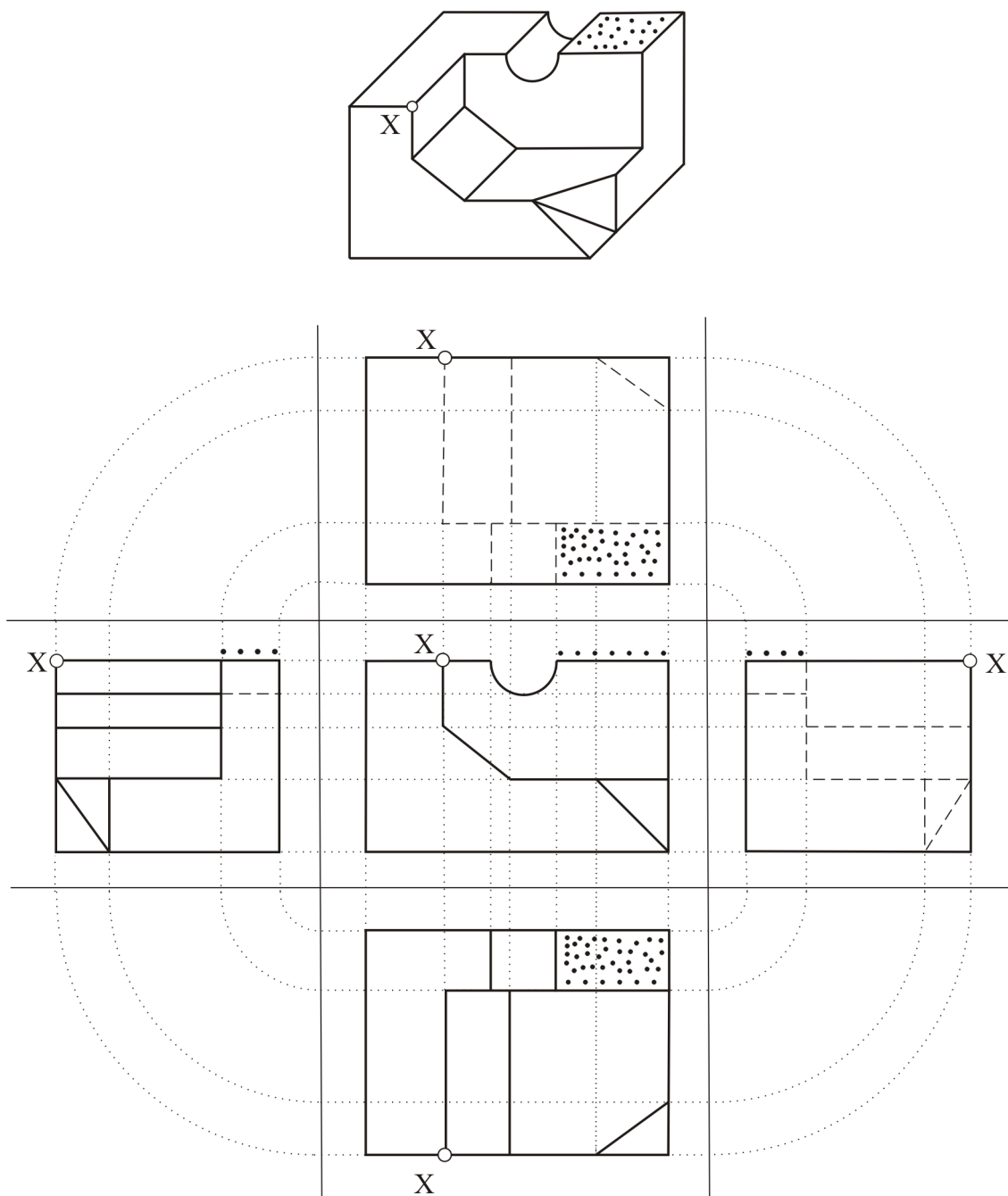
### 13.3. POVEZANOST ORTOGONALNIH POGLEDA

Ortogonalni pogledi (projekcije) su međusobno povezani projekcijskim zracima, odnosno sponama. Pogledi A, B i E su povezani vertikalnim sponama, pogledi A, C, D i F horizontalnim, a pogledi D, B; D, E; C, B i C, E sa izlomljenim sponama. Primer povezanosti ortogonalnih pogleda dat je na sl. 13.15 gde su pogledi raspoređeni po evropskom rasporedu. Glavni pogled A nalazi se u sredini. Ispod se nalazi pogled B. Svaka tačka, ivica i površina predmeta na ovim i svim ostalim pogledima, mora biti na zajedničkim sponama. Recimo tačka X na svim projekcijama mora biti u preseku vertikalne, horizontalne i izlomljene spona. Ako se uoči, npr. pravougaona tačkasta površina predmeta na pogledu B, praćenjem njenih spona vidi se da se ona različito projicira na pojedinim pogledima. Na pogledima A, C i D projicira se kao linija, pošto je ta površina paralelna sa H, a upravno na P i V ravan. Projekcije ove površine, kao i svih ostalih, moraju biti u preseku zajedničkih vertikalnih, horizontalnih i izlomljenih spona.

Ortogonalni pogledi se koriste pri crtanju ne samo delova mašina, već i za veće objekte kao što su: kuće, delovi grada, zemljište, parkovi itd. Pri tome se ne moraju crtati svi detalji, već samo oni koji su najbitniji. Na sl. 13.16 prikazana je kuća sa šest ortogonalnih pogleda koji su raspoređeni po evropskom rasporedu pogleda. Pri crtanju su zanemareni mnogi detalji, kao i nevidljive ivice kuće.

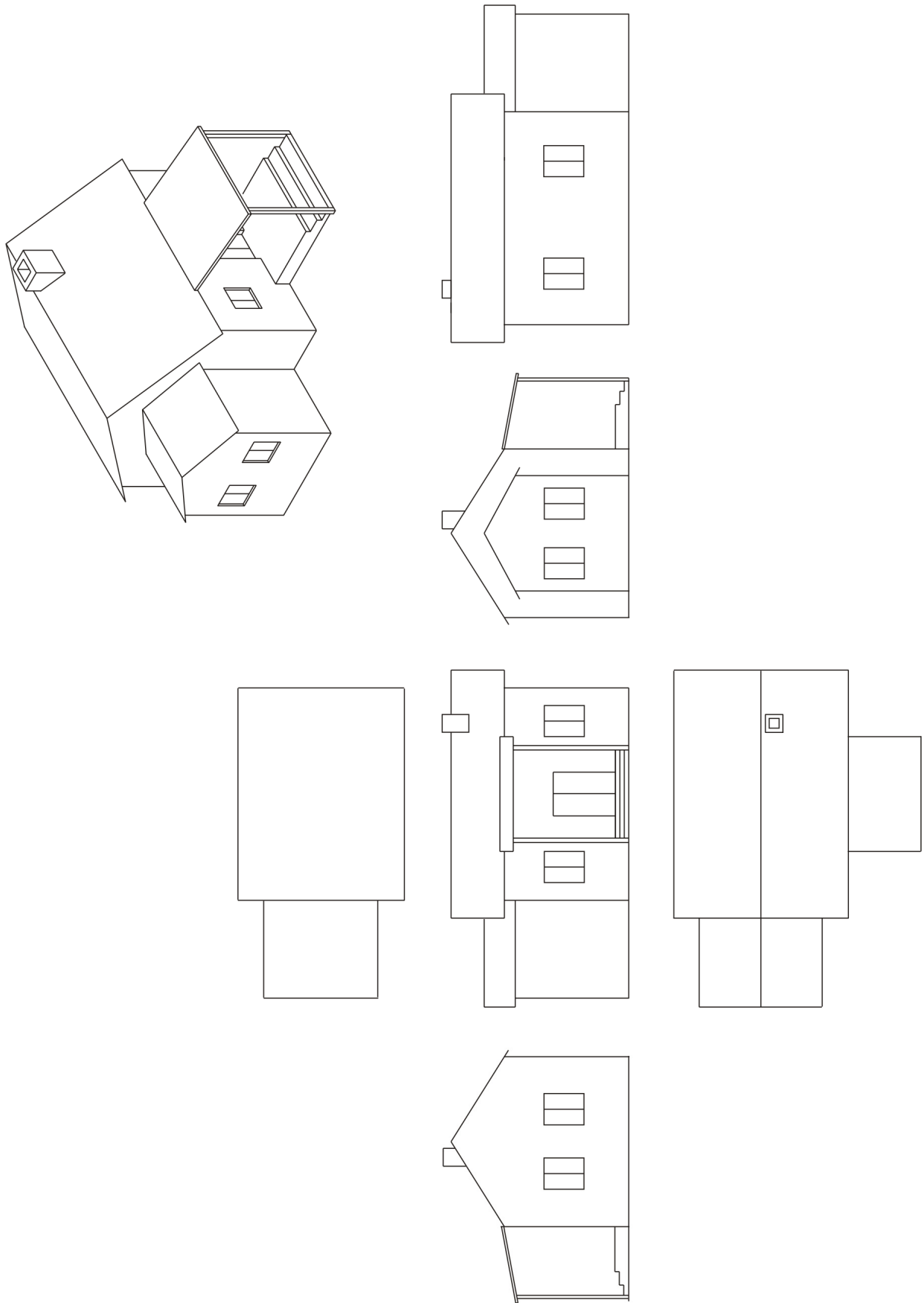


Sl. 13.14: Raspored pogleda po evropskom, američkom i proizvoljnom rasporedu  
 a) evropski, b) američki, c) proizvoljni



Sl. 13.15: Povezanost ortogonalnih pogleda





Sl. 13.16: Ortogonalni pogledi kuće

### 13.4. DOVOLJAN BROJ POGLEDA (PROJEKCIJA)

Sa sl. 13.9 vidimo da su ortogonalni pogledi B i E, zatim C i D, kao A i F međusobno slične, odnosno ponavljaju se sa malim razlikama u vidljivosti linija. To se odnosi i za primer sa sl. 13.14 i sl. 13.15. Prema tome nije ni potrebno crtati svih šest pogleda. Ma kako delovi mašina koje crtamo, bili složeni konstrukcionih oblika, ne zahtevaju crtanje svih šest pogleda. Dovoljna su tri, dva ili jedan (ako se dimenzionišu) pogled, zavisno od složenosti predmeta. Treba nacrtati minimalan broj pogleda koji predmet jednoznačno određuju.

Uvek se prvo crta glavni pogled, pogled A. Ako predmet sa pogledom A nije potpuno definisan, tada se uz pogled A crta još i pogled B ili C ili D. Ako nisu dovoljna dva pogleda (A i jedan od B, C i D) crta se treći koji može biti neki od preostalih iz grupe B, C ili D. Kombinaciju pogleda A sa E treba izbegavati, pošto se isto to može postići sa A i B. Pogled F se ne crta za prikazivanje delova mašina, dok se za crtanje zgrada koristi. Ortogonalni crtež se može nacrtati sa sledećim mogućnostima pogleda:

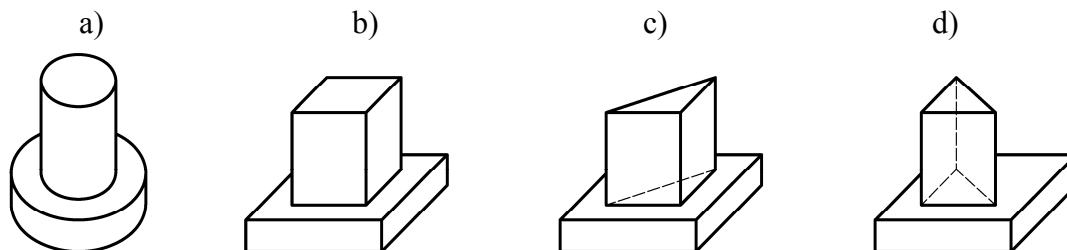
$$(A); \left( \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right); (DA); (AC); \left( \begin{matrix} AC \\ B \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} DA \\ B \end{matrix} \right).$$

Ne može se nacrtati crtež sa pogledima koji se ponavljaju npr. A sa F, jer se u tom slučaju ne bi mogla dati treća dimenzija predmeta i predmet ne bi bio potpuno definisan. Iz istih razloga se ne mogu koristiti kombinacije pogleda B sa E i C sa D. Ne može se nacrtati crtež sa pogledima D, A i C. Pogledi C i D su isti sa razlikama u vidljivosti linija i ovakav crtež bi bio neracionalan. Ne može se nacrtati ni crtež sa pogledima D i B. Ovakav crtež bi se teško čitao pošto pogledi nisu povezani direktnim, već izlomljenim sponama. Ne mogu se koristiti sledeće kombinacije ortogonalnih pogleda:

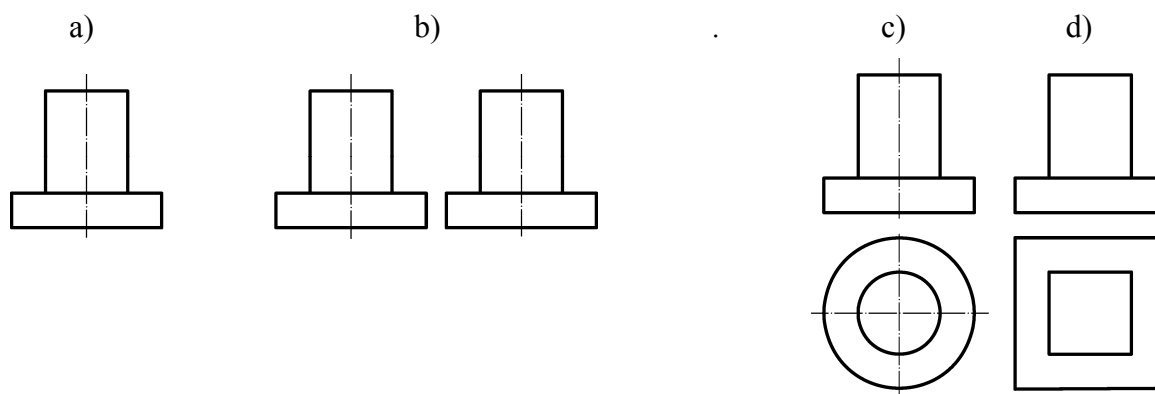
$$?(AF); (CD); \left( \begin{matrix} E \\ B \end{matrix} \right); (DAC); \left( \begin{matrix} E \\ B \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} D \\ B \end{matrix} \right); \left( \begin{matrix} C \\ B \end{matrix} \right).?$$

Postupak izbora minimalnog broja pogleda (karakterističnog broja pogleda) dat je za predmete sa sl. 13.17. Ako se za prvi predmet označen sa a) nacrtaju samo pogled spreda-A (sl. 13.18,a), vidi se da je taj pogled isti za sve različite predmete sa sl. 13.17,b,c,d. Znači da u ovom slučaju nije dovoljan samo pogled A jer ne definiše jednoznačno prvi predmet. Ako se uz pogled A nacrtaju i pogled C ili D (sl. 13.18,b) situacija je ponovo ista, pošto su i ova dva pogleda ista za sva četiri različita predmeta. Da bi se bilo koji od ova četiri različita predmeta jednoznačno definisao, uz ova dva pogleda trebalo bi nacrtati i pogled odozgo B. Tek sa kombinacijom od ta tri pogleda predmeti bi bili jednoznačno definisani. Međutim, ako se usvoji da se uz pogled A nacrtaju pogled B (sl. 13.18,c,d) tada je to dovoljno da se predmeti jednoznačno definišu. Na taj način (izborom pogleda) smanjuje se broj potrebnih pogleda na minimalan, što je bitno, pošto je izrada tehničke dokumentacije skupa, jer zahteva puno vremena. Treba crtati samo neophodan, minimalan broj pogleda. Odgovarajućim dimenzionisanjem za prva dva predmeta sa sl. 13.17 bio bi dovoljan samo jedan pogled, glavni A.

Krajnje merilo izbora minimalno potrebnog broja pogleda su dimenzije, o čemu će biti reči u narednom tekstu.



Sl. 13.17: Različiti predmeti sa istim pogledom A, C i D



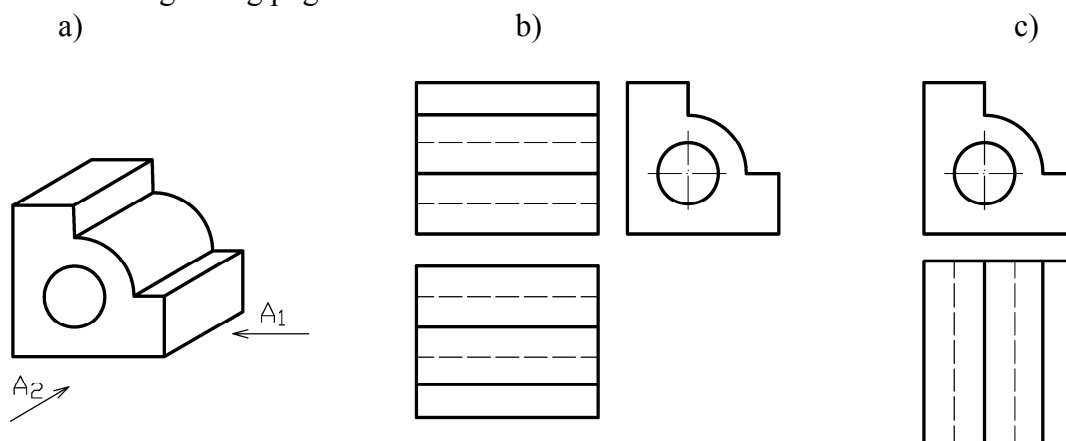
Sl. 13.18: Izbor dovoljnog broja pogleda

### 13.5. KARAKTERISTIKE GLAVNOG "A" POGLEDA

Glavni pogled je važan pogled, pošto su njegovim izborom određeni svi ostali pogledi. Pri izboru glavnog pogleda A, odnosno pri izboru položaja predmeta za glavni pogled, treba se rukovoditi sledećim:

- da taj pogled najviše i najjasnije pokazuje predmet,
- da njegovim izborom najviše površina predmeta budu paralelne, odnosno upravne na projekcijske ravni,
- da se maksimalno smanji broj potrebnih pogleda,
- da se što više, koliko je to moguće, smanji broj nevidljivih linija predmeta,
- da se olakša crtanje i čitanje takvog crteža i
- da u ovom pogledu predmet stoji u funkcionalnom položaju (npr. kuća), ako je to bitno ili u položaju izrade predmeta.

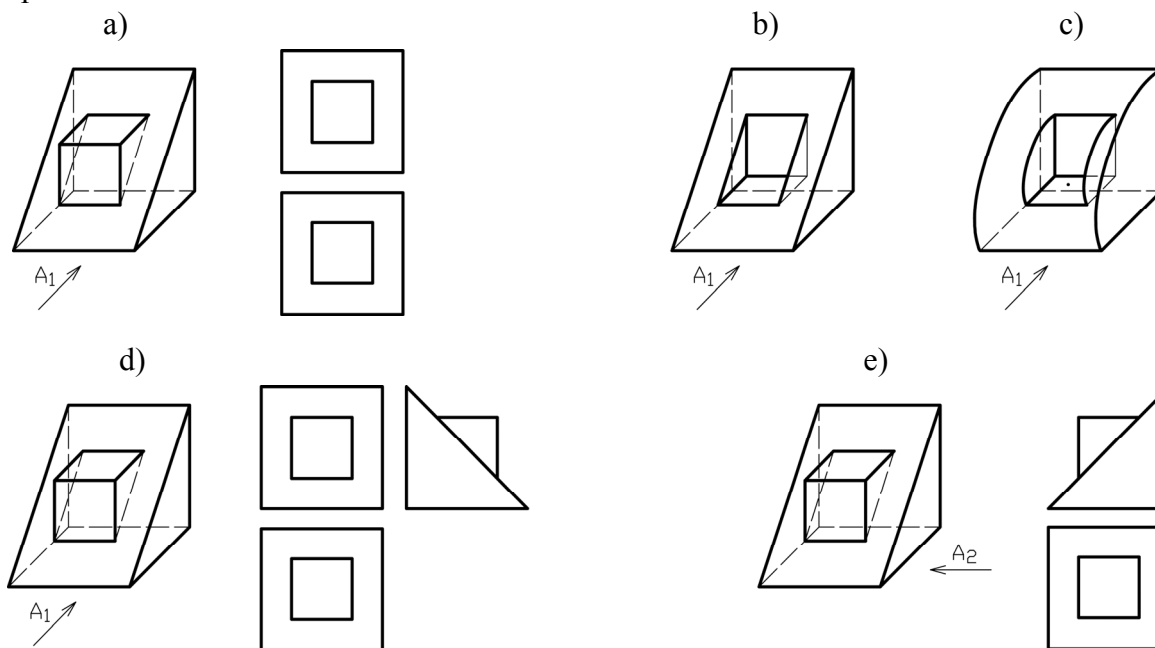
Ako se za predmet sa sl. 13.19,a izabere kao glavni pogled u smeru strelice  $A_1$ , tada je potrebno nacrtati tri pogleda A, B i C (sl. 13.19,b). Međutim, ako se za glavni usvoji pogled u smeru  $A_2$ , tada su potrebna samo dva pogleda A i B (sl. 13.19,c). Ovakav izbor je u skladu sa karakteristikama glavnog pogleda.



Sl. 13.19: Izbor glavnog pogleda: b) nepravilno, c) pravilno

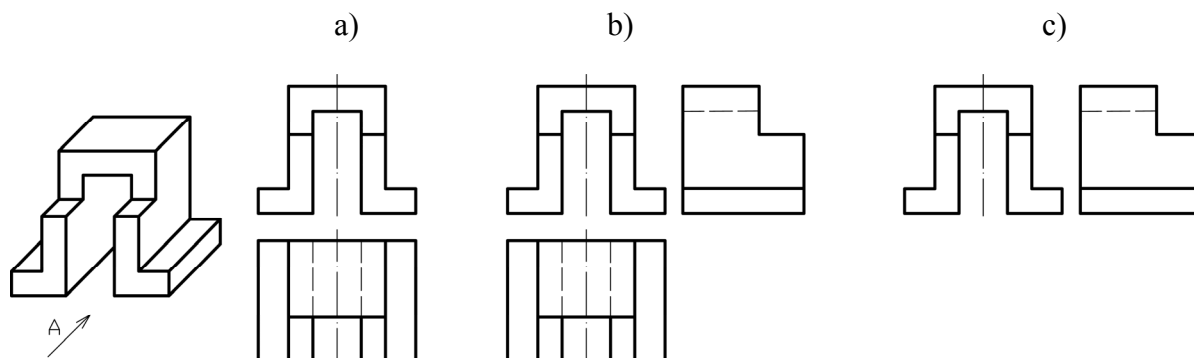
Još jedan primer analize izbora glavnog pogleda dat je za predmet sa sl. 13.20. Ako se usvoji da glavni pogled bude u pravcu  $A_1$  i nacrtaju se još samo pogled odozgo (B) predmet nije jednoznačno definisan (sl. 13.20,a), jer različiti predmeti imaju ista ta dva pogleda (sl. 13.20,b,c). Da bi predmet bio jednoznačno definisan potreban je još pogled sa strane leve ili desne (sl. 13.20,d). Međutim, ako se usvoji da glavni pogled bude u pravcu  $A_2$  tada su dovoljna dva pogleda (sl. 13.20,e).

Pri izboru dovoljnog broja pogleda treba misliti i na korisnike crteža. Treba odabrati one poglede da se predmet jednoznačno definiše i da korisniku crteža bude lako da izgled predmet sagleda u prostoru (aksonometriji). Treba tako odabrati poglede da se crtež (predmet) lako “pročita”.



Sl. 13.20: Smanjenje broja pogleda izborom glavnog pogleda

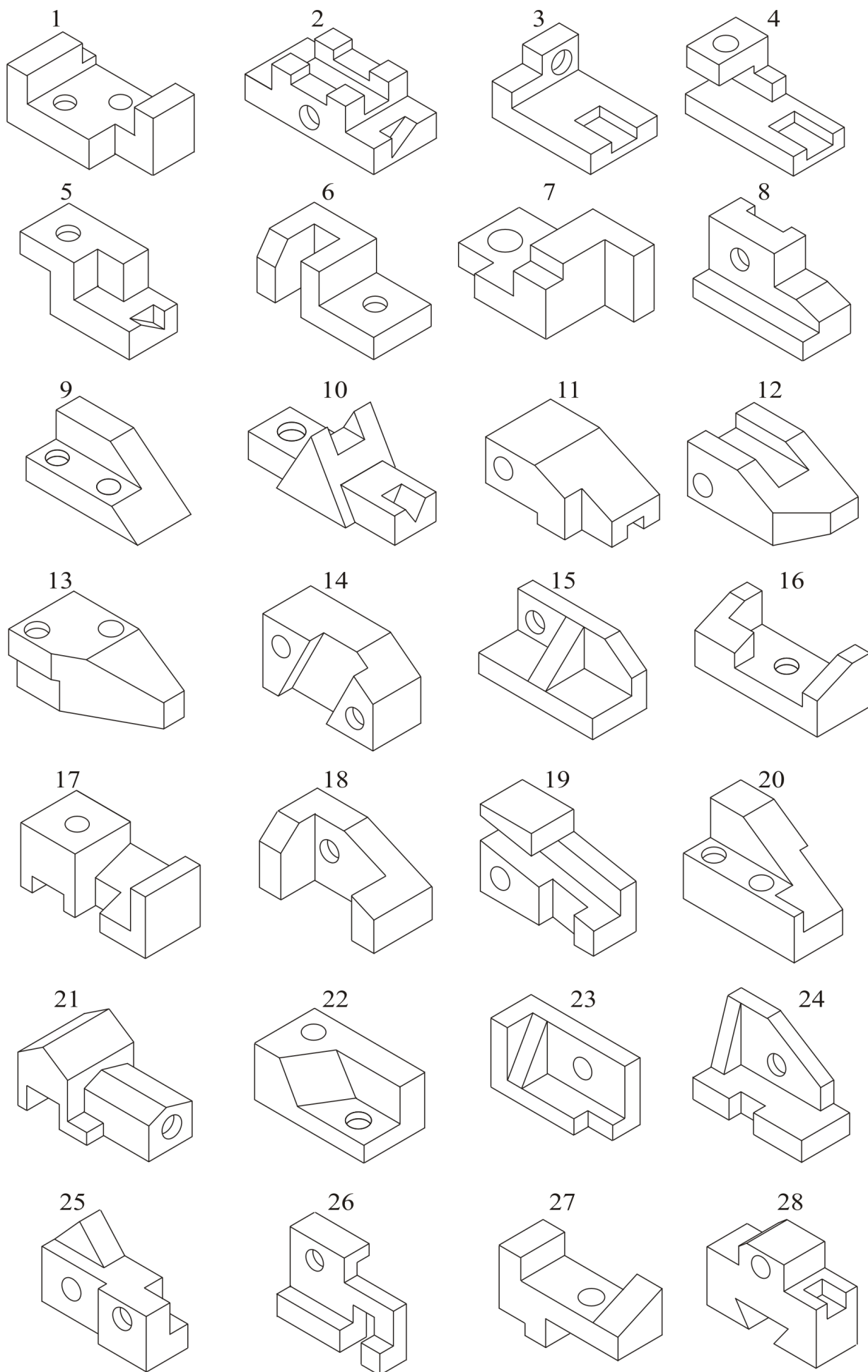
Za dati predmet nacrtana su dva pogleda A, B (sl. 13.21,a). Predmet je jednoznačno definisan samo sa pogledima A i B i ne bi se morao crtati pogled C. Međutim, sa ova dva pogleda crtež bi se teže “pročitao”. Zato je potrebno nacrtati i pogled sa strane (C), što bi znatno pomoglo korisniku crteža (sl. 13.21,b). Ovaj predmet može se jednoznačno definisati sa kombinacijom pogleda A i C, što ne bi stvaralo teškoće pri “čitanju”. Znači, za ovaj predmet treba nacrtati pogled A i C (sl. 13.21,c) ili A i D.



Sl. 13.21: Izbor potrebnog broja pogleda

### Zadatak 13.1.

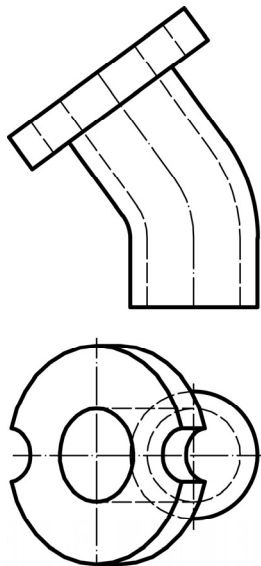
Za predmete sa sl. 13.22 nacrtati dovoljan broj ortogonalnih pogleda, tako da budu jednoznačno definisani.



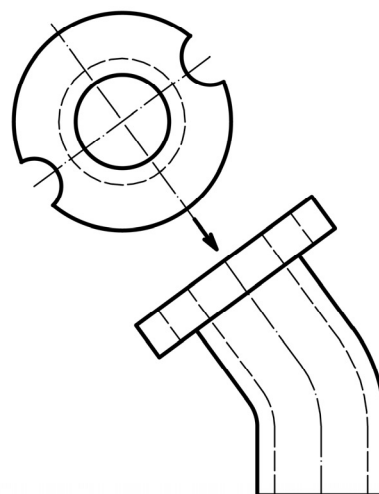
Sl. 13. 22: Za date predmete nacrtati dovoljan broj ortogonalnih pogleda

### 13.6. SPECIJALNI ORTOGONALNI POGLEDI

Površine predmeta koje stoje pod nekim proizvoljnim uglom u odnosu na projekcijske ravni (kose površine) projiciraju se u svih šest ortogonalnih pogleda deformisano, što je vrlo nepovoljno i za crtanje i za čitanje ortogonalnog crteža (sl. 13.23).



Sl. 13.23: Ortogonalne projekcije kosih površina predmeta

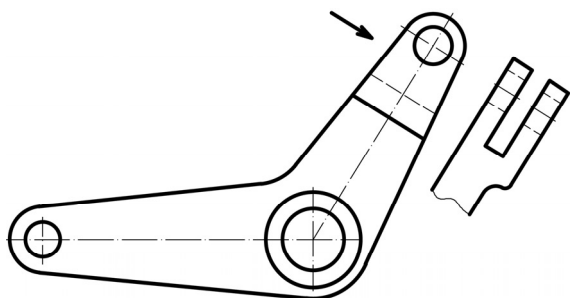


Sl. 13.24: Specijalni ortogonalni pogled

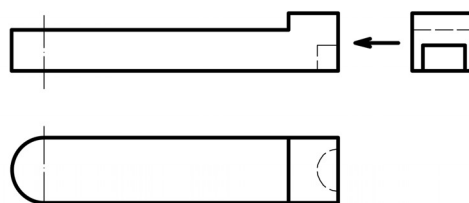
Za takve predmete crtaju se specijalni ortogonalni pogledi. Dobijaju se tako što se postave nove projekcijske ravni (transformacijske ravani) koje su paralelne sa kosim površinama predmeta. Dobijene ortogonalne projekcije na tim projekcijskim ravnima daju nedeformisane slike tih kosih površina predmeta. Za predmet na sl. 13.23 nacrtan je specijalni ortogonalni pogled na transformacijskoj ravni koja je paralelna sa gornjom kosom površinom (sl. 13.24).

Dobijena projekcija može da se obara na jednu ili drugu stranu od pravca posmatranja, zavisno od prostora na crtežu, što se označava strelicom (sl. 13.25). Pri tome se crta samo ta kosa površina, bez ostalih delova predmeta.

Specijalni pogled se može nacrtati i za površine koje nisu pod nekim proizvoljnim uglom u odnosu na projekcijske ravni (sl. 13.26). Pogled D u ovom primeru je nacrtan na desnoj strani pogleda A, a ne na levoj, kako bi trebalo po evropskom rasporedu, pošto su pogled A i B po ovom rasporedu nacrtani. Da bi se to naznačilo stavlja se strelica koja govori o pravcu posmatranja te površine. Tako pogled D postaje specijalni pogled, pošto se ne nalazi na mestu na kojem bi trebalo da bude po odabranom rasporedu pogleda. Ova mogućnost koristi se vrlo retko, kada prostor na crtežu to zahteva.



Sl. 13.25: Specijalni pogled



Sl. 13.26: Pogled D kao specijalni pogled

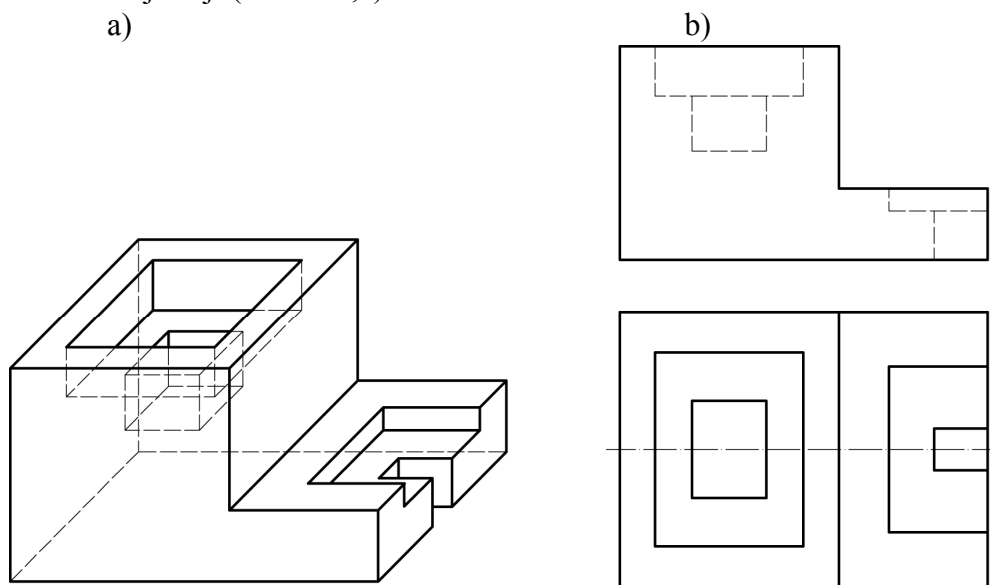
### 13.7. PRESECI NA ORTOGONALNIM CRTEŽIMA

Sve zaklonjene (nevidljive) ivice i konture predmeta na ortogonalnim crtežima iz oblasti tehnike crtaju se na svim pogledima. Međutim, nevidljive konture se ne mogu dimenzionisati niti se na njih mogu stavljati druge oznake potrebne za izradu predmeta, kao npr. oznake za tolerancije, kvalitet izrade površina itd.

Da bi unutrašnji (zaklonjeni) detalji predmeta postali vidljivi, predmet se, zamišljeno odseca i deo predmeta koji je smetao da se unutrašnjost vidi, zamišljeno se odstrani pre crtanja. Da bi se dalo do znanja da predmet nije stvarno, već zamišljeno (imaginarno) odsečen, deo predmeta koji je došao u dodir sa ravni sečenja se šrafira. [rafuru čine međusobno paralelne tanke linije, prvenstveno pod uglom od  $45^\circ$  ili  $135^\circ$ . Rastojanja između linija šrafure ne smeju biti suviše mala, pa da se šrafirana površina zatamni, niti suviše velika, pa da ne liči na šrafuru.

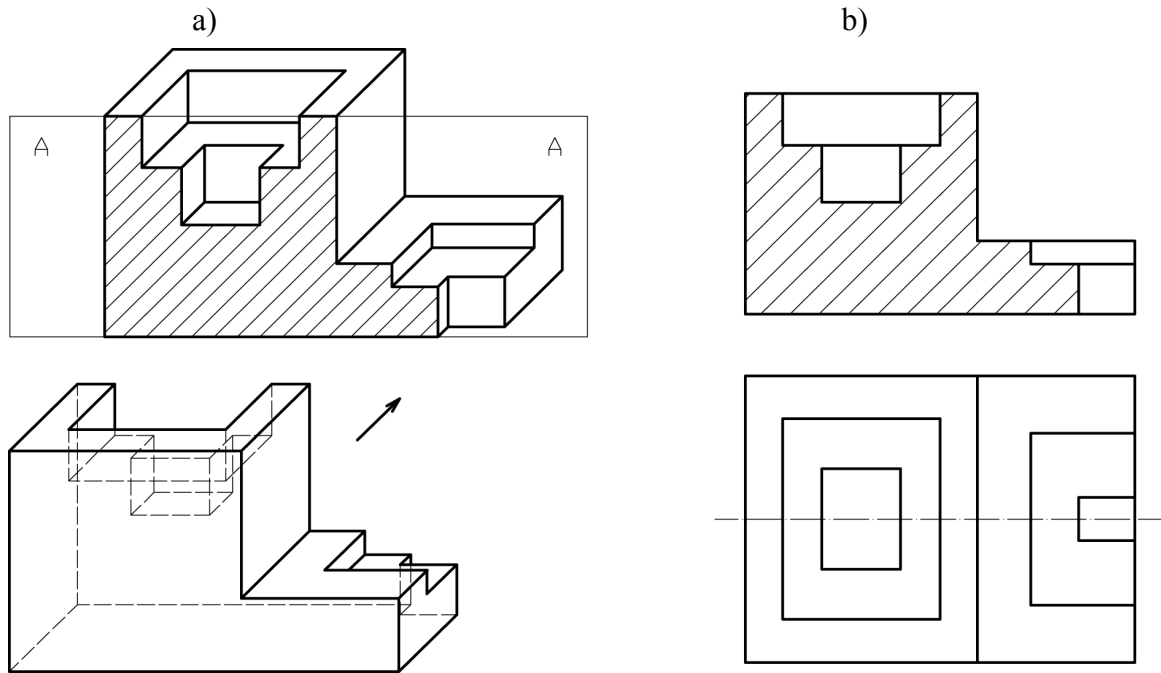
Zamišljeno odsecanje predmeta može biti izvedeno na razne načine sa različitim ravnima odsecanja, tako da se preseci vide u svim pogledima. Zavisno od načina sečenja postoje različite vrste preseka: potpun uzdužni, potpun poprečni, polovičan (četvrt), delimičan itd. Ravni odsecanja se označavaju velikim slovima latinice A, B, C... Kada se tragovi ravni odsecanja poklope sa simetralnim linijama predmeta, onda se ne označavaju. Ako tragovi ravni nisu na simetralnim linijama predmeta, tada se označavaju različitim linijama zavisno od vrste sečenja.

**Potpun uzdužni presek** koristi se za nesimetrične predmete. Ako se predmet sa sl. 13.27,a nacрта bez preseka, unutrašnji detalji predmeta na glavnom pogledu se ne vide i crtaju se isprekidanom linijom (sl. 13.27,b). Ovi detalji se ne bi videli niti u pogledu sa strane, odnosno crtali bi se isprekidanom linijom. Dubina unutrašnjih detalja se ne može dimenzionisati, pošto se isprekidane linije ne dimenzionišu. Zbog toga se predmet zamišljeno potpuno preseče na pola sa ravni A-A, koja je paralelna sa vertikalnom projekcijskom ravni po dužoj simetralnoj liniji (sl. 13.28,a).



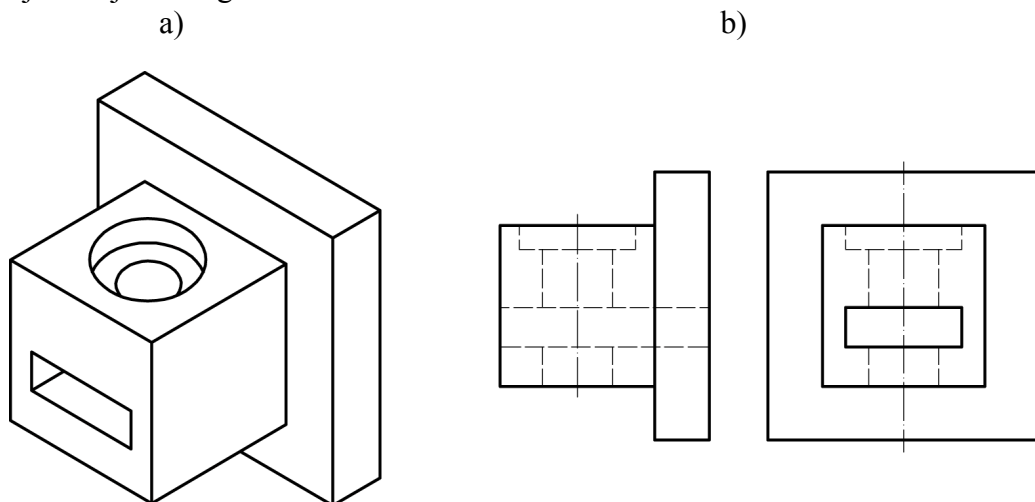
Sl. 13.27: Predmet pogodan za potpun uzdužni presek  
a) predmet crtanja, b) pogled A i B bez preseka

Trag ravni odsecanja projicira se u pogledu odozgo (pogled B) kao linija koja se poklapa sa simetralnom linijom i ne crta se. Dobijeni presek se vidi u glavnom pogledu (sl. 13.28,b). Razlika glavnog pogleda bez i sa presekom je u tome što su nevidljive linije postale vidljive, a pogled B je ostao isti sa i bez preseka. Pošto je sečenje zamišljeno, šrafira se površina predmeta koja je došla u dodir sa ravni sečenja A-A.



Sl. 13.28: Potpun presek u pogledu A  
a) način sečenja za potpun presek, b) pogled A i B sa presekom

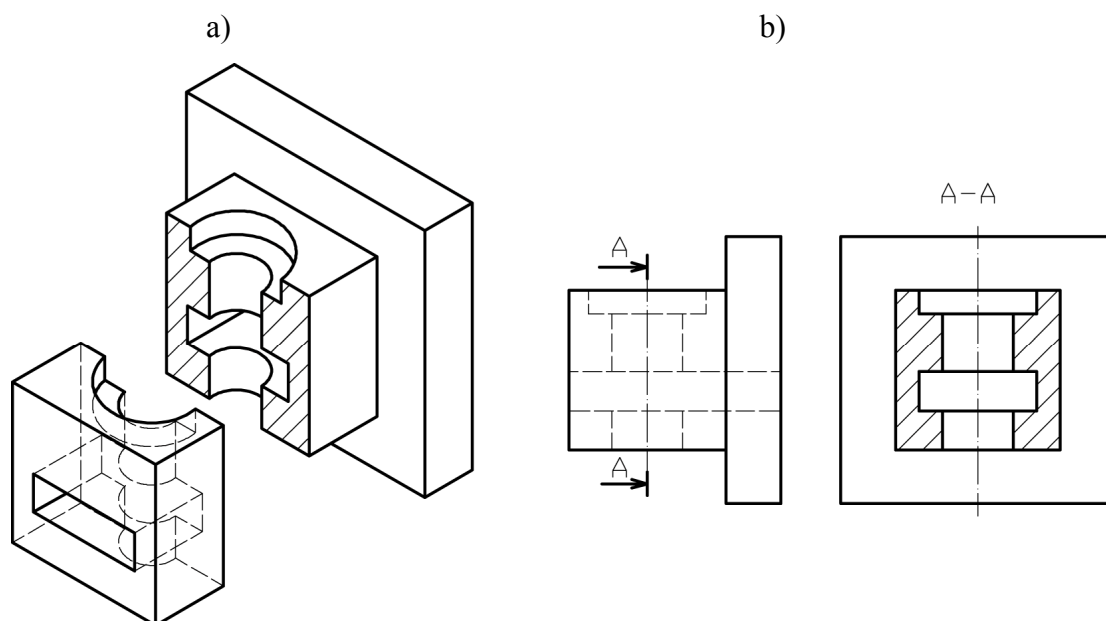
**Potpun poprečni presek** koristi se za predmete sa unutrašnjim detaljima koji stoje upravno na dužu simetralnu osu predmeta. Predmet sa sl. 13.29,a pogodan je za ovaj presek. Na osnovu pogleda spreda (A) i sleva (C) (sl. 13.29,b) može se zaključiti da se bez preseka, unutrašnji detalji ne mogu dimenzionisati.



Sl. 13.29: Predmet pogodan za poprečni presek  
a) izometrijska slika, b) ortogonalni pogledi

Predmet se zamišljeno odseče sa ravni koja stoji pod uglom od  $90^\circ$  na uzdužnu osu (popreko na dužu osu predmeta) na mestu gde se nalaze unutrašnji detalji predmeta (sl. 13.30,a). Pre crtanja zamišljeno se odstrani prednji deo predmeta. Trag ravni sečenja crta se tankom linijom crta tačka crta zadebljanom na krajevima i označi strelicom koja pokazuje pravac posmatranja predmeta nakon zamišljenog sečenja (sl. 13.30,b). Na liniji sa strelicom stoji oznaka ravni sečenja A, kao i na dobijenom poprečnom preseku u pogledu C (A-A). Predmet se može seći tako da se poprečni presek vidi u pogledima A, B, C i D.



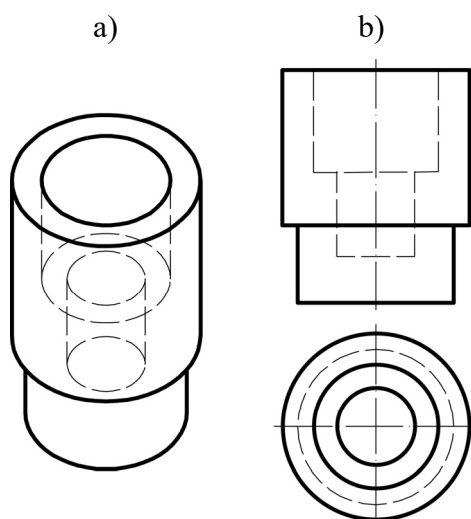


Sl. 13.30: Poprečni presek

a) način sečenja za poprečni presek, b) pogled A i C sa presekom

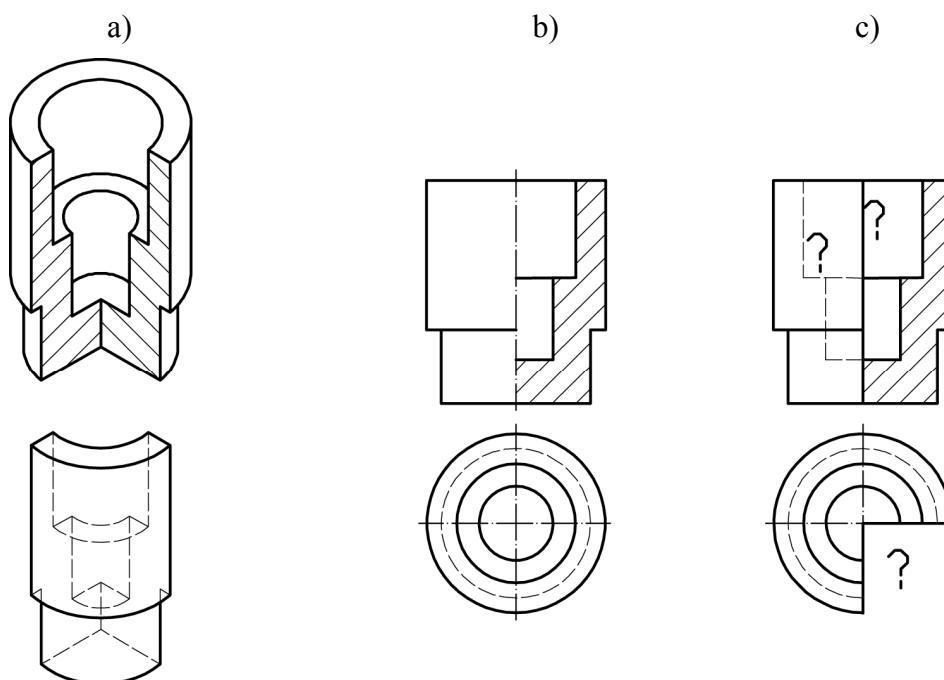
**Polovičan ili četvrt presek** koristi se za predmete koji su potpuno simetrični i po spoljašnjosti i po unutrašnjosti i po svim osama simetrije. Predmet prikazan na sl. 13.31,a je upravo takav. Sa glavnim pogledom (spreda) i odozgo predmet je jednoznačno definisan (sl. 13.31,b).

Međutim, ne mogu se dimenzionisati dubine rupa. Zbog toga se predmet zamišljeno iseče sa dve izlomljene ravni pod uglom od  $90^\circ$  i to po dvema simetralnim osama predmeta. Praktično, zamišljeno se odseca četvrtina predmeta (sl. 13.32,a). Na desnoj strani predmeta na pogledu A crta se unutrašnjost predmeta (pošto se nakon zamišljenog sečenja vidi), a na levoj strani samo spoljašnjost predmeta (sl. 13.32,b).



Sl. 13.31: Predmet pogodan za polovičan (četvrt) presek  
a) izometrijska slika, b) ortogonalni pogledi

Iako leva polovina predmeta na pogledu A ima unutrašnjih nevidljivih detalja, koji su isti kao i na desnoj, oni se ne crtaju, ali se podrazumeva da postoje. Takođe se podrazumeva da je spoljašnjost desne strane predmeta ista kao i leve. Trag ravni se ne označava pošto se predmet seče po osama simetrije. Četvrt presek je racionalan, pošto na jednom pogledu obuhvata i spoljašnjost i unutrašnjost predmeta

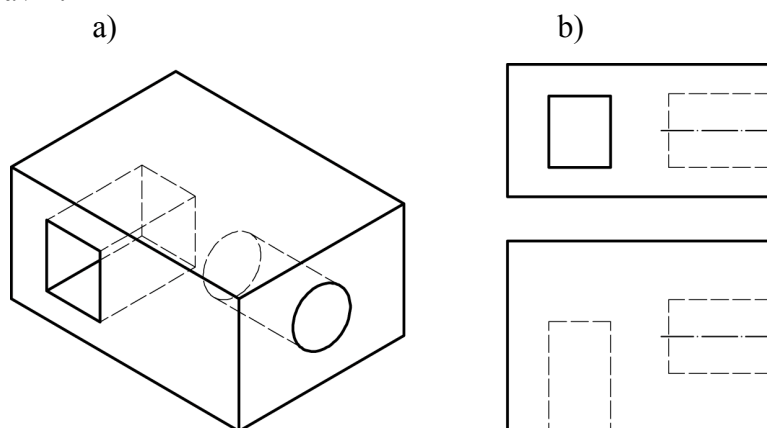


Sl. 13.32: Polovičan (čtvrť presek)

a) način sečenja za četvrt presek, b) pravilan presek, c) nepravilan presek

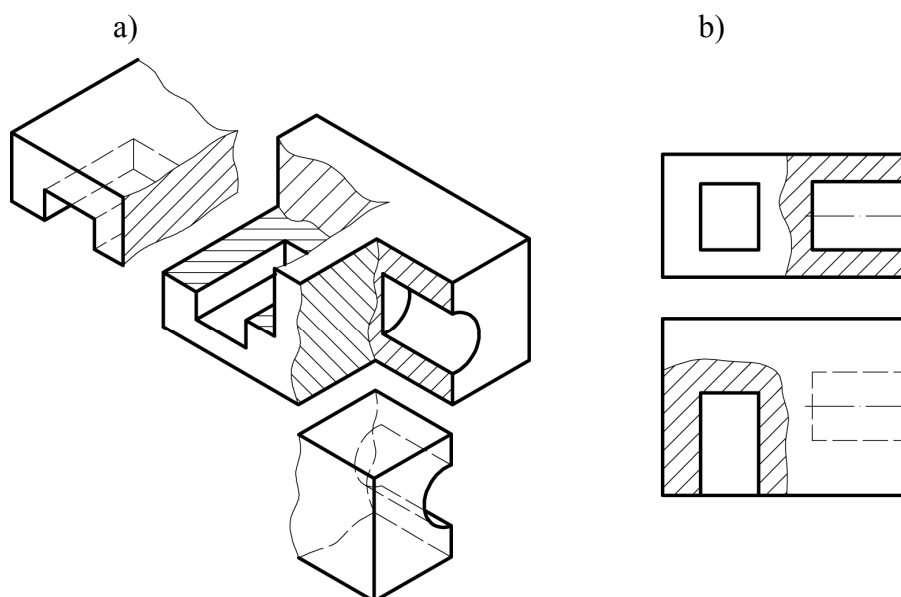
Na sl. 13.32,c namerno su napravljene greške. Ne crtaju se nevidljive linije na onoj četvrtini predmeta koja se ne seče iako postoje, zato što se to podrazumeva, jer je predmet simetričan. Takođe, greška je što je pogled odozgo nacrtan bez četvrtine kruga, pošto je predmet zamišljeno, a ne stvarno tako odsečen. Osim toga, na glavnom pogledu je pogrešno nacrtana konturna linija umesto osne. Bilo bi to pravilno kada bi se predmet tako stvarno odsekao, a ne fiktivno.

**Delimičan presek** koristi se za prikazivanje sitnih unutrašnjih detalja predmeta, koji se ne mogu ubuhvatiti jednom ravni sečenja. Predmet prikazan na sl. 13.33,a pogodan je za četvrt presek pošto se na ortogonalnim pogledima (sl. 13.33,b) unutrašnji detalji ne vide, a ne mogu se seći jednom ravni.



Sl. 13.33: Predmet pogodan za delimični presek  
a) izometrijska slika, b) ortogonalni pogledi

Predmet se zamišljeno delimično odseče po osnoj liniji rupe i žleba tako da se vide (sl. 13.34,a). Ukoliko se deo unutrašnjeg detalja i nakon delimičnog odsecanja ne vidi, crta se isprekidanom linijom. Trag ravnog sečenja označava se slobodnoručnom tankom linijom.

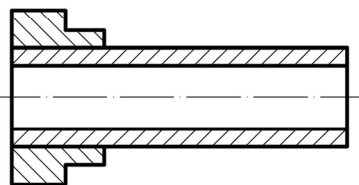


Sl. 13.34: Delimični presek

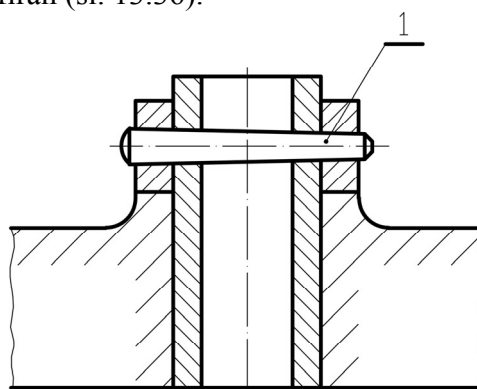
a) način sečenja za delimični presek, b) pogledi A i B sa delimičnim presekom

Kada se predmeti nalaze u sklopu (naležu jedan na drugi) i kada imaju neku zajedničku funkciju, obavezno se pri crtanju koristi neki od preseka. Pri tome se različiti predmeti šrafiraju različitim šrafurama, bilo po nagibu, bilo po gustini. Na sl. 13.35 nacrtana su dva predmeta u sklopu, korišćenjem uzdužnog preseka.

Na sl. 13.36 prikazana su 4 predmeta u sklopu, takođe, korišćenjem uzdužnog preseka. Na ovom primeru čivija (pozicija 1) nije šrafirana, pošto se svi mašinski elementi za vezu (čivije, klinovi, zavrtnji, zakivci, podloške, osigurači itd.) ne seku (ne šrafiraju se), odnosno preskaču se pri sečenju i crtaju se kako izgledaju spolja. Ovaj izuzetak važi i za druge mašinske elemente u sklopu: vratila, osovine, osovinnice, kotrljajni elementi ležaja itd. Izuzetak mogu činiti i drugi mašinski delovi čije su površine velike za šrafiranje, čijim bi šrafiranjem crtež bio jako šaren i nepregledan. Površina, koja je velika za šrafiranje, može se šrafirati samo uz konturu, a ostali deo da ostane nešrafiran (sl. 13.36).

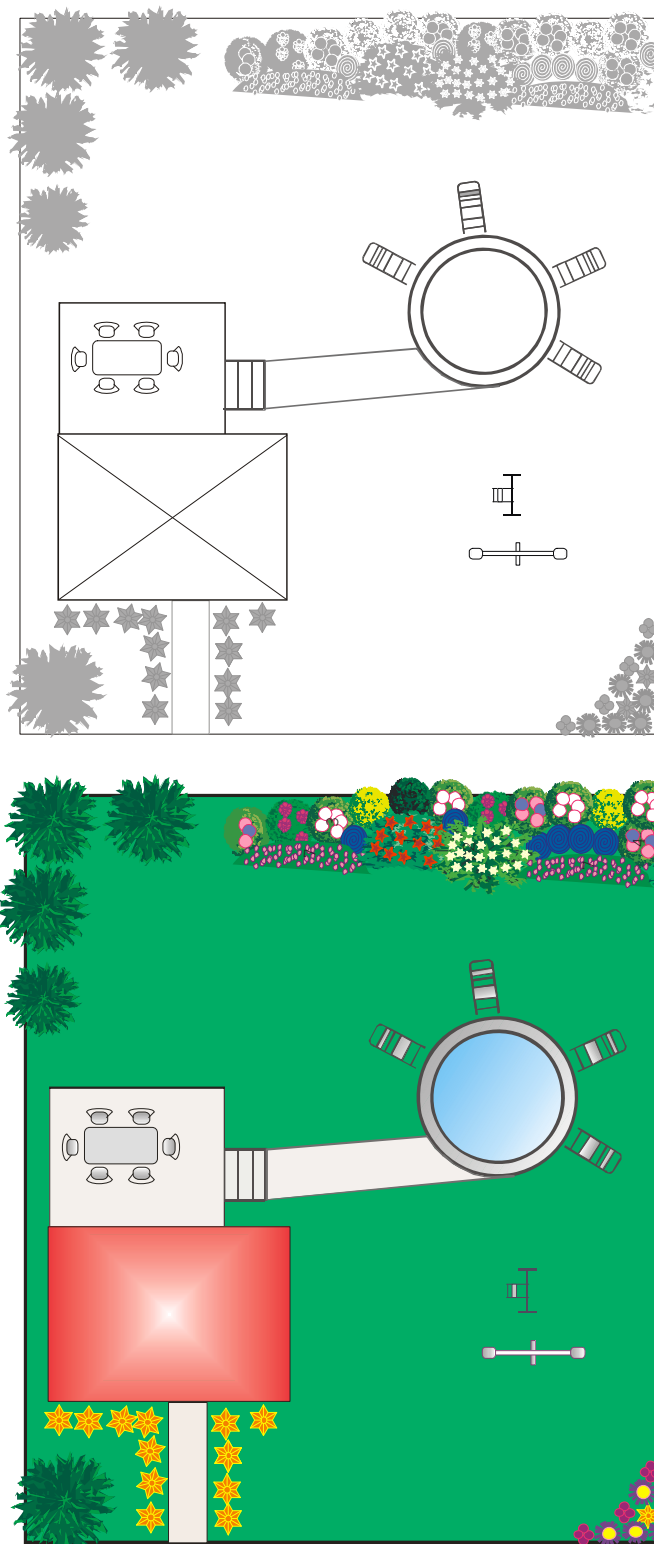


Sl. 13.35: Presek dva predmeta u sklopu



Sl. 13.36: Presek četiri predmeta u sklopu

Ortogonalni crtež više delova u nekoj funkcionalnoj celini može biti uprošćen, npr. pri crtanju pejzažnih prostora kada se želi prikazati njihova struktura, raspored, međusobni odnos i biljne vrste (sl. 13.37). Tada se delovi prostora crtaju okvirno, sa spoljašnjim gabaritnim dimenzijama, često i u boji. Ovakav ortogonalni crtež je deo tehničke dokumentacije sa kojim se želi pokazati postojeće stanje ili idejno rešenje.



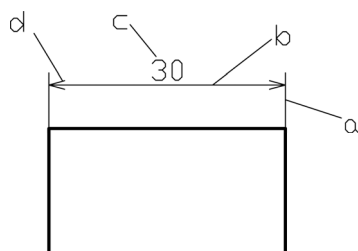
Sl. 13.37: Uprošćen ortogonalni crtež pejzažnog prostora

### 13.8 DIMENZIONISANJE

Dimenzionisanje predstavlja **označavanje dimenzija predmeta na crtežu**. Postoje pravila za označavanje dimenzija predmeta na crtežima koja su međusobno različita za različite vrste crteža: crteži mašinskih delova i konstrukcija, građevinski crteži, crteži iz arhitekture, pejzažni crteži itd. O označavanju dimenzija pejzažnih prostora bilo je već reči u poglavlju 12, pod tačkom 12.1. RAZMERA CRTANJA (OZNAČAVANJE DIMENZIJA).

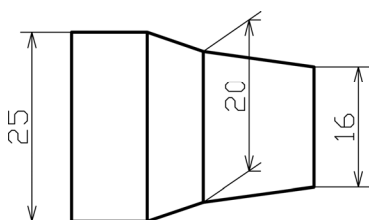
Ovde će ukratko biti objašnjeno dimenzionisanje mašinskih delova i sličnih manjih predmeta. Da bi se crtež dimenzionisao koriste se odgovarajući elementi za dimenzionisanje: pomoćna dimenziona linija, dimenziona linija, dimenzioni završetci (strelice) i dimenzioni broj (sl. 13.38). Osim ovih elemenata mogu se koristiti: pokazna linija, početni kružić, tačka i crtica.

**Pomoćna dimenziona linija** crta se u produžetku konturnih linija predmeta koji se dimenzionišu ili, ako je malo mesta, može i pod proizvoljnim uglom (sl. 13.39). Mogu izostati pomoćne dimenzione linije (sl. 13.40), ako unutar kontura predmeta ima mesta za ostale elemente dimenzionisanja.

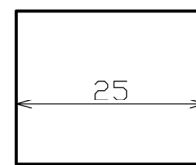


- a) pomoćna dimenziona linija
- b) dimenziona linija
- c) dimenzioni broj
- d) dimenzioni završetak (strelica)

Sl. 13.38: Osnovni elementi dimenzionisanja

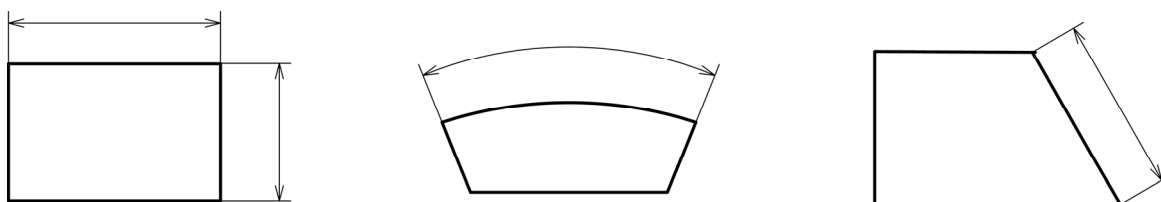


Sl. 13.39: Pomoćne dimenzione linije

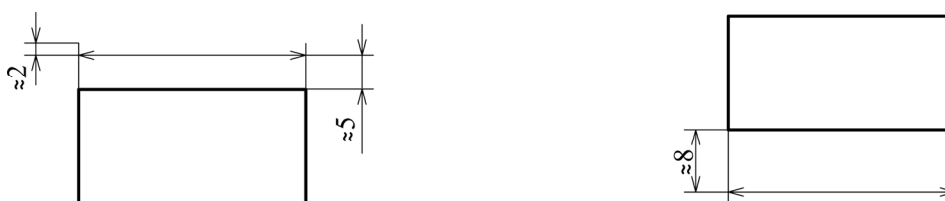


Sl. 13.40: Izostavljene pomoćnih dimenzionih linija

**Dimenzione linije** su paralelne sa konturama predmeta koje se dimenzionišu (sl. 13.41). Rastojanje između konturne i dimenzione linije kreće se približno od 5 do 8 mm, zavisno od visine dimenzionog broja i od toga gde se on nalazi (sl. 13.42). Pomoćna dimenziona linija prelazi glavnu liniju za oko 2 mm. Pomoćna i dimenziona linija crtaju se tankom punom linijom.



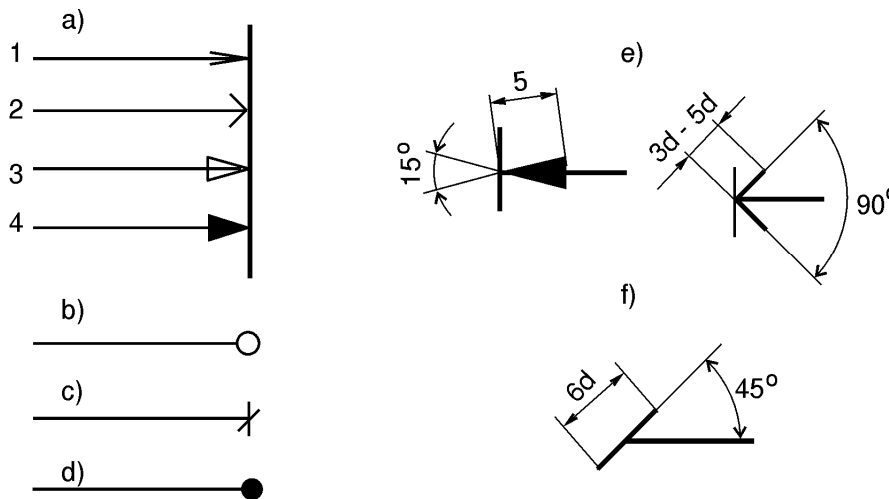
Sl. 13.41: Dimenzione linije



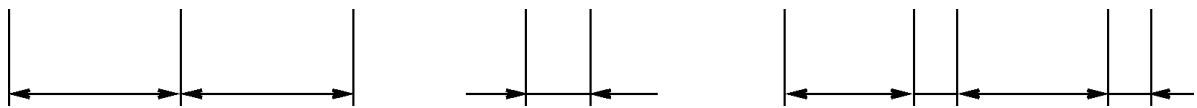
Sl. 13.42: Odstojanja dimenzione od konturne linije

**Dimenzioni završetak je obično strelica** različitih oblika (sl. 13.43,a). Na jednom crtežu koristi se jedna od mogućnosti. Prednost ima prvi oblik strelice (sl. 13.43,a broj 1). Ako su mala rastojanja između pomoćnih dimenzionih linija, umesto strelice može se koristiti kosa crtica ili tačka (sl. 13.43,c,d). Dimenzije strelica date su na sl. 13.43,e, a kosih crtica na sl. 13.43,f. Dimenziona strelica može da se piše unutar pomoćnih dimenzionih linija ili sa spoljašnje strane (sl. 13.44).

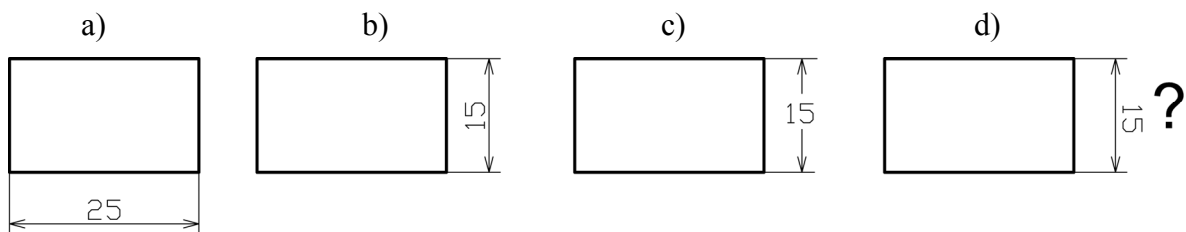
**Dimenzioni broj** predstavlja vrednost dimenzije na predmetu u **mm** (na crtežima u mašinstvu), bez obzira na to koja je razmera crtanja i to preventivno na sredini dimenzionih linija (sl. 13.45). Ako je dimenziona linija vertikalna, dimenzioni broj se piše kao na sl. 13.45,b, što proizilazi iz principa obrtanja crteža pri posmatranju. Crtež se posmatra tako da je zaglavljje dole desno ili se obrne iz tog položaja samo jednom za  $90^\circ$  u smeru kazaljke na satu (sl. 13.46). Pri tome dimenzioni broj ne može biti napisan naopačke. Dimenzioni broj se može pisati i horizontalno na vertikalnoj dimenzionoj liniji, ali tada se mora prekinuti dimenziona linija, pošto broj ima prednost (sl. 13.45,c). Dimenzioni broj se ne može pisati kao na sl. 13.45,d.



Sl. 13.43: Vrste dimenzionih završetaka

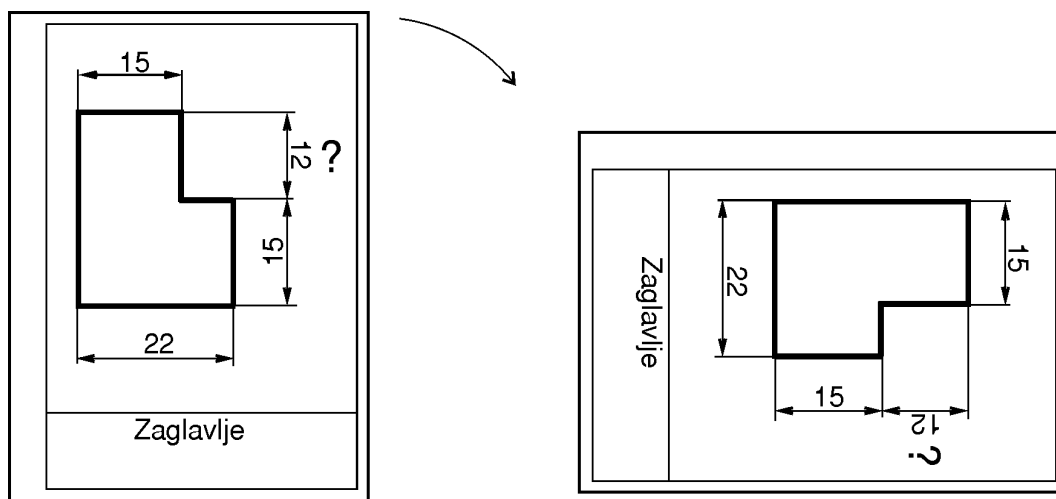


Sl. 13.44: Položaj dimenzionih strelica u odnosu na pomoćne dimenzionih linije



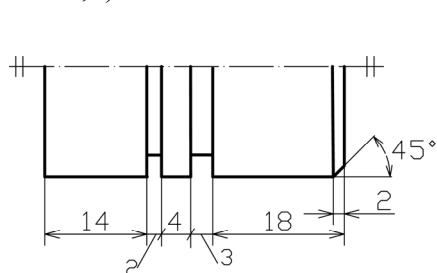
Sl. 13.45: Dimenzioni brojevi

a) na horizontalnoj dimenzionoj liniji, b), c) na vertikalnoj dimenzionoj liniji, d) nepravilno pisanje dimenzionog broja

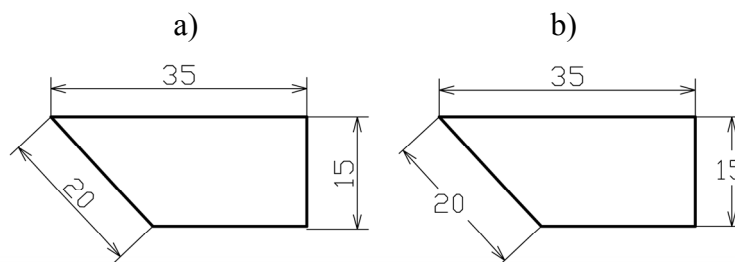


Sl. 13.46: Princip obrtanja crteža pri dimenzionisanju

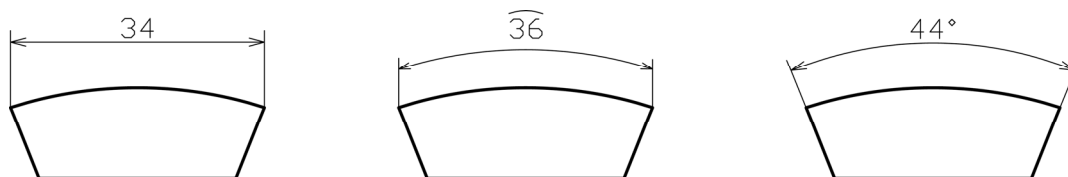
Ako nema dovoljno mesta za ispisivanje dimenzionog broja, koristi se pokazna linija pored koje stoji dimenzioni broj ispisan horizontalno (sl. 13.47). Dimenzioni broj se piše, pre svega, paralelno sa dimenzionom linijom ili, ako to nije zgodno zbog ugla pod kojim je dimenziona linija, tada su dimenzioni brojevi horizontalni na prekinutoj dimenzionoj liniji. Na jednom crtežu može se na koristiti samo jedna od dve alternative (sl. 13.48,a ili sl. 13.48,b).



Sl. 13.47: Pokazna linija za pisanje dimenzionih brojeva

Sl. 13.48: Alternative ispisivanja dimenzionih brojeva  
a) prioritetan način, b) alternativni

Način dimenzionisanja tetive, luka i ugla luka dat je na sl. 13.49.



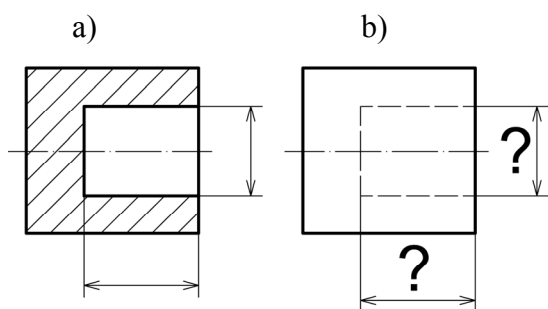
Sl. 13.49: Dimenzionisanje tetive, luka i ugla luka

### 13.8.1. Osnovna pravila dimenzionisanja

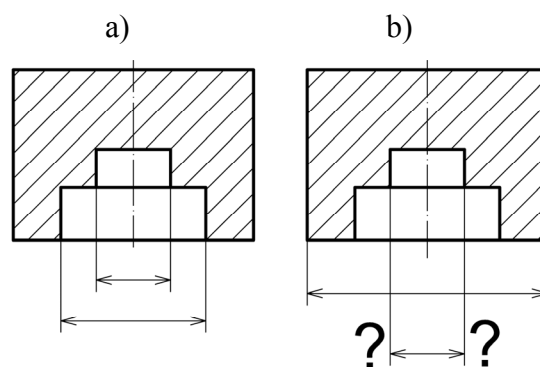
**Pomoćne dimenzionne linije** ne mogu polaziti od isprekidanih linija (sl. 13.50,b), ne mogu se bezpotrebno seći (sl. 13.51,b) i ne treba da budu suviše dugačke (sl. 15.52,b).

**Dimenziona linija** ne sme da leži na osnoj, na konturnoj, niti da je u produžetku konturne linije i ne sme da bude paralelna sa šrafurnim linijama (sl. 13.53).

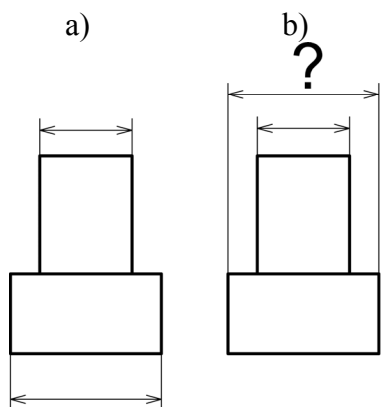
**Dimenzioni broj** na crtežima u mašinstvu ne može biti u drugim jedinicama, osim u mm (sl. 13.54,b). Dimenzioni broj treba da leži na horizontalnoj dimenzionoj liniji i da je paralelan sa njom. Pri tome ne sme da dodirne niti dimenzionu, niti konturnu liniju (sl. 13.55).



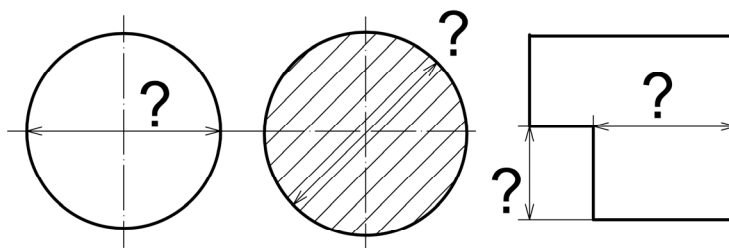
Sl. 13.50: Pomoćne dimenzione linije na unutrašnjim konturama  
a) pravilno, b) nepravilno



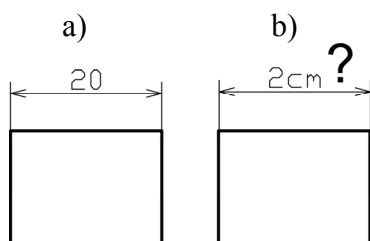
Sl. 13.51: Sečenje pomoćnih dimenzionih linija  
a) pravilno, b) nepravilno



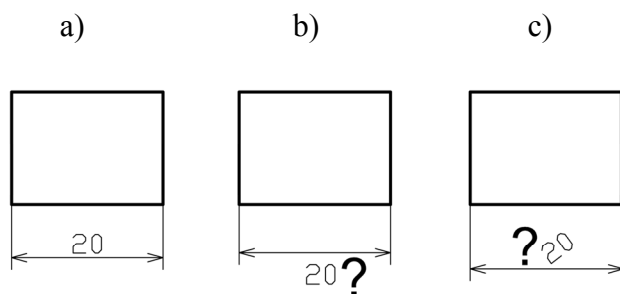
Sl. 13.52: Dužine dimenzionih linija  
a) pravilno, b) nepravilno



Sl. 13.53: Nedozvoljeni položaji dimenzione linije

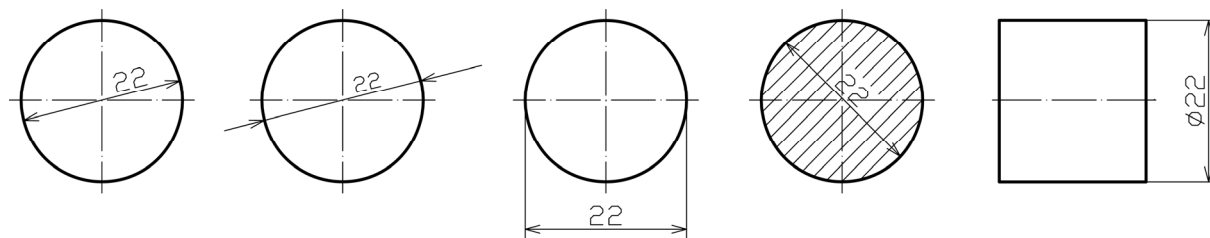


Sl. 13.54: Jedinica dimenzionog broja  
a) pravilno, b) nepravilno



Sl. 13.55: Položaj dimenzionog broja u odnosu na dimenzionu liniju  
a) pravilno, b) c) nepravilno

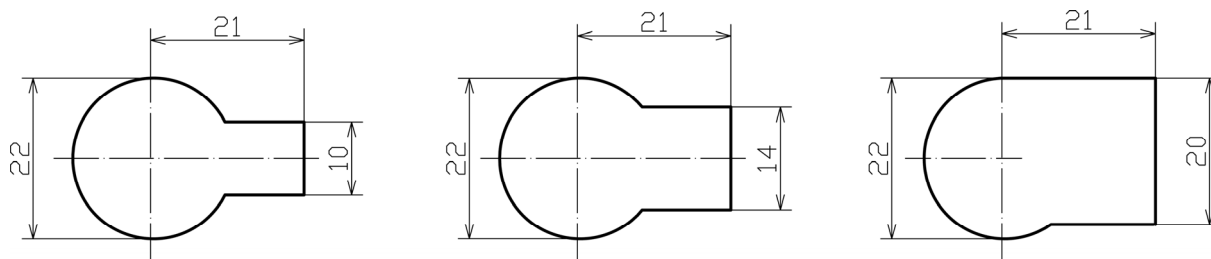
Dimenzionisanje kružnih površina prikazano je na sl. 13.56. Dimenzioni broj predstavlja vrednost prečnika. Kada se kružnica ne vidi kao kružnica, ispred dimenzionog broja stavlja se oznaka  $\emptyset$ .



Sl. 13.56: Mogućnosti za dimenzionisanje kružnih površina

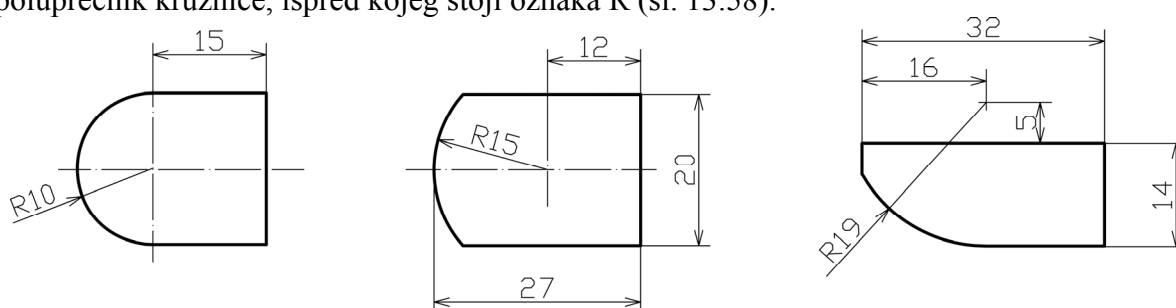


Kružne površine različito se dimenzionišu zavisno od toga da li je cela kružnica ili deo kružnice. Ako je kružnica cela ili manja od cele (do polovine kružnice) dimenzioniše se tako što se daje vrednost prečnika (sl. 13.57).



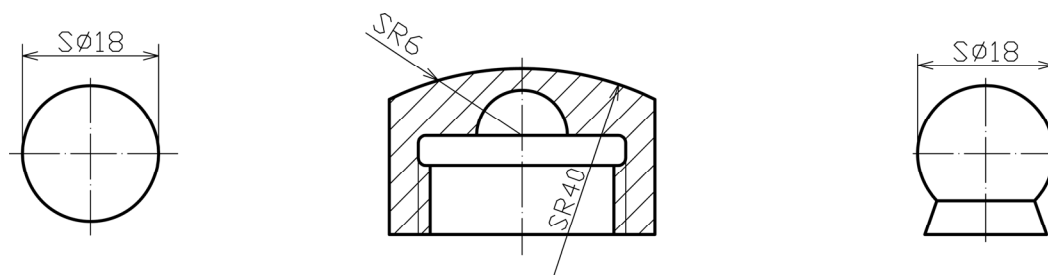
Sl. 13.57: Dimenzionisanje kružnice koja nije potpuna

Ako je polovina kružnice i manja od polovine (radijus), dimenzioni broj predstavlja poluprečnik kružnice, ispred kojeg stoji oznaka R (sl. 13.58).



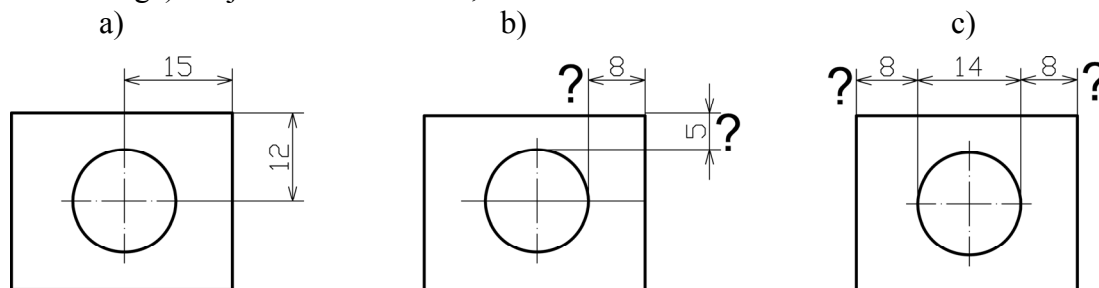
Sl. 13.58: Dimenzionisanje polovine kružnice i radijusa

Kugla se dimenzioniše tako što se ispred dimenzionog broja stavlja oznaka S (sfera). Ako je cela kugla ili deo kugle, sve do polovine, ispred dimenzionog broja stoji oznaka  $\emptyset$  i daje se vrednost prečnika. Ako je polovina kugle ili manje od polovine, ispred dimenzionog broja stoji oznaka R i daje se vrednost poluprečnika (sl. 13.59).



Sl. 13.59: Dimenzionisanje kugle i delova kugle

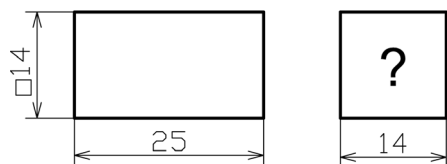
Dimenzionisanje položaja kružnih površina je pravilno kada su dimenzije do osnih linija (do centra kruga) što je dato na sl. 13.60,a.



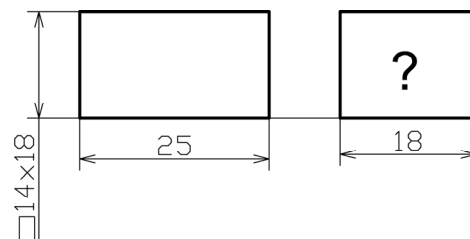
Sl. 13.60: Dimenzionisanje položaja kružnih površina  
a) pravilno, b),c) nepravilno

Ispred dimenzionih brojeva, osim oznaka  $\emptyset$ ,  $R$  i  $S$  koriste se i oznake u vidu kvadratića i pravougaonika i to za ravne površine. Ako je površina poprečnog preseka kvadrat, ispred dimenzionog broja stoji oznaka  $\square$  (sl. 13.61).

Na ovaj način nepotrebno je crtati pogled sa strane (pogled C). Isti je slučaj kada je površina poprečnog preseka pravougaonik, tada ispred dimenzionog broja stoji oznaka,  $\square$  kao na sl. 13.62. I u ovom slučaju, pogled sa strane je suvišan.



Sl. 13.61: Korišćenje oznake  $\square$  za kvadratni poprečni presek

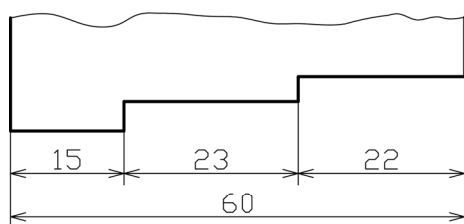


Sl. 13.62: Korišćenje oznake  $\square$  za pravougaoni poprečni presek

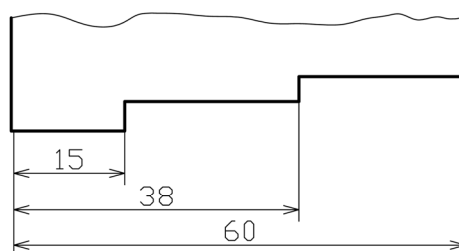
### 13.8.2. Načini dimenzionisanja

Način dimenzionisanja predmeta na crtežu zavisi od: konstrukcionog izgleda predmeta, načina izrade, funkcije predmeta u nekom sklopu, tačnosti izrade itd. Postoje tri načina dimenzionisanja: redno, paralelno i kombinovano.

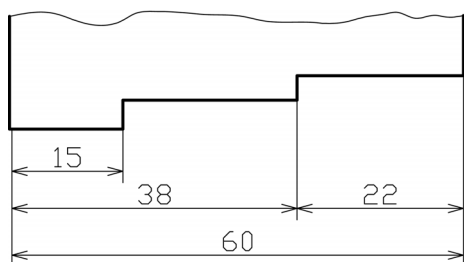
Kod rednog dimenzionisanja, dimenzije su u jednom redu (lancu) (sl. 13.63). Kod paralelnog dimenzionisanja, pojedinačne dimenzije se daju u odnosu na jednu površinu predmeta, koja se zove baza dimenzionisanja (sl. 13.64). Koristi i kombinovani način, gde su dimenzije i u redu i paralelne (sl. 8.65.).



Sl. 13.63: Redno dimenzionisanje



Sl. 13.64: Paralelno dimenzionisanje



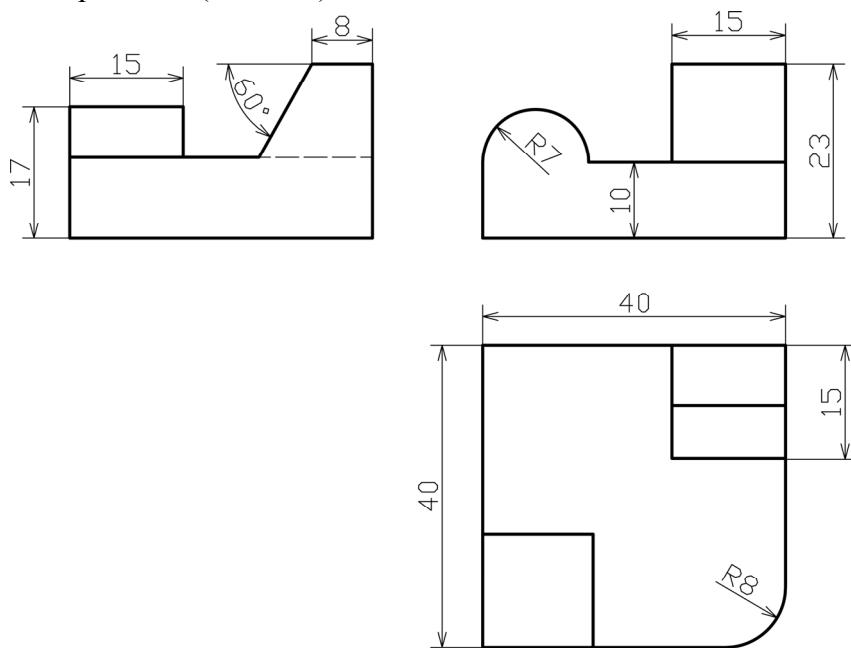
Sl. 13.65: Kombinovano dimenzionisanje

### 13.8.3. Opšti principi dimenzionisanja

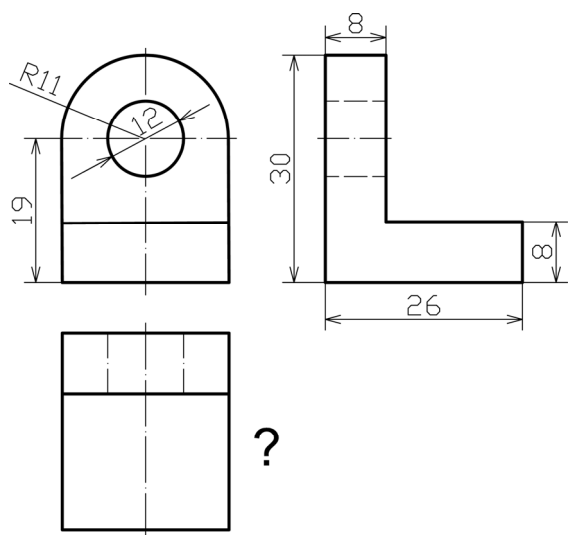
Pored datih pravila dimenzionisanja treba se pridržavati još nekih opštih principa dimenzionisanja.

- Predmet na crtežu treba da je tako dimenzionisan da je jednoznačan, jasan, precizan i pregledan, bez ikakve mogućnosti zabune, sa svim potrebnim dimenzijama, zavisno od vrste predmeta i njegove namene.

- Na crtežu je najvažniji predmet crtanja, odnosno njegovi pogledi. Zato sve pomoćne linije i oznake treba crtati i rasporediti tako da ne zasenjuju poglede. Drugim rečima, kada se crtež pogleda, prvo treba da se uoče pogledi, a sve ostalo da ostane manje uočljivo u pozadini. Iz toga razloga strelice ne smeju biti suviše velike, zatamnjene i napadne. Pomoćnih linija i svih ostalih oznaka ne treba da bude bezpotrebno mnogo itd.
- Crtež treba da zadovolji i osnovne zahteve estetike. Pogledi treba da su simetrično raspoređeni na formatu. Ne smeju biti suviše krupni, pa da popune ceo format, niti suviše sitni, pa da su nepregledni i da je teško označiti dimenzije. Moraju biti tehnički korektno urađeni.
- Svaka dimenzija trebalo bi da se može neposredno izmeriti standardnim mernim instrumentima.
- Linije (konturne, osne, pomoćne itd.) ne mogu da seku dimenzioni broj. Ako se ovo ne može izbeći, u tom slučaju dimenzioni broj ima prednost i na tom mestu prekidaju se sve ostale linije.
- Dimenzije treba, koliko je moguće, ravnomerno rasporediti po nacrtanim pogledima (sl. 13.66). Ne sme se desiti da pogled ostane bez ijedne dimenzije, jer to onda znači da je nepotreban (sl. 13.67).



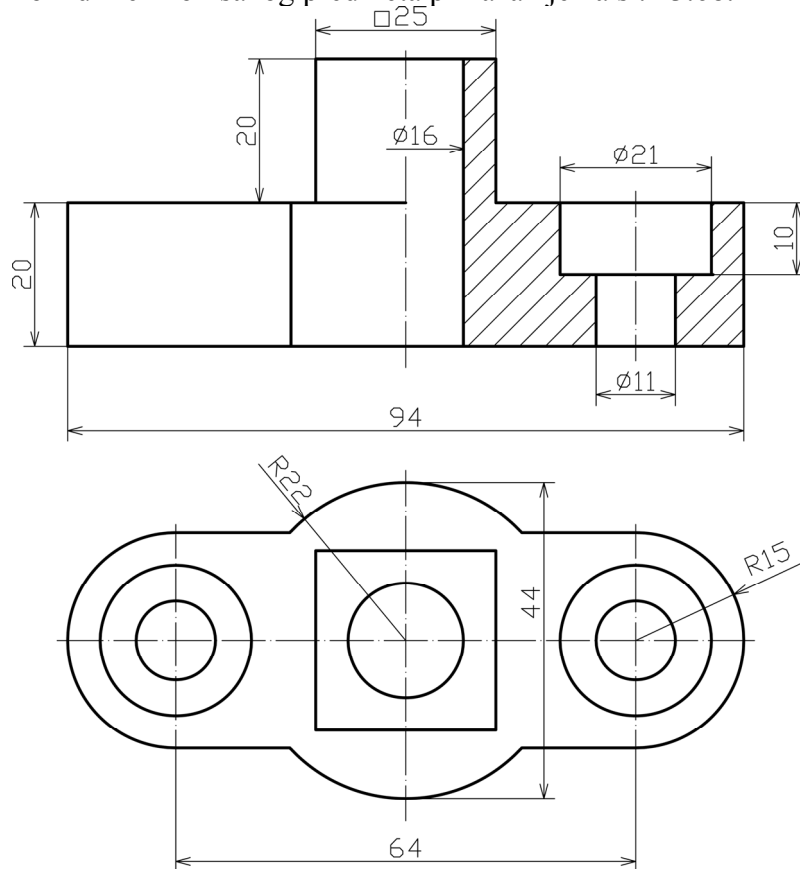
Sl. 13.66: Ravnomerno raspoređene dimenzije po pogledima



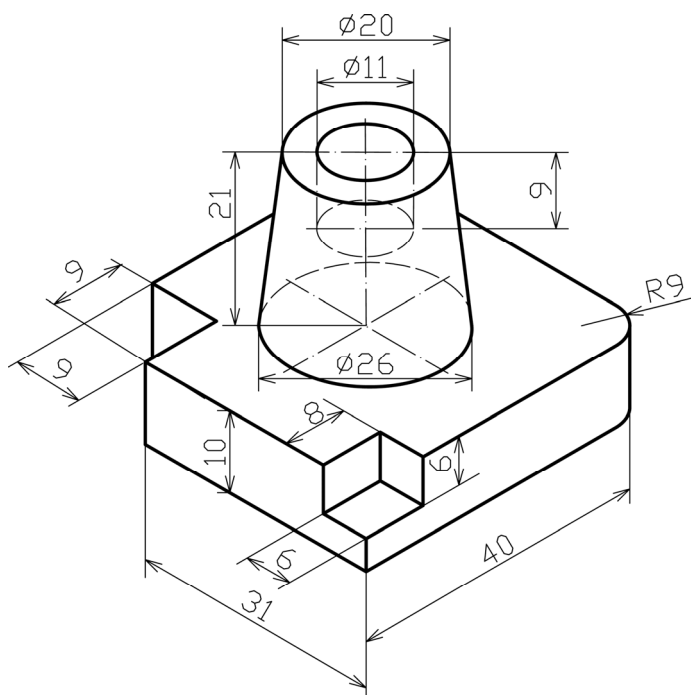
Sl. 13.67: Nepotreban pogled kada je bez ijedne dimenzije

- Ako je potrebno, zbog preglednosti dimenzionisanja, može se nacrtati i jedan pogled više nego što je to potrebno zbog čitanja ortogonalnog crteža.

Primer pravilno izdimenzionisanog predmeta prikazan je na sl. 13.68.



Sl. 13.68: Pravilno isdimenzionisan predmet



Sl. 13.69: Dimenzionisanje aksonometrijskog crteža

Pri dimenzionisanju aksonometrijskog crteža važe ista pravila i principi kao i za ortogonalni crtež. Ima nekih izuzetaka i razlika. Na primer, pri dimenzionisanju kružnih površina kada se projiciraju kao elipse, ispred vrednosti dimenzija prečnika treba staviti oznaku  $\emptyset$ . Ako je to elipsa, koja se na aksonometrijskom crtežu vidi kao neka deformisana elipsa, treba dati vrednosti male i velike ose i napisati rečima da je to elipsa itd. Primer pravilno izdimenzionisanog aksonometrijskog crteža dat je na sl. 13.69.

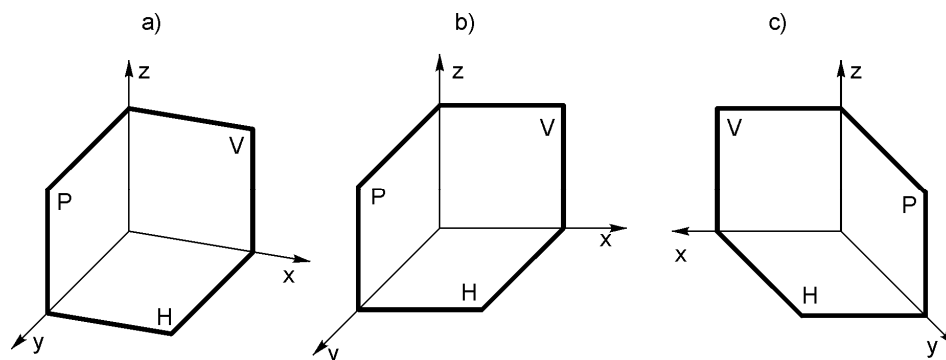
## 14. AKSONOMETRIJSKI CRTEŽI

Aksonometrijski crteži su takvi crteži na kojima se predmeti predstavljaju sa tri dimenzije na jednom pogledu. Aksonometrijskim crtežom se pokušava prikazati prostorni izgled predmeta približno onako kako predmet vidi naše oko. Pri tome se predmet na crtežu "deformiše" u odnosu na stvarni izgled. Površine predmeta se različito deformišu, neke više, neke manje, zavisno od njihovog položaja prema projekcijskim ravnima.

Aksonometrijski crtež nije trodimenzionalni crtež (3D crtež) jer se na takvom crtežu ne može odrediti zapremina predmeta niti površine njegovih stranica. Aksonometrijski crtež samo stvara iluziju prostornog izgleda predmeta.

Pri crtanju aksonometrijskog crteža predmet crtanja se zamišljeno postavlja u oktante čije su ose pod različitim uglovima i različito usmerene (sl. 14.1). Zavisno od položaja projekcijskih ravni postoje sledeće vrste aksonometrijskog crteža:

1. Ortogonalna aksonometrija i
2. Kosa aksonometrija.



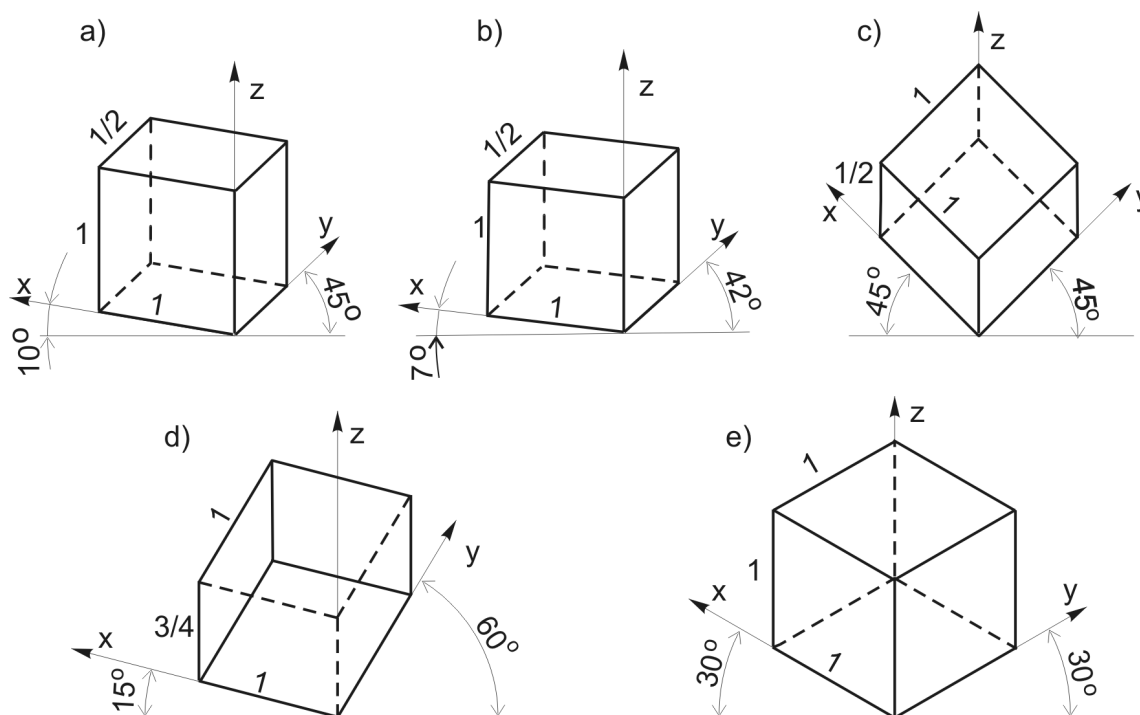
Sl. 14.1: Položaj osa kod aksonometrijskog crteža  
a) za ortogonalnu aksonometriju, b, c) za kosu aksonometriju

### 14.1. ORTOGONALNA AKSONOMETRIJA

Ova metoda je pogodna za one predmete koji nemaju mnogo kružnih površina. Projekcijski zraci su međusobno paralelni i upravni na projekcijske ravni. Deli se na dimetriju i izometriju. Osa Z je uvek vertikalna, dok su ose X i Y pod različitim uglovima (sl. 14.1). Ivice predmeta koje su paralelne sa osama X, Y i Z crtaju se u pravoj veličini (označeno sa 1) ili se skraćuju na 1/2 i 3/4 (označeno sa 1/2, 3/4) što je prikazano u tabeli 14.1. Zavisno od položaja osa i skraćivanja ivica predmeta, neke površine predmeta se ističu (bolje vide, tj. više ističu u odnosu na druge), a neke ne. Kocka nacrtana u različitim metodama dimetrije, sa uglovima osa koje se mogu koristiti prikazana je na sl. 14.2.

Tabela 14.1: Položaj osa i skraćivanja kod ortogonalne aksonometrije

Metode aksonometrije	Položaj osa			Skraćivanja po osama			Vidljivost (istaknutost) površina predmeta
	X	Y	Z	X	Y	Z	
Dimetrija	10°	45°	90°	1	1/2	1	Istaknuta prednja površina
	7°	42°	90°	1	1/2	1	Istaknuta prednja površina
	45°	45°	90°	1	1	1/2	Istaknuta gornja površina
	15°	60°	90°	1	1	3/4	Istaknuta donja površina
Izometrija	30°	30°	90°	1	1	1	Podjednako istaknute sve površine predmeta



Sl. 14.2: Crtanje kocke u ortogonalnoj aksonometriji  
a, b, c, d) dimetrija, e) izometrija

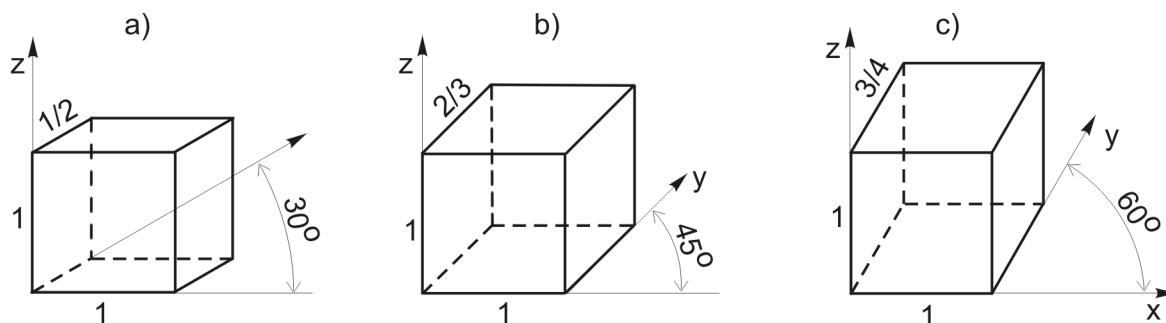
## 14.2 KOSA AKSONOMETRIJA (KOSA PROJEKCIJA)

Kosa aksonometrija pogodna je za predmete sa kružnim površinama, jer se one u jednoj ravni vide u pravoj veličini (ne deformisane). Projekcijski zraci su međusobno paralelni. Osa Z je uvek vertikalna, X uvek horizontalna, a Y osa može biti pod uglovima  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ili  $60^\circ$  u odnosu na X osu, što je dato u tabeli 14.2. Osa X je usmerena na levu ili desnu stranu (sl. 14.1,b,c).

Ivice predmeta paralelne sa osama X i Z ne skraćuju se (označene sa 1), a one paralelne sa Y osom se skraćuju na  $1/2$ ,  $2/3$  ili  $3/4$  od stvarne dužine. Pri tome se prednja površina uopšte ne deformiše, a bočna i gornja se različito deformišu. Kocka nacrtana u kosoj projekciji sa različitim uglovima Y ose, prikazana je na sl. 14.3. Kada je ugao Y ose  $30^\circ$  deformacija gornje i bočne površine je najveća (sl. 14.3,a). Za ugao Y ose od  $45^\circ$ , manja je deformacija, s tim što se i bočna i gornja površina isto deformišu (sl. 14.3,b). Kada je ugao Y ose  $60^\circ$ , deformacija gornje površine je najmanja, a bočne najveća (sl. 14.3,c).

Tabela 14.2. Položaj osa i skraćanja kod kose aksonometrije

Metoda aksonometrije	Položaj osa			Skraćanja po osama			Vidljivost (istaknutost) površina predmeta
	X	Y	Z	X	Y	Z	
Kosa aksonometrija	$0^\circ$	$30^\circ$	$90^\circ$	1	$1/2$	1	Prednja površina predmeta sasvim nedeformisana, a bočna i gornja znatno.
	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	1	$2/3$	1	Prednja površina predmeta sasvim nedeformisana, a bočna i gornja manje.
	$0^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	1	$3/4$	1	Prednja površina predmeta sasvim nedeformisana, bočna veoma, a gornja najmanje.

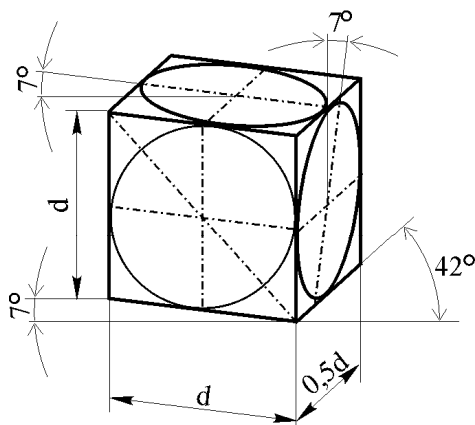


Sl. 14.3: Kocka u kosoj aksonometriji (kosoj projekciji)

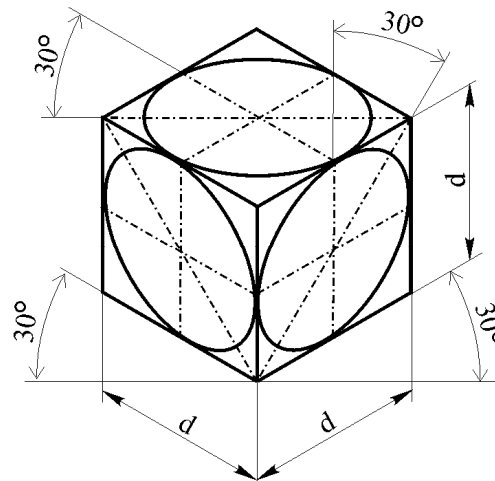
Uglovi položaja ose Y koji su dati u tabeli 14.2 definisani su našim SRPS standardom. Međutim, prema literaturnim podacima i standardima drugih zemalja, uglovi položaja ose Y u kosoj projekciji mogu biti sledeći:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $315^\circ$  ili  $330^\circ$ .

### 14.3. CRTANJE KRUŽNIH POVRŠINA NA AKSONOMETRIJSKOM CRTEŽU

Kružne površine se projiciraju kao krug samo u onim projekcijskim ravnima koje su paralelne sa tom površinom. Na projekcijskim ravnima koje su pod nekim uglom na kružnu površinu, krug se projicira kao elipsa. Kod aksonometrijskog crteža samo kod kose projekcije i samo one kružne površine koje su paralelne sa vertikalnicom, projiciraju se kao krugovi, dok u svim ostalim projekcijskim ravnima i kod svih ostalih metoda, projiciraju se kao elipse. Izgled kružnih površina, odnosno elipsi, kod dimetrije i izometrije dat je na sl. 14.4 i 14.5.



Sl. 14.4: Kružne površine u dimetriji



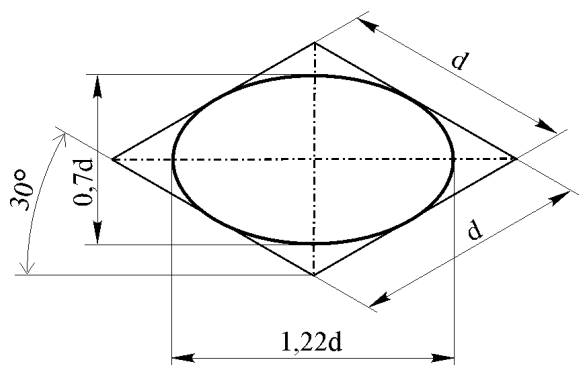
Sl. 14.5: Kružne površine u izometriji

Crtanje kružnica u izometriji (elipsi) može biti na dva načina.

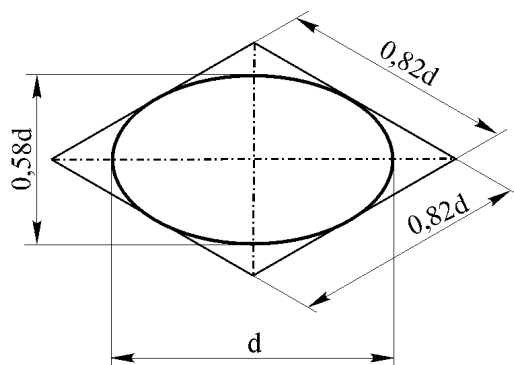
Prvi način dobijanja elipse na površinama predmeta nacrtanog u izometriji dat je na sl. 14.6. Nacrta se romb čije su stranice pod uglom od  $30^\circ$ , prečnika kruga  $d$ . Pravac velike i male ose nalazi se na dijagonalama romba. Veličina velike ose je  $2a=1,22d$ , a male  $2b=0,7d$ .

Drugi način dobijanja elipse u izometriji je sličan. Stranica romba jednaka je  $0,82d$ . Veličina velike ose je  $2a=d$ , a male  $2b=0,58d$ .

Nekom od metoda za konstruisanje elipse, kada su poznate velika i mala osa, nacrtava se elipsa.

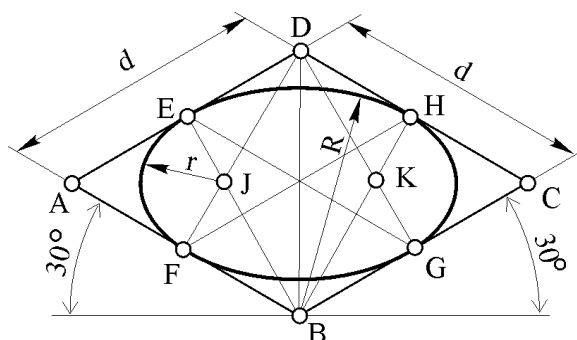


Sl. 14.6: Crtanje elipse u izometriji  
gde je:  $2a=1,22d$ ;  $2b=0,7d$



Sl. 14.7: Crtanje elipse u izometriji  
gde je:  $2a=d$ ;  $2b=0,58d$

Konstruisanje i crtanje elipse je sporo, naročito kada su malih dimenzija. Približna elipsa (oval) može se jednostavnije nacrtati šestarom. Nacrta se romb stranice  $d$  pod uglom od  $30^\circ$  (sl. 14.8). Rogljevi romba B i D spoje se sa središtima ivica, sa tačkama E, H i F, G. Iz tačke B opiše se luk kroz tačke E i H, a iz tačke D luk kroz tačke F i G. Iz tačke J opiše se luk kroz tačke E i F, a iz tačke K luk kroz tačke G i H. Ovi lukovi daju približnu elipsu (oval).



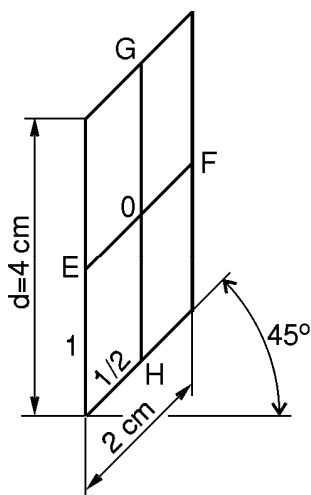
Sl. 14.8: Crtanje približne izometrijske elipse (ovala)

Postupak dobijanja elipse na bočnoj površini predmeta nacrtanog u dimetriji pod uglovima osa X i Y od  $10^\circ$  i  $45^\circ$  prikazan je na sl. 14.9. Nacrta se romb čija je vertikalna stranica jednaka prečniku kruga npr.  $d=4$  cm, pošto nema skraćjenja. Kraća stranica romba je 2 cm, jer je skraćjenje na  $1/2$ . Tako se dobijaju konjugovani prečnici elipse EF i GH, čije je središte u tački O. Elipsa je omeđena stranicama romba. Elipsa se konstruiše nekom od metoda, kada su poznati konjugovani prečnici.

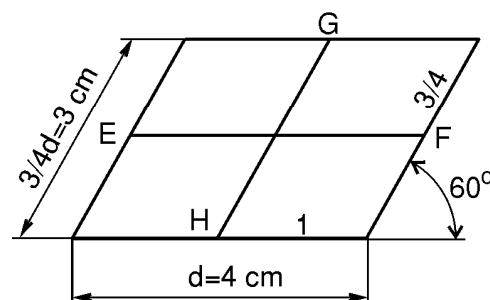
Postupak dobijanja konjugovanih prečnika elipse na gornjoj površini predmeta nacrtanog u kosoj projekciji prikazan je na sl. 14.10. Na primer, potrebno je nacrtati krug prečnika  $d=4$  cm, gde je osa Y pod uglom od  $60^\circ$ . Prvo se nacrta romb stranica od 4 cm ( $d=4$  cm) i 3 cm ( $3/4d=3$  cm). Na taj način se dobiju konjugovani prečnici elipse EF i GH. Postupak je isti i za sve ostale kružne površine predmeta nacrtanog u dimetriji i kosoj projekciji, jer konjugovane prečnike elipse određuju ose i odgovarajuća skraćjenja.

Spregnuti prečnici su oni prečnici koji su na krugu pod uglom od  $90^\circ$ . Spregnuti prečnici na elipsi nisu pod uglom od  $90^\circ$  (osim velike i male ose) i nazivaju se konjugovanim prečnicima.





Sl. 14.9: Postupak dobijanja konjugovanih prečnika elipse u dimetriji



Sl. 14.10: Postupak dobijanja konjugovanih prečnika elipse u kosoj projekciji

#### 14.4. POSTUPAK IZRADE AKSONOMETRIJSKOG CRTEŽA

Pre nego što se počne crtati predmet u aksonometriji usvoji se metoda. Pri tome se vodi računa da predmet na crtežu bude što jasniji i jednostavniji za crtanje. Zatim se predmet "pravilno postavi" u odnosu na projekcijske ravni. Predmet je pravilno postavljen, ako su površine predmeta (što je moguće više površina) paralelne ili upravne na projekcijske ravni. Osim toga predmet je pravilno postavljen ako dobijeni crtež ima što manje nevidljivih linija.

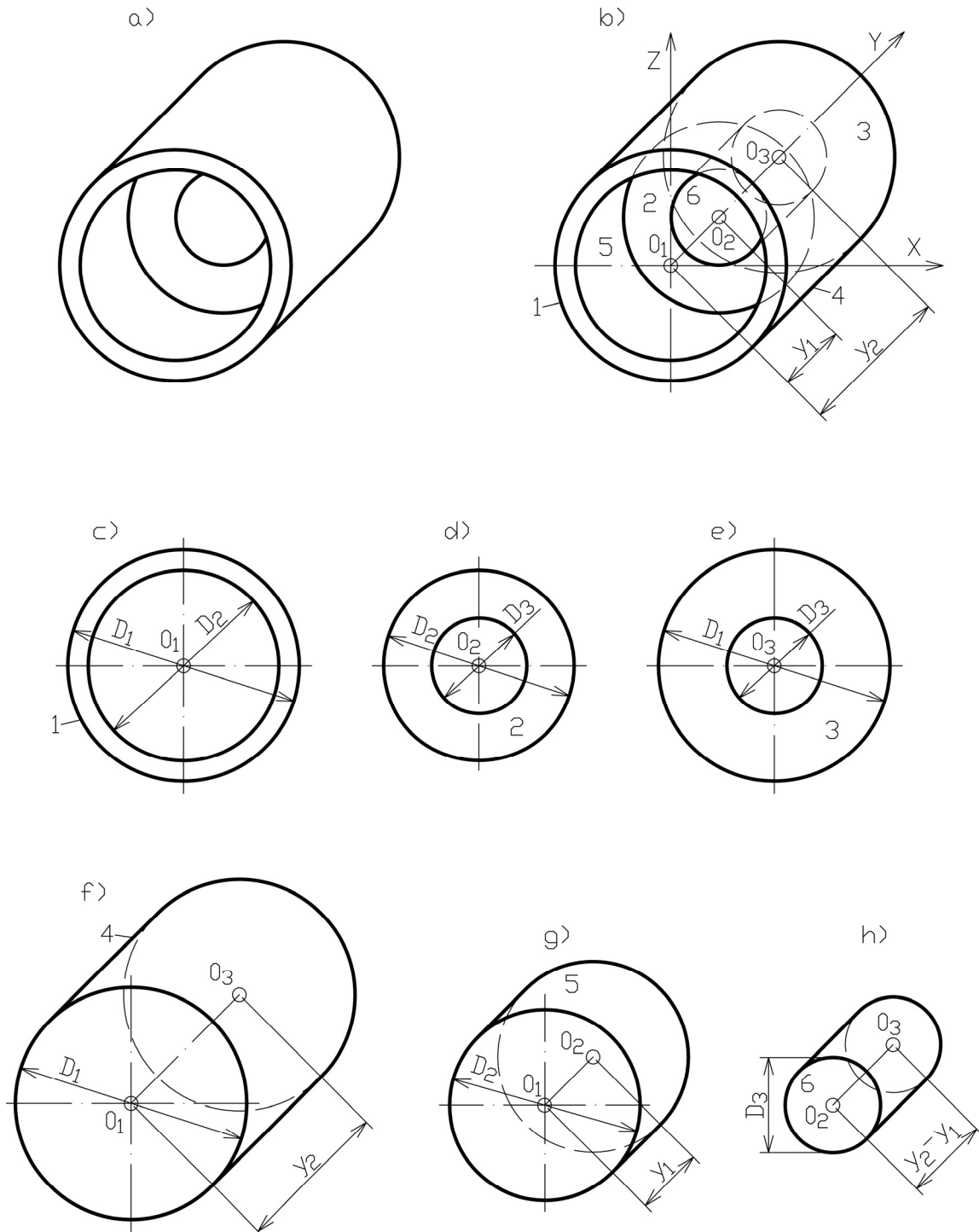
Postupak crtanja aksonometrijskog crteža može biti:

- crtanjem pojedinačnih sastavnih površina,
- odsecanjem od osnovnog tela i
- crtanjem pojedinačnih sastavnih pravilnih geometrijskih tela.

Postupak **crtanja pojedinačnih sastavnih površina predmeta**, svodi se na crtanje pojedinačnih površina, a ne celog predmeta odjednom. Crtanje se sastoji iz faza i to određenim redosledom. Za predmet na sl. 14.11,a detaljno je opisan postupak crtanja po fazama. Crta se olovkom sa tankim linijama tipa B. Redosled je sledeći:

1. Nacrtaju se ose X, Y, i Z za odabrani metod aksonometrije. Za ovaj primer usvaja se kosa projekcija, pošto predmet ima puno kružnih površina (sl. 14.11,b)
2. Prvo se crtaju one površine koje su paralelne sa projekcijskim ravnima. Počinje se sa najbližom ili najudaljenijom površinom od crtača. Preglednije je za crtanje da to bude najbliža površina. Crtaju se prvo sve one površine koje su paralelne sa vertikalnicom, a zatim sve one koje su paralelne sa horizontalnicom ili obrnuto. Na kraju se crtaju površine koje su pod nekim uglom na projekcijske ravni, cilindrične površine itd. Najčešće su te površine već nacrtane, crtanjem prethodnih. Nacrta se, za početak, samo jedna od odabranih površina prema redosledu crtanja. Na datom primeru to je površina 1, koja se sastoji iz dva kruga prečnika  $D_1$  i  $D_2$  (sl. 14.11,c). Središte te površine je označeno sa  $O_1$ . Ova površina se crta u odabranom koordinatnom sistemu (sl. 14.11,b).
3. Zatim se crta druga po redu površina. Ovde je to površina broj 2, koja se sastoji iz dva kruga prečnika  $D_2$  i  $D_3$  sa centrom u tački  $O_2$  (sl. 14.11,d). Centar  $O_2$  se nalazi na Y osi iza  $O_1$  na rastojanju  $y_1$ . Nacrta vrednost ovog rastojanja zavisi od stvarnog rastojanja,

skraćanja tih ivica i od razmere crtanja. Na primer, ako je stvarna vrednost  $O_1O_2$  na predmetu 2,3 cm, ugao nagiba Y ose  $45^\circ$ , što znači da je skraćenje na  $2/3$  i razmera 1:1, nacrtana vrednost rastojanja  $O_1O_2$  biće 1,55 cm ( $y_1 = 2,3 \cdot \frac{2}{3} = 1,55$  cm), sl. 14.11,b. Središte površine 2 označi sa na osi Y sa  $O_2$ .



Sl. 14.11: Postupak dobijanja kose projekcije predmeta

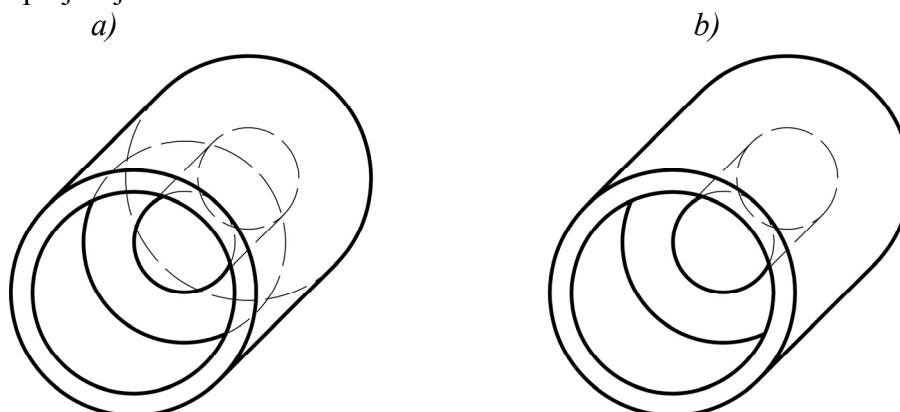
- Iza središta drugonacrtane površine crta se središte površine 3. Nalazi se na Y osi pošto se i na predmetu nalaze na istoj, simetralnoj liniji predmeta. Središte površine 3,  $O_3$  se nalazi

- na rastojanju  $y_2$  od  $O_1$  (sl. 14.11,b) koje se izračuna na isti način kao i  $y_1$ . Površina 3 sastoji se od dva kruga prečnika  $D_1$  i  $D_3$  (sl. 14.11,e).
5. Pošto su nacrtane sve površine paralelne sa vertikalnicom, crtaju se druge po redu, u ovom slučaju, cilindrične. To je površina 4 (sl. 14.11,f), koja se sastoji iz dve spojene kružnice prečnika  $D_1$  na rastojanju  $y_2$  sa središtima  $O_1$  i  $O_3$ . Pošto su te dve kružnice već nacrtane, samo se spajaju sa dve tangente paralelne sa Y osom.
  6. Nakon toga crta se površina 5 (sl. 14.11,g) koju određuju dva kruga prečnika  $D_2$ , sa središtima u tačkama  $O_1$  i  $O_2$  na rastojanju  $y_1$ . Pošto su ta dva kruga već nacrtana (sl. 14.11,b), samo se spoje tangenta paralelnim sa Y osom.
  7. Crta se površina 6 koju određuju dva kruga prečnika  $D_3$  sa središtima u tačkama  $O_2$  i  $O_3$  na rastojanju  $y_2 - y_1$  (sl. 14.11,h). Ta dva kruga su takođe već nacrtana samo se spoje tangenta kao prethodne dve (sl. 14.11,b).
  8. Ovako nacrtan predmet daje nepreglednu sliku. Da bi crtež bio jasan i pregledan, brišu se sve pomoćne linije (suvišne ose itd.). Nevidljive linije se crtaju isprekidanom linijom tipa E ili F (sl. 14.12,a). Međutim, crtež i dalje nije sasvim pregledan. Tada se nevidljive linije sasvim brišu (sl. 14.11,a) ili se neke od njih zadržavaju (sl. 14.12,b).

Koje će se nevidljive linije sasvim izbrisati, a koje nacrtati isprekidanom linijom, nema sasvim preciznog pravila. Opše pravilo je da crtež treba da je što pregledniji i jasniji za onog ko čita i koristi crtež. Ako se sve nevidljive linije izbrišu, a zadrže samo vidljive, koje se podebljavaju, (sl. 14.11,a) neće korisniku crteža biti sasvim jasno do koje dubine ide rupa prečnika  $D_3$ . Međutim, ako u ovom slučaju tako ostane nacrtan predmet, smatraće se da je to otvor do kraja predmeta, tj. do površine sa središtem u tački  $O_3$ .

Ako se samo neke nevidljive linije zadrže na crtežu, u ovom slučaju to bi trebalo da bude cilindrična površina 6 (sl. 14.12,b). Sada je sa ovog crteža jasnije da je otvor do kraja predmeta.

Ako je potrebno da se unutrašnji nevidljivi deo predmeta sasvim jasno i precizno definiše i predstavi na crtežu, tada se predmet mora fiktivno (zamišljeno) odseći. Zamišljeno odsecanje predmeta može biti različito: sa jednom ili više ravni. Najčeće se predmet fiktivno seče po simetralnim linijama na pola, četvrtinu, ili delimično, samo neki manji deo. Pri tome se mora imati na umu da se predmet ne sme toliko "iseći", da se na crtežu ne vidi kako on izgleda sa spoljašnje strane.



Sl. 14.12. Crtanje nevidljivih linija na aksonometrijskom crtežu

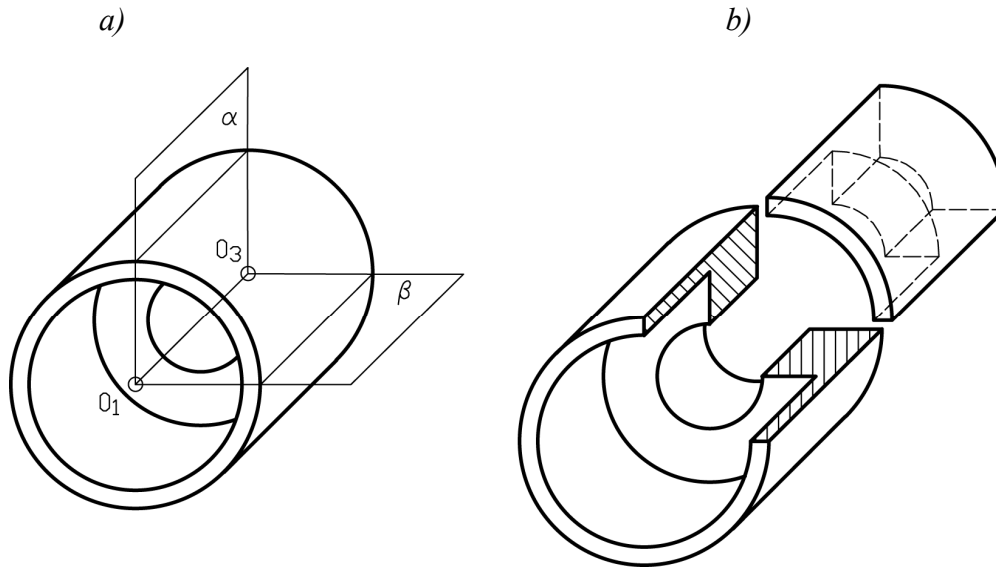
a) nacrtane sve nevidljive ivice i konture, b) nacrtane samo neke nevidljive ivice i konture

Na ovom primeru zamišljeno je odsečena četvrtina predmeta sa izlomljenom ravni, tj. sa ravnima  $\alpha$  i  $\beta$  (sl. 14.13,a). Deo predmeta koji zaklanja unutrašnjost, zamišljeno se odstrani.

Da bi bilo potpuno jasno da predmet nije odsečen stvarno, već fiktivno, deo predmeta koji je došao u dodir sa ravnima sečenja  $\alpha$  i  $\beta$  se šrafira. Linije šrafure ne smeju biti paralelne sa konturnim linijama predmeta. Na aksonometrijskom crtežu, za razliku od ortogonalnog, površine jednog predmeta koje su sečene različitim izlomljenim ravnima sečenja ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) šrafiraju se sa različitim nagibom linija iste gustine.

Sam postupak sečenja i crtanja preseka, svodi se na sečenje pojedinačnih površina, istim redom kao što su se i crtale. Ova faza crtanja radi se nakon toga kada su nacrtane sve površine predmeta (sl. 14.11,b).

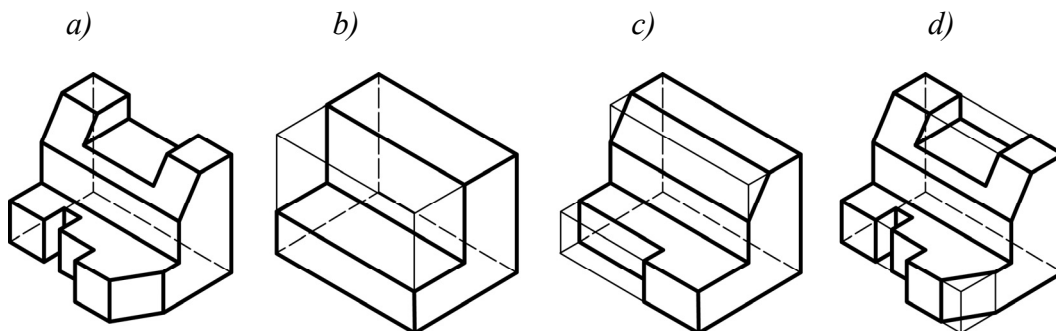
Crtanje aksonometrijskog crteža svodi se na crtanje na jednom mestu (sl. 14.11,b) bez crtanja pojedinačnih rasčlanjenih površina, kao što je to zbog objašnjenja postupka dato u ovom primeru.



Sl. 14.13: Postupak dobijanja preseka predmeta: a) način sečenja, b) crtež sa presekom

Postupak crtanja aksonometrijskog crteža **odsecanjem od osnovnog tela** prikazan je na sl. 14.14. Nacrtaju se pravci osa odabrane metode aksonometrije (izometrije). Uočava se da se predmet može dobiti odsecanjem od prizme (osnovnog tela) čije su dimenzije određene gabaritima predmeta. Redosled odsecanja nije bitan, odabere se neki logičan red. U ovom primeru prvo se odseca prednji deo predmeta, takođe u vidu prizme, nacrtana tankom linijom (sl. 14.14,b). Odsečeni deo se briše gumicom i zavisno od predmeta nastavi se sa sa daljim odsecanjem, što je prikazano na sl. 14.14,c,d.

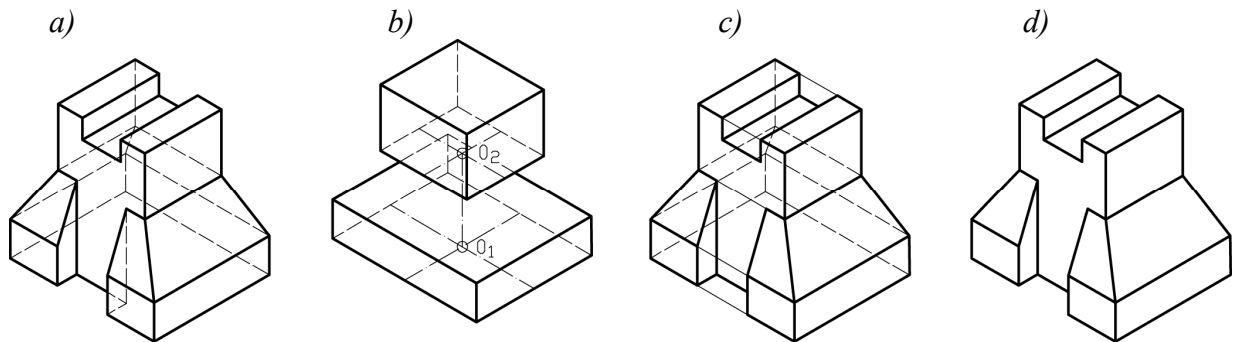
Odsecanje i brisanje odsečenih delova je na jednom mestu, bez odvojenog crtanja pojedinačnih faza, kao što je to zbog objašnjenja postupka dato u ovom primeru.



Sl. 14.14: Postupak dobijanja aksonometrijskog crteža odsecanjem

Postupak crtanja aksonometrijskog crteža **crtanjem pojedinačnih sastavnih pravilnih geometrijskih tela** prikazan je na sl. 14.15,a. Predmet se može rasčlaniti na dve prave prizme, sl. 14.15,b koje su spojene koničnim površinama i nakon toga isečen.

Predmet ima kose površine, čije se ivice i konture različito deformišu. Stoga kose površine treba crtati tako, ako je to moguće, da se dobijaju crtanjem površina predmeta koje su paralelne sa projekcijskim ravnima. Na ovom primeru to su gornje i donje površine paralelne sa horizontalnom projekcijskom ravni sa centrom u tačkama  $O_1$  i  $O_2$  (sl. 14.15,b). Spajanjem ovih površina dobijaju se kose. Odgovarajućim odsecanjem (sl. 14.15,c) dobija se aksonometrijski crtež, kao na sl. 14.15,a ili d.



Sl. 14.15: Postupak dobijanja aksonometrijskog crteža predmeta sa kosim površinama

#### 14.5. PREDNOSTI I NEDOSTACI AKSONOMETRIJSKOG CRTEŽA

Prednosti aksonometrijskog crteža su u tome:

- što se međusobno paralelne ivice predmeta, takođe na crtežu crtaju kao paralelne, što olakšava crtanje, za razliku od crteža u perspektivi;
- što je aksonometrijski crtež jasan i laiku, za razliku od ortogonalnog. Zbog toga se aksonometrijski crtež koristi u tehnici, pejzažnoj arhitekturi itd.

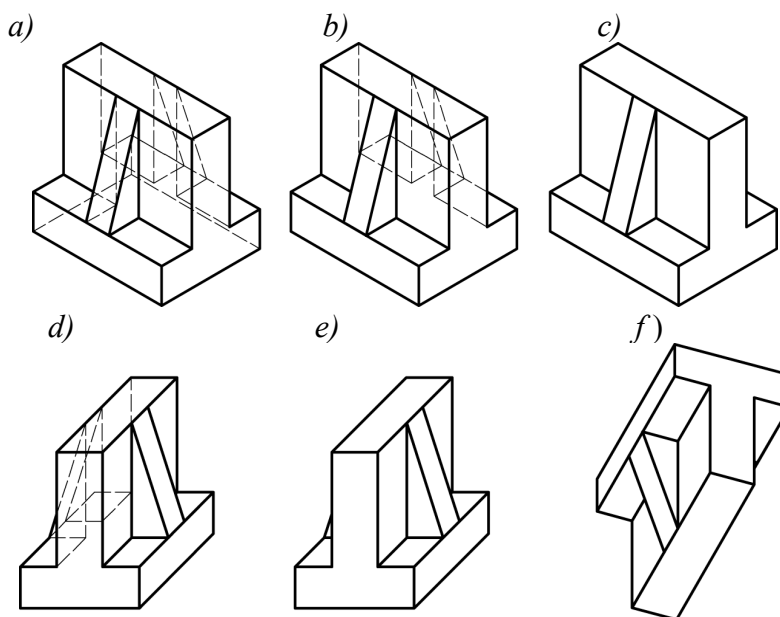
Zbog nedostataka, aksonometrijski crtež nije osnovni crtež u tehnici. Nedostaci su sledeći:

- dobija se deformisana slika predmeta;
- nejasan je izgled zaklonjenih površina;
- nepogodan je za crtanje složenijih predmeta i sklopova;
- izrada crteža je skupa, jer je potrebno mnogo vremena, naročito za crtanje sklopova i složenijih predmeta i
- nepogodan je za označavanje ostalih podataka na crtežu (kota, oznaka za tolerancije, kvalitet obrade površina itd.).

Na sl. 14.16 prikazan je predmet nacrtan u različitim metodama aksonometrije. Ako se usvoji izometrija (sl. 14.16,a) pa se nacrtaju sve nevidljive konture predmeta crtež će biti nepregledan. Crtež može biti malo pregledniji ako se nacrtaju samo neophodne nevidljive ivice predmeta (sl. 14.16,b). Ako se potpuno izostave nevidljive linije, neće biti jasno kako predmet izgleda sa desne, zaklonjene strane (sl. 14.16,c).

Kosa projekcija predmeta sa neophodnim nevidljivim ivicama prikazan je na sl. 14.16,d. Ako se predmet nacrtu u kosoj projekciji (sl. 14.16,e), pa se izostave sve nevidljive linije, biće potpuno jasno kako izgleda desna strana, a delimično jasno kako izgleda leva strana predmeta. Ako se predmet tako nacrtu, smatraće se da je simetričan i da je leva strana ista kao desna. Međutim, ako na toj levoj strani predmeta ima neki sitan detalj na krilcu (otvor, žleb itd), tada ni ova metoda, niti ovaj položaj predmeta neće dati precizan crtež predmeta.

Ako se usvoji dimetrija za isticanje donje površine predmeta i predmet okrene kao na (sl. 14.16,f), opet se jedna strana predmeta neće dovoljno videti. Isto ili slično bi bilo i sa drugim metodama i sa drugim položajima predmeta u odnosu na projekcijske ravni. Ovaj problem se ne može rešiti ni jednom metodom aksonometrije. Stoga aksonometrija nije osnovni način crtanja tehničkih crteža.



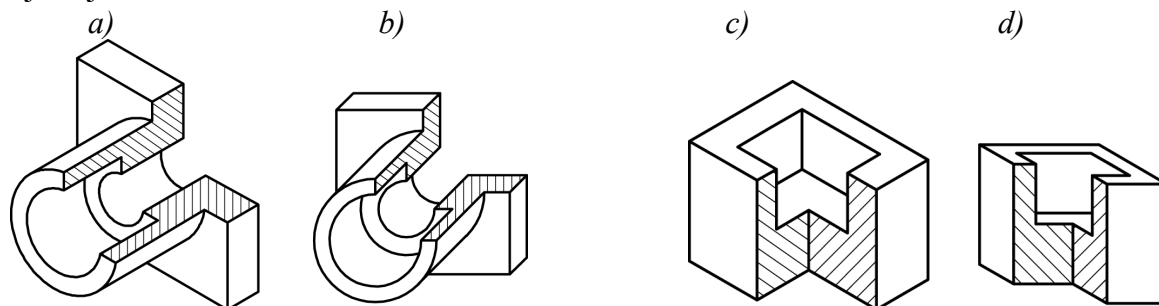
Sl. 14.16: Predmet nacrtan u različitim metodama aksonometrije  
a), b), c) izometrija, d), e) kosa projekcija, f) dimetrija

#### 14.6. IZBOR METODA AKSONOMETRIJE

Delovi mašina, odnosno predmeti crtanja su vrlo različitih konstrukcionih oblika. Ako se crta aksonometrijski crtež, tada je važno odabrati najadekvatniju metodu aksonometrije, da bi predmet na crtežu bio što približniji slici koju vidi naše oko. Pravim izborom metode aksonometrije možemo jasnije prikazati predmet i skratiti vreme potrebno za crtanje.

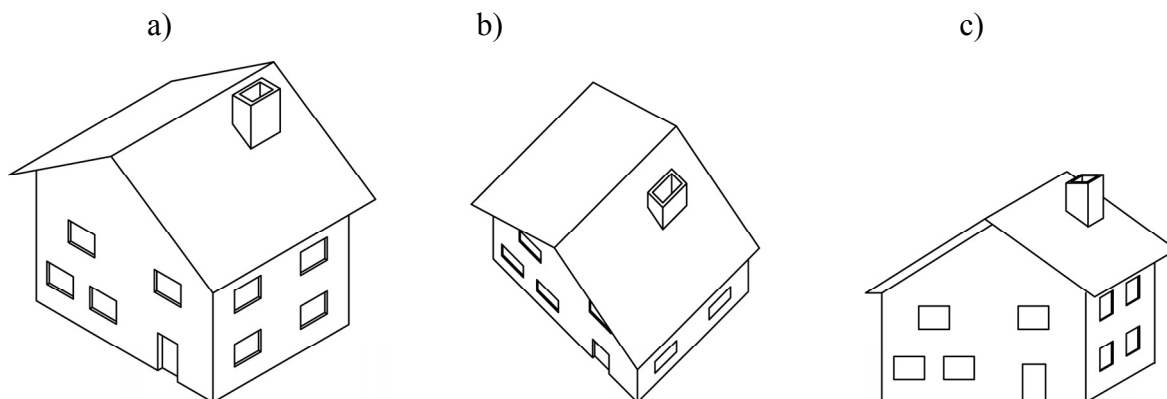
Na crtežu (sl. 14.17,a) prikazan je predmet nacrtan u izometriji sa četvrt presekom. Izgled predmeta je precizno definisan, izuzev zaklonjenih površina (donja, leva bočna i zadnja), koje se ne mogu drugačije definisati ni jednom drugom metodom. Međutim, kružne površine predmeta se deformišu u elipse, koje se sporo crtaju, naročito ako su malih dimenzija. Stoga je za ovaj predmet, sa aspekta crtanja, pogodnija kosa projekcija (sl. 14.17,b). Usvoji se ugao ose Y od  $30^\circ$ , pošto nema nikakvih detalja na bočnoj površini. Na ovaj način predmet će se brže nacrtati, ali je više deformisan od crteža u izometriji.

Izometrijski crtež i kosa projekcija istog predmeta istih dimenzija i razmere dat je na sl. 14. 17, c i d). Crtež predmeta u izometriji zauzima više prostora od njegove kose projekcije. Međutim, na izometrijskom crtežu predmet izgleda prirodnije nego na crtežu u kosoj projekciji.



Sl. 14.17: Izgled predmeta u: a), c) izometriji i b), d) kosoj projekciji

Aksonometrija se koristi i za crtanje velikih predmeta, objekata, kuća i sl. Ista kuća sa istim dimenzijama i u istoj razmeri nacrtana je u izometriji (sl. 14.18,a), dimetriji (sl. 14.18,b), i kosoj projekciji (sl. 14.18,c). Crtež u izometriji podjednako dobro pokazuje kuću sa sve tri vidljive strane. Dimetrija sa uglovima osa X i Y od  $45^\circ$  najbolje pokazuje krov, odnosno sve ono što se oko kuće nalazi.

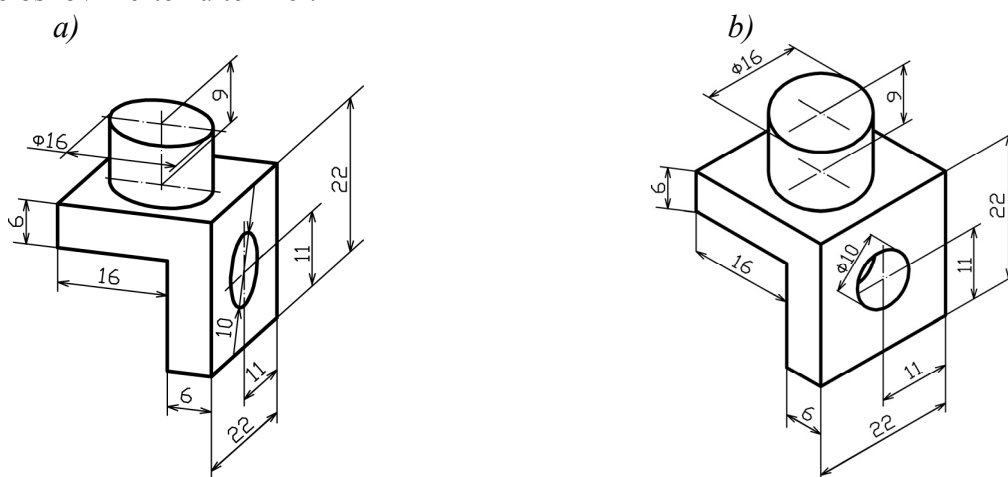


Sl. 14.18: Izgled kuće u: a) izometriji, b) dimetriji i c) kosoj projekciji

Na osnovu prethodnih primera može se uočiti da kosa projekcija daje takvu sliku predmeta na crtežu, koja se razlikuje od slike predmeta koju vidi naše oko u prostoru. To je nedostatak u odnosu na izometriju koja daje sliku predmeta bližu stvarnom izgledu u prostoru.

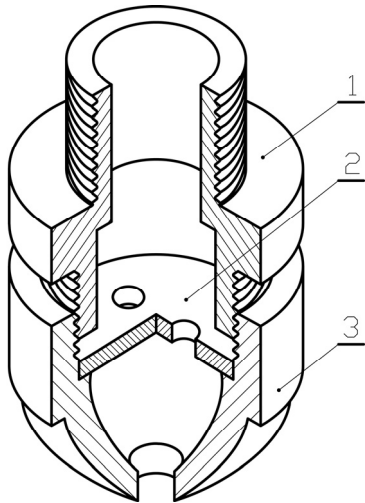
Predmet nacrtan u dimetriji sa uglom osa X i Y pod  $7^\circ$  i  $42^\circ$  daje najmanje deformisanu sliku predmeta. Na sl. 14.19 prikazan je u istoj razmeri, isti predmet u dimetriji i izometriji. Dobijena slika u dimetriji je manja od izometrijske. Međutim, u dimetriji skraćuju se ivice predmete paralelne sa Y osom (sl. 14.19,a) što usporava crtanje, za razliku od izometrije kod koje nema skraćivanja (sl. 14.19,b).

Iz prethodne analize i pokazanih primera jasno je da aksonometrijski crtež nije pogodan da bude osnovni crtež u tehnici.



Sl. 14.19: Predmet nacrtan u: a) dimetriji i b) izometriji

Sklop više delova nacrtan u aksonometriji zahteva mnogo vremena i dobijena slika često je nejasna i nepregledna. Postupak crtanja svodi se na crtanje svakog dela pojedinačno. Dodirne linije predmeta su zajedničke. Obavezno se koristi presek. Svaki predmet se šrafira različitom gustinom da bi se međusobno razlikovali. Osim toga ravni sečenja imaju različite nagibe linija štafure, što sve zajedno daje nepregledan crtež. Predmeti se označavaju pozicionim brojevima. Na sl. 14.20 prikazan je rasprskivač za mali pritisak vode.



Sl. 14.20: Sklopni aksonometrijski crtež rasprskivača vode  
1. nastavak za cev, 2. vrtložnik, 3. telo rasprskivača

## 14.7. ČITANJE ORTOGONALNIH CRTEŽA

Ortogonalni crtež može pročitati samo onaj ko poznaje principe crtanja ortogonalnih crteža. Pod čitanjem ortogonalnog crteža podrazumeva se mogućnost za sagledavanje prostornog izgleda predmeta na osnovu ortogonalnih pogleda i crtanje predmeta u nekoj od metoda aksonometrije. Čitanje ortogonalnog crteža je obrnut postupak od crtanja. Čitanje je teže od crtanja, pošto zahteva sposobnost zamšljanja predmeta u prostoru i znanje tehnike crtanja aksonometrijskog crteža. Čitanje ortogonalnog crteža je lakše onima koji imaju prirodan dar i "osećaj" za prostor. Ova veština može da se savlada uz korišćenje nekih od metoda čitanja:

- metode rasčlanjavanja na sastavne površine,
- metode odsecanja od osnovnog tela i
- kombinovana metoda.

Koriste se i druge metode, ali, ove su najjednostavnije. Izbor metode zavisi od konstrukcionog izgleda predmeta, odnosno od zadatih ortogonalnih pogleda i od naklonosti onog ko čita pogleda i crta predmet u aksonometriji.

### 14.7.1. Metoda rasčlanjavanja na sastavne površine

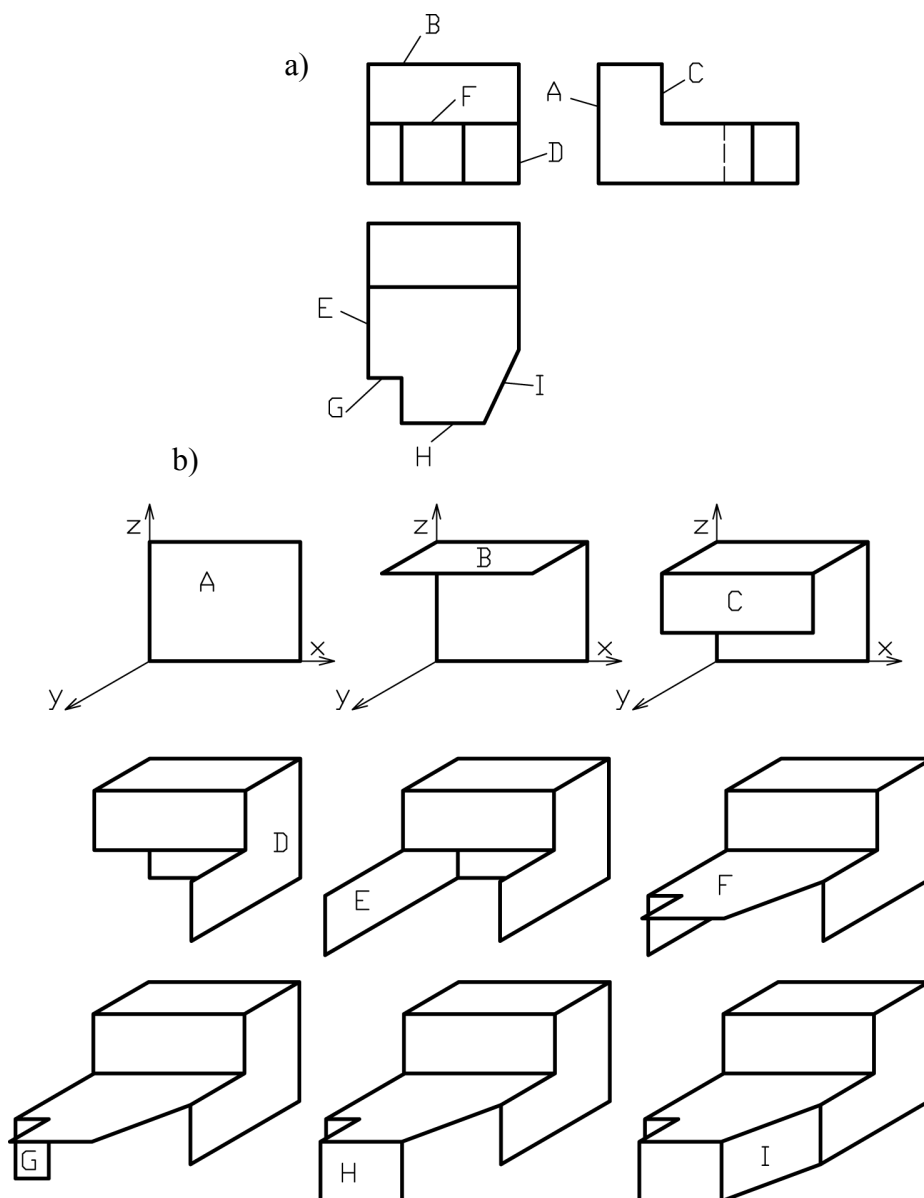
Ova metoda sastoji se od rasčlanjavanja tela na sastavne površine i crtanja tih pojedinačnih površina. Na svim zadatim ortogonalnim pogledima obeleži se svaka pojedinačna površina (A, B, C...) (sl. 14.21,a). Analiziranjem pogleda odredi se položaj svake označene površine u odnosu na projekcijske ravni. Usvoji se metoda crtanja aksonometrijskog crteža i nacrtaju odgovarajuće ose.

Čitanje ortogonalnog pogleda sastoji se iz crtanja predmeta u aksonometriji po fazama. Prvo se crtaju one površine koje su jednostavnijeg oblika (ravne površine) i koje su paralelne sa projekcijskim ravnima (jer se vide nedeformisane). Najbolje je da to bude neka krajnja površina (gornja, donja, prednja, zadnja...). Zatim se crtaju površine koje stoje pod uglom na projekcijske ravni. Nakon toga se crtaju cilindrične i druge krive površine. Treba odabrati takav redosled crtanja površina da se one površine koje su "teže" za crtanje, već dobiju crtanjem prethodnih, "lakših".

Za ovaj primer neka to bude površina A koja će se prvo nacrtati. Ova površina je pravougaonog oblika, paralelna je sa vertikalnom, a upravna na horizontalnu i profilnu ravan. Prava veličina i oblik ove površine vidi se u glavnom pogledu (od napred). Oivičena je spoljašnjim konturama glavnog pogleda. Ivice površine A su paralelne sa X i Z osom. Crtanje



površine A je prva faza čitanja (sl. 14.21,b). Dalji redosled crtanja površina označen je sa B, C, do I. Bitno je uočiti pravi oblik svake nacrtane površine. Pravi, nedeformisani oblik površine vidi se samo u onom pogledu sa čijom projekcijskom ravni je površina paralelna. Posle nacrtane površine A crta se neka od površina koje se naslanjaju na ovu. To može biti površina B, D ili E. Neka druga faza bude čitanje i crtanje površine B. Sledeće površine koje mogu sada da se čitaju i crtaju su površine C, D ili E. Usvaja se površina C, koja je paralelna sa površinom A. Nakon toga sledi crtanje površine D, zatim površina E, F, G i H. Površina I dobija se na osnovu već nacrtanih površina D i H. Površine J i K su dobijene na osnovu prethodnih. Sam proces čitanja i crtanja odvija se na jednom mestu, što ubrzava i čitanje i crtanje.

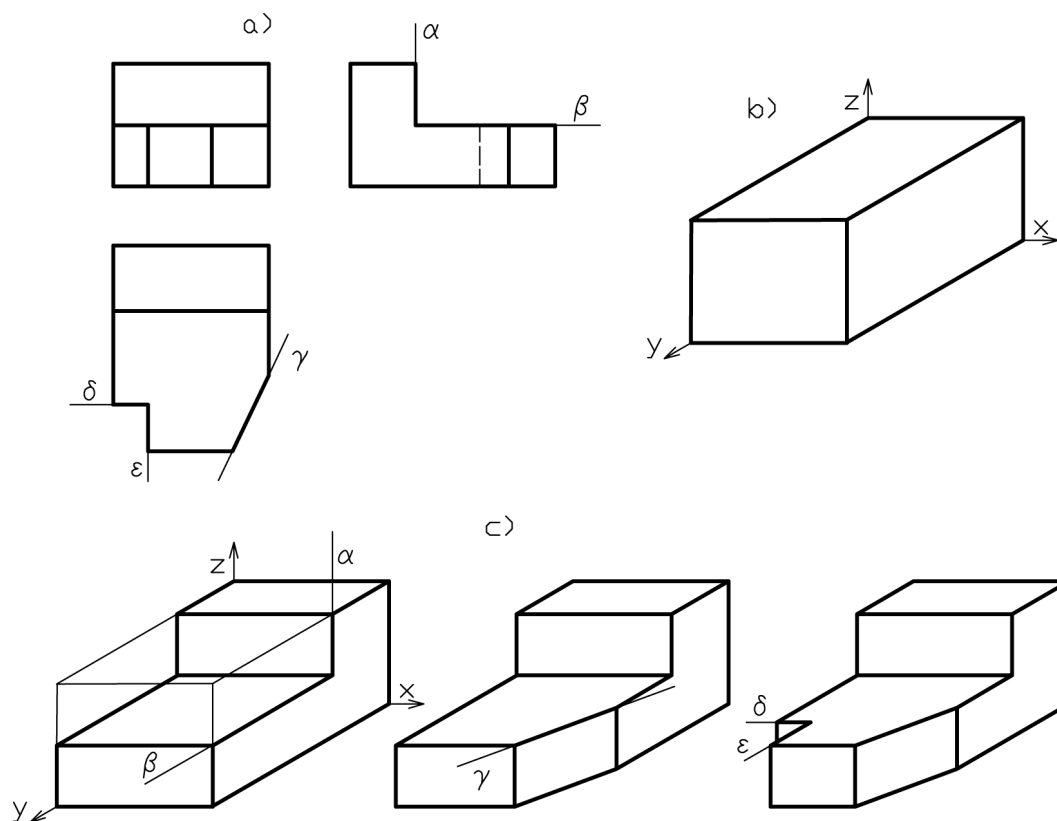


Sl. 14.21: Metoda rasčlanjavanja na sastavne površine  
a) zadati ortogonalni pogledi, b) faze čitanja i crtanja

#### 14.7.2. Metoda odsecanja od osnovnog tela

Metoda odsecanja sastoji se u **odsecanju od prvobitnog, osnovnog tela**. Osnovno telo definisano je konturama i gabaritnim merama datih ortogonalnih pogleda. Za prethodni primer osnovno telo je prizma koja je nacrtana u kosoj projekciji (sl. 14.22,b). Prateći

ortogonalne pogleda (sl. 14.22,a), postepeno se odseca osnovno telo. Na sl. 14.22,c pokazan je postupak odsecanja, prvo sa ravni  $\alpha\beta$ , zatim sa ravni  $\gamma$  i sa ravni  $\delta\varepsilon$ . Ceo postupak odvija se na jednom mestu (sl. 14.22,b). Redosled odsecanja nije bitan.

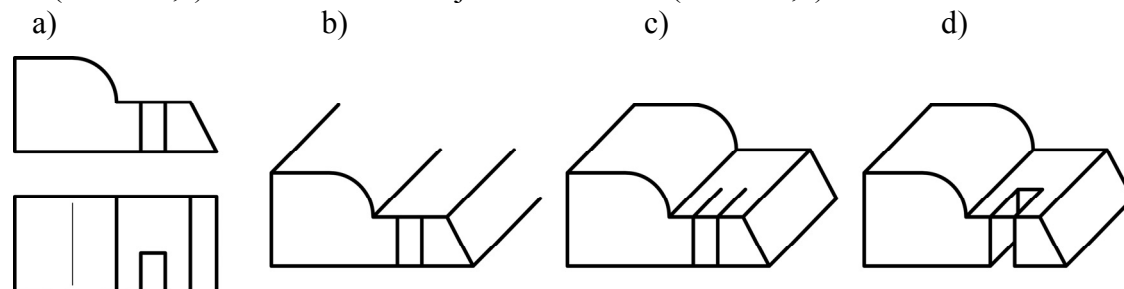


Sl. 14.22: Metoda čitanja odsecanjem od osnovnog tela  
a) zadati ortogonalni pogledi, b) osnovno telo, c) faze čitanja i crtanja odsecanjem

### 14.7.3. Kombinovana metoda

Kombinovana metoda se sastoji iz prethodne dve. Proces čitanja odvija se u glavi čitaoca. Posmatrajući zadate ortogonalne pogleda čitalac zamišlja predmet. Pri tome koristi i metodu rasčlanjavanja na sastavne površine i metodu odsecanja. Tek kada kompletno sagleda predmet, odluči se za metodu aksonometrije i nacrt ga. Ova metoda nije pogodna za početnike. Koristi se kada se savladaju prethodne dve.

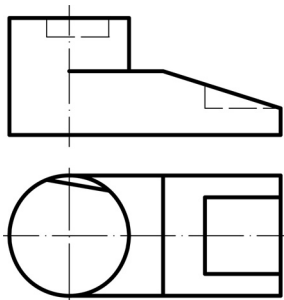
Za primer sa sl. 14.23,a prikazan je postupak čitanja i crtanja kombinovanom metodom i crtanje kose projekcije. Nacrta se glavni pogled (spreda) i doda dubina predmeta koja se vidi u pogledu odozgo (sl. 14.23,b). Zatim se nacrt kontura predmeta koja je ista kao i u pogledu spreda (sl. 14.23,c). Metodom odsecanja nacrt se žleb (sl. 14.23,d).



Sl. 14.23: Postupak čitanja kombinovanom metodom  
a) zadati ortogonalni pogledi, b,c) faze crtanja, d) aksonometrijski izgled zadatog predmeta

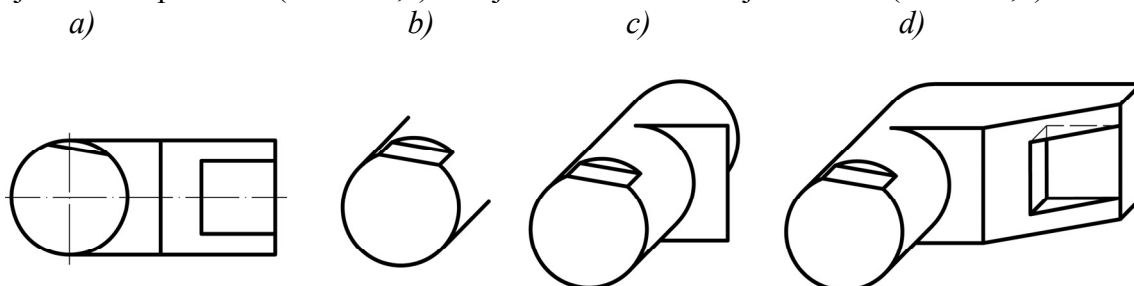
**Zadatak 14.1.**

Na osnovu ortogonalnog crteža (sl. 14.24) nacrtati aksonometrijski.



Sl. 14.24: Postavka zadatka 14.1

Najjednostavnije je da se predmet postavi tako da mu kružne površine budu paralelne sa vertikalnom projekcijskom ravni i da se crta kosa projekcija. Zato se nacrtava pogled odozgo (sl. 14.25,a) kojem se daje dubina (visina) koja se vidi u glavnom pogledu (sl. 14.25,b). Sve površine koje su paralelne sa vertikalnicom su nedeformisane, što olakšava crtanje. Crtanjem pojedinačnih površina (sl. 14.25,c) dobija se konačno rešenje zadatka (sl. 14.25,d)

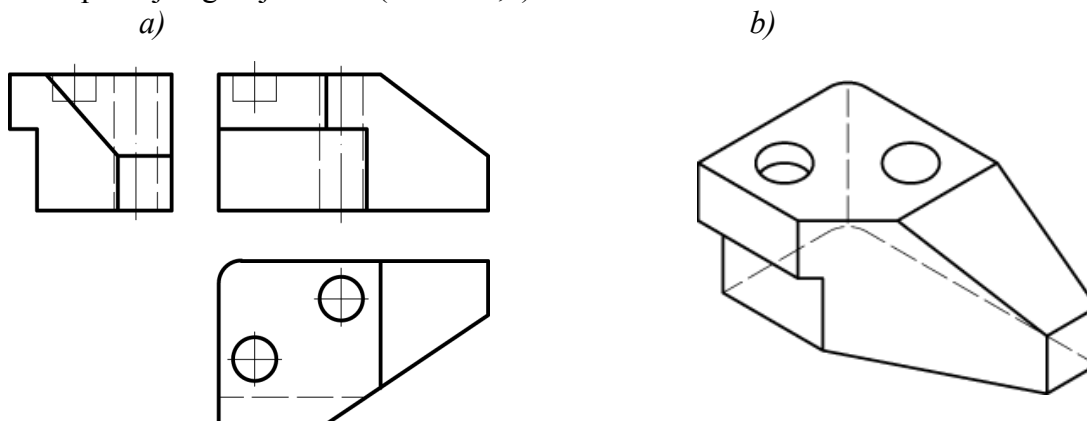


Sl. 14.25: Faze čitanja i crtanja kose projekcije (Zadatak 14.1)

**Zadatak 14. 2.**

Na osnovu ortogonalnog crteža (sl. 14.26,a) nacrtati aksonometrijski.

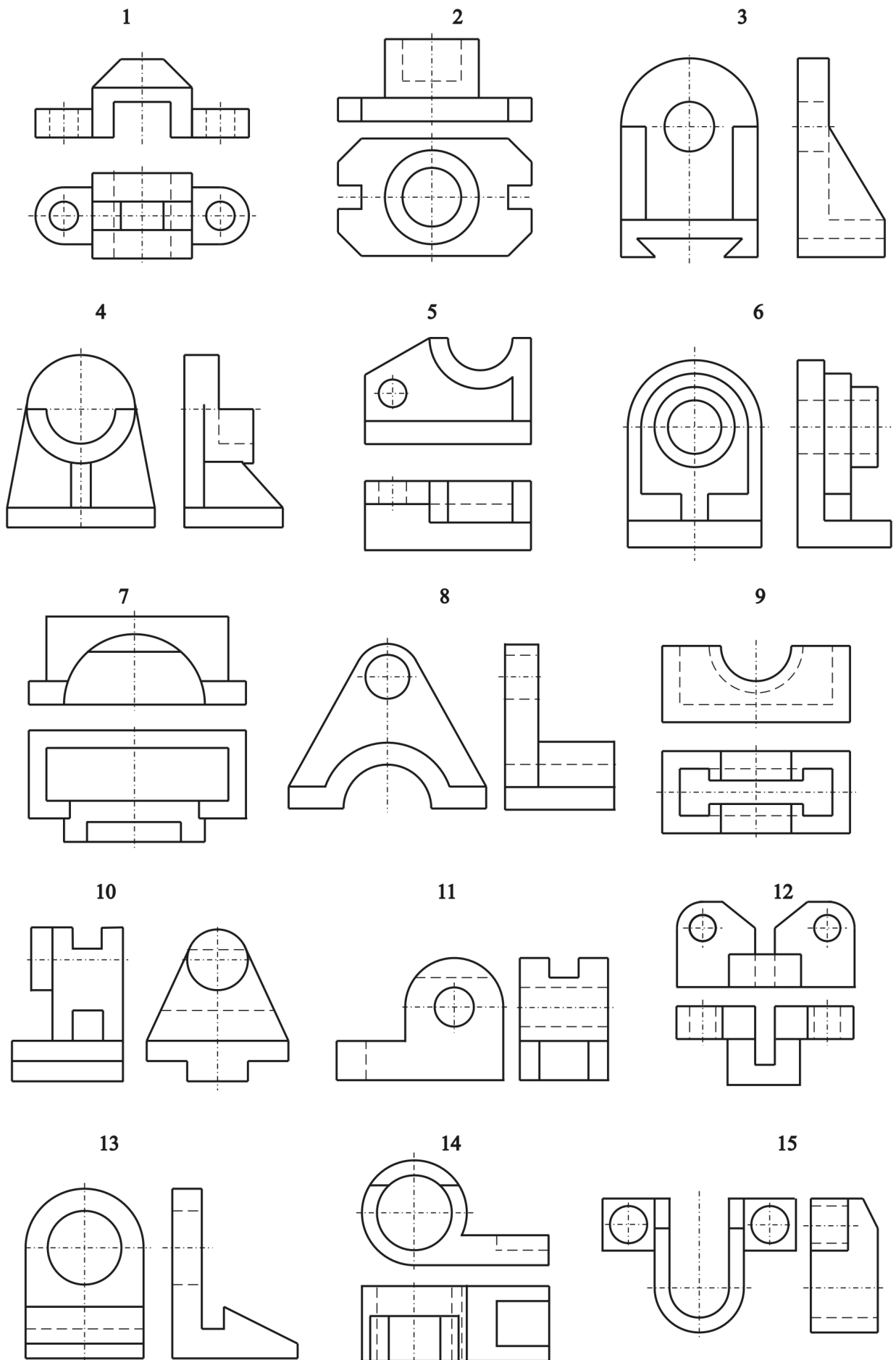
Predmet je složen oblika. Najpogodnija je izometrija. Predmet treba okrenuti tako da skošena strane bude napred, kako bi se bolje videla. Na gornjoj površini je jedna rupa i jedan otvor. Treba nacrtati i nevidljive ivice predmeta kako bi se jasnije videlo da je predmet skošen samo sa prednje i gornje strane (sl. 14.26,b).



Sl. 14.26: Crtanje izometrijskog crteža (Zadatak 14.2)

**Zadatak 14.3.**

Nacrtati aksonometrijske crteže predmeta sa sl. 14.27 za koje su zadati ortogonalni pogledi. Metodu aksonometrije usvojiti.



Sl. 14.27: Za date predmete nacrtati aksonometrijski crtež

## 15. POVEZANOST ORTOGONALNIH PROJEKCIJA I AKSONOMETRIJE

Ortogonalne projekcije i aksonometrijski crtež predmeta međusobno su povezani, što je pokazano u prethodnim poglavljima. U ovom delu će se još jednom ukazati na ovu uzajamnu zavisnost, kao i način dobijanja kose projekcije, kada su poznate ortogonalne.

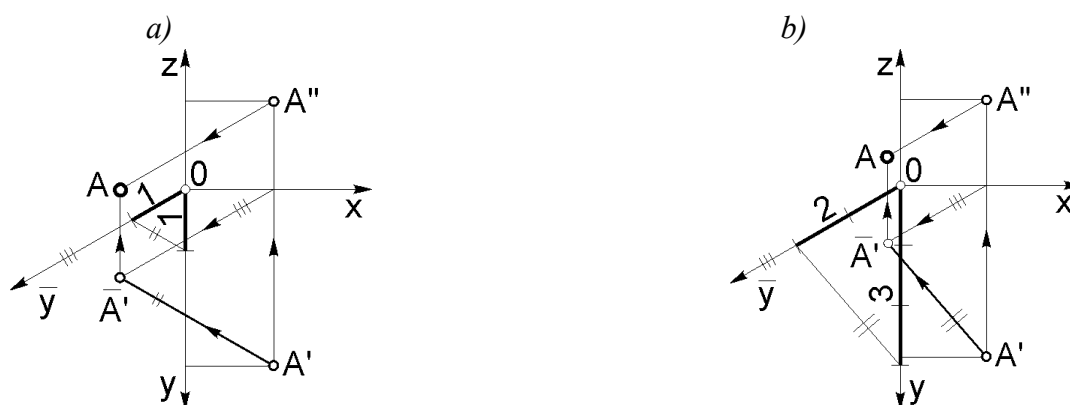
### 15.1. KOSA PROJEKCIJA TAČKE

Neka je zadata tačka  $A$  sa koordinatama  $X, Y$  i  $Z$ , odnosno sa prvom  $A'$  i drugom  $A''$  ortogonalnom projekcijom (sl. 15.1). U kosoj projekciji ose  $X$  i  $Z$  zadržavaju položaj kakav su imale u paru ortogonalnih projekcija, dok se osa  $Y$  pomera u položaj definisan pod nekim uglom prema osi  $X$  i obležava sa  $\bar{Y}$  ( $Y$  nadvučeno). Na taj način vertikalna projekcijska ravan  $V$  ostaje na istom mestu kao kod ortogonalnih projekcija, dok se horizontalna ravan  $H$  "podigne" u horizontalan položaj, a profilna ravan  $P$  se pomera u položaj upravan na  $H$  i  $V$  ravan. Znači, oktant za kosu projekciju definisan je osama  $X, Z$  i  $\bar{Y}$ . Prva kosa projekcija  $\bar{A}'$  tačke  $A$  definisana je koordinatama  $x$  i  $\bar{y}$ .

U kosoj projekciji sve ivice paralelne sa osom  $X$  i  $Z$  crtaju se bez skraćivanja (1:1) dok se one paralelne sa osom  $\bar{Y}$  mogu crti bez ili sa skraćivanjem od 1:1 do 1:2.

Kada nema skraćivanja (1:1), usvoji se jedan proizvoljan podeljak koji se nanese na oborenu osu  $Y$  i na osu  $\bar{Y}$  (sl. 15.1,a). Linija koja spaja ova dva podeljka predstavlja sponu između prve ortogonalne  $A'$  i prve kose projekcije  $\bar{A}'$  tačke  $A$ . Prva kosa projekcija  $\bar{A}'$  određena je ovom sponom i linijom paralelnom sa osom  $\bar{Y}$  koja polazi sa mesta gde vertikalna spona prve i druge ortogonalne projekcije seče osu  $X$ . Kosa projekcija tačke  $A$  ili tačka  $A$  u prostoru dobija se u preseku linije paralelne sa osom  $Z$  (vertikalne linije) koja polazi iz prve kose projekcije  $\bar{A}'$  i linije paralelne sa osom  $\bar{Y}$  koja prolazi iz druge ortogonalne projekcije  $A''$  tačke  $A$ .

Ako se usvoji skraćivanje npr. 3:2 tada se tri ista podeljka nanese na osu  $Y$ , a dva na osu  $\bar{Y}$  i tako se dobija linija koja spaja prvu ortogonalnu  $A'$  i prvu kosu projekciju  $\bar{A}'$  tačke  $A$  (sl. 15.1,b). Kosa projekcija tačke  $A$  tj. tačka  $A$  u prostoru dobija se isto kao u prethodnom primeru sa sl. 15.1,a.

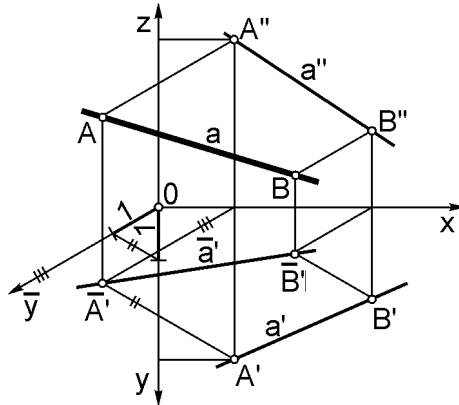


Sl. 15.1: Crtanje kose projekcije tačke  $A$  na osnovu njenih ortogonalnih projekcija  
a) bez skraćivanja 1:1, b) sa skraćivanjem 3:2

### 15.2. KOSA PROJEKCIJA PRAVE

Princip dobijanja kose projekcije prave je isti kao i za tačku, s obzirom na to da pravu definišu dve tačke kroz koje prolazi. Na osnovu zadate prve  $a'$  i druge  $a''$  ortogonalne projekcije prave koja prolazi kroz projekcije tačaka  $A$  i  $B$  odrede se prve kose projekcije

tačaka A i B čijim spajanjem se dobija prva kosa projekcija  $\bar{a}$  prave a. Na isti način kao za tačku, na osnovu prve kose projekcije  $a'$  i druge ortogonalne projekcije  $a''$  prave a dobija se kosa projekcija prave a, tj. prava a u prostoru (sl. 15.2).



Sl. 15.2: Crtanje kose projekcije  $\bar{a}$  prave a na osnovu njenih ortogonalnih projekcija

### 15.3. KOSA PROJEKCIJA TELA

Princip crtanja kose projekcije tela na osnovu njegovih ortogonalnih projekcija je isti kao za tačku i pravu, jer se svako telo, ma kako bilo složeno može nacrtati na osnovu njegovih tačaka i prava (duži).

Kocka je najjednostavnije pravilno geometrijsko telo. Prva i druga ortogonalna projekcija kocke su kvadrati (sl. 15.3). Kosa projekcija kocke dobija se spajanjem kosih projekcija rogljeva (tačaka). Rogalj A u kosoj projekciji se dobija na način kako se određuje kosa projekcija bilo koje tačke. Na isti način se odrede kose projekcije i ostalih rogljeva čijim spajanjem se dobija kosa projekcija kocke.

Bočne strane kocke, kao donja i gornja različito se deformišu, što zavisi od skraćjenja po osi Y. Prednja i zadnja strana se vide u pravoj veličini jer su paralelne sa V ravni.

Na isti način kako je nacrtana kosa projekcija kocke sa sl. 15.3, crtajući tačku po tačku, crta se i kosa projekcija bilo kojeg pravilnog i nepravilnog geometrijskog tela.

### 15.4. AKSONOMETRIJSKA PROJEKCIJA TELA

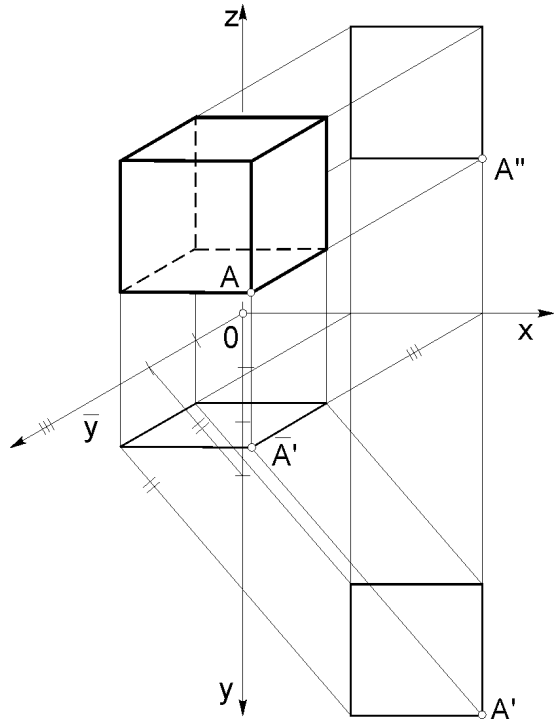
Aksonometrijska projekcija tela dobija se kada se osa X "izvede" iz horizontalnog položaja pod određenim uglom, osa Y je pod nekim uglom prema horizontalnoj liniji (kao kod kose projekcije), a osa Z ostaje i dalje vertikalna. Ivice tela paralelne sa osom Z se ne skraćuju (1:1), a one koje su paralelne sa osom X i Y se skraćuju za različite vrednosti od 1:1 do 1:2. Skraćjenja ivica tela paralelnih sa osama X i Y mogu se definisati i zarotiranim položajem prve ortogonalne projekcije tela (sl. 15.4). Nakon rotiranja osa X i Y, prva projekcija kocke je i dalje kvadrat ivica a. Na osnovu prve zarotirane i druge ortogonalne projekcije kocke, tj. u preseku spona paralelnih sa osom Y i Z iz istih tačaka (rogljeva) dobija se aksonometrijski crtež kocke. Zavisno od ugla rotiranja prve ortogonalne projekcije i uglova pod kojima se nalaze ose X i Y, dobijaju se različite vrste aksonometrijskog crteža: trimetrija, dimetrija i izometrija.

#### Zadatak 15.1.

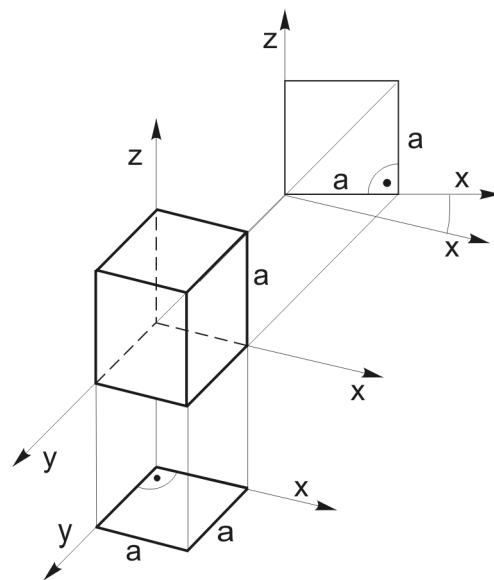
Na osnovu zadatih ortogonalnih projekcija valjka u različitim položajima nacrtati kose projekcije, kada su bazisi paralelni sa vertikalnom, kada su bazisi paralelni sa horizontalnom i kada su bazisi paralelni sa profilnom projekcijskom ravni.

U prvom slučaju bazis valjka je paralelan sa vertikalnom projekcijskom ravni  $V$  (sl. 15.5) u drugom je bazis paralelan sa horizontalnom ravni  $H$  (sl. 15.6), a u treće je paralelan sa profilnom projekcijskom ravni  $P$  (sl. 15.7).

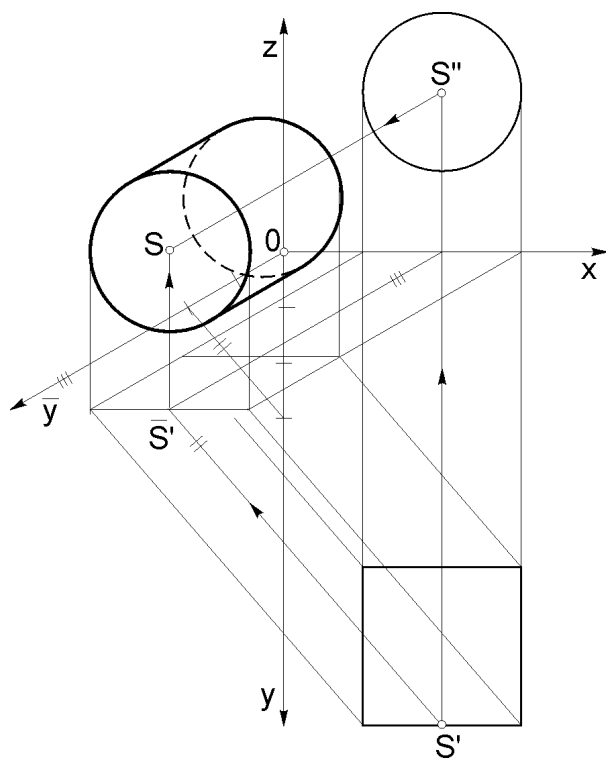
Na ortogonalnim projekcijama kružnica se vidi kao kružnica na onim projekcijskim ravnima sa kojim je paralelna, dok se na aksonometrijskom crtežu uvek vidi kao elipsa, različito deformisana.



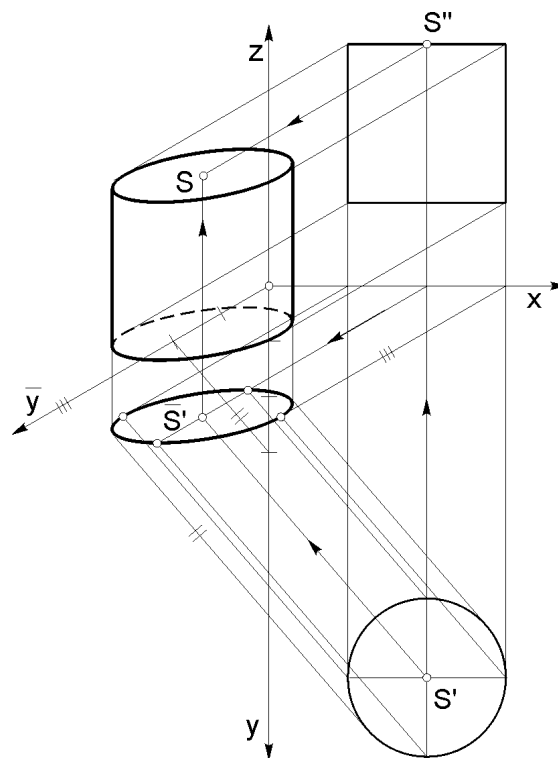
Sl. 15.3: Kosa projekcija kocke



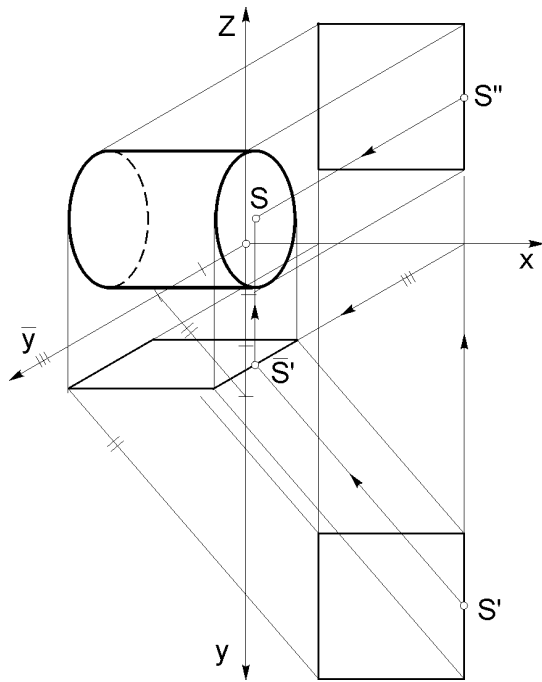
Sl. 15.4: Aksonometrijska projekcija kocke



Sl. 15.5: Kosa projekcija valjka: bazis je paralelan sa  $V$  ravni (Zadatak 15.1)



Sl. 15.6: Kosa projekcija valjka: bazis je paralelan sa  $H$  ravni (Zadatak 15.1)

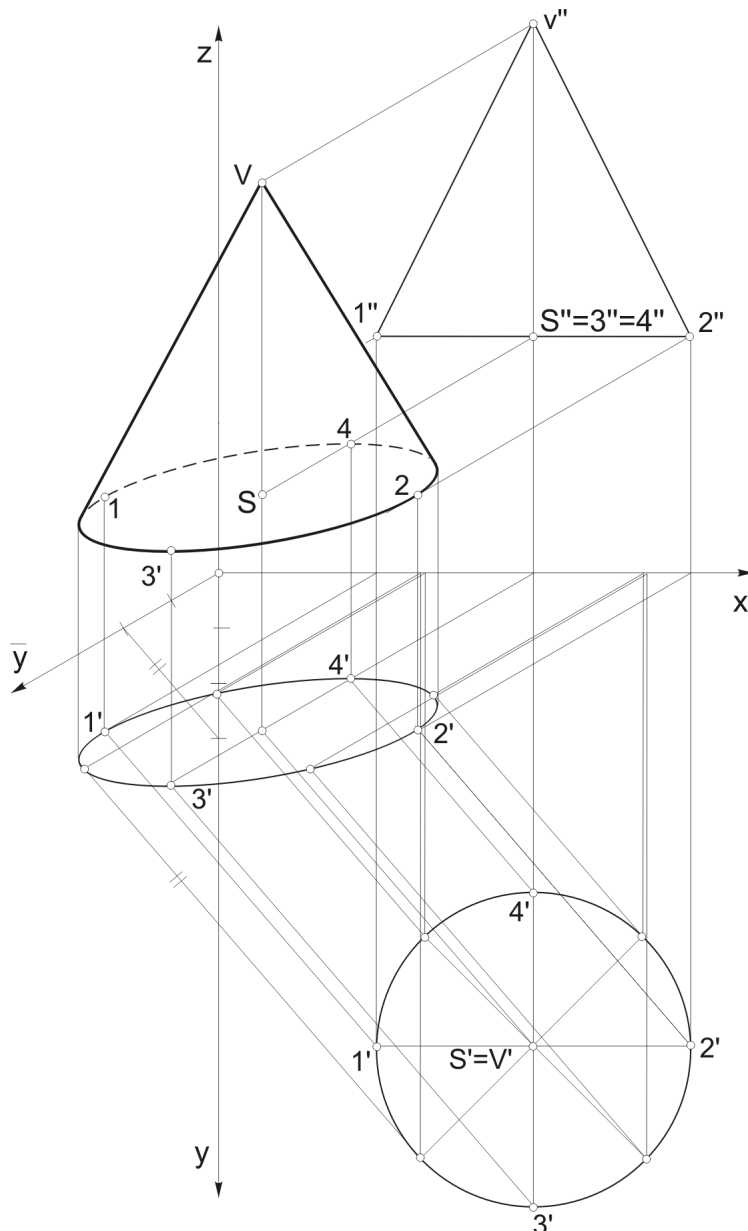
**Zadatak 15.2.**

Na osnovu zadatih ortogonalnih projekcija kupe nacrtati kosu projekciju. Osa Y je pod uglom od  $30^\circ$ , a skraćenje je 3:2.

Na isti način kao i pri crtanju kose projekcije kocke, odredi se prva kosa projekcija kupe, najjednostavnije pomoću tačaka koje se dobijaju crtanjem spregnutih prečnika kruga (tačaka 1, 2, 3 i 4).

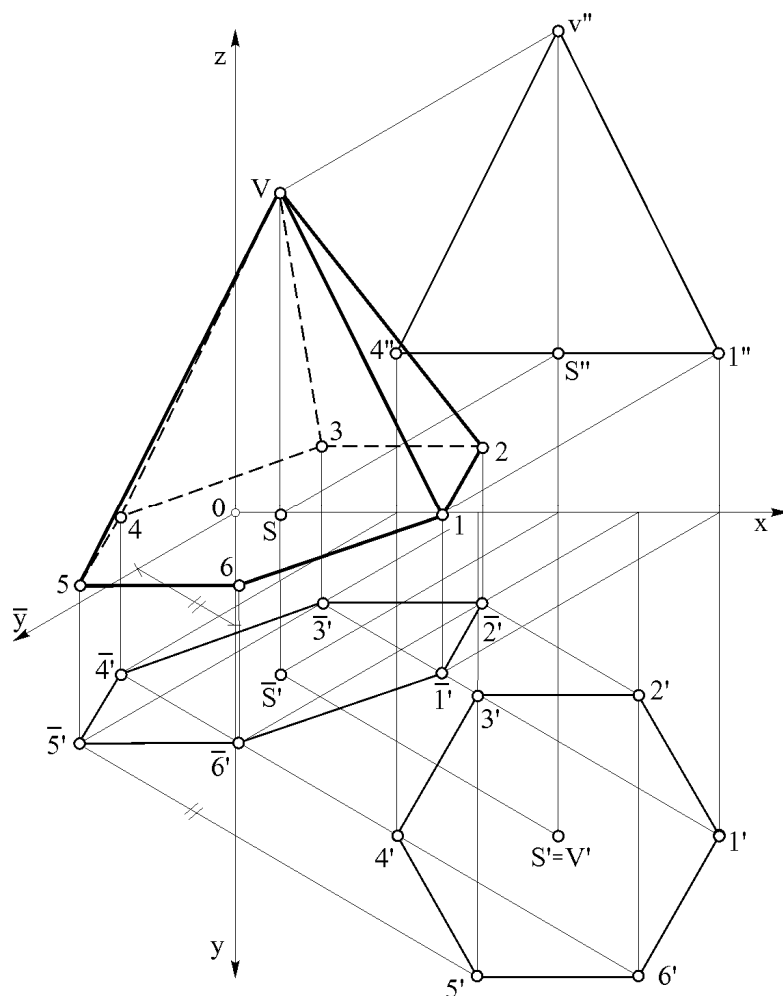
Što se više ovih tačaka usvoji, elipsa kao prva kosa projekcija bazisa (kruga) biće pravilnije nacrtana (sl. 15.8).

Sl. 15.7: Kosa projekcija valjka: bazis je paralelan sa P ravni (Zadatak 15.1)



Sl. 15.8: Kosa projekcija kupe: bazis je paralelan sa H ravni (Zadatak 15.2)





Sl.15.9: Crtanje kose projekcije šestougaone piramide na osnovu zadatih ortogonalnih projekcija (Zadatak 15.3)

### Zadatak 15.3.

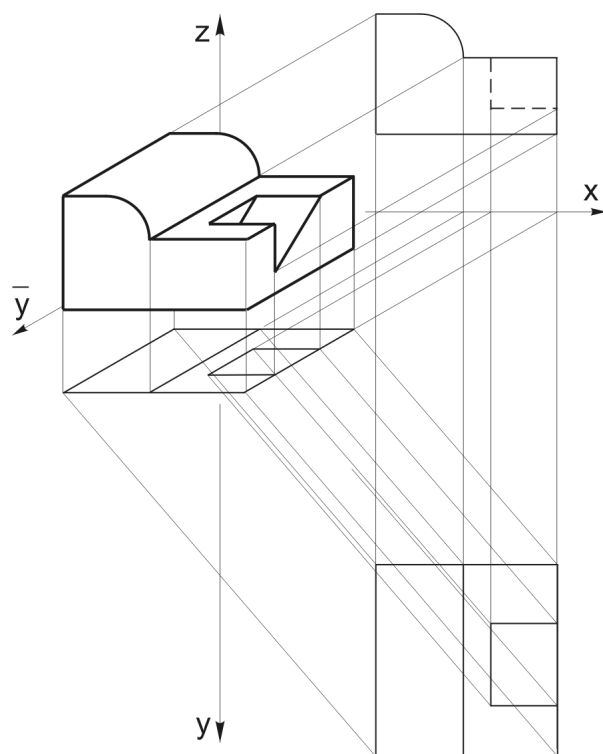
Na osnovu zadatih ortogonalnih projekcija šestougaone poramide nacrtati kosu projekciju. Osa Y je pod uglom od  $30^\circ$ , a skraćenje je 3:2.

Rešenje zadatka dato je na na sl. 15.9.

### Zadatak 15.4.

Na osnovu zadatih ortogonalnih projekcija „složenijeg” tela nacrtati kosu projekciju. Osa Y je pod uglom od  $30^\circ$ , a skraćenje je 3:2.

Iz svih tačaka i ivica zadatih ortogonalnih projekcija povuku se linije koje spajaju prvu ortogonalnu projekciju i prvu kosu projekciju. U preseku vertikalnih linija iz svake tačke i ivice prve kose projekcije tela i linija paralelnih sa osom Y iz istoimenih tačaka druge ortogonalne projekcije, dobijaju se tačke i ivice kose projekcije tela (sl. 15.10).



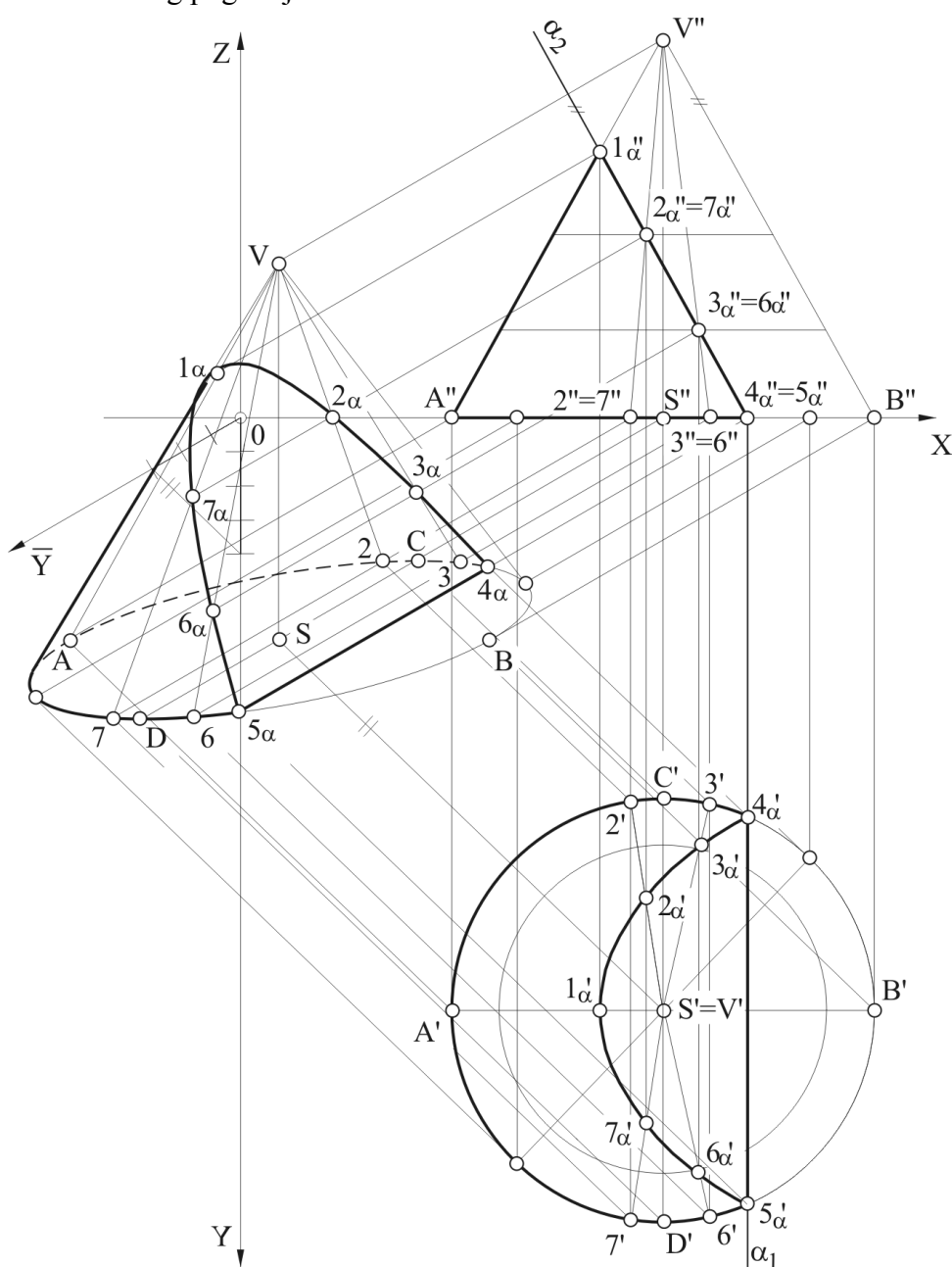
Sl.15.10: Crtanje kose projekcije složenijeg tela na osnovu zadatih ortogonalnih projekcija (Zadatak 15.4)

**Zadatak 15.5.**

0(5;7). Data je kupa poluprečnika bazisa  $R=2,5$  cm koji leži na H ravni sa središtem u tački  $S(5;7;?)$ . Visina kuje je 4,5 cm. Nacrtati kosu projekciju kuje presečene po paraboli sa ravni  $\alpha(6;\infty;?)$  na osnovu ortogonalnih projekcija. Ugao nagiba ose Y je  $30^\circ$ , a skraćenje 4:3.

Drugi trag ravni  $\alpha_2$  paralelan je sa konturnom izvodnicom  $B''V''$  (zato što se kupa seče po paraboli). Presečna površina u drugoj projekciji cela se projicira na trag  $\alpha_2$  (zato što je ravan  $\alpha$  upravna na V ravan), te se podeli na proizvoljan broj podeljaka i obeleži kao na sl. 15.11 ( $1''$ ,  $2''$ ...  $9''$ ). Kroz ove tačke iz  $V''$  nacrtaju se izvodnice i odrede njihove pridružene tačke na bazisu ( $1'$ ,  $2'$ ,...  $9'$ ). Odrede se prve projekcije ovih tačaka, zatim kroz njih i prve projekcije izvodnica  $1'V'$ ,  $2'V'$ ...  $9'V'$ . Prve projekcije tačaka presečne površine ( $1_{\alpha'}$ ,  $2_{\alpha'}$ ...  $9_{\alpha'}$ ) dobijaju se u preseku prvih projekcija izvodnica i vertikalnih spona. Spajanjem prvih projekcija tačaka presečne površine dobija se parabola.

Kosa projekcija se dobija na osnovu prve i druge ortogonalne projekcije kako je opisano u prethodnom tekstu ovog poglavlja.



Sl. 15.11: Presek kuje i ravni po paraboli (Zadatak 15.5.)

## 16. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA)

Perspektiva ili centralna projekcija je takav crtež predmeta koji se dobija pomoću projekcijskih zraka koji se seku u jednoj očnoj tački. Perspektiva daje iluziju prostornog izgleda predmeta (3D) i koristi se za crtanje većih objekata, puteva i pejzaža, jer je perspektiva takvih predmeta najmanje deformisana u odnosu na to kako ih vidi naše oko. Veliki objekti nacrtani u bilo kojoj od metoda aksonometrije deluju neprirodno.

Predmet se pri crtanju perspektive postavlja u prostor koji se donekle razlikuje od onog za crtanje ortogonalnog ili aksonometrijskog crteža.

Projekcijska ravan na kojoj se dobija crtež u perspektivi je vertikalna ravan koja se zove likoravan i obeležava se sa  $L$  (sl. 16.1).

Tačka u kojoj se seku projekcijski zraci naziva se očna tačka i obeležava sa  $O$ .

Horizontalna ravan koja je upravna na likoravan zove se osnovna ravan i obeležava se brojem 1. Na osnovnoj ravni stoji crtač (posmatrač) ili predmet crtanja.

Vertikalna očna ravan  $L_0$  prolazi kroz očnu tačku  $O$  i paralelna je sa likoravni  $L$ .

Horizontalna ravan koja prolazi kroz očnu tačku  $O$  paralelna je sa osnovnom ravni 1, naziva se ravan horizonta i obeležava sa  $R_H$ .

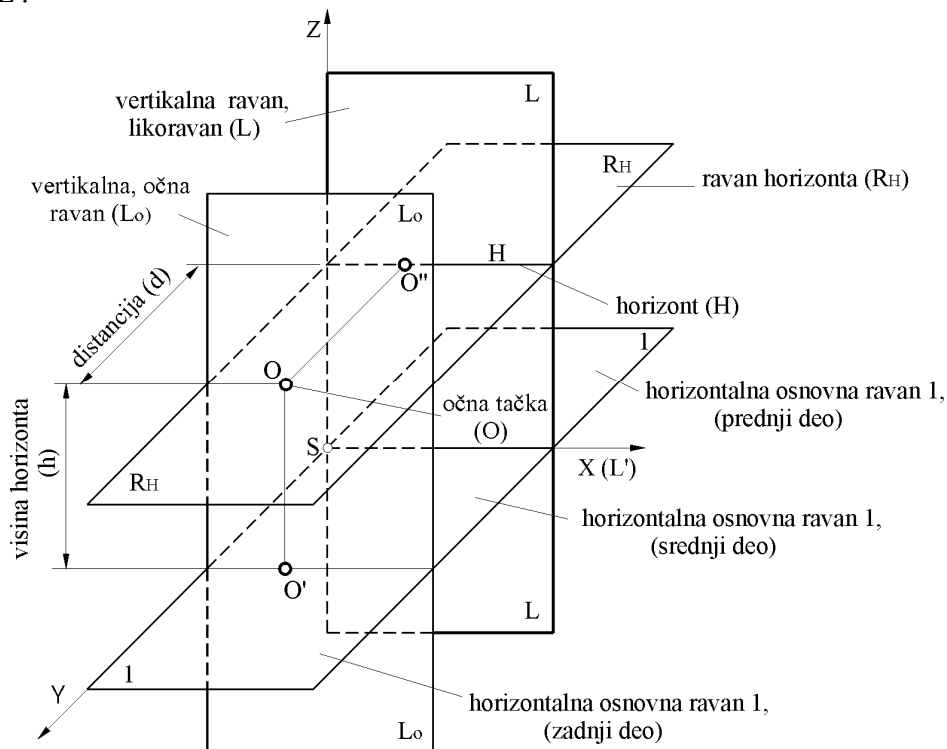
Tamo gde ravan horizonta seče likoravan dobija se horizontalna prava koja se naziva horizont i obeležava sa  $H$ .

Rastojanje očne ravni  $L_0$  od likoravni  $L$  naziva se distancija (distanta) i obeležava sa  $d$ .

Rastojanje ravni horozonta  $R_H$  od osnovne ravni 1 naziva se visina horizonta i obeležava sa  $h$ .

Ose koordinatnog sistema  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  su međusobno pod uglom od  $90^\circ$ , sa koordinatnim početkom u tački  $S$ . Osa  $X$  je horizontalna i nalazi se na mestu gde se seku likoravan  $L$  i osnovna ravan 1, dok je osa  $Z$  vertikalna.

Smerovi osa sa slike 16.1 su pozitivnog usmerenja, dok osa  $Y$  može da ima pozitivan smer u suprotnom smeru od onog koji je na slici nacrtan. Na osi  $X$  nalazi se prva projekcija likoravni  $L'$ .

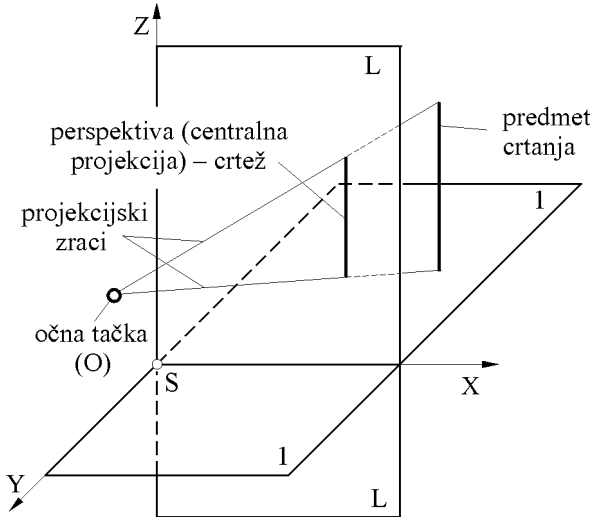


Sl. 16.1: Prostor za crtanje perspektive i parametri koji je definišu

Ove četiri ravni: likoravan  $L$ , osnovna ravan  $1$ , ravan horizonta  $R_H$  i očna ravan  $L_0$  omeđavaju prostor u kojem se nalazi predmet crtanja i dobijeni crtež.

Prostor ispred očne ravni u smeru ose  $Y$  naziva se zadnji deo (sl. 16.1). Prestor između očne ravni i likoravni naziva se srednji deo, a prostor iza likoravni naziva se prednji deo.

Predmet crtanja se najčešće postavlja u prednji deo prostora, jer je na taj način dobijeni crtež manje deformisan u odnosu na svoj stvarni izgled (sl. 16.2).



Perspektiva (centralna projekcija) ili crtež je na likoravni  $L$ . **Perspektiva (centralna projekcija) dobija se tako što se projekcijskim zracima koji se seku u očnoj tački  $O$ , obuhvati predmet crtanja i gde oni probiju likoravan dobija se perspektiva ili crtež.**

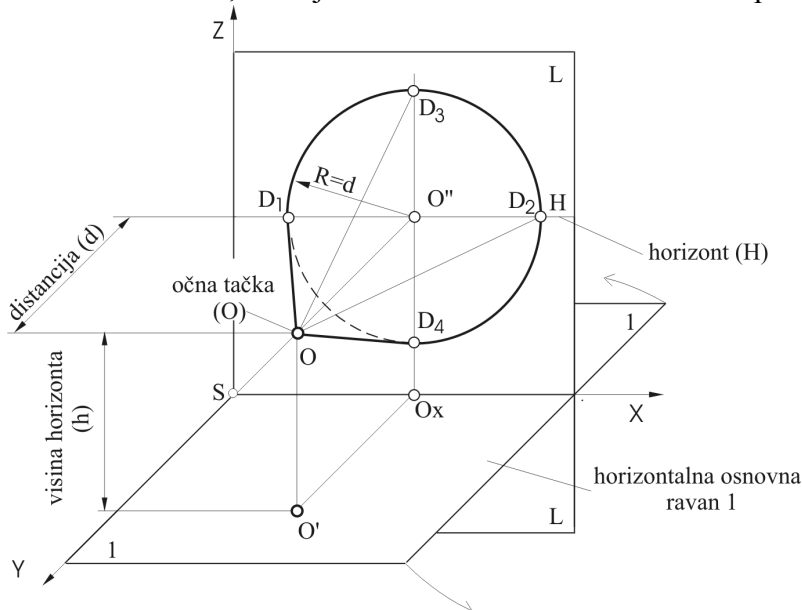
Dobijeni crtež može biti veći, manji ili jednak predmetu crtanja, što zavisi od položaja predmeta crtanja i očne tačke  $O$ . Ako je predmet crtanja udaljeniji od očne tačke, crtež je manji i obrnuto.

Sl. 16.2: Položaj predmeta crtanja i crteža

Ortogonalna projekcija očne tačke  $O$  na osnovnu ravan  $1$  je  $O'$  (prva ortogonalna projekcija), a na likoravan je  $O''$  (druga ortogonalna projekcija). Tačka  $O''$  se naziva glavna tačka i ona se nalazi na horizontu  $H$  (sl. 16.1).

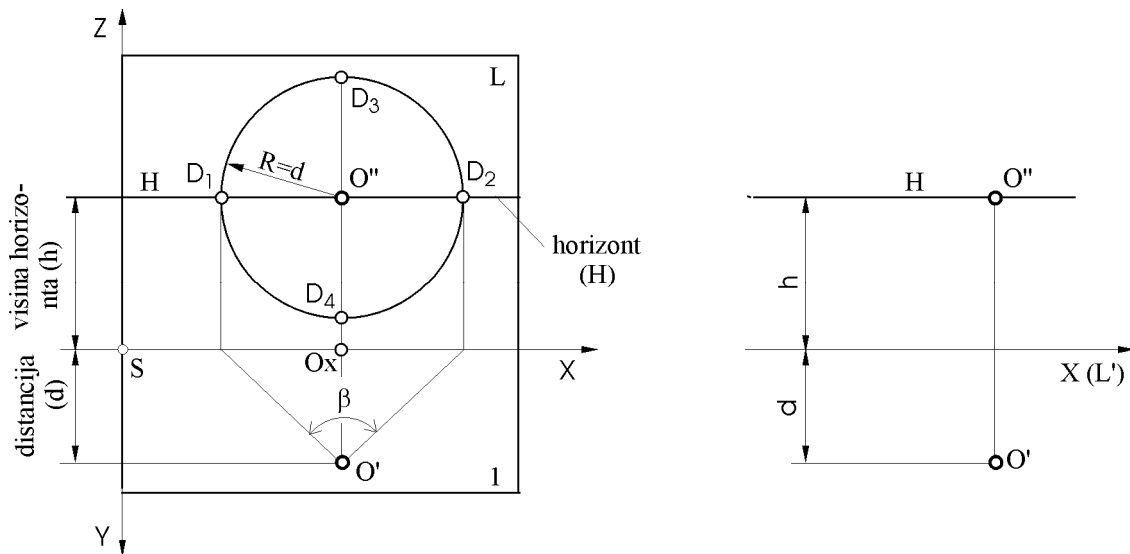
Distancija  $d$  je ustvari  $y$  koordinata očne tačke  $O$ , a visina horizonta  $h$  je  $z$  koordinata tačke  $O$ .

Ako se iz glavne tačke  $O''$  opiše krug prečnika distancije  $d$  na likoravan, dobija se distantni krug sa distantnim tačkama  $D_1, D_2, D_3$  i  $D_4$  (sl. 16.3). Ako se iz očne tačke  $O$  povuku tangente na distantni krug dobija se konus koji se naziva vidokrug i koji je definisan vidnim uglom  $\beta$  (sl. 16.4). Dobra vidljivost predmeta je ako se nalazi unutar vidnog ugla. Pri crtanju perspektive predmeta vidni ugao treba da bude maksimalno do  $45^\circ$ , a pri crtanju okoline i pejzaža maksimalno do  $60^\circ$ . Vidni ugao našeg oka je  $33^\circ$ . Ako je vidni ugao veći od navedenih vrednosti, crtež je znatno deformisan u odnosu na prirodni izgled predmeta.



Sl. 16.3: Distantni krug i vidokrug

Kao i kod ortogonalnog crteža, horizontalna osnovna ravan 1 se obara oko ose X za  $90^\circ$  na dole, da bi se našla u vertikalnoj ravni (sl. 16.4). Ose Z i Y nakon obaranja nisu bitne, te se ne crtaju. Parametri koji se moraju nacrtati su osa X (prva projekcija likoravni L'), glavna tačka  $O''$  (visina horizonta  $h$ ) i distancija  $d$ .

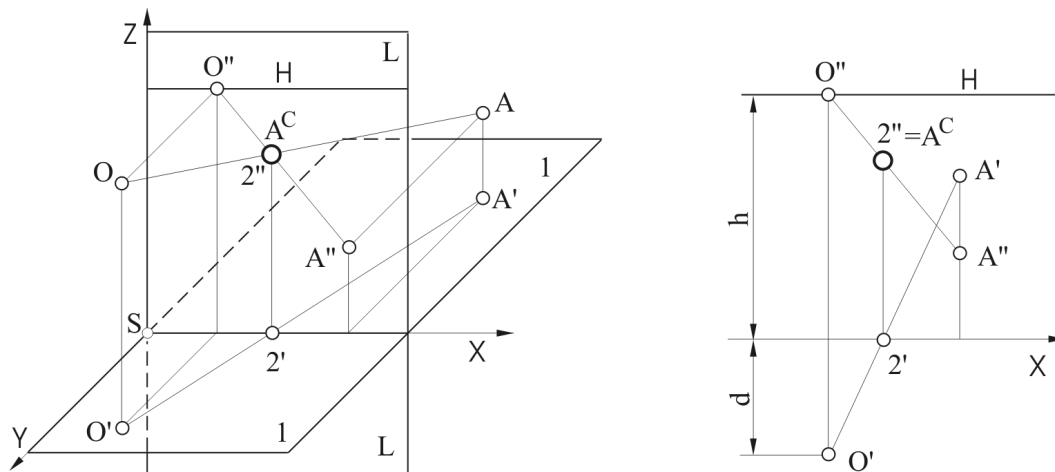


Sl. 16.4: Distantni krug i parametri crtanja nakon obaranja osnovne ravni 1

### 16.1. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA) TAČKE

Neka je zadata tačka A u prostoru čije su ortogonalne projekcije u tačkama  $A'$  i  $A''$ . Položaj očne tačke O se usvoji i određen je sa dve ortogonalne projekcije  $O'$  i  $O''$ . Uzajamna povezanost tačke A, njenih ortogonalnih projekcija  $A'$ ,  $A''$ , očne tačke O ( $O'$  i  $O''$ ) i perspektive (centralne projekcije)  $A^C$  tačke A data je na sl. 16.5. Centralna projekcija beležavaće se sa „ $A^C$ ” ( $A^C$ ).

**Drugi prodor projekcijskog zraka OA kroz likoravan L daje perspektivu tačke  $A^C$ .** Nacrtaju se dve ortogonalne projekcije projekcijskog zraka OA ( $O'A'$  i  $O''A''$ ). Gde prva projekcija projekcijskog zraka ( $O'A'$ ) seče osu X dobija se prva projekcija drugog prodora, tačka  $2'$ . Druga projekcija drugog prodora, tačka  $2''$ , nalazi se u preseku vertikalne spone i druge projekcije projekcijskog zraka. **Tačka  $2''$  je prodor projekcijskog zraka kroz likoravan (drugi prodor) i perspektiva (centralna projekcija)  $A^C$ , tačke A.**

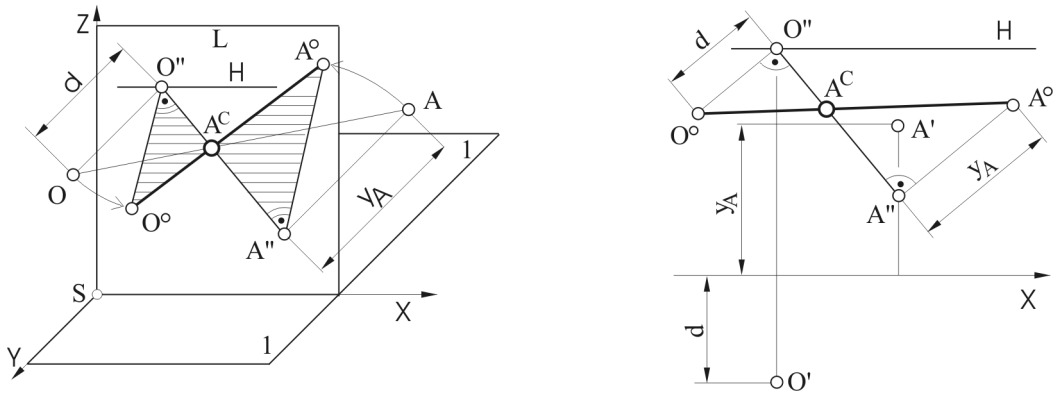


Sl. 16.5: Perspektiva (centralna projekcija) tačke

Sam postupak dobijanja perspektive tačke zavisi od zadatih vrednosti. Zavisno od toga postoje različite metode za crtanje perspektive tačke: transformacijom, bisektrisnim projiciranjem, obaranjem u likoravan pomoću distantnih tačaka itd. kako bi se dobila perspektiva tačke na što manjem prostoru.

### 16.1.1. Transformacija tačke

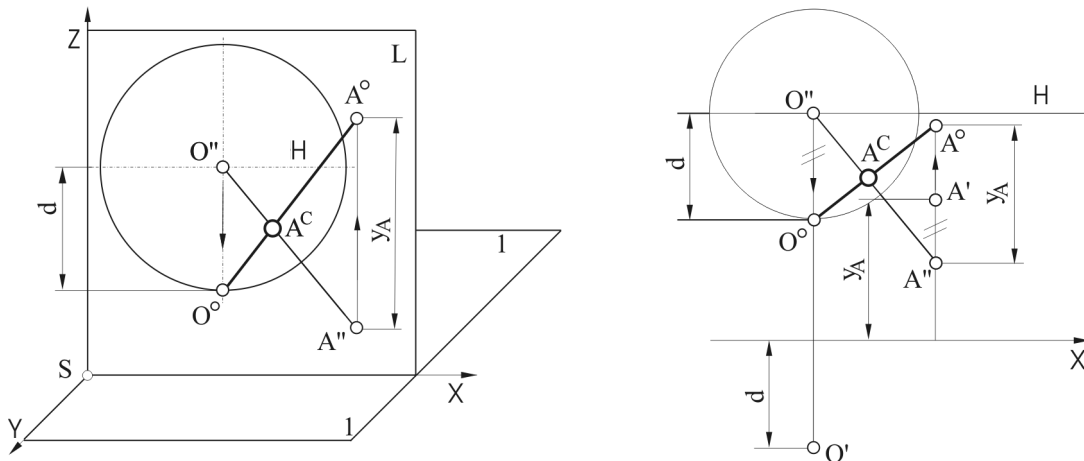
Metoda transformacije tačke koristi se ako je poznata druga projekcija tačke  $A''$  i njeno rastojanje od likoravni (koordinata  $y_A$ ). Ova metoda podrazumeva obaranje zračne ravni koja prolazi kroz tačke  $A''O''$  u likoravan (sl. 16.6). Na normalu na pravac  $A''O''$  iz tačke  $A''$  nanese se rastojanje  $y_A$  i tako dobija oboreni položaj  $A^\circ$ . Na normalu iz tačke  $O''$  nanese se vrednost distancije  $d$  (koordinata  $y_O$ ) i tako dobija oborena tačka  $O^\circ$ . U preseku prave kroz oborene tačke  $A^\circ O^\circ$  i prave kroz njene druge projekcije  $A''O''$  dobija se perspektiva tačke  $A^C$ . Pri tome treba voditi računa o smeru obaranja. Ako su i očna tačka  $O$  i tačka crtanja  $A$  ispred ili iza likoravni (na istoj strani od likoravni) obaraju se na istu stranu. Ako su očna tačka  $O$  i tačka crtanja  $A$  iza različitih strana likoravni, obaraju se na suprotne strane, kao u datom primeru. Na ovaj način, ovom metodom, ne moraju se crtati prve projekcije očne tačke  $O$  i tačke crtanja  $A$  ( $O'$ ,  $A'$ ), te crtež zauzima manje mesta.



Sl. 16.6: Crtanje perspektive tačke transformacijom

### 16.1.2. Bisektrisno projiciranje tačke

Metoda bisektrisnog projiciranja tačke podrazumeva obaranje glavne tačke  $O''$  po distantnom krugu  $d$ , kao i tačke crtanja  $A$  (sl. 16.7). Pravci obaranja i tačke  $O''$  i tačke  $A''$  su međusobno paralelni. Po pravcima obaranja iz tačke  $O''$  nanese se rastojanje distancije  $d$ , a iz tačke  $A''$  rastojanje  $y_A$  i tako dobijaju oboreni položaji ovih tačaka ( $O^\circ$  i  $A^\circ$ ). U preseku prava kroz tačke  $O''A''$  i  $O^\circ A^\circ$  dobija se perspektiva  $A^C$  tačke  $A$ .



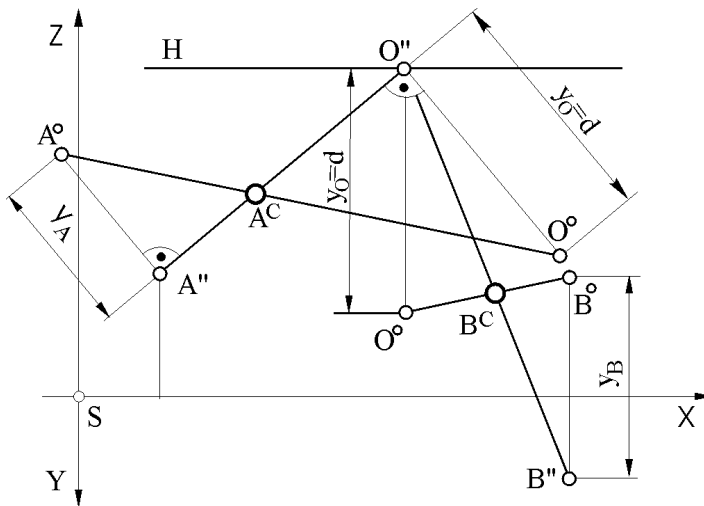
Sl. 16.7: Crtanje perspektive tačke bisektrisnim projiciranjem

**Zadatak 16.1.**

Odrediti perspektivu tačaka A (1;-2;1,5) i B(6;-2,5;-1). Očna tačka ima koordinate O(4;3;4).

Pri rešavanju ovog zadatka za tačku A korišćena je metoda transformacije, a za tačku B metoda bisektrisanog projiciranja.

Nacrtaju se druge ortogonalne projekcije zadatih tačaka A, B i O (sl. 16.8). Na pravac A"O" nacrtaju se normale iz ovih tačaka i na njih nanesu koordinate tačaka  $y_A$  i  $y_O = d$  i tako dobijaju oborene tačke A°O°. U preseku prava kroz tačke A°O° i A"O" dobija se perspektiva, tačka A<sup>C</sup>.



Perspektiva tačke B određuje se tako što se tačka O obori po distantnom krugu po verikalnoj sponi za vrednost  $y_O = d$ , a tačka B po vertikalnoj sponi za vrednost  $y_B$  u suprotnim smerovima jer se nalaze na suprotnim stranama likoravni (Y koordinata tačke B je -2,5, a tačke O je +3). U preseku prava kroz tačke B°O° i B"O" dobija se perspektiva B<sup>C</sup> tačke B.

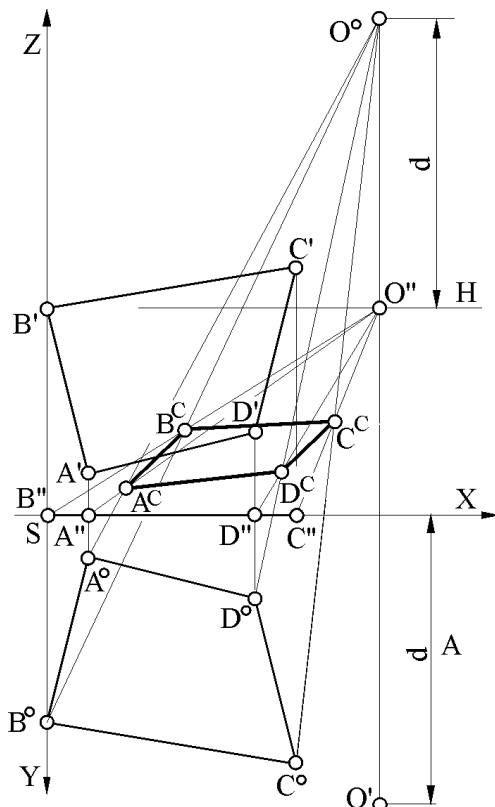
Sl. 16.8: Perspektiva tačke (Zadatal 16.1)

**Zadatak 16.2.**

Odrediti perspektivu ravni koja je zadata tačkama A(0,5;-0,5;0), B(0;-2,5;0), C(3;-3;0) i D(2,5;-1;0). Očna tačka je O(4;3,5;2,5).

Nacrtaju se prve i druge ortogonalne projekcije zadatih tačaka (sl. 16.9). Kako je druga projekcija zadate ravni duž koja leži na osi X, proizilazi da se tačke A, B, C i D nalaze na glavnoj ravni 1.

Metodom bisektrisanog projiciranja odredi se oboreni položaj očne tačke O° (na osnovu distancije d) kao i oborene tačke A°, B°, C° i D° na osnovu njihovih y koordinata. Spoji se tačka O° sa oborenim tačkama A°, B°, C° i D°, a zatim se spoji tačka O" sa drugim projekcijama tačaka zadate ravni A", B", C", D". U preseku ovih pravaca sa prethodnim dobijaju se perspektive tačaka A<sup>C</sup>, B<sup>C</sup>, C<sup>C</sup> i D<sup>C</sup>.

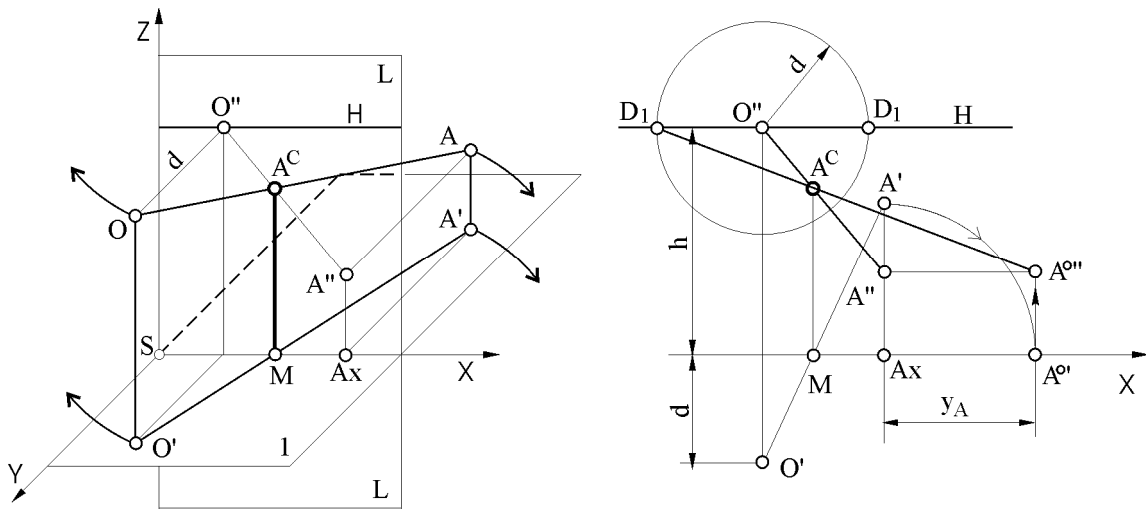


Sl. 16.9: Crtanje perspektive ravni koja je zadata tačkama (Zadatak 16.2)

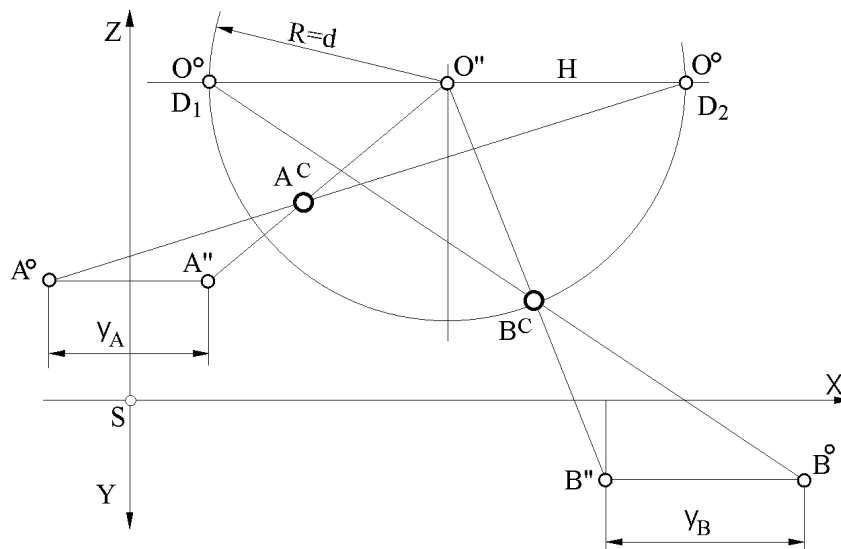
### 16.1.3. Obarenje tačke u likoravan pomoću distantnih tačaka

Uzajamna veza distantnih tačaka  $D_1$  i  $D_2$  sa ortogonalnim i centralnim projekcijama postoji i data je na sl. 16.10. Ako se obori ravan  $OO'A'A$  oko ose  $MA^C$  na likoravan  $L$  dobija se distantni krug i distantne tačke  $D_1$  i  $D_2$ . Nakon obaranja, očna tačka  $O$  biće u distantnoj tački  $D_1$  ili  $D_2$ , a tačka  $A$  u  $A^{O''}$ . Krug obaranja tačke  $A$  u drugoj projekciji je paralelan sa osom  $X$  na rastojanju  $y_A$ . U preseku prava kroz tačke  $A''O''$  i  $D_1 A^{O''}$  dobija se perspektiva  $A^C$  tačke  $A$ .

Perspektiva tačaka  $A$  i  $B$  iz zadatka 16.1 određena je obaranjem u likoravan pomoću distantnih tačaka (16.11).



Sl. 16.10: Obarenje tačke u likoravan pomoću distantnih tačaka



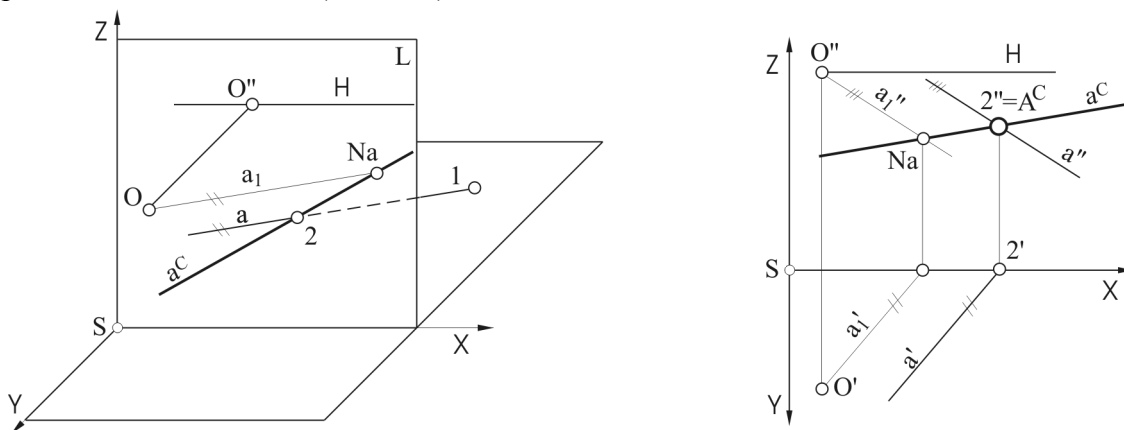
Sl. 16.11: Obarenje tačke u likoravan pomoću distantnih tačaka (Zadatak 16.1)

## 16.2. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA) PRAVE

Za definisanje prave (duži) u prostoru i u projekcijama mogu se koristiti bilo koje dve tačke na njoj. Perspektiva prave dobija se spajanjem perspektive dve tačke na njoj. Najjednostavnije je pravu definisati njenim prodorima kroz projekcijske ravni, prvim 1 kroz  $H$



ravan i drugim 2 kroz V ravan. Prvi prodor 1 je prodor prave a kroz osnovnu ravan, a drugi 2 je prodor kroz likoravan L (sl. 16.12).



Sl. 16.12: Perspektiva prave

Perspektiva prave a se dobija u preseku pomoćne ravni koja prolazi kroz pravu a i očnu tačku O sa likoravni L. Presek ove pomoćne ravni i likoravni najjednostavnije se dobija na osnovu drugog prodora prave 2 i njenog nedogleda Na.

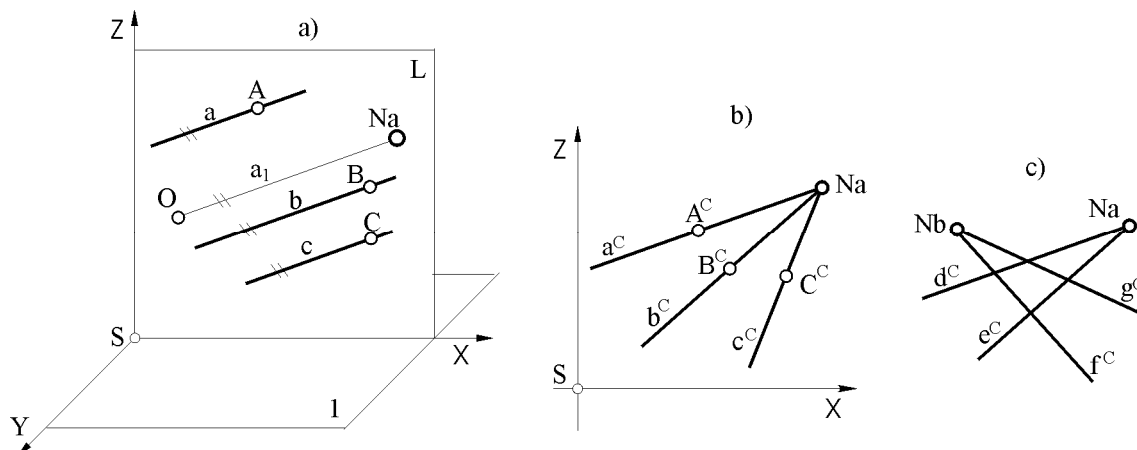
Nedogled Na prave a se dobija tako što se nacrti pomoćna prava  $a_1$  koja je paralelna sa pravom a i prolazi kroz očnu tačku O. Gde pomoćna prava  $a_1$  probija likoravan L dobija se nedogled Na prave a (sl. 16.12).

Nedogled prave je perspektiva tačke na pravoj koja je beskonačno daleka. Prava a i  $a_1$  imaju zajednički nedogled jer su međusobno paralelne. Nedogled se koristi pri crtanju perspektive prave i drugi značaj nema. Pravu u perspektivi je najjednostavnije definisati drugim prodorom 2 i njenim nedogledom Na, tj. perspektiva prave se dobija spajanjem njenog drugog prodora 2 i njenog nedogleda Na.

Paralelne prave imaju zajednički nedogled. Nedogled je tačka u kojoj se dve prave seku u beskonačnosti. **Paralelne prave a, b i c u prirodi, nisu u perspektivi paralelne, već se seku u zajedničkom nedogledu Na** (sl. 16.13,ab). Prave d i e su, takođe, međusobno paralelne, jer na perspektivi imaju zajednički nedogled Na, kao i prave f i g jer imaju zajednički nedogled Nb (sl. 16.13,c).

Prave koje su upravne na likoravan imaju nedogled u glavnoj tački O''. Prave koje su paralelne sa likoravni imaju nedogled u beskonačnosti. Za pravu koja leži na likoravni, njena perspektiva se poklapa sa drugom projekcijom.

Duž u perspektivi može biti duža, kraća i jednaka duži u prirodi. Prava veličina duži se dobija kada se prava obori u likoravan.

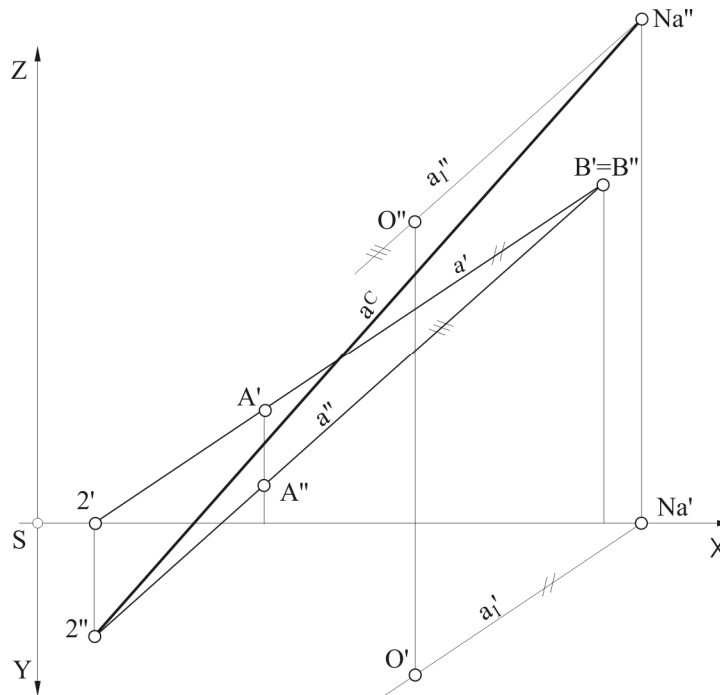


Sl. 16.13. Paralelne prave imaju zajednički nedogled

**Zadatak 16.3.**

Odrediti perspektivu prave  $a$  koja prolazi kroz tačke  $A(3;-1,5;0,5)$  i  $B(7,5;-4,5;4,5)$ . Koordinate očne tačke su  $O(5;2;4)$ .

Odrede se ortogonalne projekcije drugog prodora (tačka 2) prave  $a$  ( $2'$  i  $2''$ ). Odredi se druga projekcija nedogleda  $Na$ , tj. drugi prodor pomoćne prave  $a_1$  ( $Na''$ ). Pomoćna prava  $a_1$  je paralelna sa pravom  $a$  i prolazi kroz očnu tačku  $O$ . Stoga je  $a_1' // a'$  i  $a_1'' // a''$ . Spajanjem nedogleda  $Na''$  i drugog prodora  $2''$  dobija se perspektiva  $a^C$  prave  $a$  (sl. 16.14). Zadatak se mogao rešiti određivanjem perspektive tačaka  $A$  i  $B$  čijim spajanjem bi se dobila  $a^C$ , za šta bi trebalo više pomoćnih linija.



Sl. 16.14: Perspektiva prave  $a$  (Zadatak 16.3)

**16.3. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA) RAVNI**

Ravan  $\alpha$  u prostoru određena je tragovima  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Ravan  $\alpha$  u perspektivi je određena drugim tragom  $\alpha_2$  koji leži u likoravni  $L$  i nedoglednicom  $\alpha_n$ .

Nedoglednica  $\alpha_n$  je prava po kojoj pomoćna ravan koja prolazi kroz očnu tačku  $O$  i paralelna je sa ravni  $\alpha$  seče likoravan  $L$ . Praktično, drugi trag ravni  $\alpha_2$  i nedoglednica  $\alpha_n$  su međusobno paralelni ( $\alpha_2 // \alpha_n$ ). Nedogledi svih prava na ravni nalaze se na nedoglednici te ravni.

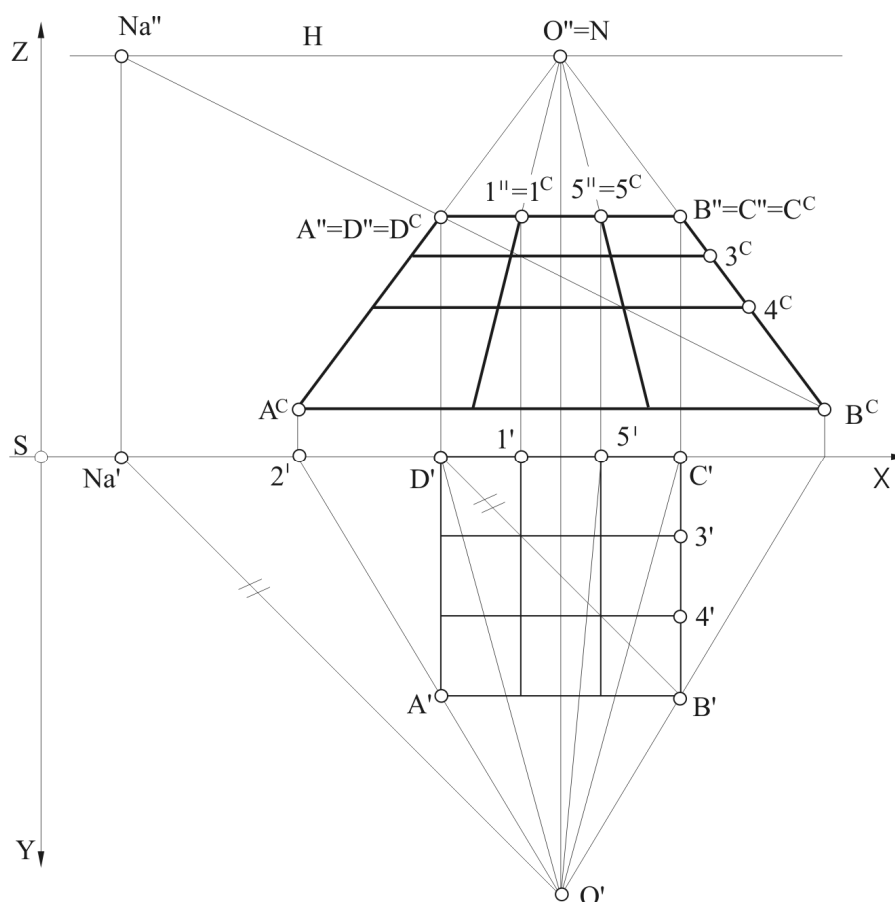
Obzirom da je ravan određena sa dve prave koje se seku ili su međusobno paralelne, ili sa jednom pravom i tačkom van nje, perspektivu ravni je najjednostavnije odrediti na osnovu perspektive njenih tačaka i prava. Crtanje perspektive ravni na osnovu njenih tragova i nedoglednice, u praksi se ređe koristi.

**Zadatak 16.4.**

Odrediti perspektivu kvadrata sa poljima koji je zadat tačkama  $A(5;3;3)$ ,  $B(8;3;3)$ ,  $C(8;0;3)$  i  $D(5;0;3)$ , ako je očna tačka  $O(6,5;5;5)$  (sl. 16.15).

Nacrta se prva i druga ortogonalna projekcija zadanog četvorougla. Kako su ivice kvadrata  $AD$  i  $BC$  međusobno paralelne i upravne na likoravan  $L$  imaju zajednički nedogled  $N$  u tački

O". Prave AB i DC su paralelne sa likoravni, te su im nedogledi beskonačno daleko, odnosno perspektive ovih ivica su paralelne sa osom X. Perspektiva tačke A se dobija na osnovu prodora projekcijskog zraka OA kroz likoravan. Gde prva projekcija tog zraka O'A' seče osu X dobija se prva projekcija drugog prodora (2'). U preseku vertikalne spone iz ove tačke i druge projekcije O"A" dobija se drugi prodor projekcijskog zraka OA, odnosno perspektiva tačke  $A^C$ . Na isti način se dobijaju perspektive i ostalih tačaka  $B^C$ ,  $C^C$ ,  $D^C$ ,  $5^C$  i  $1^C$ . Spajanjem ovih tačaka i tačke N dobija se perspektiva ivica upravnih na likoravan. Perspektiva ivica paralelnih sa likoravni najjednostavnije se dobija pomoću dijagonale BD. Perspektiva dijagonale BD, koja je dijagonala svih kvadrata mreže dobija se tako što se iz očne tačke O povuče prava paralelna sa dijagonalom BD i odredi njen prodor kroz likoravan L, tačka Na (nedogled dijagonale BD). Na pravoj kroz tačke Na"  $B^C$  nalazi se perspektiva dijagonala svih kvadrata zadate ravni. Horizontalna ivica iz tačke  $4^C$  nalazi se u preseku dijagonale Na"  $B^C$  i ivice na pravcu  $N5^C$ . Na isti način se određuje i horizontalna ivica iz tačke  $3^C$ .



Sl. 16.15. Perspektiva ravni (kvadrata) (Zadatak 16.4)

### Zadatak 16.5.

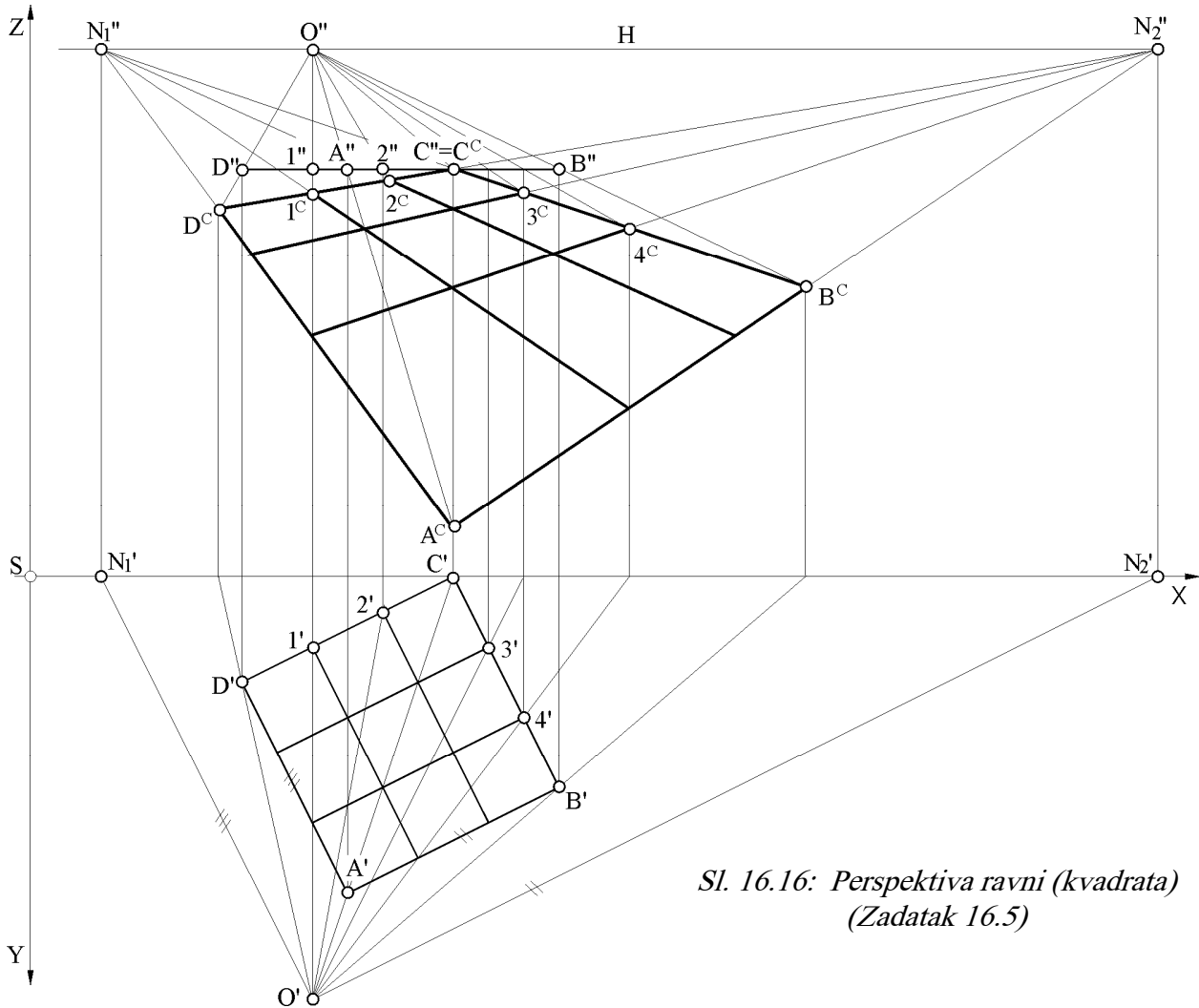
Odrediti perspektivu kvadrata sa poljima koji je zadat tačkama  $A(4,5;4,5;6)$ ,  $B(7,5;3;6)$ ,  $C(6;0;6)$  i  $D(3;1,5;6)$  ako je očna tačka  $O(4;6;7,5)$  (sl. 16.16).

Na osnovu prve i druge ortogonalne projekcije vidi se da je zadata ravan paralelna sa horizontalnom osnovnom ravni, a da njene ivice nisu paralelne sa osama X i Y. Stoga ivice ovog kvadrata nemaju nedoglede u očnoj tački O.

Potrebno je odrediti nedogled ivice AD ( $N_1$ ) i nedogled ivice AB ( $N_2$ ). Iz tačke O' nacrtaju se pomoćne prave paralelne sa ivicama A'D' i A'B', a iz tačke O" prave paralelne sa A"D" i A"B". Drugi prodori ovih pomoćnih prava su nedogledi  $N_1$  i  $N_2$ . Sve ivice paralelne

sa AD imaju nedogled u tački  $N_1$ , a one ivice paralelne sa AB imaju nedogled u tački  $N_2$ . Stoga se sve perspektive ovih ivica seku u tačkama  $N_1$  ili  $N_2$ . Odrede se perspektive nekih od tačaka na način kako je to objašnjeno u prethodnom zadatku 16.4. Perspektiva tačke C je na mestu gde je njena druga projekcija  $C^C = C''$ . Perspektive ostalih tačaka i ivica se dobijaju u preseku linija iz nedogleda  $N_1$  i  $N_2$ .

Na ovom zadatku je očigledno da perspektiva paralelnih prava nisu međusobno paralelne, već se seku u svome nedogledu.



Sl. 16.16: Perspektiva ravni (kvadrata)  
(Zadatak 16.5)

## 16.4. PERSPEKTIVA (CENTRALNA PROJEKCIJA) TELA

Koristeći se zakonitostima crtanja perspektive tačke, prave (duži) i ravni, na isti način se crta i perspektiva tela.

### 16.4.1. Metode perspektive

Postoji veliki broj metoda za crtanje tela i velikih objekata, što zavisi od njihove veličine, oblika, zadatah parametara i raspoloživog prostora za crtanje, kao što su: metoda prodora, metoda nedogleda i prodora, metoda nedogleda itd.

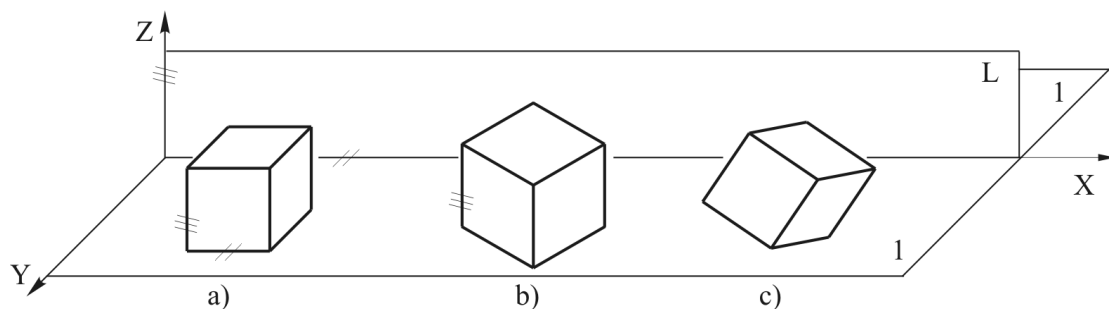
Prema položaju predmeta crtanja u odnosu na koordinatni sistem imamo:

- frontalnu perspektivu,

- perspektivu sa ugla, i
- kosu perspektivu (sl. 16.17).

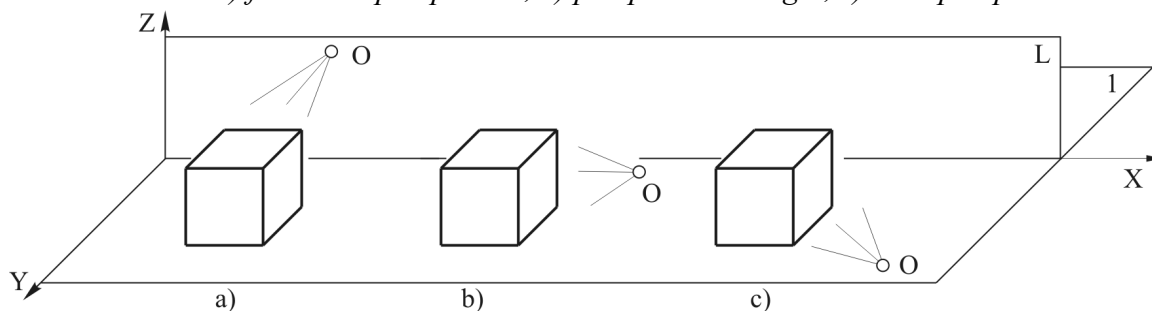
Frontalna perspektiva se dobija kada se predmet nalazi u prostoru za crtanje tako da su mu ivice paralelne sa osama X, Y i Z (sl. 16.17,a). Ako su samo vertikalne ivice predmeta paralelne sa osom Z, a ostale nisu paralelne sa osama X i Y dobija se perspektiva sa ugla (sl. 16.17,b). Ako ivice predmeta nisu paralelne ni sa jednom osom, već predmet proizvoljno stoji u odnosu na prostor za crtanje, dobija se kosa perspektiva (sl. 16.17,c).

Prema visini očne tačke O (visine horizonta) u odnosu na predmet crtanja, perspektiva može biti: ptičija, normalna i žablja (sl. 16.18).



Sl. 16.17: Položaji predmeta za dobijanje frontalne perspektive, perspektive sa ugla i kose perspektive

a) frontalna perspektiva, b) perspektiva sa ugla, c) kosa perspektiva



Sl. 16.18: Položaji očne tačke za dobijanje ptičije, normalne i žablje perspektive  
a) ptičija, b) normalna, c) žablja

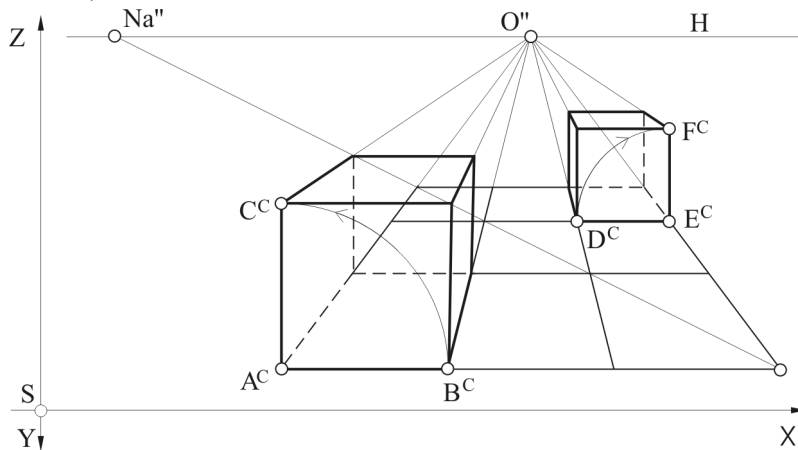
## 16.5. FRONTALNA PERSPEKTIVA

Kod frontalne perspektive nedogled ivica predmeta koje su upravne na likoravan je u očnoj tački O", a perspektiva ivica predmeta koje su paralelne sa osom X, takođe su paralelne sa ovom osom. Očna tačka O može biti u prostoru predmeta ili malo ukoso postavljena, što zavisi od željenog vidnog ugla. Pomeranje očne tačke ne treba da bude veće od  $\frac{1}{4}$  širine predmeta, jer će u protivnom crtež predmeta biti znatno deformisan.

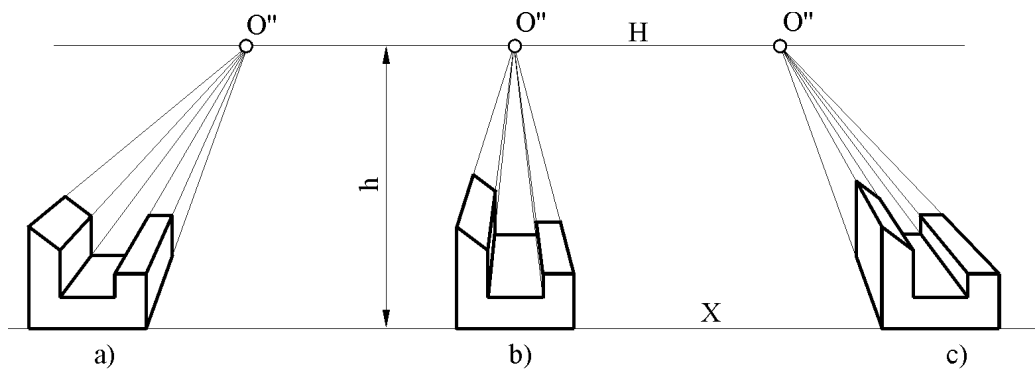
Neka su zadate kocke u poljima kvadrata prema zadatku 16.4 sa sl. 16.15 čije perspektive treba odrediti. Ako se kocka nalazi u prostoru u položaju kao što je dato u zadatku 16.4, tada na isti način dobijamo perspektivu njene donje stranice koja je paralelna sa osnovnom ravni l. Kako su ivice kocke iste, one se na frontalnoj perspektivi isto deformišu, tako dobijamo da je visina ivice kocke jednaka  $A^C C^C = A^C B^C$  ili  $E^C F^C = E^C D^C$  (sl. 16.19). Što je kocka udaljenija od posmatrača ona se na crtežu sve više smanjuje kao i njena visina.

Položaj očne tačke biramo zavisno od toga šta se želi na predmetu jasnije pokazati (šta da bude manje deformisano). Predmet sa sl. 16.20. nacrtan je sa tri različita položaja očne tačke O. Ako je očna tačka sa desne strane od predmeta (sl. 16.20,a) tada se na crtežu ona bolje vidi, dok je leva strana zaklonjena. Ako je očna tačka po sredini predmeta (sl. 16.20,b) tada se samo središnji deo jasno vidi, dok su mu više deformisane (zaklonjene) bočne površine. Kada je

očna tačka sa leve strane od predmeta, na perspektivi je zaklonjena njena desna strana (sl. 16.20,c).



Sl. 16.19. Crtanje kocke na različitim udaljenostima



Sl. 16.20. Različiti položaji očne tačke u odnosu na predmet

### 16.5.1. Metoda prodora

Metoda prodora podrazumeva crtanje perspektive na osnovu dve ortogonalne projekcije bilo na osnovu 1 i 3 ili 1 i 2 ili na osnovu 2 i 3. **Metoda prodora svodi se na to da se odrede drugi prodori projekcijskih zraka kroz svaku tačku tela.** Spajanjem drugih prodora dobija se perspektiva tela. Nedostatak ove metode je što zahteva veći prostor za crtanje. Postupak dobijanja perspektive metodom prodora je najpregledniji ako se koristi prva i treća ortogonalna projekcija, ali zahteva najviše prostora za crtanje.

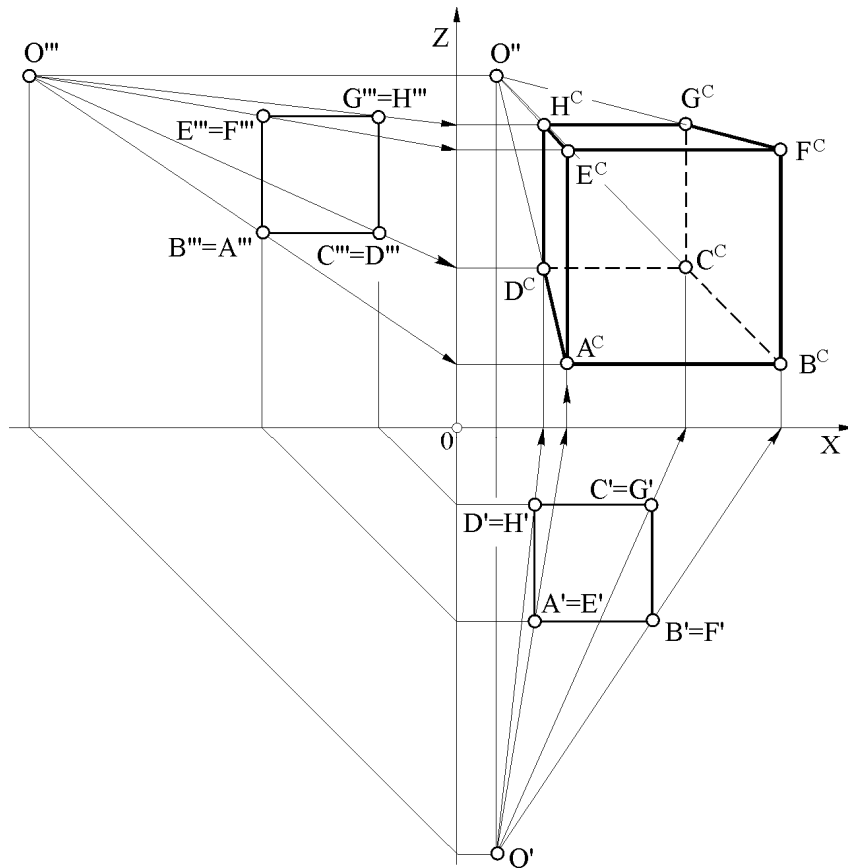
#### Zadatak 16.6.

Određiti perspektivu kocke koja je zadata tačkama  $A(1;2,5;2,5)$ ,  $B(2,5;2,5;2,5)$ ,  $C(2,5;1;2,5)$  i  $D(1;1;2,5)$  metodom prodora. Koordinate očne tačke su  $O(0,5;5,5;4,5)$ .

Na osnovu zadatih koordinata nacrtat se prva i treća ortogonalna projekcija kocke. Kroz očnu tačku  $O'$  povuče se projekcijski zraci kroz prve projekcije rogloveva  $A'$ ,  $B'$ ... do ose  $X$ , zatim iz ovih tačaka vertikalne spona. Iz treće projekcije očne tačke  $O'''$  povuče se projekcijski zraci kroz treće projekcije rogloveva  $A'''$ ,  $B'''$ ... do ose  $Y$  zatim iz ovih tačaka horizontalne spona. U preseku horizontalnih i vertikalnih spona dobijaju se perspektive tačaka  $A^C$ ,  $B^C$  itd. (sl. 16.21).

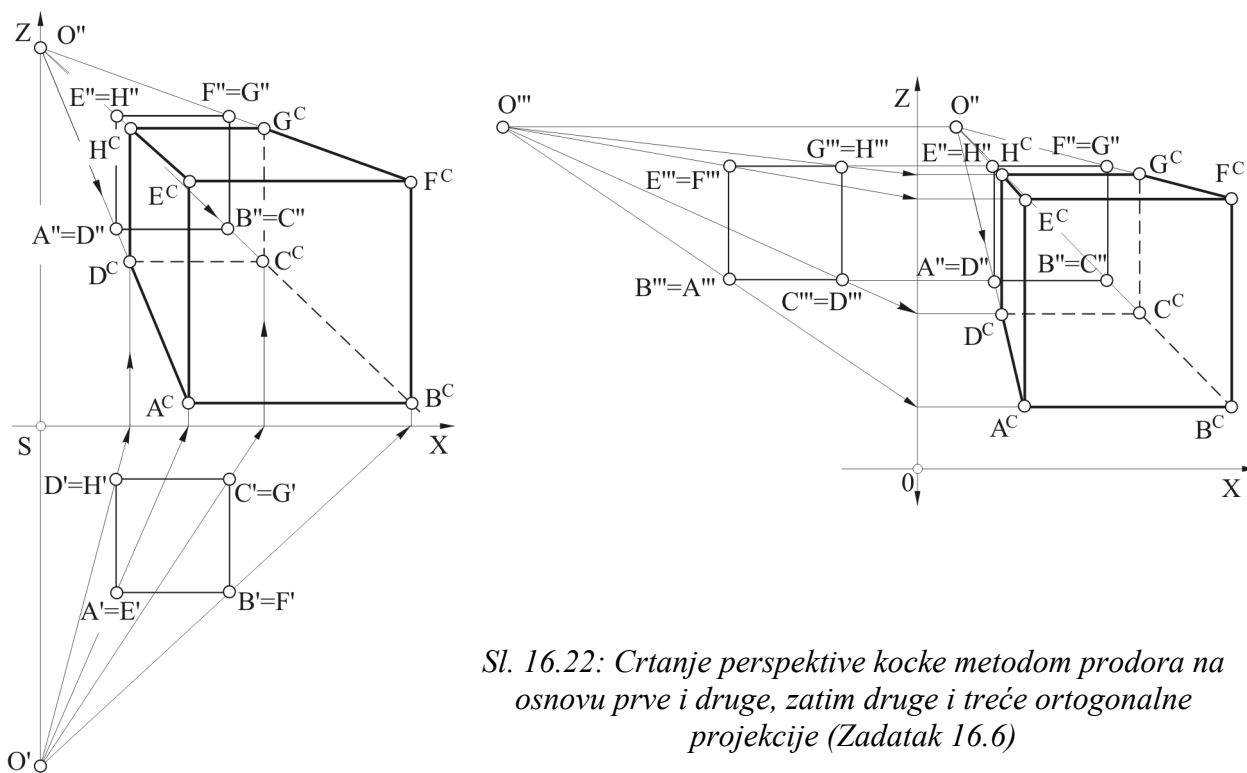
Kocka stoji u prostoru za crtanje tako da su joj ivice paralelne sa osama  $X$ ,  $Y$  i  $Z$ . Stoga ivice kocke koje su upravne na likoravan ( $AD$ ,  $BC$ ,  $EH$  i  $FG$ ) imaju zajednički nedogled u tački  $O''$ , te se perspektive ovih ivica seku u ovoj tački. Ivice kocke koje su paralelne sa likoravni ( $AB$ ,  $DC$ ,  $EF$  i  $HG$ ) imaju nedogled u beskonačnosti, te su njihove perspektive paralelne sa osom  $X$ .

Crtanje perspektive na osnovu prve i druge ortogonalne projekcije prikazano je na sl. 16.22, levo. U preseku spona iz prve i druge ortogonalne projekcije tačka dobija se njihova perspektiva. Spona iz prve projekcije se dobija spajanjem tačaka  $O'A'$  do ose X, zatim iz te tačke vertikalna linija. Spona iz druge projekcije se dobija spajanjem tačaka  $O''A''$ . U preseku ovih spona dobija se perspektiva tačke  $A^C$ . Na isti način se dobijaju perspektive i ostalih tačaka.



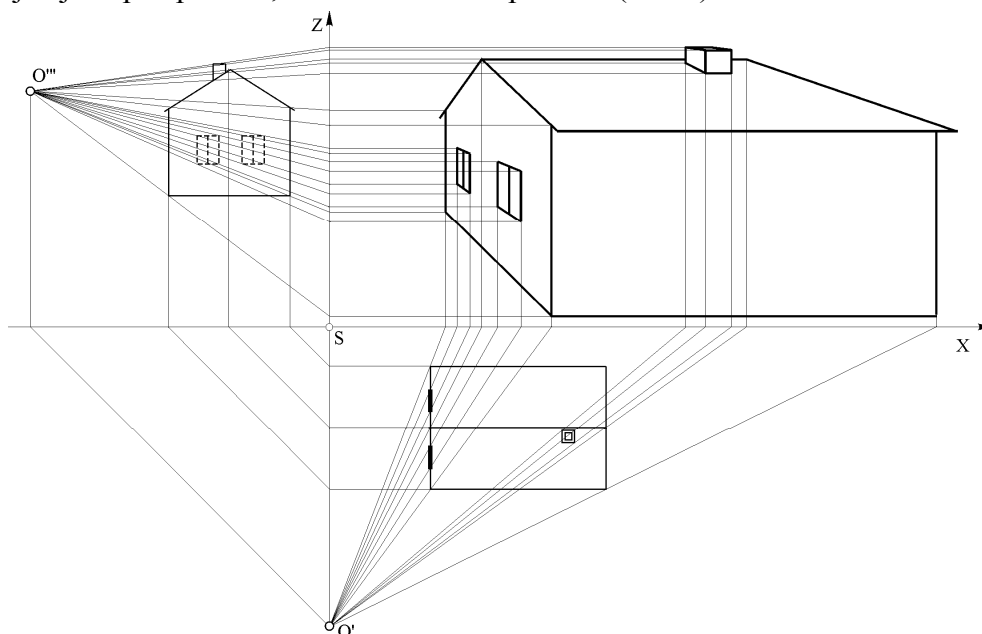
Crtanje perspektive na osnovu druge i treće ortogonalne projekcije najmanje je pregledno (sl. 16,22, desno).

Sl. 16.21: Crtanje perspektive kocke metodom prodora na osnovu prve i treće ortogonalne projekcije (Zadatak 16.6)



Sl. 16.22: Crtanje perspektive kocke metodom prodora na osnovu prve i druge, zatim druge i treće ortogonalne projekcije (Zadatak 16.6)

Na isti način kao i u zadatku 16.6. koristeći prvu u treću ortogonalnu projekciju kuće nacrtana je njena perspektiva, koristeći metodu prodora (16.23).



Sl. 16.23: Crtanje perspektive kuće metodom prodora na osnovu prve i treće ortogonalne projekcije

## 16.6 PERSPEKTIVA SA UGLA

Perspektiva sa ugla se dobija kada predmet u prostoru za crtanje stoji tako da mu ivice nisu paralelne sa osama X i Y, već samo sa osom Z (sl. 16.24). Na ovom primeru je perspektiva određena metodom prodora na osnovu druge i treće ortogonalne projekcije predmeta.

U preseku istoimenih spona iz treće i druge projekcija dobija se perspektiva. Tačka  $A^C$  se dobija u preseku prave kroz tačke  $O''A''$  do ose Z, zatim horizontalne linije i prave kroz tačke  $O'A'$ .

Ivice predmeta koje su paralelne sa osom Z (AB i ostale paralelne ovoj) i u perspektivi su paralelne sa osom Z i imaju zajenički nedogled u beskonačnosti. Ostale ivice predmeta nisu međusobno paralelne, što se vidi iz prve ortogonalne projekcije, te nemaju zajednički nedogled.

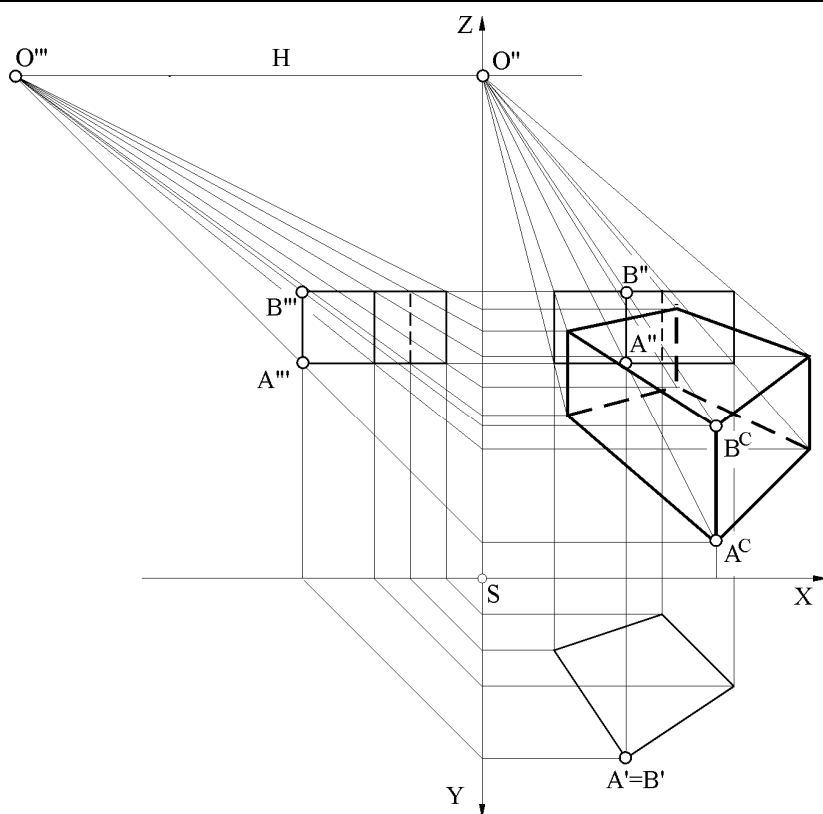
### 16.6.1. Metoda nedogleda i prodora

Ova metoda se sastoji u kombinovanom korišćenju prodora i nedogleda. Metoda nedogleda i prodora se prvenstveno koristi za crtanje perspektive sa ugla, za one predmete čije su ivice međusobno paralelne. Međutim, ova metoda se može koristiti i za druge položaje predmeta u odnosu na prostor za crtanje. Za ovu metodu je potrebno manje prostora za crtanje, nego za metodu prodora.

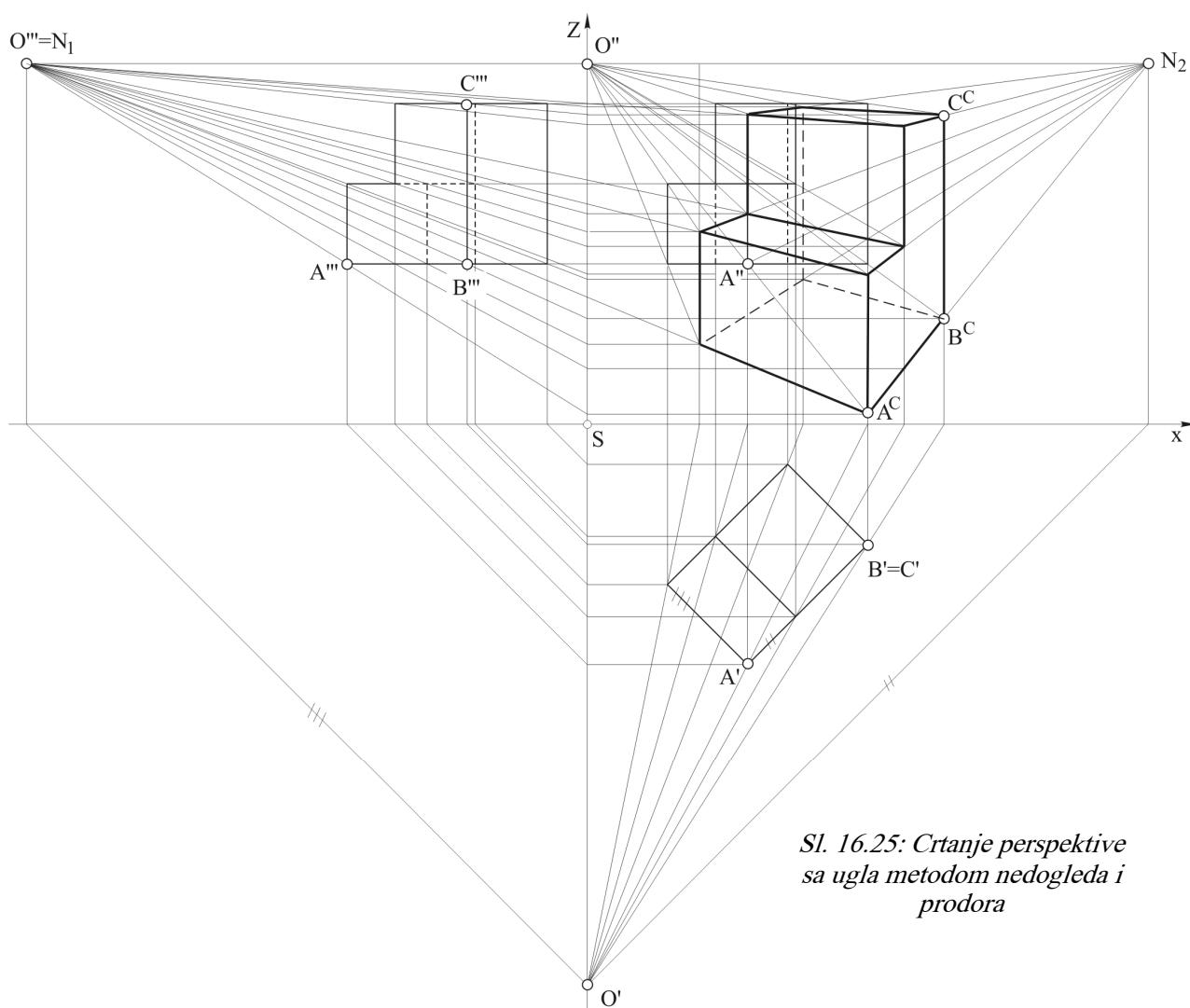
Sam postupak crtanja perspektive na osnovu nedogleda detaljno je objašnjen na zadatku 16.5, sl. 16.16. Takođe, i postupak dobijanja perspektive pomoću prodora detaljno je objašnjen na zadatku 16.6, sl. 16.21 i 16.22.

Neka je zadat predmet sa ortogonalnim projekcijama kao na sl. 16.25. Iz prve projekcije očne tačke  $O'$  povuku se prave paralelne sa prvim projekcijama ivica predmeta. Njihov prodor kroz likoravan daje nedogleda  $N_1$  i  $N_2$ . Metodom prodora odrede se perspektive nekoliko tačaka ( $A^C$ ,  $B^C$ ,  $C^C$ ...). Sve spona međusobno paralelnih ivica predmeta polaze iz nedogleda  $N_1$  i  $N_2$ . U preseku istoimenih spona dobijaju se perspektive ostalih ivica predmeta.





Sl. 16.24: Crtanje perspektive sa ugla metodom prodora na osnovu druge i treće ortogonalne projekcije



Sl. 16.25: Crtanje perspektive sa ugla metodom nedogleda i prodora

**Zadatak 16.7.**

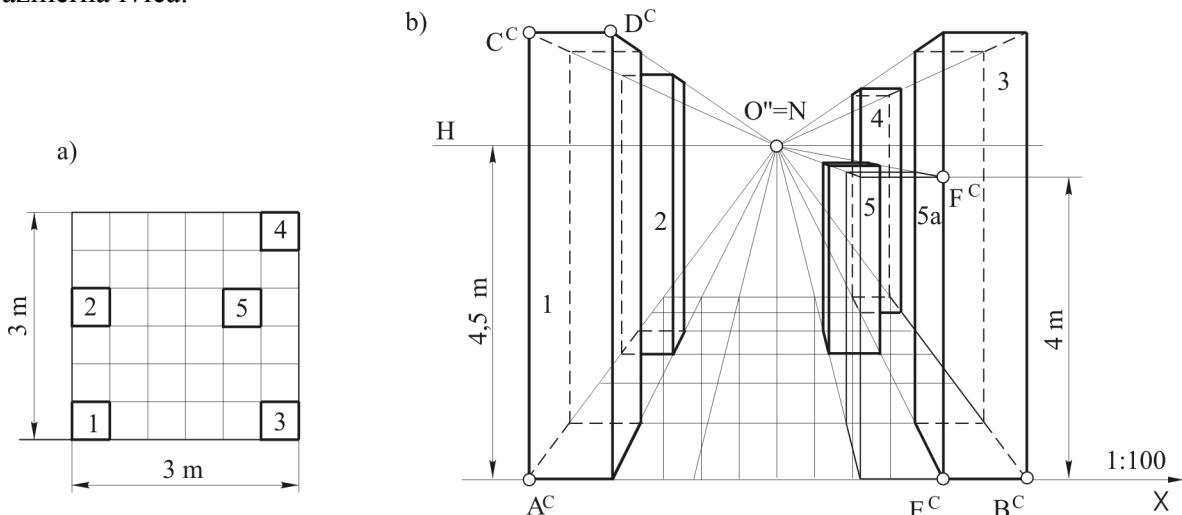
Nacrtati perspektivu stubova raspoređenih kao na ortogonalnoj projekciji, sl. 16.26,a. Visina stuba broj 5 je 4 m, a ostalih 6 m. Očna tačka je na sredini prostora. Visina horizonta je  $h=4,5$  m, a distancija  $d=6,5$  m.

Najpogodnije je da se usvoji frontalna perspektiva. Stubove je najbolje postaviti u prostoru za crtanje tako da 1 i 3 dodiruju likoravan i da njihove dve stranice budu sa njome paralelne. Koordinatni sistem je u prednjem levom roglju stuba 1.

Glavna tačka  $O''$  je ujedno i nedogled ( $O''=N$ ) ivica stubova koje su upravne na likoravan, te se njihove perspektive seku u ovom nedogledu. One ivice stubova koje su paralelne sa likoravni biće u perspektivi paralelne sa osom  $X$ . Usvaja se razmera za crtanje 1:100.

Prema zadatoj distanciji i visini horizonta nacrtat se perspektiva kvadrata sa zadatom mrežom kao u zadatku 16.4 i prema sl. 16.15. Kako je visina stuba broj 1, 6 m (u razmeri 1:100 to je 6 cm), a pošto prednja stranica leži u likoravni vidi se u pravoj veličini. Povuku se spone iz tačaka  $C^C$  i  $D^C$  do nedogleda  $N$  i na njima su i visine stuba broj 2. Isto se tako dobija perspektiva stubova 3 i 4 (sl. 16.26,b).

Da bi se nacrtala perspektiva stuba broj 5 potrebno je prethodno nacrtati pomoćni stub 5a čija stranica leži na likoravni. Ivica ovog pomoćnog stuba  $E^C F^C$  je 4 m. Spone od ovog stuba do nedogleda  $N$  su ujedno i spone za stub broj 5. Ivica pomoćnog stuba  $E^C F^C$  se naziva razmerna ivica.

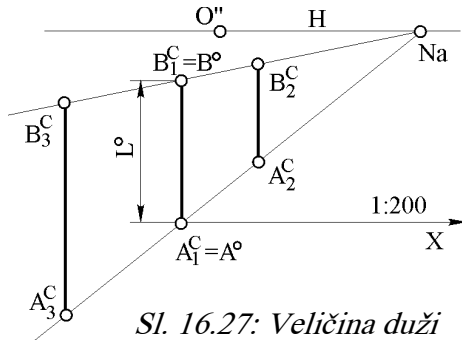


Sl. 16.26: Primena metode nedogleda za crtanje frontalne perspektive (Zadatak 16.7.)

**16.7 RAZMERA I PRENOŠENJE DUŽI**

Kako delovi predmeta na crtežu u perspektivi izgledaju različito deformisani, ne može se govoriti o jedinstvenoj razmeri crtanja za sve njene duži na crtežu. Samo za one duži na crtežu koje se vide u pravoj veličini važi jedinstvena razmera koja se piše na osi  $X$  (1:200).

Sve ono što leži na likoravni vidi se u perspektivi u pravoj veličini. Duž  $AB$  vidi se u



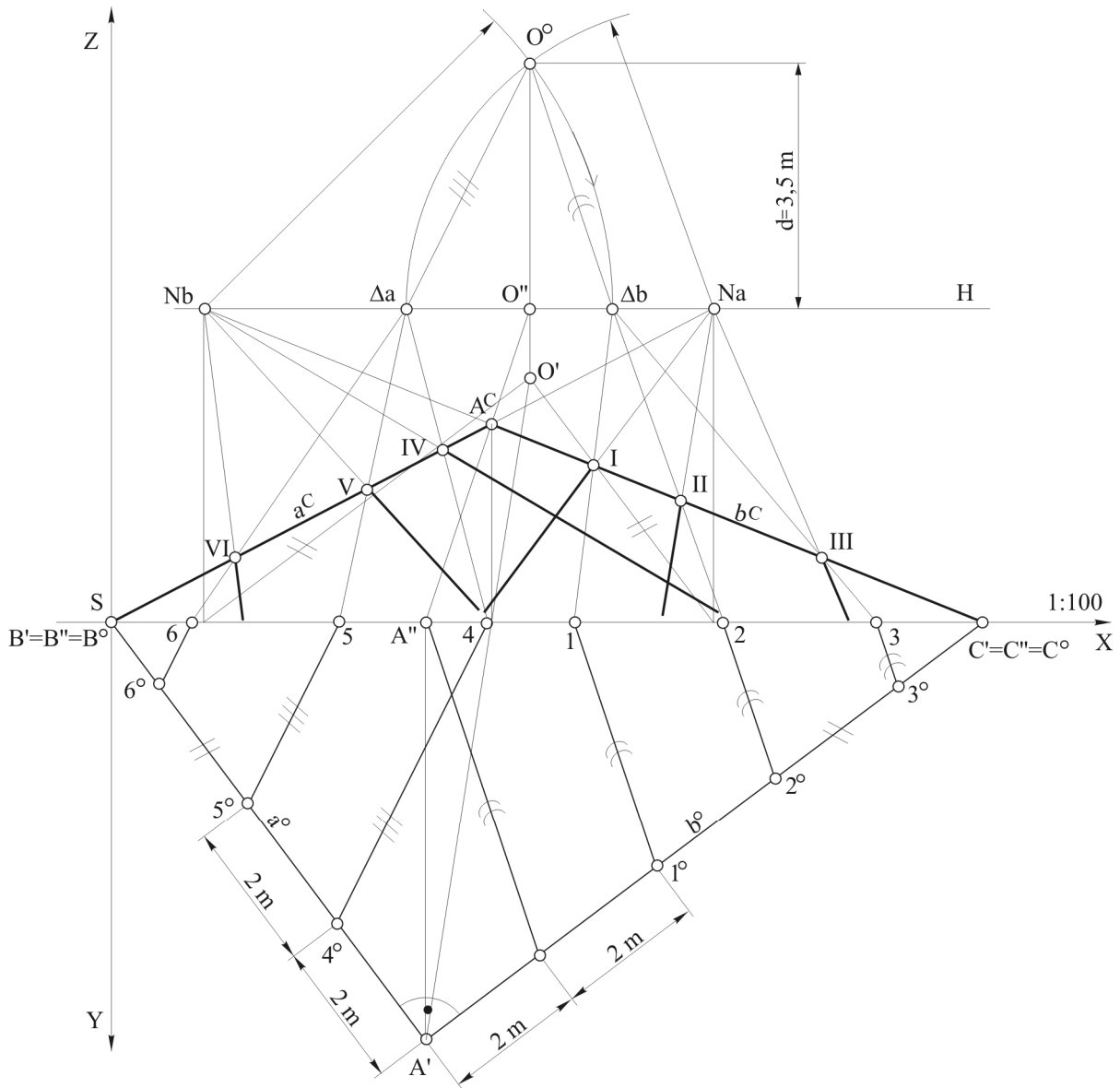
Sl. 16.27: Veličina duži u perspektivi

pravoj veličini u položaju  $A_1^C B_1^C$  jer leži na likoravni (jer je tačka  $A_1^C$  na osi  $X$ ), dok je u položaju 2 kraća, a u položaju 3 duža od svoje prirodne veličine (sl. 16.27). Ako je dužina  $L^0 = 20$  mm na crtežu, u razmeri 1:200 ova duž je u prirodi:

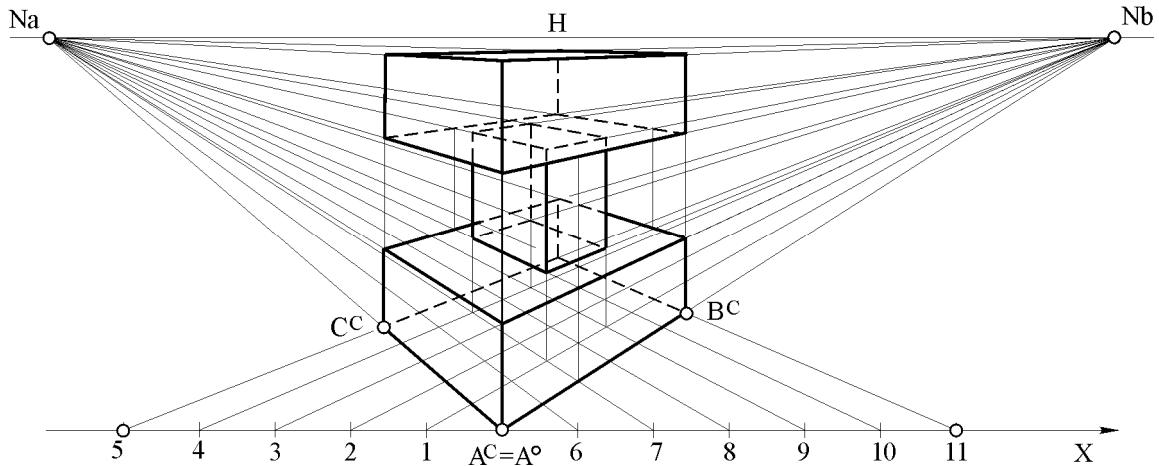
$$L = L^0 \cdot U_L = 20 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{5 \text{ mm}} = 4 \text{ m} .$$



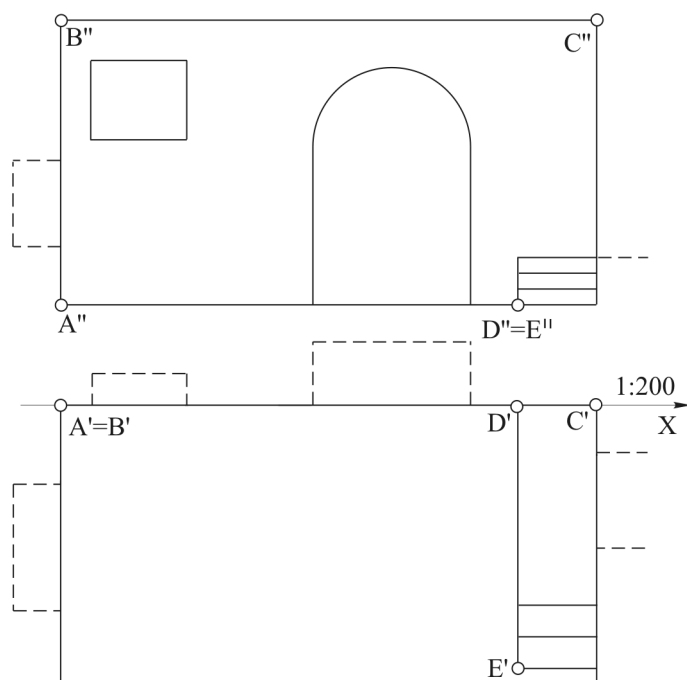
Prava veličina vertikalne ivice predmeta je samo ona iz tačke A, jer ova ivica leži na likoravni.



Sl. 16.29: Određivanje perspektive mreže na osnovu razmernog nedogleda (Zadataka 16.8)



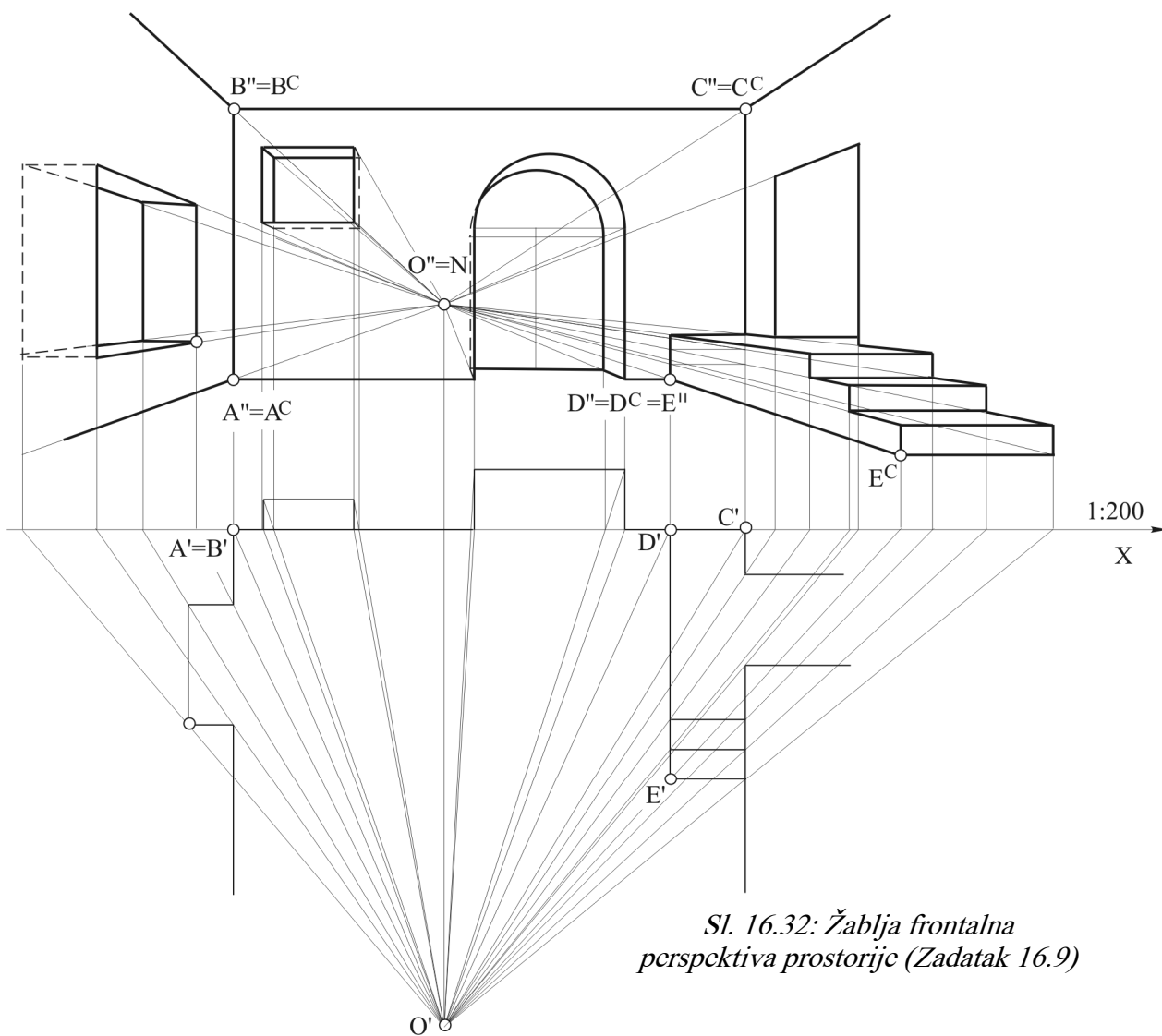
Sl. 16.30: Odsecci 1, 2, 3... su proporcionalni odgovarajućim dužinama ivica predmeta

**Zadatak 16.9.**

Za deo prostorije koja je zadata prvom i drugom ortogonalnom projekcijom nacrtati perspektivu (sl. 16.31).

Na osnovu zadatih ortogonalnih projekcija, može se zaključiti da vertikalni zid A, B C i D leži u likoravni, jer su prve projekcije ovih tačaka na osi X. Perspektive ovih tačaka poklapaju sa njihovim drugim projekcijama i to je ujedno i njihova prava veličina (sl. 16.32). Prave veličine duži DE... i ostalih koje su sa njome paralelne vide se u prvoj ortogonalnoj projekciji. Kako je data razmera 1:200 mogu se izračunati prave vrednosti svih dimenzija zadate prostorije.

Sl. 16.31: Postavka zadatka 16.9



Sl. 16.32: Žablja frontalna perspektiva prostorije (Zadatak 16.9)

Usvojena je frontalna žablja perspektiva da bi se video i plafon. Očna tačka O pomerena je malo u levu stranu od sredine zadate projekcije, kako bi se bolje videle stepenice.

Metodom prodora na osnovu prve i druge ortogonalne projekcije nacrtana je perspektiva (sl. 16.32). Sve ivice prostorije upravne na likoravan imaju nedogled u  $O''=N$ . Ivice paralelne sa likoravni (koje su paralelne sa osom X) imaju perspektive paralelne sa osom X.

Iz tačke  $O'$  povuku se linije kroz zadate tačke u prvoj ortogonalnoj projekciji do ose X, a odatle vertikalne. Iz tačke  $O''$  povuku se linije kroz druge ortogonalne projekcije i u preseku sa prethodnim dobijaju se tačke perspektive.

Na primer, perspektiva  $E^C$  tačke E, dobija se na sledeći način. Povuču se prva projekcija projekcijskog zraka OE, tj.  $O'E'$  do ose X, a odatle vertikalna spona. Druga projekcija projekcijskog zraka je prava kroz  $O''E''$ . U preseku druge projekcije ovog projekcijskog zraka ( $O''E''$ ) i vertikalne spone dobija se perspektiva  $E^C$  tačke E. Na isti način odrede se perspektive svih ostalih tačaka, čijim spajanjem se dobija perspektiva čitave prostorije.

### Zadatak 16.10.

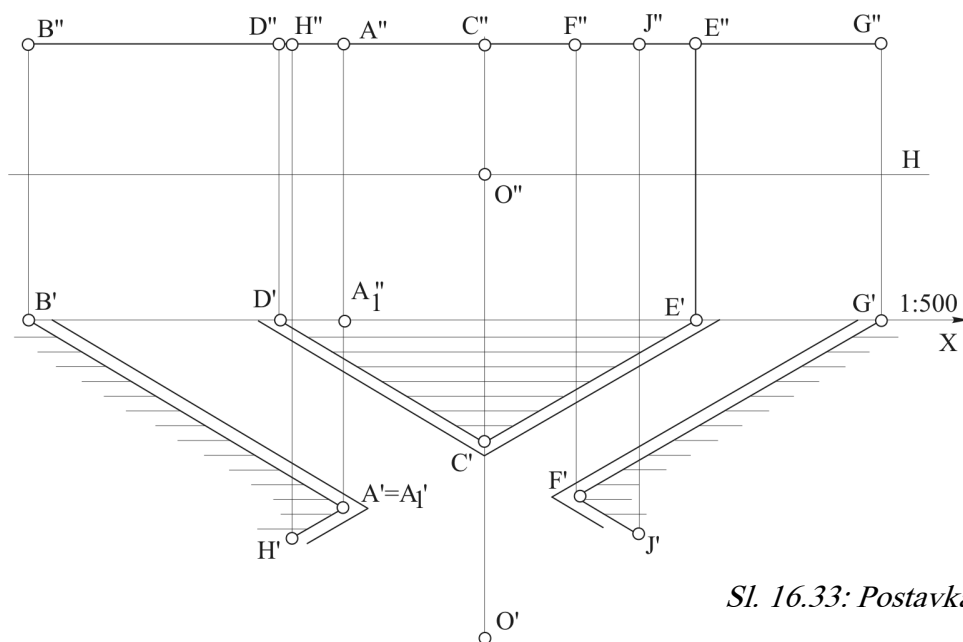
Nacrtati frontalnu perspektivu raskršća prema postavci zadatka sa sl. 16.33. Zgrade su iste visine. Nacrtati i trotoare.

Prema zadatom položaju očne tačke O, treba nacrtati frontalnu perspektivu. Najjednostavnije je koristiti metodu nedogleda u kombinaciji sa metodom prodora.

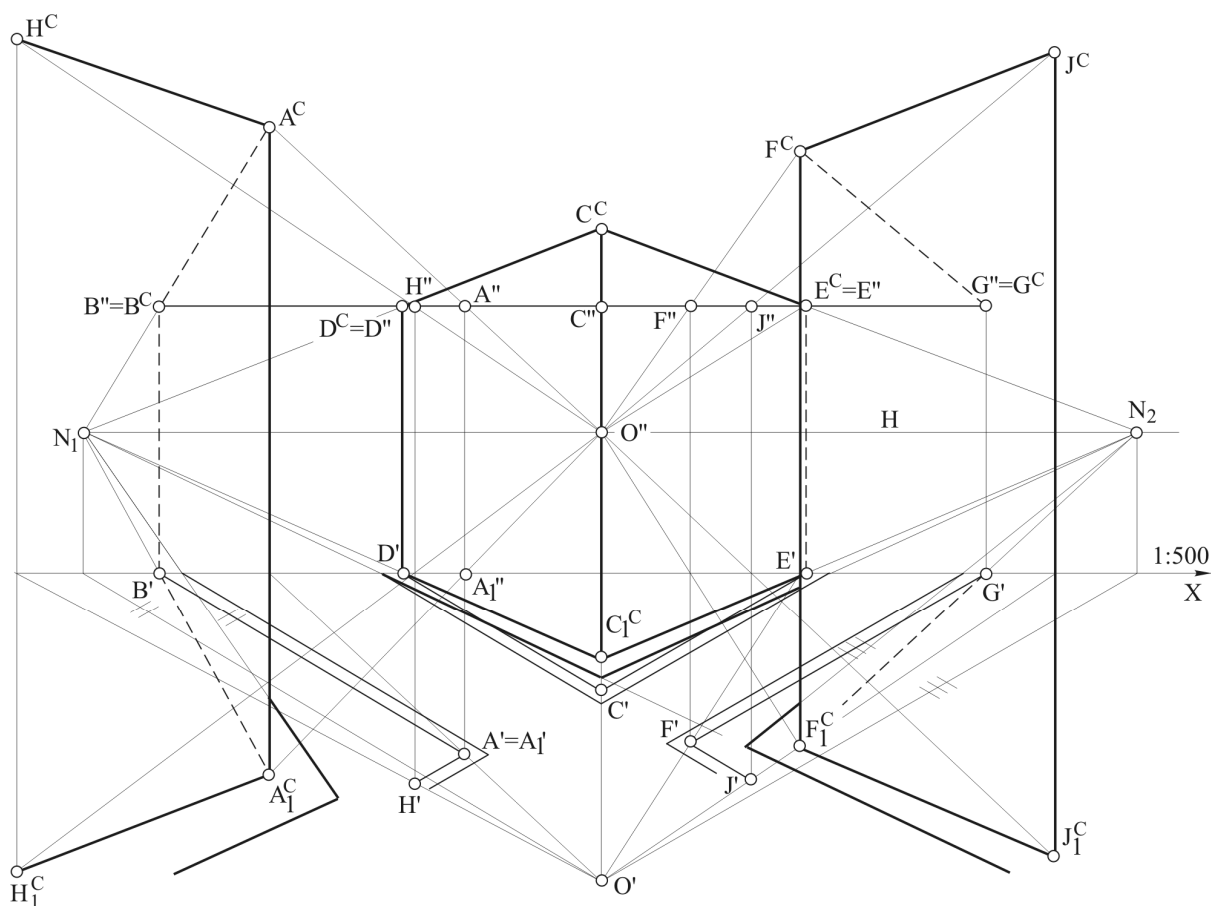
Kroz očnu tačku O povuču se pomoćna prava paralelna sa ivicama zgrade AB, CD... Odredi se drugi prodor ove pomoćne prave (prodor kroz likoravan), što predstavlja nedogled  $N_1$ . Iz  $O'$  nacrtu se pomoćna prava paralelna sa prvim projekcijama ivica zgrade  $A'B'$ ,  $C'D'$ ... do ose X, zatim vertikalna spona do horizonta H kako bi se dobio nedogled  $N_1$ . Na isti način dobija se nedogled  $N_2$  međusobno paralelnih ivica zgrade CE, FG...

Perspektive tačaka B, D, E i G poklapaju se sa drugim projekcijama, jer ivice zgrada iz ovih tačaka leže u likoravni. Ostale tačke su određene koristeći druge prodore projekcijskih zraka kroz očnu tačku O (sl. 16.34).

Na primer, perspektiva  $A^C$  tačke A, određena je na sledeći način. Nacrtu se prva projekcija projekcijskog zraka ( $O'A'$ ) do ose X, a odatle vertikalna linija. U preseku te vertikalne linije i druge projekcije projekcijskog zraka ( $O''A''$ ) dobija se drugi prodor, odnosno perspektiva  $A^C$  tačke A. Na isti način određuje se perspektiva tačke  $A_1$  koja se nalazi ispod tačke A na trotoaru. Perspektive ostalih tačaka određene su pomoću nedogleda da bi se smanjio broj pomoćnih linija.



Sl. 16.33: Postavka zadatka 16.10



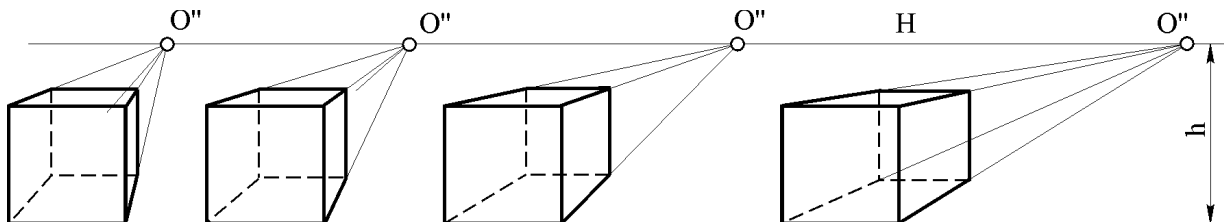
Sl. 16.34: Perspektiva raskršća (Zadatak 16.10)

### 16.8. IZBOR METODE CRTANJA, POLOŽAJA PREDMETA I OČNE TAČKE

Izbor metode crtanja, položaja predmeta pri crtanju, visine horizonta, distancije i vidnog ugla zavisi od toga šta crtamo, za koje potrebe je crtež namenjen i od toga šta želimo posebno da se vidi i na crtežu istakne. Za to je potrebno iskustvo koje se vremenom stiče.

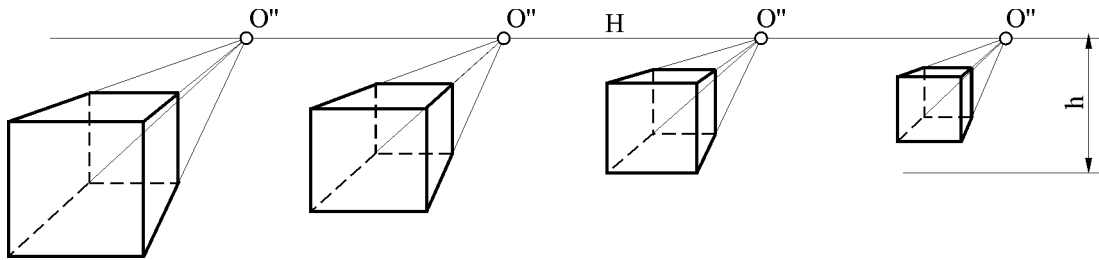
Položaj očne tačke treba da bude onaj odakle će se predmet najčešće posmatrati. Pri crtanju frontalne perspektive, pomeranje očne tačke na jednu ili drugu stranu, ne treba da bude veće od  $\frac{1}{4}$  širine predmeta. Distancija treba da bude takva da rastojanje između očne tačke i predmeta ne bude veće od trostruke veličine predmeta.

Frontalna perspektiva kocke istih dimenzija, sa istom visinom horizonta  $h$  i istom distancijom  $d$ , a različitim položajem očne tačke u odnosu na kocku, prikazana je na sl. 16.35. Ako je očna tačka unutar ili blizu kocke, bočne strane će biti maksimalno deformisane, odnosno biće zaklonjene (slika levo). Kako se očna tačka udaljava od kocke, tako će se više videti bočne strane kocke, do te mere da će biti veće nego što jesu u prirodi (slika desno). Prednja strana kocke ostala je istih dimenzija.



Sl. 16.35. Frontalna perspektiva sa promenom položaja očne tačke, a sa istom distancijom i istom visinom horizonta

Frontalna perspektiva kocke istih dimenzija, istog položaja očne tačke, iste visine horizonta a različite distancije prikazana je na sl. 16.36. Što je manja distancija, perspektiva predmeta će biti veća i obrnuto. Pri promeni distancije bočne površine predmeta ostaju srazmerno deformisane.

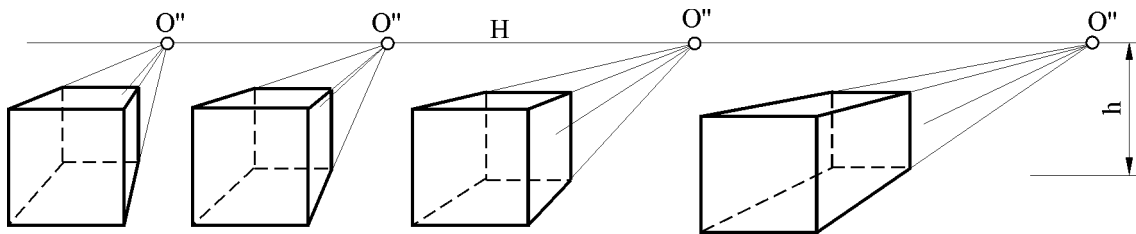


Sl. 16.36: Frontalna perspektiva sa promenom distancije, a sa istim položajem očne tačke i sa istom visinom horizonta

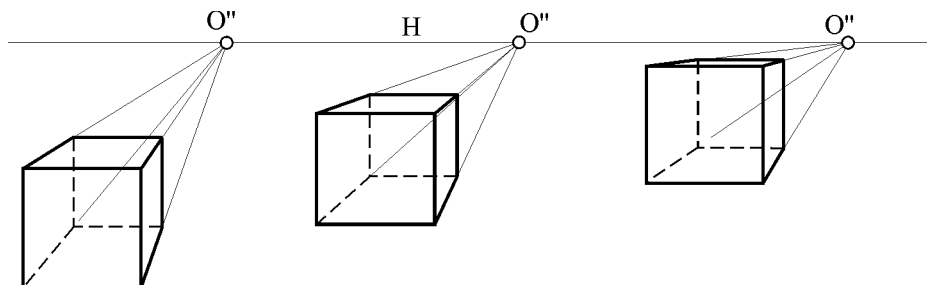
Frontalna perspektiva kocke istih dimenzija, istog položaja očne tačke, iste visine horizonta, iste distancije a različitih vidnih uglova prikazana je na sl. 16.37. Najmanji vidni ugao je na slici levo, a najveći na slici desno ( $76^\circ$ ). Kada je vidni ugao veći od  $60^\circ$  deformacije gornjih i bočnih površina predmeta na perspektivi su izražene i predmet na crtežu deluje neprirodno. Prednja površina predmeta ostaje isto deformisana.

Frontalna perspektiva kocke istih dimenzija, istog položaja očne tačke, iste distancije, istog vidnog ugla, a različitih visina horozonta prikazana je na sl. 16.38. Sa povećanjem visine horizonta gornje površine predmeta se manje deformišu, te se jasnije vide i obrnuto. Prednja strana kocke ostala je istih dimenzija.

Sa povećanjem visine horizonta, potrebno je povećavati vidni ugao, da bi se predmet u celosti na crtežu video.



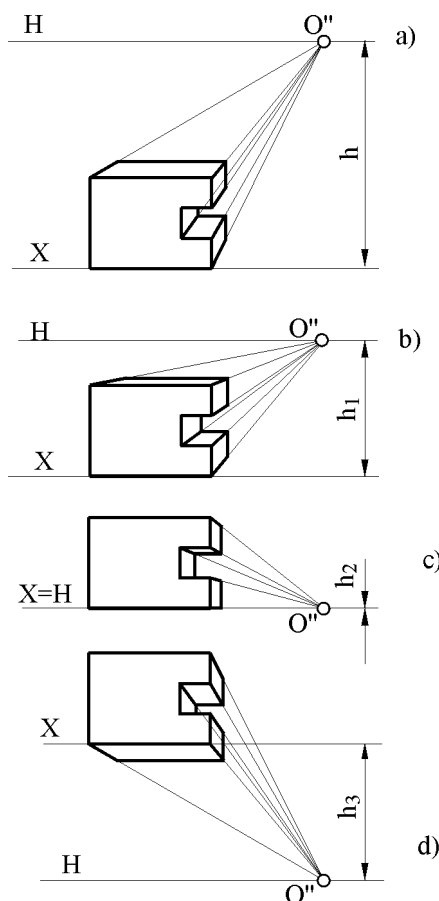
Sl. 16.37: Frontalna perspektiva sa promenom vidnog ugla, a sa istim položajem očne tačke i sa istom visinom horizonta



Sl. 16.38: Frontalna perspektiva sa promenom visine horizonta  $h$ , a sa istim položajem očne tačke, istom distancijom i istim vidnim uglom



Pri promeni visine horizonta, a sa istim ostalim parametrima (isti predmet, isti položaj očne tačke, ista distancija i isti vidni ugao) imamo različite frontalne perspektive. Što je veća visina horizonta manje je deformisana gornja strana predmeta (sl. 16.39,a), što nazivamo ptičijom perspektivom. Sa smanjenjem visine horizonta gornja površina predmeta se sve manje vidi. Kada je visina horizonta nula ( $h_2 = 0$ ) gornja površina se uopšte ne vidi (sl. 16.39,c). Ako je visina horizonta negativnog predznaka ( $h_3$ ) vidi se donja, a ne vidi gornja



površina predmeta, te se dobija žablja perspektiva (sl. 16.39,d).

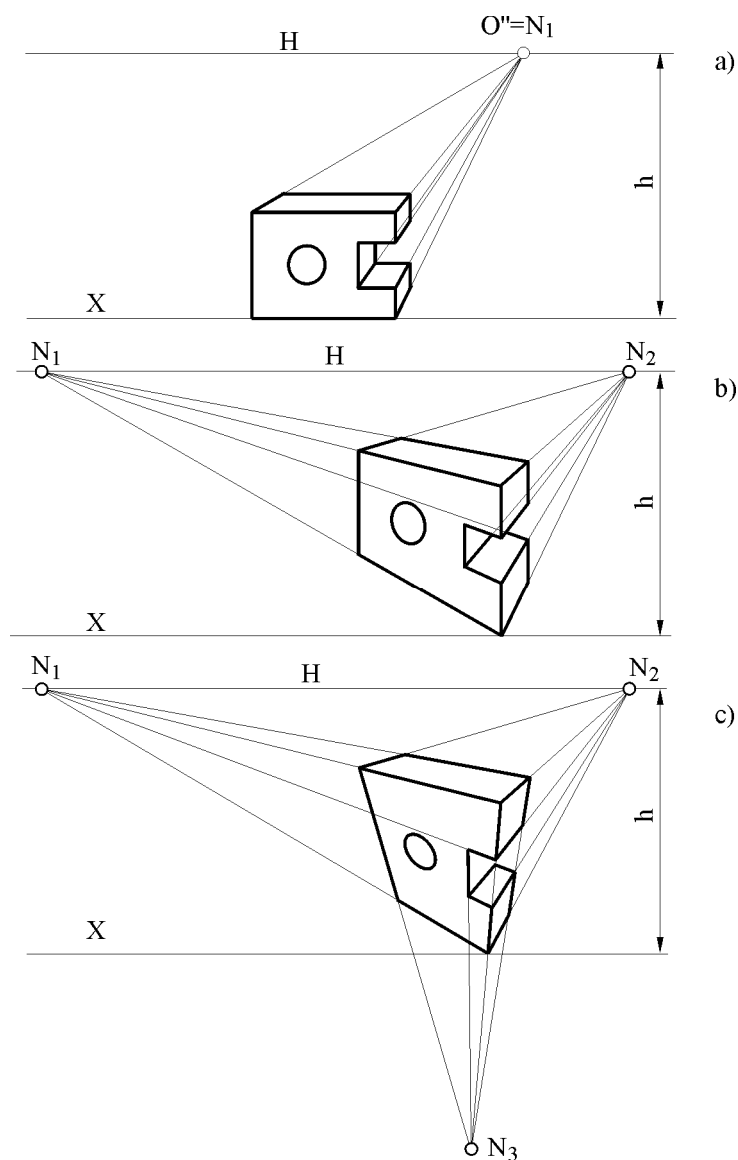
Pri promeni položaja predmeta u odnosu na prostor za crtanje a sa istim svim ostalim parametrima dobijamo frontalnu perspektivu, perspektivu sa ugla i kosu perspektivu (sl. 16.40).

Kada je predmet postavljen tako da su mu ivice paralelne sa svim osama X, Y i Z dobija se frontalna perspektiva (sl. 16.40,a). Pri tome, sve one površine predmeta koje su paralelne sa likoravni zadržavaju svoj nedeformisani oblik, kružnica je i dalje u perspektivi kružnica itd. Perspektiva onih ivica predmeta koje su upravne na likoravan seku se u očnoj tački, a one ivice predmeta koje su paralelne sa likoravni ostaju u perspektivi paralelne sa osom X.

Sl. 16.39: Frontalna perspektiva sa različitim visinama horizonta

Ako se predmet u odnosu na prostor za crtanje postavi tako da su mu ivice predmeta paralelne sa osom Z, a ostale nisu paralelne sa osama X i Y, ali mu strana leži na horizontalnoj osnovnoj ravni l ili su paralelne sa njome, dobijamo perspektivu sa ugla (sl. 16.40,b). One ivice predmeta koje su paralelne sa osom Z, u perspektivu su i dalje paralelne sa osom Z, a ostale se seku u nedogledima  $N_1$  ili  $N_2$ . Na perspektivi sa ugla se sve površine predmeta podjednako deformišu.

Ako se predmet proizvoljno postavi u prostor za crtanje tako da mi ni jedna ivica nije paralelna sa osama X, Y i Z dobija se kosa perspektiva. Ivice predmeta na perspektivi seku se u tri nedogleda  $N_1$ ,  $N_2$  ili  $N_3$  (sl. 16.40,c). Na kosoj perspektivi sve površine predmeta se veoma deformišu, te je pogodna samo za velike objekte, zgrade i slično.



Sl. 16.40: Frontalna perspektiva, perspektiva sa ugla i kosa perspektiva pri istom položaju očne tačke i istoj visini horizonta

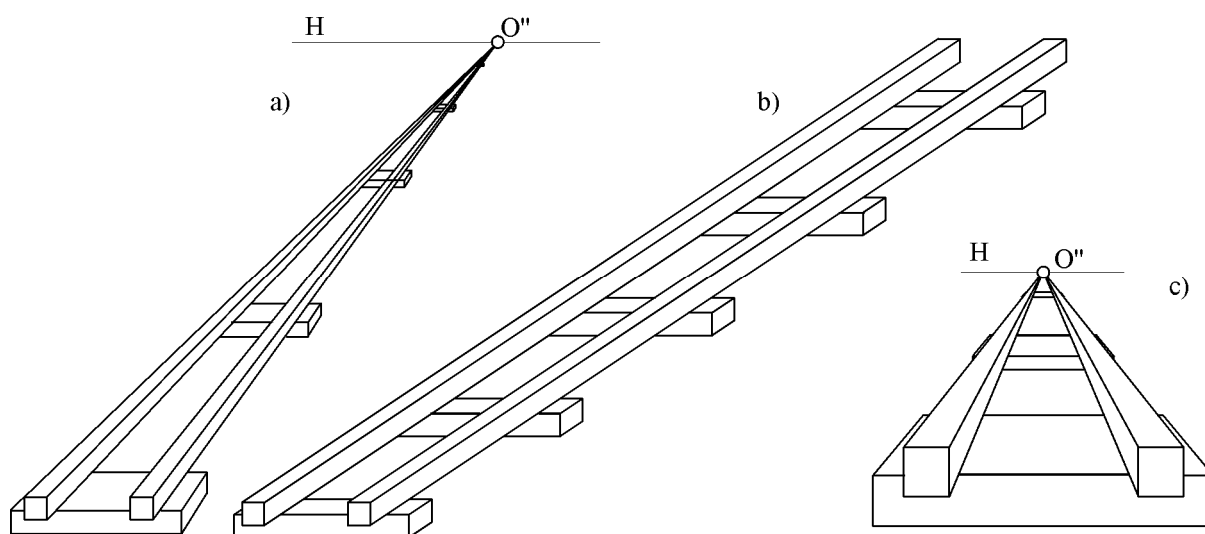
### 16.9. PREDNOSTI I NEDOSTACI PERSPEKTIVE

Na osnovu napred iznetog može se zaključiti da je perspektiva pogodna za crtanje velikih prostora i objekata, kao što su polja, putevi, parkovi, ulice, zgrade i slično.

Perspektiva predmeta ima prednosti i nedostataka u odnosu na druge vrste crteža. Osnovna prednost perspektive je u tome što se dobija crtež približno onakav kako taj predmet vidi naše oko. Pored toga perspektiva je jasna i razumljiva svim korisnicima pa i laicima.

Međutim, na perspektivi su značajno deformisani delovi predmeta. Paralelne ivice predmeta nisu na perspektivi međusobno paralelne, već se seku u nedogledu. Na perspektivi se ne vidi prava veličina predmeta, samo oni njegovi delovi koji leže na likoravni. Na perspektivi se ne mogu prikazati unutrašnji nevidljivi detalji predmeta, te nije pogodna za crtanje mašinskih delova.

Poređenja radi na sl. 16.41 dat je crtež dela pruge u frontalnoj perspektivi, kada je očna tačka sa strane (sl. 16.41,a) ili po sredini pruge (sl. 16.41,c) i u aksonometriji (sl. 16.41,b). Pruga na ctrežu u aksonometriji (sl. 16.41,b) deluju neprirodno, ni blizu kako je vidi naše oko.

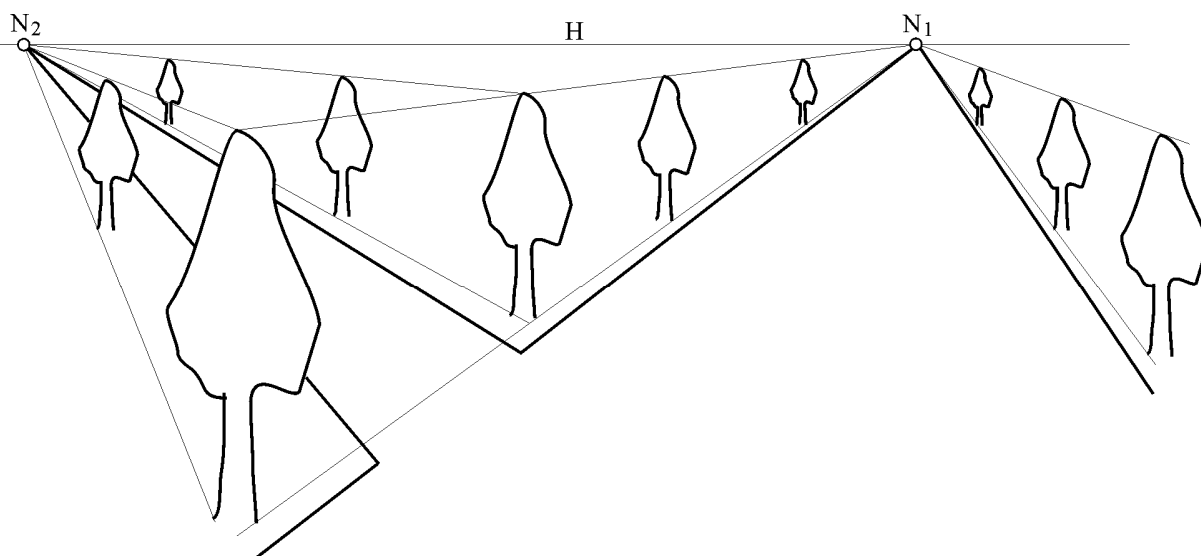


Sl. 16 41: Izgled pruge u perspektivi i kosoj projekciji

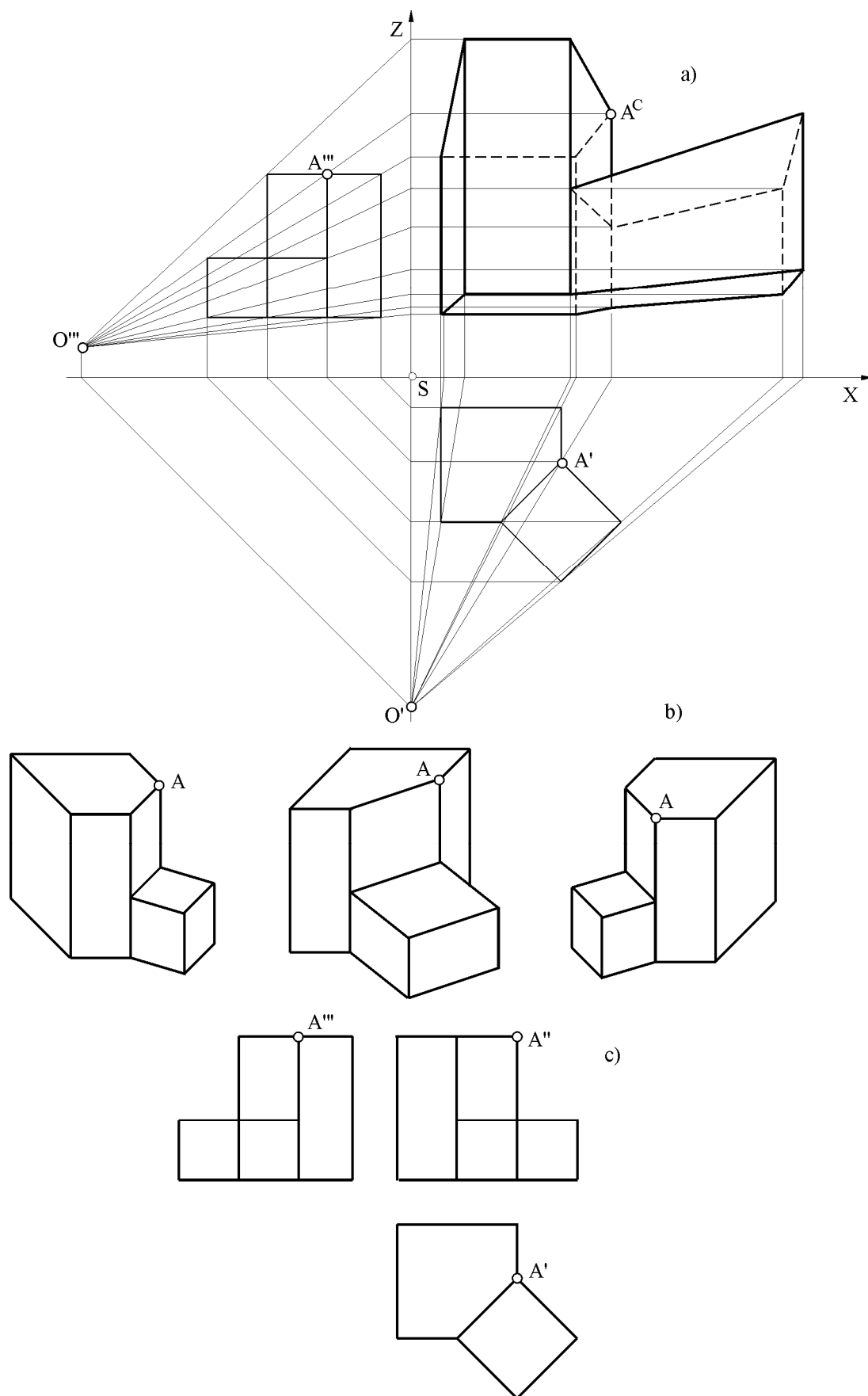
Pri crtanju velikih pejzažnih prostora, puteva, drvoreda i sl. perspektiva je najpovoljnija metoda crtanja za širok krug korisnika (sl. 16.42).

Na sl. 16.43. za isti predmet nacrtana je perspektiva (sl. 16.43,a), kosa projekcija za tri različita položaja predmeta (sl. 16.43,b) i ortogonalni crtež (sl. 16.43,c). Predmet na perspektivi sa odabranim parametrima crtanja (položajem očne tačke i položajem predmeta u odnosu na likoravan) deluje nejasno. Kako izgleda predmet daleko je jasnije sa kose projekcije, međutim i dalje nisu definisane i jasno prikazane zaklonjene strane predmeta.

Jedino je na ortogonalnom crtežu (sl. 16.43,c) precizno i jednoznačno definisan svaki detalj predmeta kao i njegova prava veličina, bez deformacija. Međutim, ortogonalni crtež nije jasan širokom krugu korisnika, već samo stručnim licima.



Sl. 16.42: Približna perspektiva drvoreda

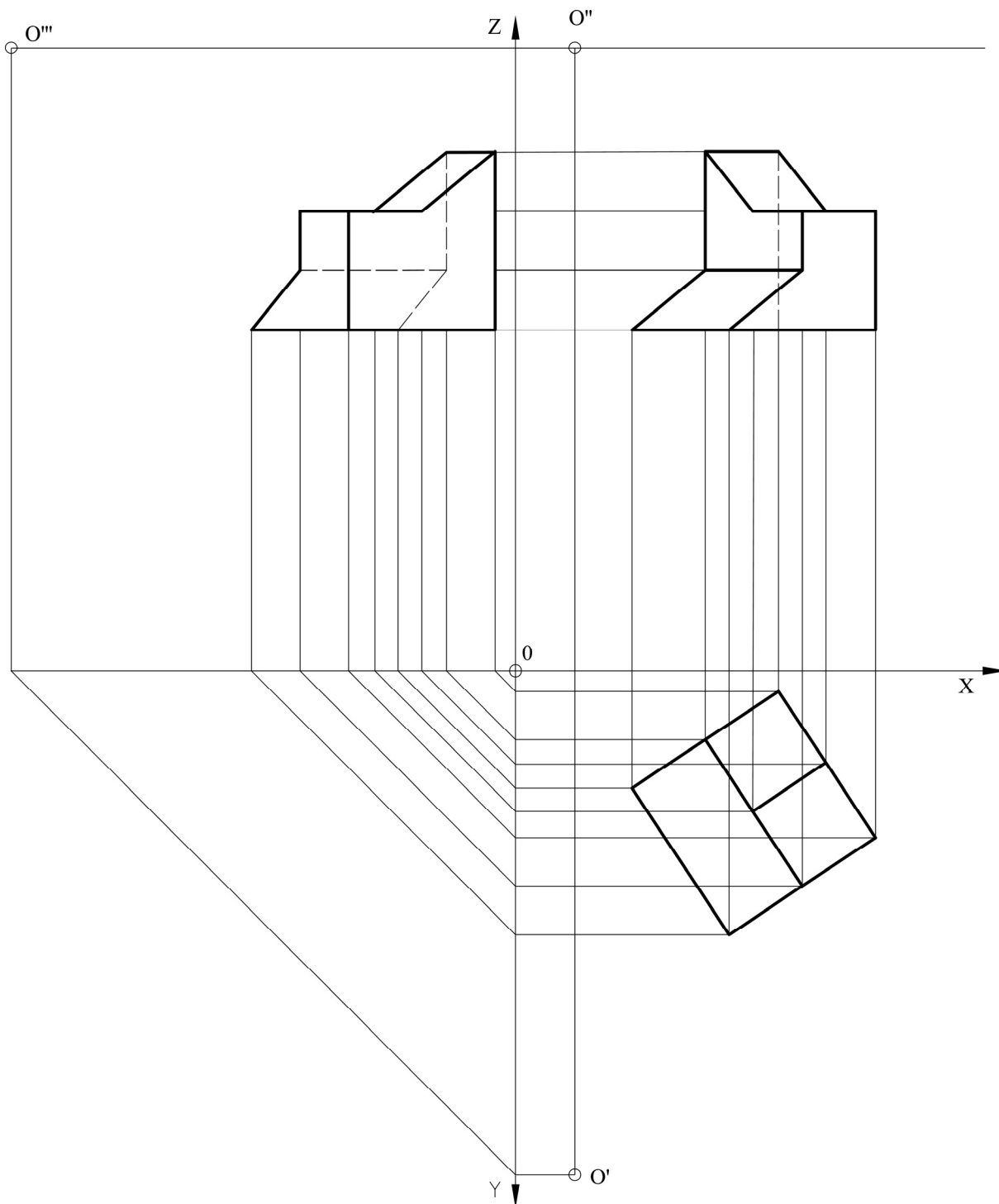


Sl. 16 43: Predmet nacrtan u perspektivi, kosoj projekciji i ortogonalnim projekcijama

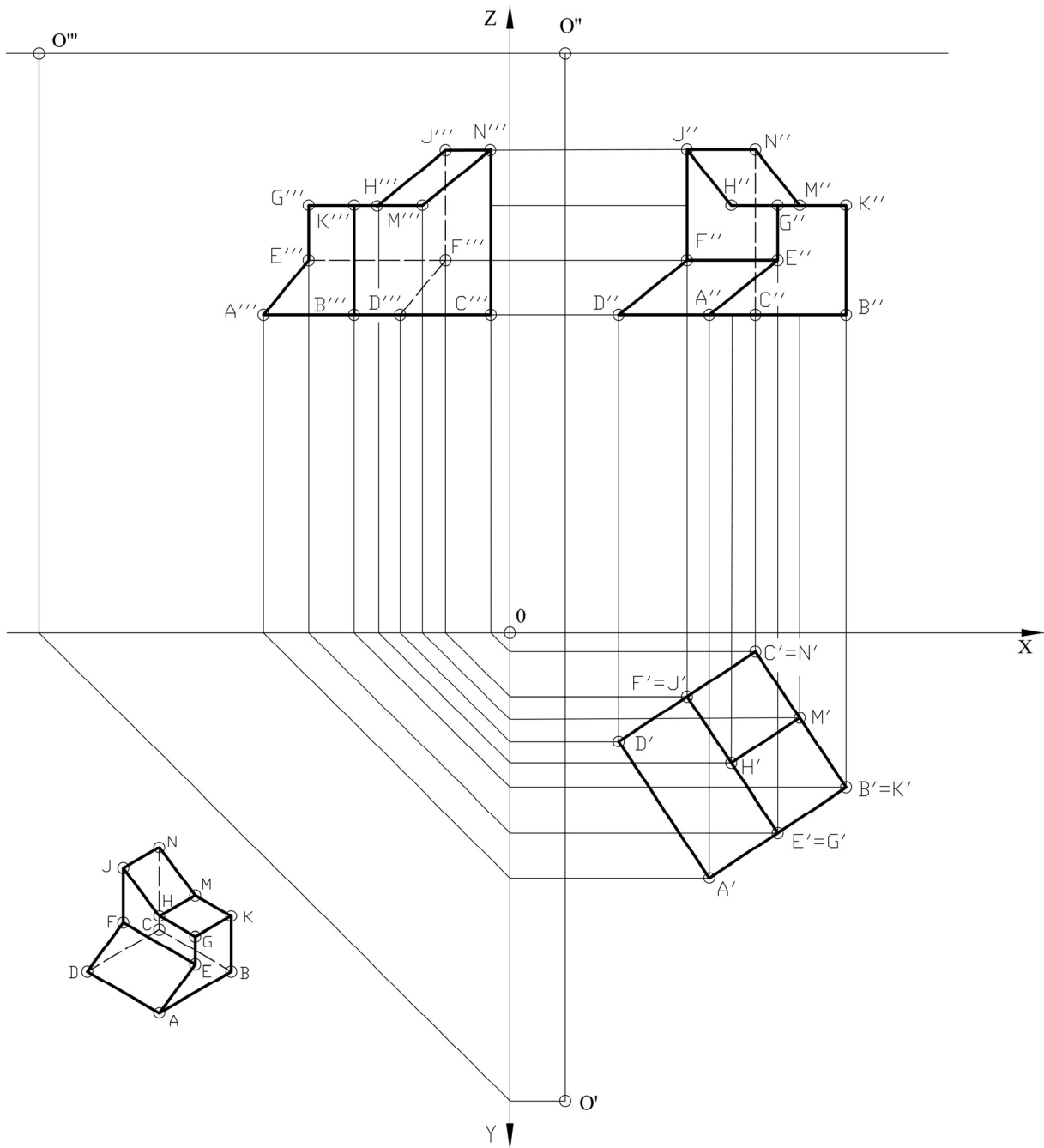
**Zadatak 16.11.**

Na osnovu ortogonalnih pogleda predmeta nacrtati perspektivu (centralnu projekciju) ako je očna tačka  $O(4;34;42)$ . Koordinate očne tačke su u m (sl. 16.44). Naznačiti razmeru crtanja perspektive. Metodu crtanja usvojiti.

Obzirom da su zadata tri ortogonalna pogleda (A, B i D) usvaja se metoda prodora i nedogleda. Obeleže se rogljevi predmeta u na sva tri zadata ortogonalna pogleda (A', A'' i A'''...). Na osnovu zadatih ortogonalnih pogleda sagleda se izgled predmeta i skicira aksonometrijski crtež (sl. 16.45, dole levo).



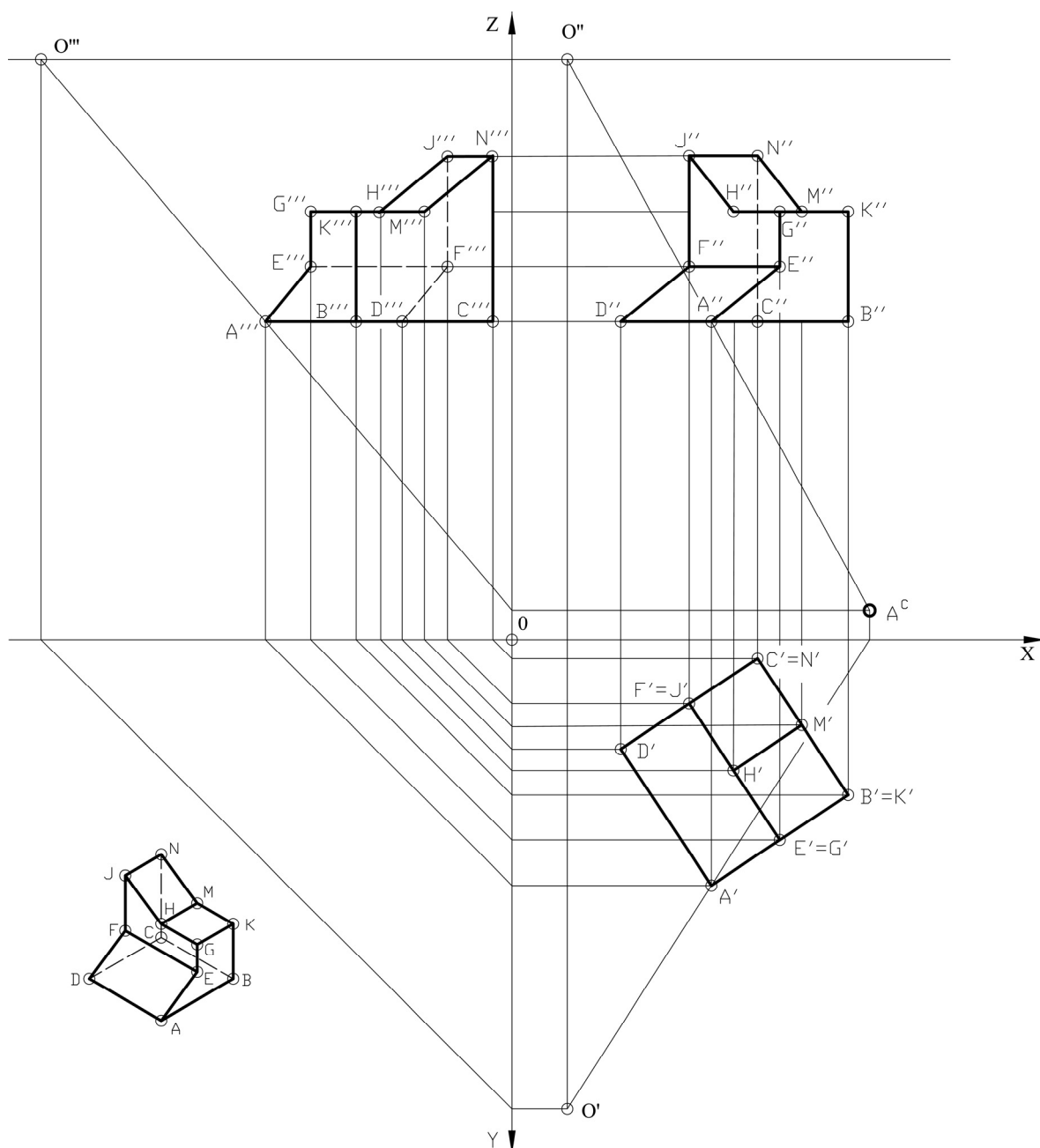
Sl. 16.44: Postavka zadatka 16.11



Sl. 16.45: Označavanje projekcija roglovea zadanog predmeta i aksonometrijski izgled (Zadatak 16.11)

Iz projekcija očne tačke  $O$  nacrtaju se projekcijski zraci kroz svaki rogalj predmeta. Koristi se kombinacija projekcijskih zraka kroz prvu i treća ili prva i druga ili druga i treću projekciju. Zbog preglednosti crtanja najbolje je usvojiti kombinaciju prve i treće projekcije projekcijskih zraka. Na sl. 16.46 nacrtane su sve tri projekcije projekcijskog zraka kroz rogalj  $A$ . Drugi prodor projekcijskog zraka (prodor kroz likoravan) predstavlja centralnu projekciju, rogla  $A^C$ . Na isti način se dobijaju centralne projekcije i ostalih roglovea  $B^C, C^C \dots$

Detaljno objašnjenje ove metode dato je na zadatku 16.6, sl. 16.21.



Sl. 16.46: Određivanje centralne projekcije roglja A (Zadatak 16.11)

Za predmete koji imaju međusobno paralelne ivice pogodno je koristiti nedoglede, jer to ubrzava crtanje i može da posluži za kontrolu dobijenog rešenja. Detaljno objašnjenje dobijanja i korišćenja nedogleda data je na zadatku 16.5, sl. 16.16 i na sl. 16.25.

U ovom primeru, zadatku 16.11 imamo dva nedogleda  $N_1$  i  $N_2$  (sl. 16.47). Iz očne tačke  $O$  nacrt se pomoćna prava paralelna sa ivicom  $AD$ . Njen prodor kroz likoravan (drugi prodor) predstavlja nedogled  $N_1$  svih ivica predmeta paralelnih sa ivicom  $AD$  ( $BC$ ,  $GH$  i  $KM$ ). Drugi nedogled  $N_2$  dobija se tako što se nacrtava nova pomoćna prava iz očne tačke  $O$  koja je paralelna sa ivicom predmeta  $AB$ . Njen prodor kroz likoravan predstavlja nedogled  $N_2$  svih ivica paralelnih sa ivicom  $AB$  ( $DC$ ,  $GK$ ,  $HM$ ,  $CM$  i  $JN$ ). U nedogledima će se centralne projekcije međusobno paralelnih ivica predmeta seći.

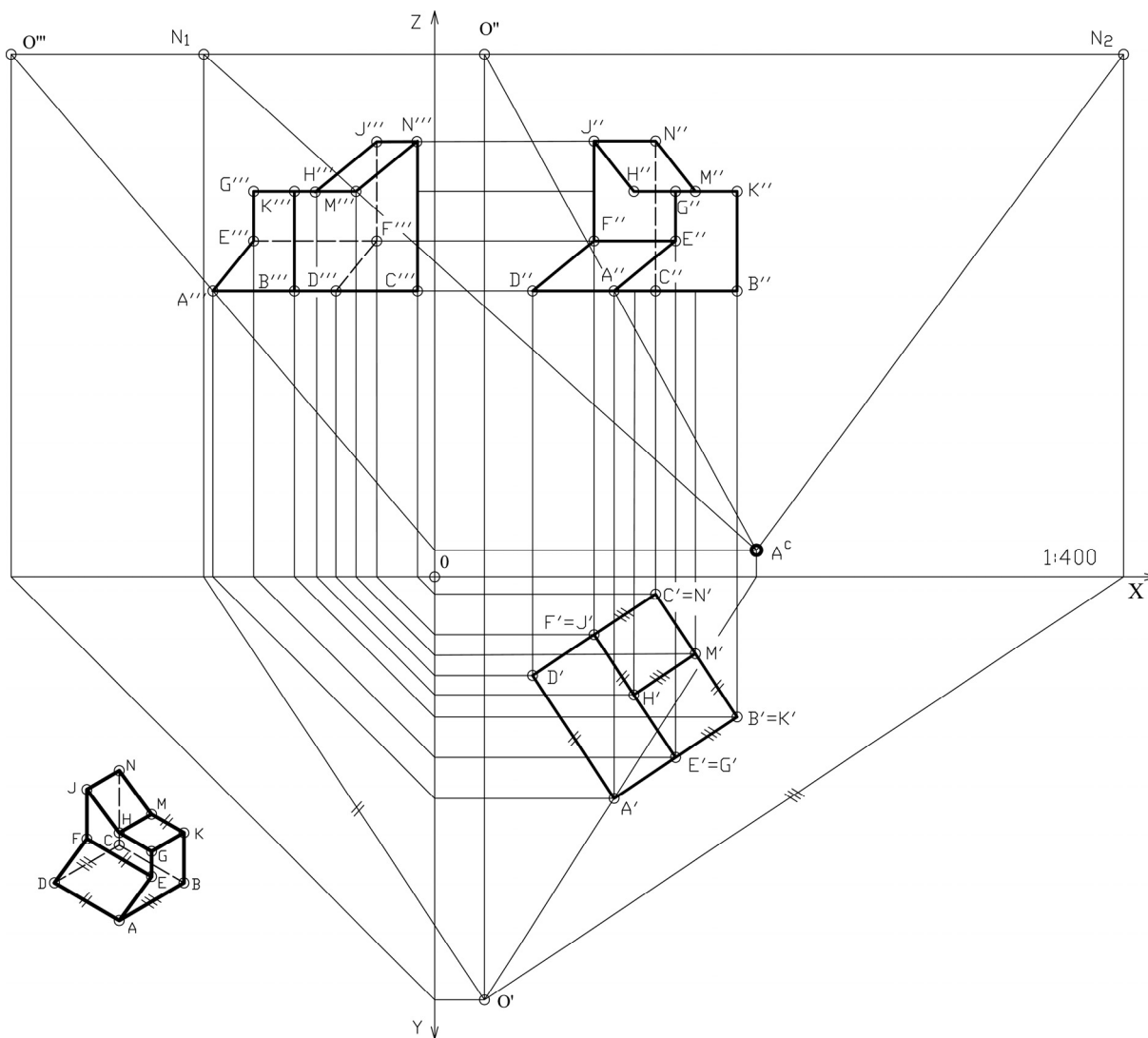
Oznaka za razmeru crtanja isključivo se piše na osu  $X$ , jer se odnosi samo za ono što leži na likoravni. Iz zadatih koordinata očne tačke  $O(4;34;42)$ , koje se vide u pravoj veličini na ortogonalnim projekcijama određuje se razmera. Koordinata  $x$  očne tačke  $O$  jednaka je 4 m, a

na crtežu je nacrtana sa 10 mm. Iz relacije  $4\text{ m} = 10\text{ mm} \cdot U_L \frac{1\text{ m}}{? \text{ mm}}$  dobija se razmera

$U_L = \frac{1\text{ m}}{2,5\text{ mm}}$  ili dugačije zapisano  $1\text{ m} \Rightarrow 2,5\text{ mm}$  ili 1:400 (vrednost od 2,5 mm dobija se kada

se 1000 mm podeli sa 400). Provera izračunate razmere dobija se iz relacije da je koordinata x

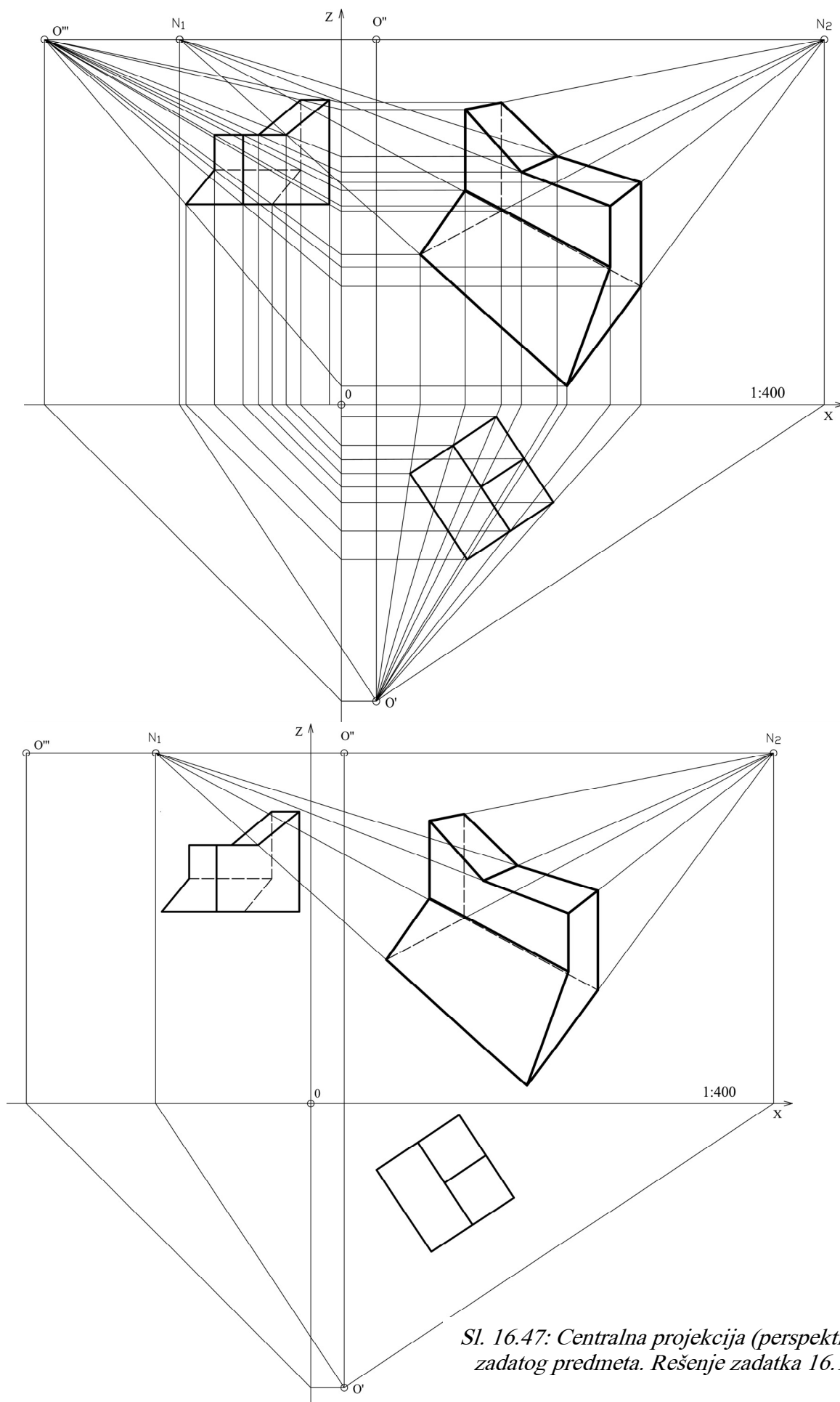
očne tačke O jednaka  $4\text{ m} = 10\text{ mm} \cdot \frac{1\text{ m}}{2,5\text{ mm}} = 4\text{ m}$ .



Sl. 16.46: Određivanje nedogleda  $N_1$  i  $N_2$  (Zadatak 16.11)

Nedostatak metode prodora je u tome što zahteva veći prostor za crtanje i što ima puno pomoćnih linija koje mogu da utiču na preglednost dobijene centralne projekcije (sl.16.47).

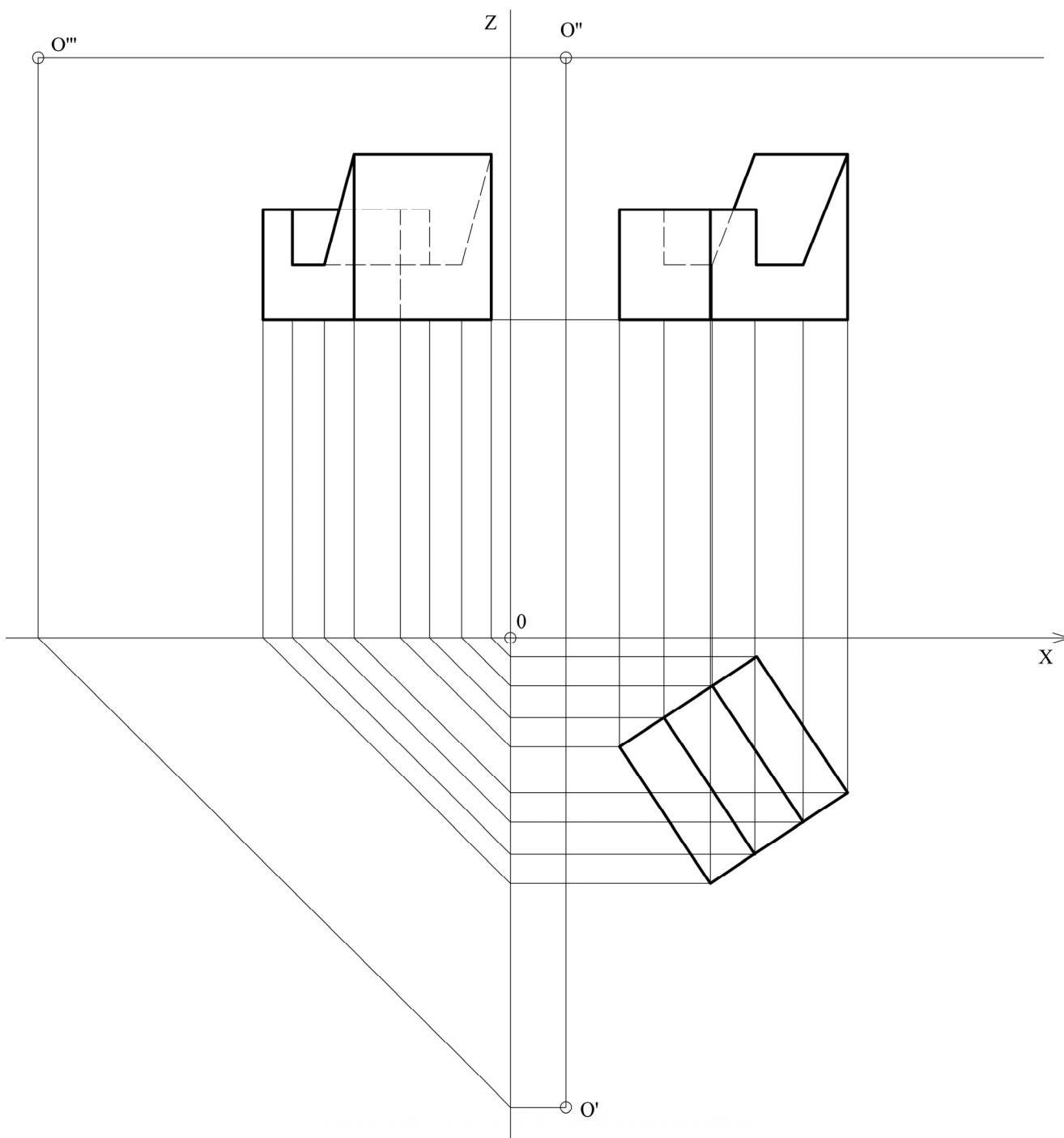




Sl. 16.47: Centralna projekcija (perspektiva) zadanog predmeta. Rešenje zadatka 16.11

**Zadatak 16.12.**

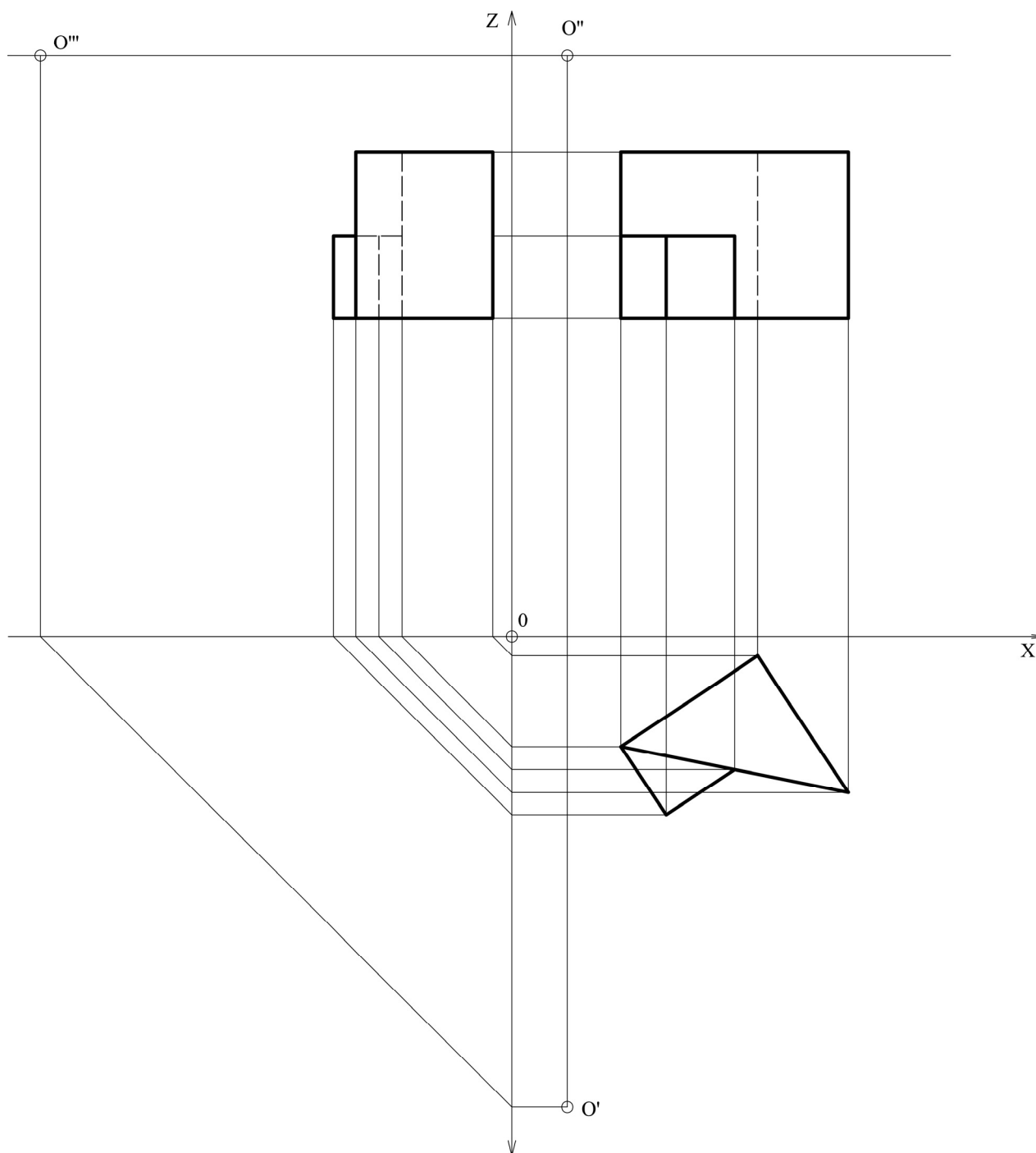
Na osnovu zadatih ortogonalnih pogleda predmeta nacrtati perspektivu (centralnu projekciju) ako je očna tačka  $O(2;17;21)$ . Koordinate očne tačke su u m (sl. 16.48).



Sl. 16.48: Postavka zadatka 16.12

**Zadatak 16.13.**

Na osnovu zadatih ortogonalnih pogleda predmeta nacrtati perspektivu (centralnu projekciju) ako je očna tačka  $O(1;8,5;10,5)$ . Koordinate očne tačke su u m (sl. 16.49).



Sl. 16.49: Postavka zadatka 16.13

## 17. ŠEMATSKI CRTEŽI U PEJZAŽNOJ ARHITEKTURI

Pejzažni prostori su sve ono što nas okružuje: polja, livade, šume, parkovi, gradovi, objekti, ljudi, vozila, mašine, sportski tereni, reke, kanali, mostovi itd. Pri izradi tehničke dokumentacije sve navedeno treba na određen način nacrtati, tako da su crteži jednoznačno definisani i jasni svim stručnim o ostalim korisnicima.

Crteži u pejzažnoj arhitekturi dele se:

- a) Prema načinu i metodi crtanja na:
  - kotiranu projekciju,
  - ortogonalne crteže,
  - aksonometrijske crteže,
  - centralnu projekciju (perspektivu) i
  - šematske crteže.
- b) Prema nameni dele se na:
  - crteže postojećih (neuređenih) pejzažnih prostora,
  - crteže idejnog rešenja,
  - izvodačke crteže,
  - crteže izvedenih (uređenih) pejzažnih prostora,
  - skice,
  - fotografije i
  - marketinške crteže.
- c) Prema tehnici crtanja, crteži se dele na one nacrtane:
  - rukom,
  - računaram i
  - kombinovanom tehnikom.

Kotirana projekcija, ortogonalni i aksonometrijski crteži kao i centralna projekcija objašnjeni su u prethodnim poglavljima. O ostalim navedenim vrstama crteža biće reči u ovom poglavlju.

### 17.1. ŠEMATSKI CRTEŽI

Šematski crteži su takvi crteži gde se elementi crtanja prikazuju pomoću grafičkih prikaza i grafičkih simbola. Zbog svoje jednostavnosti šematski crteži imaju veliku primenu pri crtanju pejzažnih prostora, kao i u drugim oblastima i strukama.

Osnovni elementi uređenog pejzažnog prostora su ukrasne i dendrološke biljke kao i ostale zelene površine, jer oplemenjuju i ulepšavaju prostor u kojem se nalazimo. Na projektnoj tehničkoj dokumentaciji elemente zelenih površina crtamo uprošćeno, pomoću grafičkih prikaza ili pomoću grafičkih simbola.

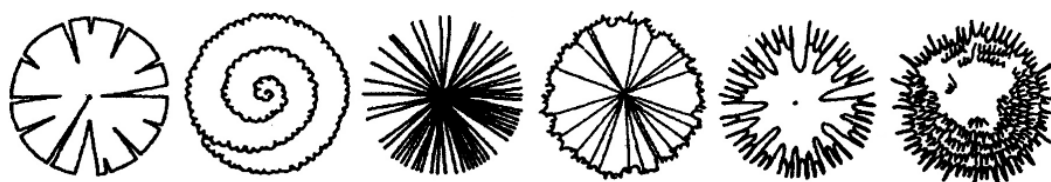
#### 17.1.1. Grafički prikazi za elemente zelenih površina

Pri izradi tehničke dokumentacije za prikazivanje biljnih vrsta koriste se jednostavna grafička likovna rešenja koja asociraju na to što predstavljaju u ortogonalnom pogledu spreda i odozgo. Takva likovna grafička rešenja biljaka i ostalih elemenata, nazivaćemo grafičkim prikazima.

Primeri grafičkih prikaza za drveće i ukrasne biljke koji se mogu naći u našoj i inostranoj stručnoj literaturi dati su na slikama od sl. 17.1 do sl. 17.23.



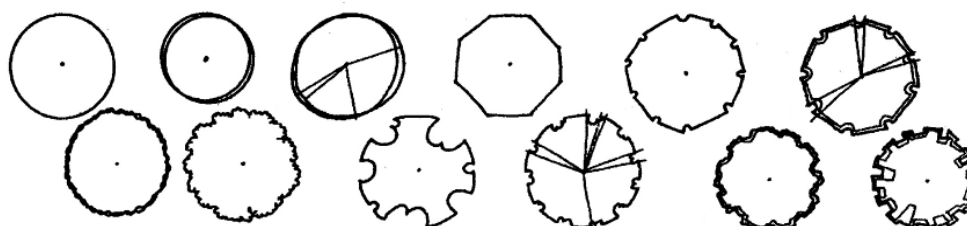
Sl. 17.1: Grafički prikaz četinarskog drveća, pogled spreda



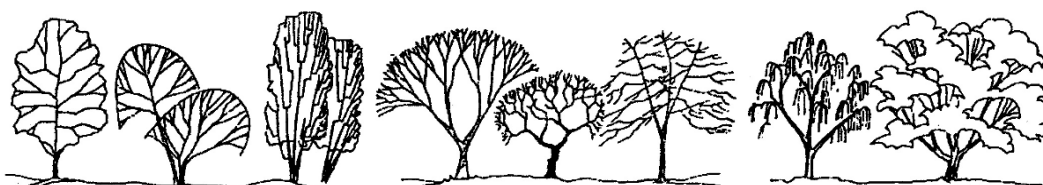
Sl. 17.2: Grafički prikaz četinarskog drveća, pogled odozgo



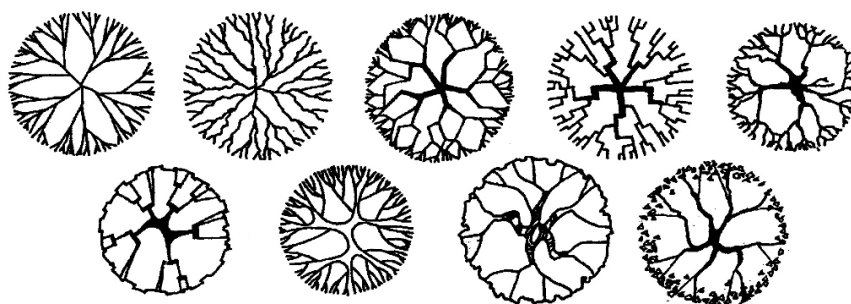
Sl. 17.3: Grafički prikaz kontura lišćarskog drveća, pogled spreda



Sl. 17.4: Grafički prikaz kontura lišćarskog drveća, pogled odozgo



Sl. 17.5: Grafički prikaz razgranatog lišćarskog drveća, pogled spreda



Sl. 17.6: Grafički prikaz razgranatog lišćarskog drveća, pogled odozgo



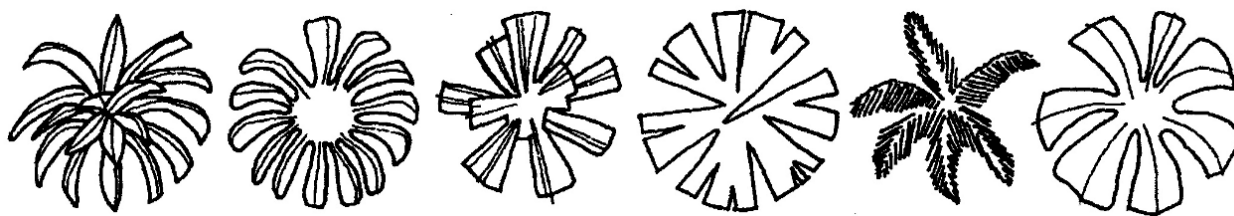
Sl. 17.7: Grafički prikaz lišćarskog drveća sa teksturom, pogled spreda



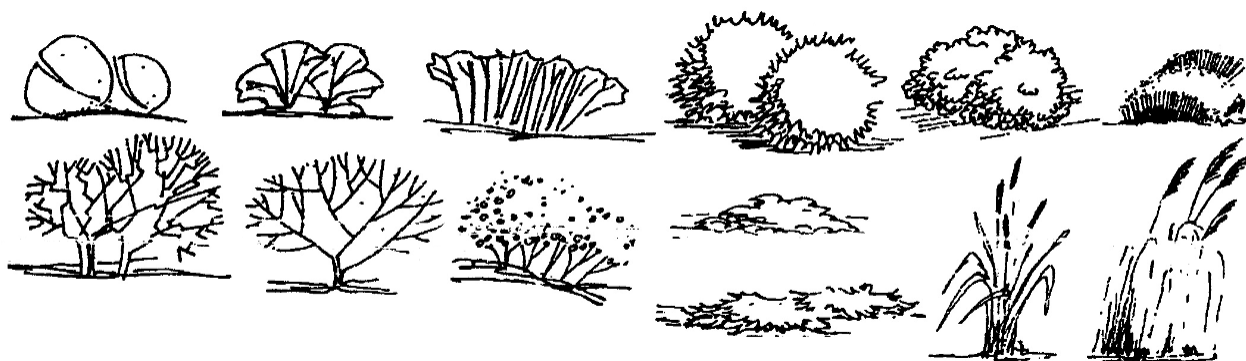
Sl. 17.8: Grafički prikaz lišćarskog drveća sa teksturom, pogled odozgo



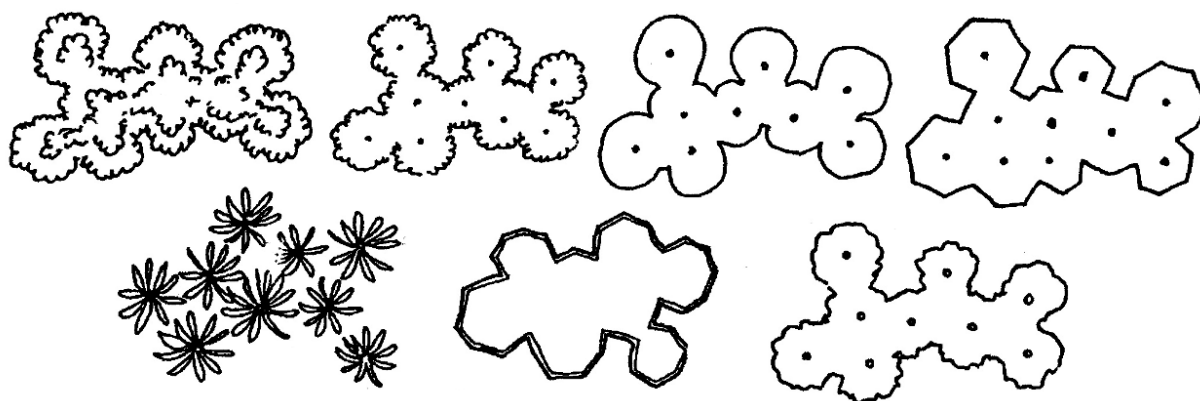
Sl. 17.9: Grafički prikaz tropskog drveća, pogled spreda



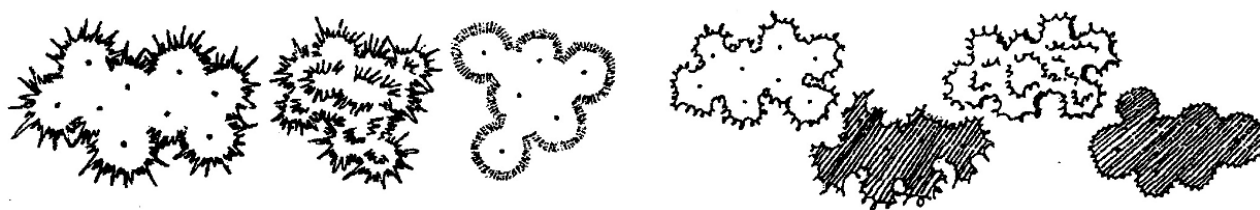
Sl. 17.10: Grafički prikaz tropskog drveća, pogled odozgo



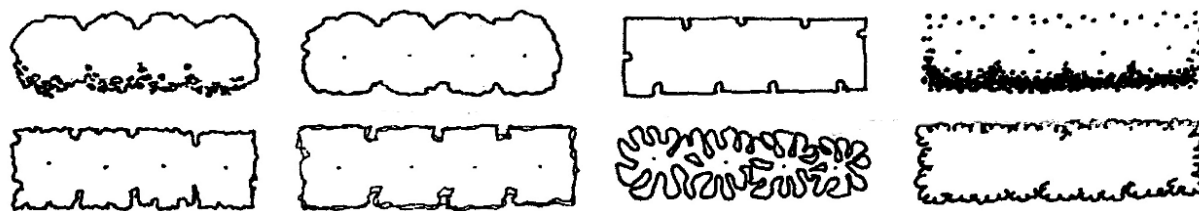
Sl. 17.11: Grafički prikaz šiblja, pogled spreda



Sl. 17.12: Grafički prikaz listopadnog šiblja, pogled odozgo



Sl. 17.13: Grafički prikaz četinarskog šiblja, pogled odozgo



Sl. 17.14: Grafički prikaz živih ograda

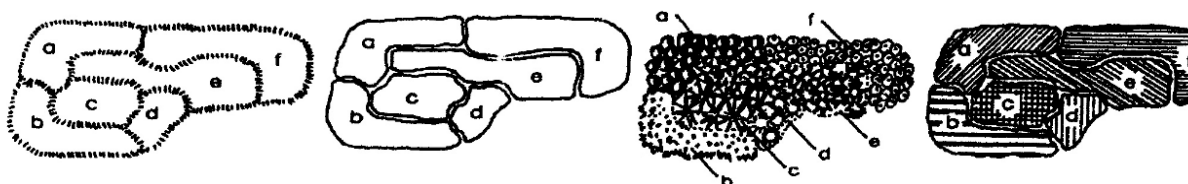


Sl. 17.15: Grafički prikaz puzajuće žive ograde

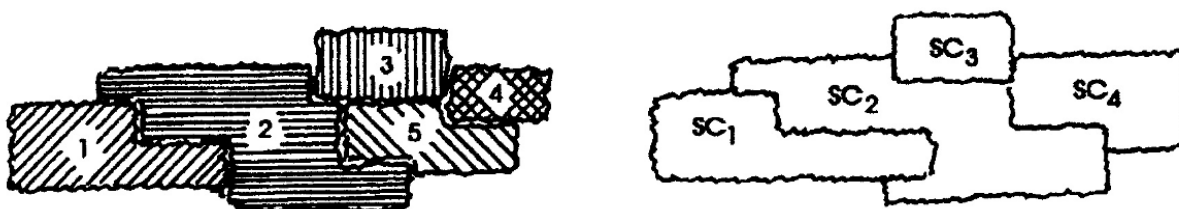


Sl. 17.16: Grafički prikaz ruža

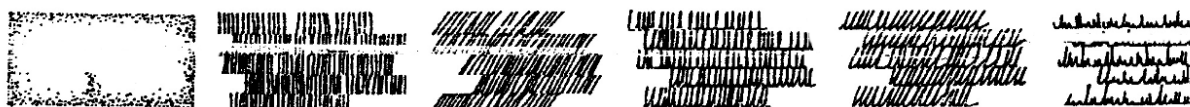
Pri crtanju većih prostora na kojem se predviđa veliki broj različitog ukrasnog zelenila ili cveća gusto sađenog, koristi se blok šema sa slovnim i brojčanim oznakama, sa različitim šrafurnim linijama, tačkicama, zvezdicama sl. uz pojašnjenja u legendi sa nazivom biljaka na latinskom jeziku (sl. 17.17 i sl. 17.18).



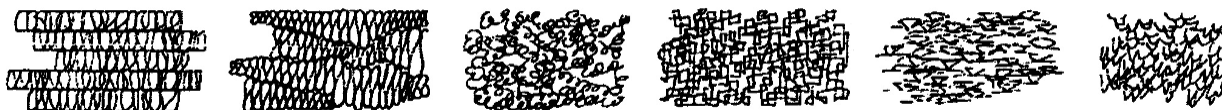
Sl. 17.17: Grafički prikaz višegodišnjih cvetnjaka sa slovnim oznakama



Sl. 17.18: Grafički prikaz sezonskog cveća sa brojčanim i slovnim oznakama



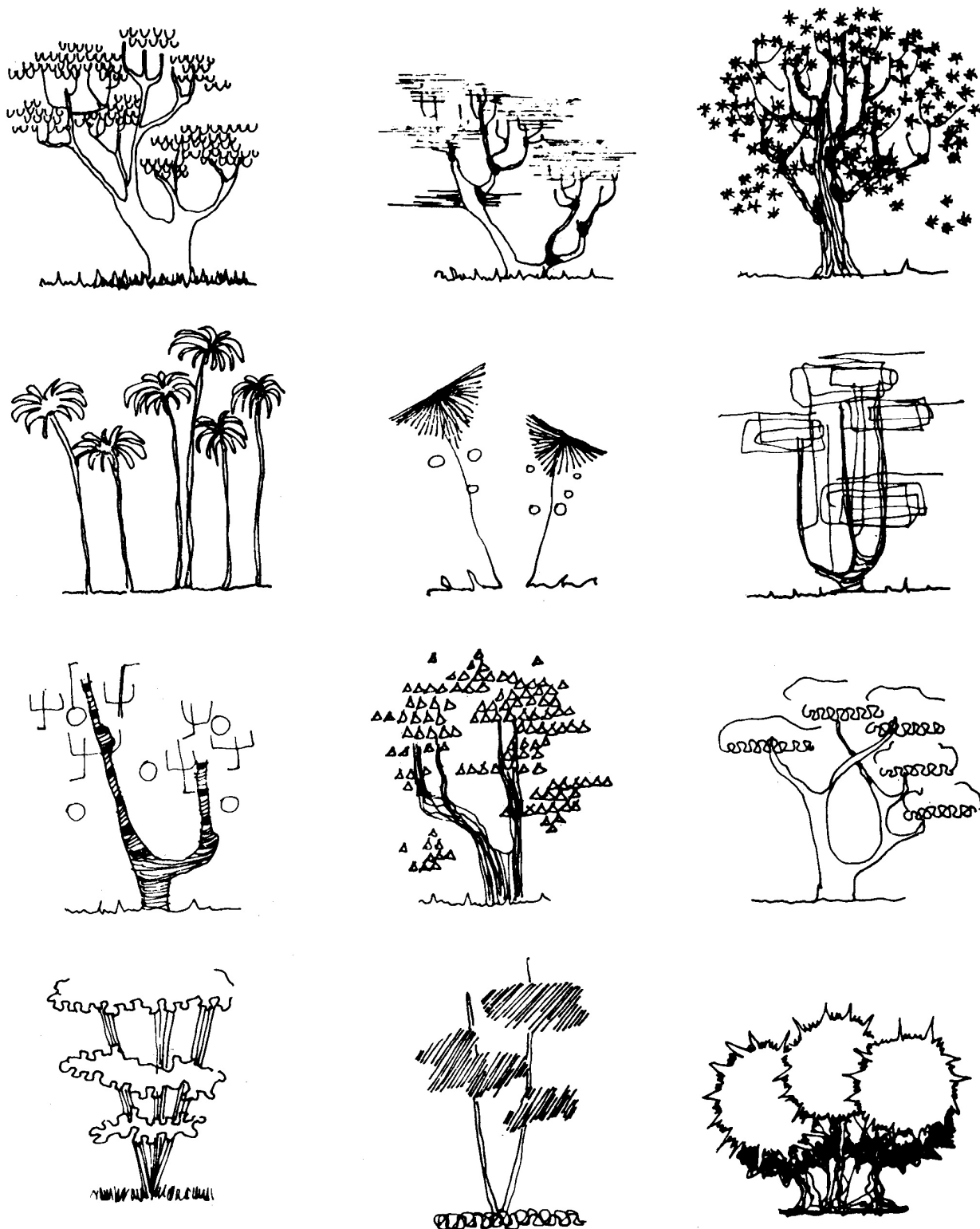
Sl. 17.19: Grafički prikaz zelenih pokrivača zemljišta



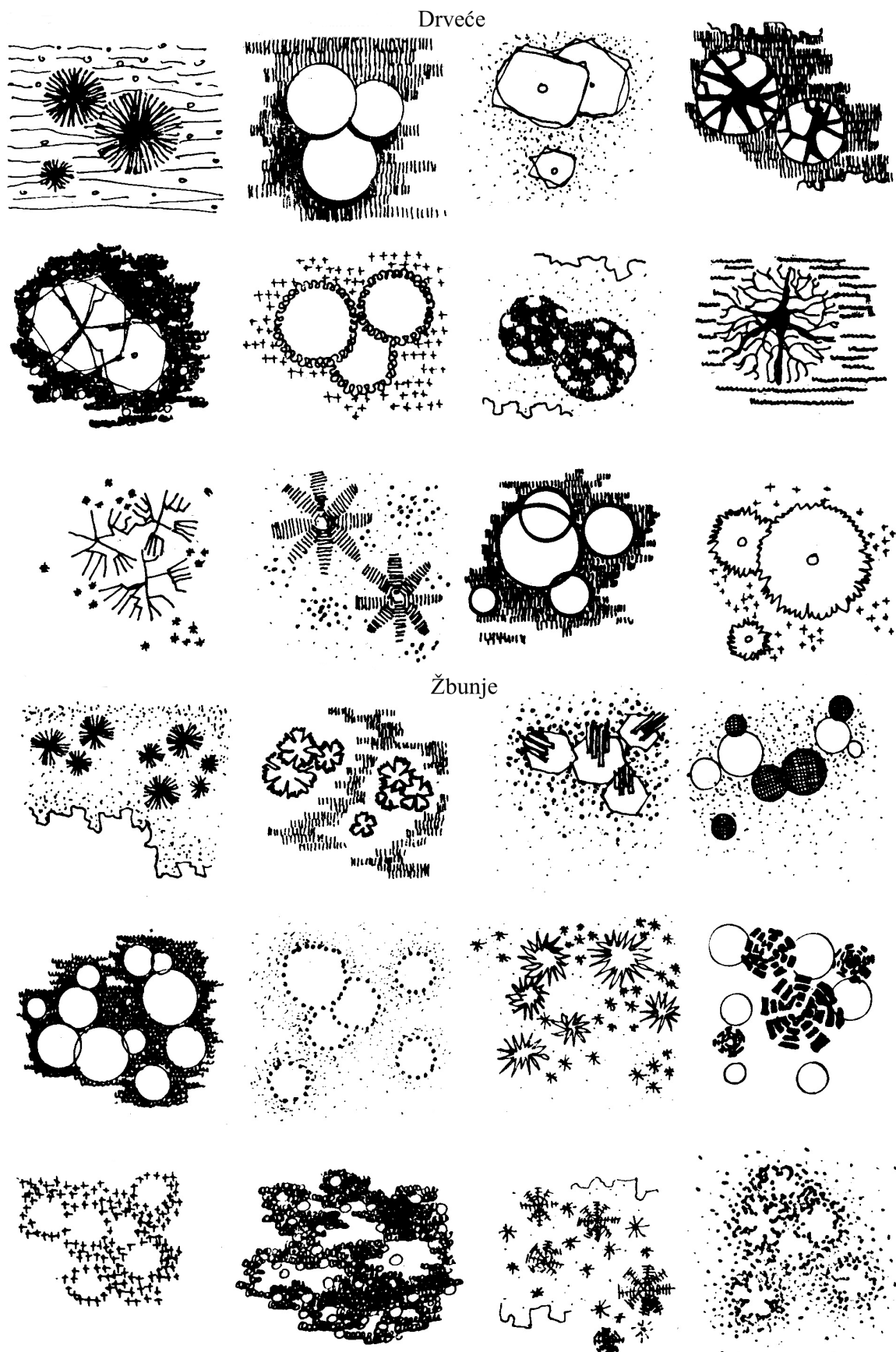
Sl. 17.20: Grafički prikaz travnjaka

(Grafički prikazi na slikama od 17.1 do 17.20 preuzeti su iz literature: Vujković Ljiljana, Tehnika pejzažnog projektovanja, Šumarski fakultet, Beograd, 2003.)

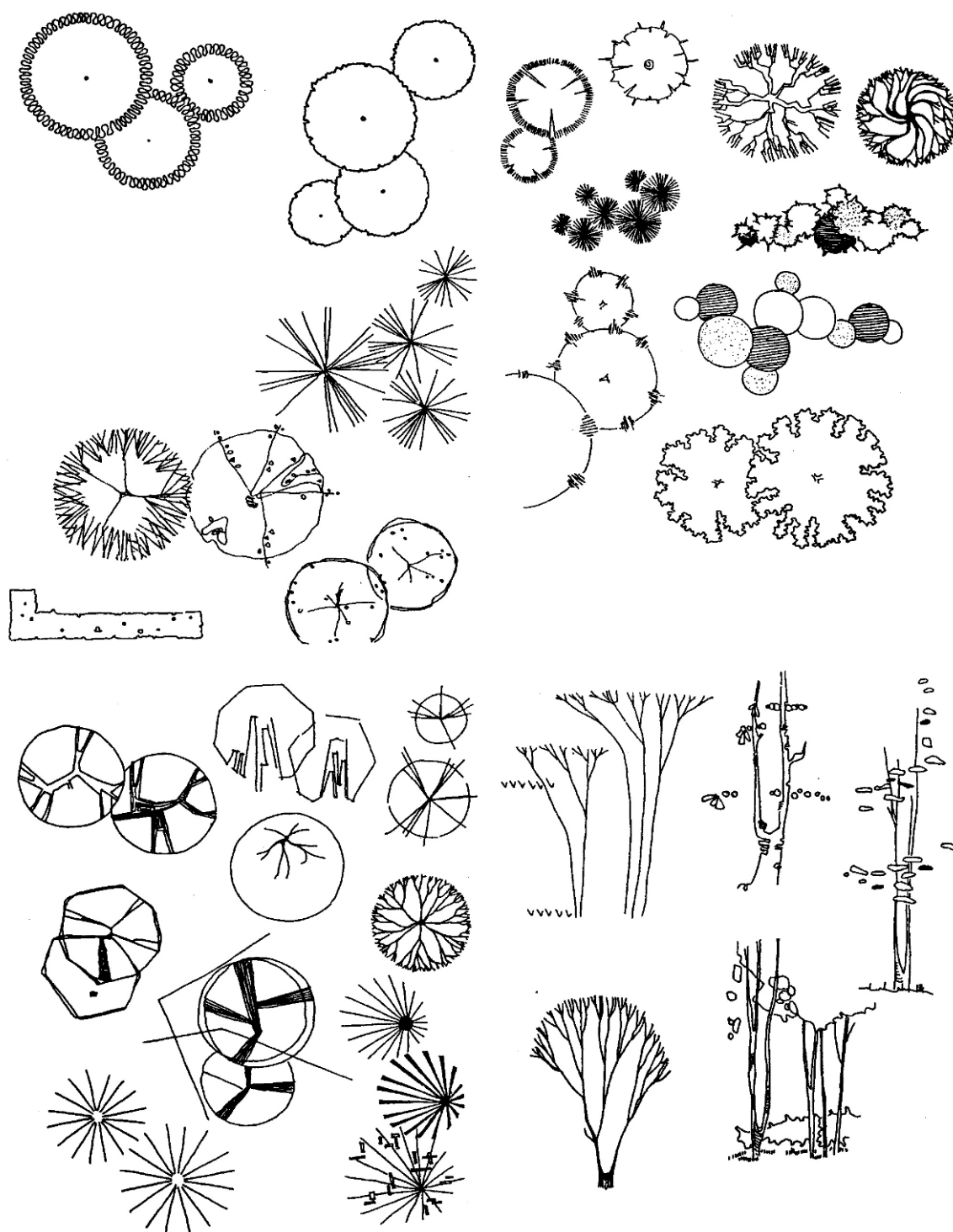




Sl. 17.21: Grafički prikaz drveća, pogled spreda (Dulić Gordana, Tehničko crtanje, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2001.)

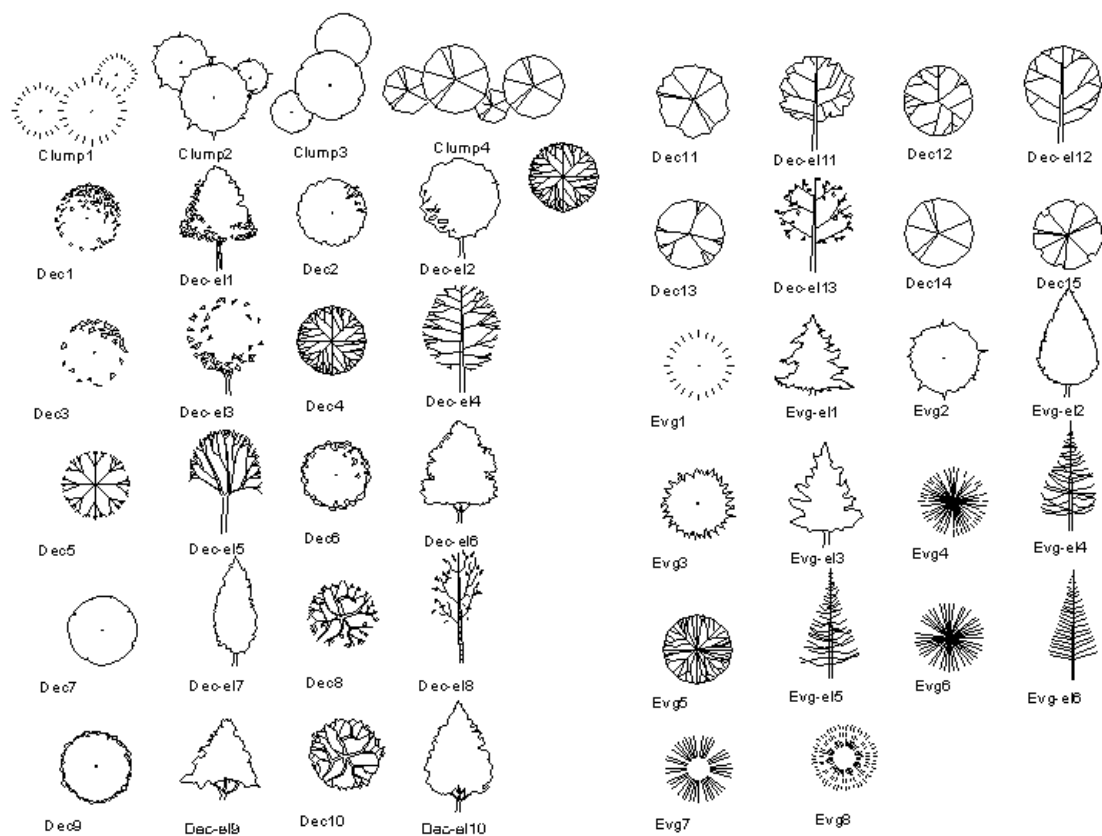


Sl. 17.22: Grafički prikaz drveća i žbunja, pogled odozgo (Dulić Gordana, Tehničko ctranje, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2001.)



Sl. 17.23: Grafički prikaz drveća i žbunja (Ročkomanović Branislava, *Elementi projektovanja*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2004.)












Za izradu tehničkih crteža danas se koriste računarski programi koji umnogome pomažu da se brže, jednostavnije i kvalitetnije crteži nacrtaju. To su AutoCAD, CorelDRAW i dr. Računarski programi imaju svoje baze gotovih grafičkih rešenja koje možemo koristiti pri crtanju drveća i biljaka (sl. 7.24) ili da svako za sebe napravi neka svoja rešenja. Uz takva grafička rešenja na šematskom crtežu obavezno se crta legenda sa pojašnjenjima za vrstu biljaka na latinskom jeziku. Na sl. 17.25 nacrtnan je Dunavski park u Novom Sadu sa osnovnim biljnim vrstama koje su nacrtane pomoću grafičkih prikaza sa legendom (sl. 17.26).



Sl. 17.24: Grafički prikaz drveća i biljaka, AutoCAD

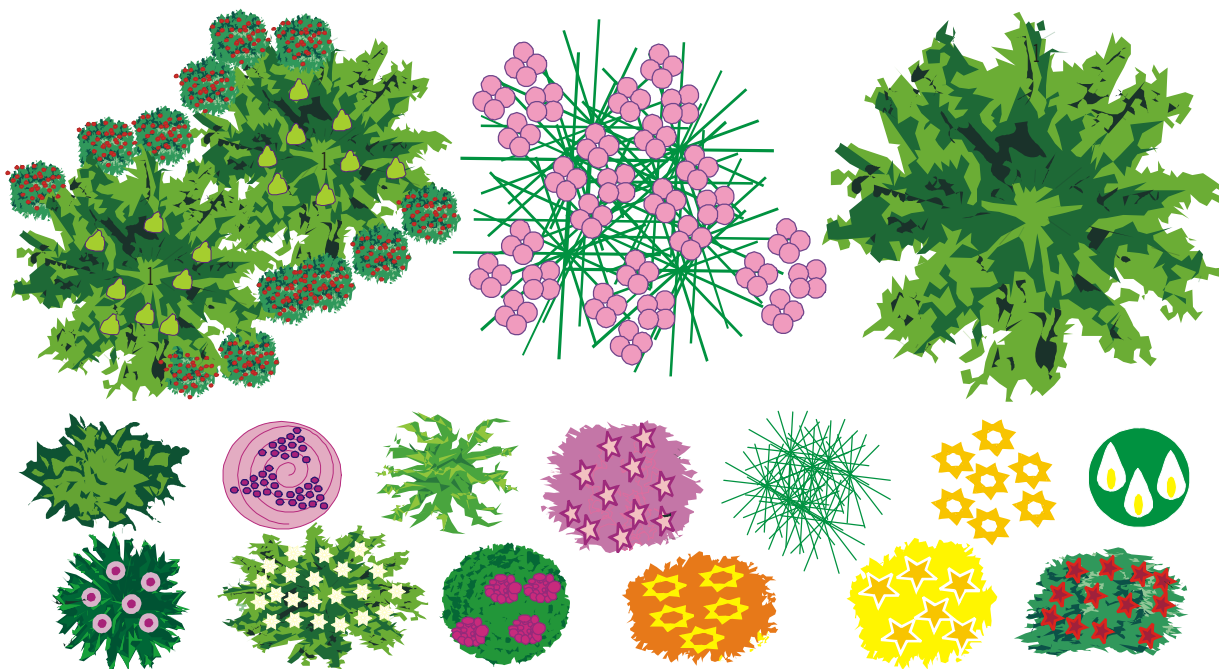


Sl. 17.25: Šematski crtež Dunavskog parka u Novom Sadu, rad grupe studenata Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, studijskog programa Pejzažna arhitektura

 Chamaecyparis law LANE	 Acer dasycarpum	 Juniperus hor. SABINA	 Corylus sp.
 Chamaecyparis FLETCHERII	 Acer platanoides	 Thuja occ. REINGOLD	 Fraxinus exceloir
 Chamaecyparis ALUMI GOLD	 Robinia pseudoacacia	 Pinus mugo	 Ulmus pumila
 Cedrus atlantica	 Platanus acerofolia	 Picea pungens	 Sorbus aucuparia
 Thuja occidentalis	 Quercus robur	 Juniperus vir. SKYROCKET	 Acer glnala
 Thuja occ. GIGANTEA	 Quercus rubra	 Juniperus vir. MAGNIFICA	 Mahonia aquifolia
 Taxus baccata	 Cotoneaster dammeri	 Juniperus hor. PLUMOSA	 Berberis thunbergi
 Thuja occ. SMARAGD	 Tilia argentea	 Thuja occ. GLOBOSA	 Royal Gold ruža
 Pseudotsuga duglasii	 Prunus lavrocerasus	 Thuja occ. TINI TIN	 Rosendorf Smith
 Chamaecyparis law COLUMNARIS	 Ginkgo biloba	 Juniperus com. SUECICA	
 Juniperus com. SUECICA	 Betula alba		





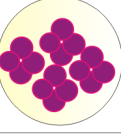
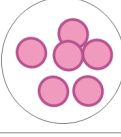


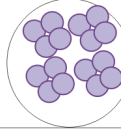



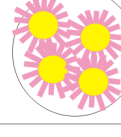



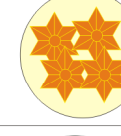

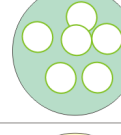
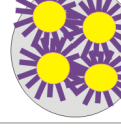
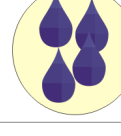
Sl. 17.26: Legenda uz šematski crtež sa sl. 17.25

Primer mogućnosti crtanja cveća u programu CorelDRAW prikazan je na sl. 17.27 i u tabeli 17.1. Nazivi biljaka su na latinskom jeziku.



Sl. 17.27 Grafički prikaz cveća (Kokar Bojana, Idejno rešenje uređenja vrta za odmor, diplomski rad, Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu, 2004. god.)

Tabela 17.1: Usvojeni grafički prikazi ukrasnog bilja. Kokar Bojana, Diplomski rad, Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu, 2005. god.

Naziv biljke	Grafički simbol	Naziv biljke	Grafički simbol
Pinus mugo		Sedum reflexum "Cristatum"	
Sempervivum sp.		Dianthus deltoides	
Aubretia deltoidea		Thimus serpyllum	
Sedum sieboldi "Mediovariegatum"		Campanula muralis	
Phlox subulata "Emerald cauchion blue"		Delosperma lineare	
Arabis fedinandii coburgii "Variegata"		Arabis albida	
Aster dumosus "Petar Pan"		Saxifraga arendii "Pixie"	
Alyssum saxatile		Sedum acre "Yellow queen"	
Gazania nivea		Sedum hispanicum	
Sagina subulata "Aurea"		Aster dumosus "Bitelines"	
Muscari armeniacum			

### 17.1.2. Grafički simboli za elemente zelenih površina

Grafički simboli su definisani nacionalnim i međunarodnim standardima za neke tehničke oblasti kao što je: elektrotehnika, hidraulika, pneumatika, merni instrumenti itd. Za neke tehničke oblasti simboli nisu standardima definisani, međutim, u literaturi se uglavnom koriste isti, opšte prihvaćeni i prepoznatljivi, npr. u mašinskim elementima, mehanici mašina itd.

Karakteristike grafičkih simbola su:

- da su jednostavnih oblika lakih za crtanje,
- da u dovoljnoj meri asociraju na predmet crtanja,
- da jednoznačno definišu predmete crtanja,
- da definišu predmete u dva ortogonalna pogleda,
- da su pogodni za sve vrste crteža,
- da imaju osnovne oblike koji se mogu dopunjavati,
- da su dopadljivog lepog izgleda, kao što su biljke koje predstavljaju,
- da mogu biti u boji (za marketinške potrebe),
- da stvaraju logičnu poruku,
- da se međusobno ne ponavljaju, bar ne u istoj oblasti itd.

Grafički simboli za ukrasne biljke veoma malo su definisani nacionalnim ili međunarodnim standardima, s obzirom da ih ima veoma veliki broj, i veliki broj njih je sličnog izgleda. To što grafički simboli nisu u dovoljnoj meri razvijeni i usvojeni, otežava crtanje projektne i druge dokumentacije iz pejzažne arhitekture, kao što otežava i tehničku komunikaciju između korisnika.

Stvaranje grafičkih simbola za oblast hortikulture je izuzetno teško, obzirom na veoma veliki broj različitih biljaka i njihovu veliku međusobnu sličnost. Stoga uz ove grafičke simbole mora biti i poziciona oznaka za latinskim nazivima biljaka u legendi. Međutim, za širi krug korisnika latinski nazivi biljaka nisu prihvatljivi i ne mogu na osnovu takvih crteža da stvore vizuelnu sliku pejzažnih prostora.

Stvaranje i usvajanje grafičkih simbola za potrebe crtanja pejzažnih prostora je složen, obiman i stalan posao za stručnjake različitih specijalnosti.

Razvojem i usvajanjem grafičkih simbola bave se institucije za standardizaciju, stručnjaci za izradu softvera, obrazovne i istraživačke institucije, državne institucije i drugi.

Za potrebe katastarskog praćenja zemljišta, Geodetski zavod Srbije je napravio digitalni topografski ključ ([www.rgz.gov.rs](http://www.rgz.gov.rs)), tj katalog grafičkih simbola. U ovom katalogu definisani su grafički simboli za: geodetske tačke, katastarske parcele, zgrade i druge građevinske objekte, vodovodne mreže, kanalizacione mreže, elektro mreže, telekomunikacione mreže, naftovodne mreže, terene, kulturnoistorijske spomenike, vode i građevine na vodi, topografiju, saobraćaj, industrijska i privredna postrojenja i za biljke. Grafički simboli su različitih boja za različite oblasti.

Međutim, u ovom katalogu definisan je samo mali broj grafičkih simbola za biljke, dok je za ostale oblasti definisan daleko veći broj.

Neki od mnogobrojnih grafičkih simbola koji se nalaze u digitalnom topografskom ključu koji je izradio Geodetski zavod Srbije dat je u tabeli 17.2.

Grafički simboli za potrebe crtanja biljaka, biljnih vrsta i uopšte hortikulture, definisani standardima ili su usvojeni u stručnim krugovima dati su u tabeli 17.3. To je sasvim mali i nedovoljan broj, da bi zadovoljio potrebe crtanja pejzažnih prostora.

Stručnjaci iz oblasti pejzažne arhitekture i hortikulture treba da rade na stvaranju i usvajanju grafičkih simbola koji bi jednoznačno definisali biljne vrste.

Na sl. 17.28 nacrtan je predlog grafičkog simbola za dan i noć (violu) nacrtan na računaru, koji zadovoljava navedene karakteristike. Drugi predlog grafičkog simbola je za lalu (tulipa) (sl. 17.29).

Tabela 17.2: Neki od grafičkih simbola, [www.rgz.gov.rs](http://www.rgz.gov.rs), Digitalni topografski ključ, Geodetski zavod Srbije, 2005.

Značenje	Simbol		
Arteski bunar		Muslimansko groblje	
Crpna stanica		Sinagoga	
Reni bunar		Jevrejsko groblje	
Vodomer		Rudnik u radu	
Česma javna i dvorišna		Zatvoren rudnik	
Prskalica za navodnjavanje		Pogon vetrom	
Fontana, vodoskog veštački		Silos	
Toplana		Pojedinačno drvo – belogorica	
Radio televizijski uređaji ili stanica		Pojedinačno drvo - četinar	
Stub sa radio antenom - betonski		Pojedinačno drvo – zimzeleno	
Transformator		Granično drvo (katastarsko) - zimzeleno	
Staklenik		Pojedinačno drvo – listopadno, široka krošnja	
Semafor		Pojedinačno drvo – listopadno, uska krošnja	
Betonski stub visokog napona		Pojedinačno drvo – palma	
Reflektor obični		Pojedinačno drvo – maslina	
Telefonski betonski stub		Šuma belogorica - prirodna	
Telefonski gvozdeni stub		Šuma belogorica - sađena	
Pumpa za snabdevanje gorivom		Šuma crnogorica - sađena	
Hrišćanska crkva ili manja kapela		Šuma crnogorica - prirodna	
Hrišćansko groblje		Žbunje, šikara, grmlje	
Džamija			



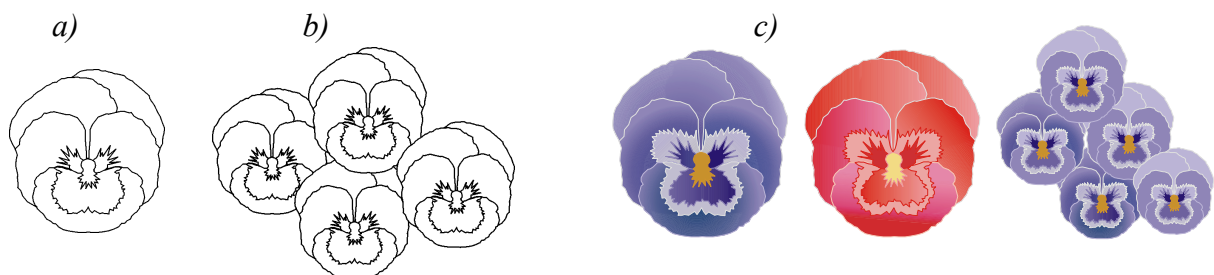
Nastavak tabele 17.2:

Značenje	Simbol
Mešovita šuma	
Dudara	
Pirindžano polje	
Njiva	
Močvarno zemljište	
Neplodno zemljište	
Iskrčena šuma	
Park	
Planinarski turistički dom	
Međna linija - neosporna	
Međna linija - sporna	
Ukrštanje vodova	
Mimoilaženje vodova	
Cevovod nadzemni	
Cevovod podzemni	
Optički kabl	
Pešačka staza stalnog karaktera uža od 0,5 m	
Terasa - nepokrivena	
Terasa - pokrivena	
Ruševine sa očuvanim temeljima i zidovima od tvrdog materijala	
Temelj	
Prolaz podzemnog cevovoda ispod objekta u zaštitnoj cevi sa zatvaračem	
Prolaz nadzemnog cevovoda ispod objekta u zaštitnoj cevi	

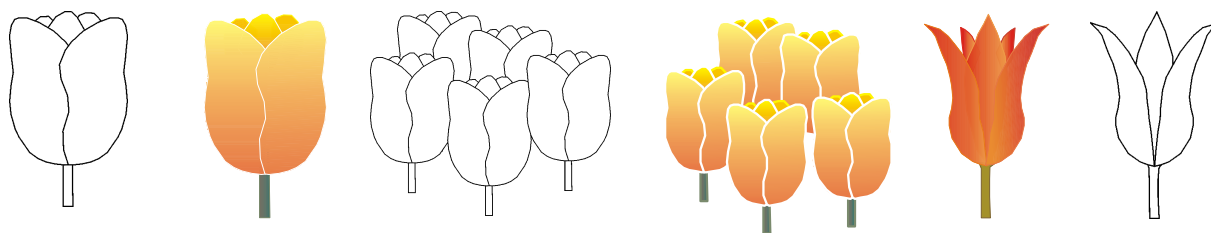
sa zatvaračem	
Stena - vrlo strmi vertikalni obronci, obale, klisure, hridi	
Stena - greben	
Stena - slivna linija, useklina	
Stena - ivica verikalnog obronka i greben ujedno	
Granična linija između kompleksa zemljišta, tla raznog karaktera	
Kaskada, vodopad	
Jarak, kanal predstavljen jednom linijom	
Jaz na manjem nasipu, bedemu	
Kanal - betonski ili zidani - otvoren	
Kanal - betonski ili zidani - pokriven	
Obala utvrđena popletom	
Obala utvrđena kosim zidom	
Obala utvrđena vertikalnim zidom	
Obala utvrđena oblogom od betonskih ploča	
Obala ili visoka brana od zemlje	
Brana niska - kamena ili betonska	
Vertikalni potporni zid	
Zidana ograda	
Zidana ograda - zajednička	
Zid od naslaganog kamena	
Živa ograda	
Živa ograda zajednička	
Potok iscrtan jednom linijom	
Kanal, jarak sa tekućom vodom	
Jak izvor vode	
Slab izvor vode	

Tabela 17.3: Usvojeni grafički simboli za biljne vrste

Značenje	Simbol		
Livada		Vinograd	
Močvarna livada		Maslinjak	
Pašnjak		Hmelj	
Ševar		Latinski naziv biljke (clematis montana)	
Močvaran ševar		Zabranjeno kidanje zaštićene prizemne flore	
Trska		Planirano drvo	
Šiblje		Rupa za sadnicu drveta	
Rasadnik - šuma belogorica		Planirani žbun/zasad i latinski nazivi	
Rasadnik - šuma crnogorica		Postojeće drvo	
Vrt		Planirana živa ograda (položaj sadnica)	
Voćnjak			



Sl. 17.28: Predlog grafičkog simbola za violu (dan i noć)  
a) grafički simbol pojedinačne biljke, b) simbol više biljaka, c) simboli u boji




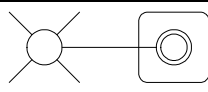

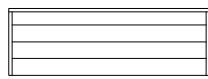
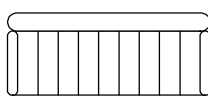
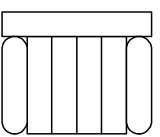
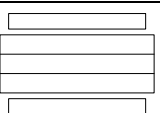
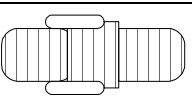
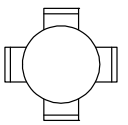
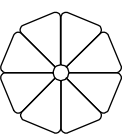
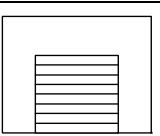
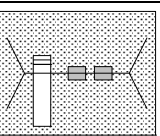
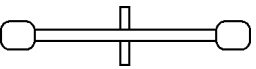
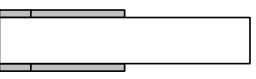
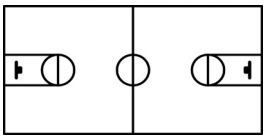
Sl. 17.29: Predlog grafičkog simbola za lalu (Tulipa)

### 17.1.3. Grafički simboli za ostale elemente pejzažnih prostora

Na pejzažnim prostorima se nalazi sve ono što je naše okruženje i čovekova potreba: građevinski objekti, staze, putevi, kanali za navodnjavanje i odvodnjavanje, osvetljenje, sportski tereni, mašine, mostovi, elementi za rekreaciju, kulturnoumetnički spomenici, muzeji, groblja, saobraćajnice, različite mreže (elektro, vodovodne, kanalizacione, naftovodne, gasovodne, telekomunikacione i sl.). Sve navedeno je potrebno nacrtati na projektnoj i drugoj tehničkoj dokumentaciji, za što se u velikoj meri koriste šematski crteži. Grafički simboli za sve ostale elemente sem biljnih vrsta su u mnogo većoj meri definisani standardima ili su usvojeni, te se takvi koriste u stručnoj literaturi. U tabelama 17.3, 17.4 i 17.5 prikazani su oni simboli koji se najčešće u literaturi koriste ili su standardima definisani.

Tabela 17.3: Neki grafički simboli elemenata pejzažnog prostora

Značenje	Simbol	Kombi	
Prirodni teren		Kamion	
Kameni zid		Autobus	
Pesak		Trolejbus	
Šljunak		Simboli za ljude	
Lomljeni kamen		Drveni most	
Cigla		Gvozdeni most	
Drvo		Kamena ograda	
Humus		Žičana ograda	
Stambena zgrada		Bodljikava ograda	
Poslovna zgrada		Drvena ograda	
Svetlarnik		Granica parcela sa brojčanom oznakom	
Automobil u pogledu spreda i odozgo		Parcele sa katastarskim oznakama	

Stubna lampa	
Lampa povijena na jednu stranu	
Strane sveta (sever)	
Klupa bez naslona	
Klupa sa naslonom	
Baštenska stolica	
Izletnički sto sa klupama	
Ležaljka	
Baštenski sto	
Suncobran	
Roštilj	
Dečije lulaške	
Klackalica	
Odskočna daska	
Košarkaško igralište	

Teniski teren	
Odbojkaški teren	
Fudbalski teren	
Mesto za odlaganje otpada	
Biciklistička staza	
Mesto prilagođeno osobama sa invaliditetom	
Žičana železnica bez zaštitne mreže	
Bazen za ptice	
Mineralno (banjsko) vrelo	
Protivpožarni hidrant	
Kanalizacioni otvor	
Drenažni otvor	

Tabela 17.4: Neki grafički simboli za hidraulične šeme (izvod iz SRPS L.NI.002 do SRPS L.NI.007)

Značenje	Simbol
Radni, povratni i usisni vod	
Upravljački vod	
Drenažni vod	
Električni vod	
Oduška	
Izvor hidrauličkog pritiska	
Opšta oznaka za pumpu	
Klipna pumpa	
Membranska ručna pumpa	
Električni motor	
Toplotni motor	
Rezervoar povezan s atmosferom i rezervoar pod pritiskom	
Brzodelujuća spojnica	
Slavina	
Merač zapreminskog protoka	
Merni davači	
Nepovratni ventil	
Blokirajući ventili	

Naizmenični ventil	
Prigušni ventili	
Ravni zaporni ventil	
Ugaoni zaporni ventil	
Ravni sigurnosni ventil	
Ugaoni sigurnosni ventil	
Nepovratni klapet ventil	
Slavina	
Regulator protoka: sa stalnim i promenljivim protokom	
Regulator pritiska	
Zasun	
Priključak za napajanje vodom	
Prigušivač šumova	
Mesto za točenje vode	
Požarni hidrant	
Baštenski hidrant	
Filter	
Savitljiva cev (cevovod)	
Prirodni vodoskok	

Tabela 17.5: Grafički simboli za navodnjavanje










Značenje	Simbol		
Označavanje kota - visine			
Visinska ravan – nivo u pogledu odozgo			
Visinska ravan – nivo u pogledu spreda			
Nivo vode			
Ravan gradnje			
Usek ili nasip			
Zemljište			
Kanal za unutrašnje vode (njivski kanal), 4 - broj kanala			
Priključak za kanal			
Priključak za kanal u uzdužnom preseku			
Zalivni kanal broj 2. Ukrštanje sa kanalom nižeg reda (2/1)			
Zalivni kanal			
Kanal sa dvojnomo funkcijom - odvodnjavanje i navodnjavanje			
Odbrambena linija visoke obale			
Brana - pregrada za vododerine			
Brana - pregrada za vododerine u preseku			
Cevni propust, sifon			
Planirani cevni propust, sifon			
Diker ili sifon			
Most - propust			
Planirani most - propust			
Propust za rekonstrukciju u uzdužnom preseku			
Planirani propust za rekonstrukciju u uzdužnom preseku			
Propust za rušenje			
Propust za rušenje u uzdužnom preseku			
Propust za rekonstrukciju			
Propust za rekonstrukciju u preseku			


Nastavak tabele 17.5.

Značenje	Simbol		
Betonski zaštitni zid za cev		Brzotok	
Izolovana cev		Sigurnosni preliv	
Razne prostirke		Preliv	
Centralni bunar		Stepenica u dnu	
Reni bunar - bunar sa drenovima		Slivnik za kanalizaciju	
Sabirni bunar		Slivnik za kanalizaciju pored vode	
Bunar pijaće vode		Baštenski hidrant	
Kaptaža izvora		Zatvarač	
Filtraciona galerija		Centralni ispust	
Pumpna stanica		Nadzemni protivpožarni hidrant	
Objekat za zahvat vode		Podzemni protivpožarni hidrant	
Vodotoranj		Oprema za pražnjenje	
Otvoreni bazen vode		Ventil za ozračavanje	
Zatvoreni bazen vode, jednokomorni i višekomorni		Ugradbena garnitura zatvarača	
Šaht za čišćenje		Usisavanje vazduha	
Upojni šaht		Zaštitna cev	
Šaht za pad		Cevni most	
Šaht sa ustavom		Tabla za označavanje	
Šaht sa kliznim zatvaranjem		Prevođenje cevovoda preko mosta	

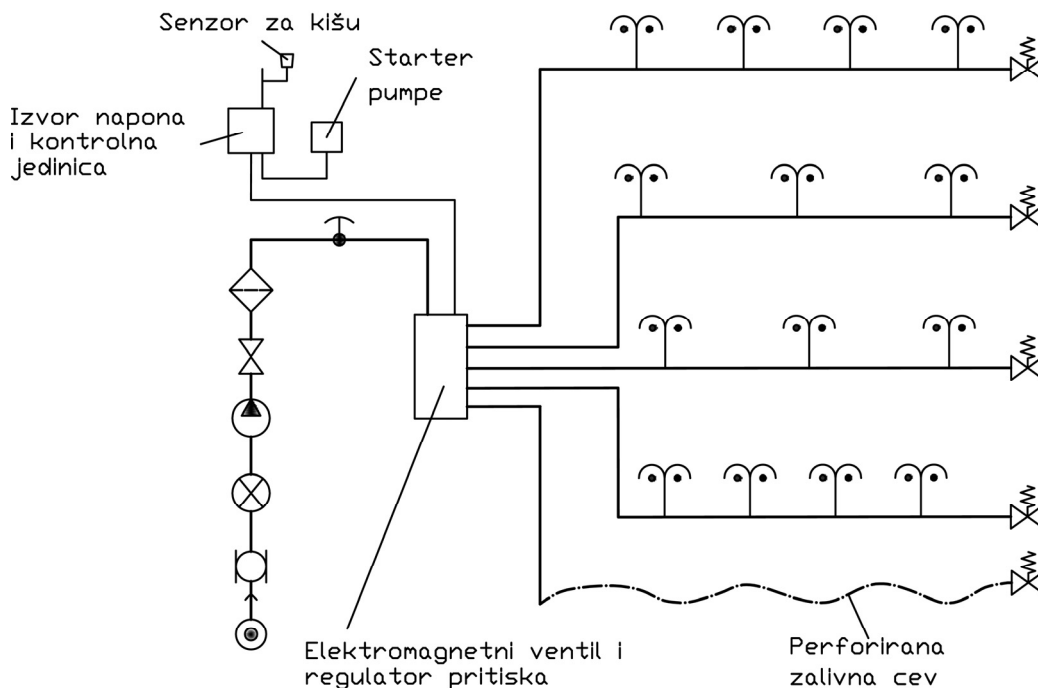
**Zadatak 17.1:**

Nacrtati hidrauličku šemu zalivnog sistema za ratarske kulture.

Kako zadatak nije bliže i preciznije postavljen, nacrtaće se, primera radi, šematski crtež zalivnog sistema sa rotacionim rasprskivačima i perforiranom cevi za zalivanje kap po kap, sa ostalom osnovnom pripadajućom opremom. Za neke delove sistema postoje grafički simboli bilo usvojeni, definisani standardima ili topografskim digitalnim ključem (tabele 17.2 i 17.4), kao što su:  izvor hidrauličkog pritiska,  vodomer,  pumpa,  slavina,  filter,  oduška,  rasprskivač,  sigurnosni ventil i cevi za vodu . Za ostale delove ne postoje usvojeni grafički simboli (sl. 17.30).

Za one delove sistema za koje ne postoje grafički simboli, mogu se usvojiti i objasniti u legendi ili pojasniti uz sam crtež, kao npr. perforirana zalivna cev koja je nacrtana sa linijom crta-tačka-crta .

Delovi za koje ne postoje grafički simboli mogu se nacrtati sa blokovima. Blokovi su kvadratići, pravougaončići, kružići i slično, koji se na samom crtežu označe i pojasne rečima. Na ovom primeru je „Izvor napona i kontrolna jedinica”, „Senzor za kišu” itd.



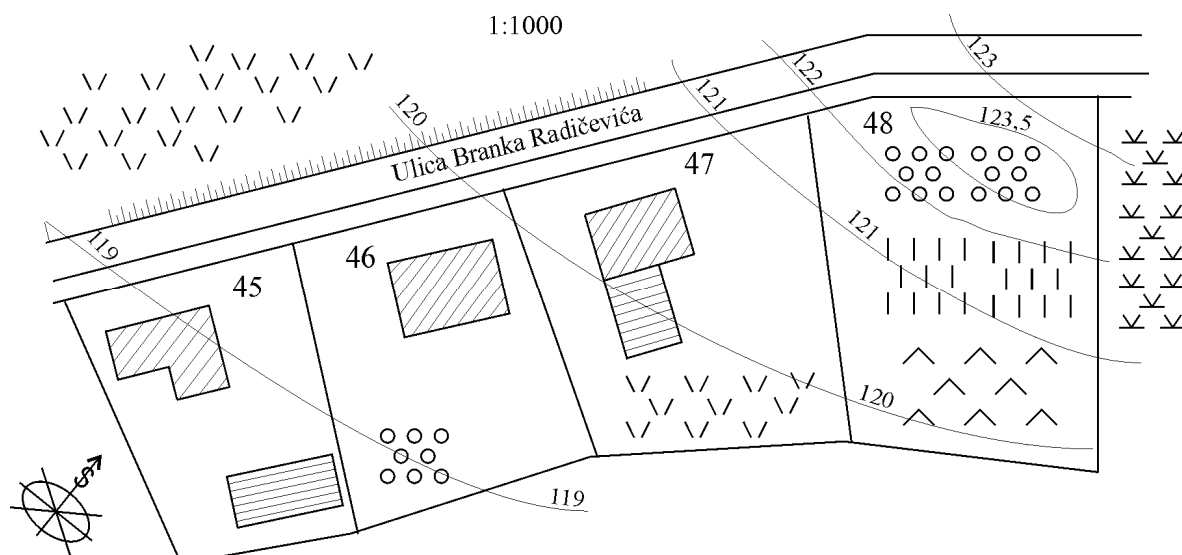
Sl. 17. 30: Hidraulička šema zalivnog sistema (Zadatak 17.1.)

**17.2. CRTEŽI POSTOJEĆIH PEJZAŽNIH PROSTORA**

Crteži postojećih pejzažnih prostora ili situacioni planovi predstavljaju crteže zatečenih, neuređenih prostora onakvih kakvi su u stvarnosti. Najčešće se koristi kotirana projekcija za izohipsama terena (kako bi se pokazala reljefnost pejzaža), grafički prikazi i grafički simboli svega onog što se u prostoru nalazi i što treba nacrtati (sl. 17.31).

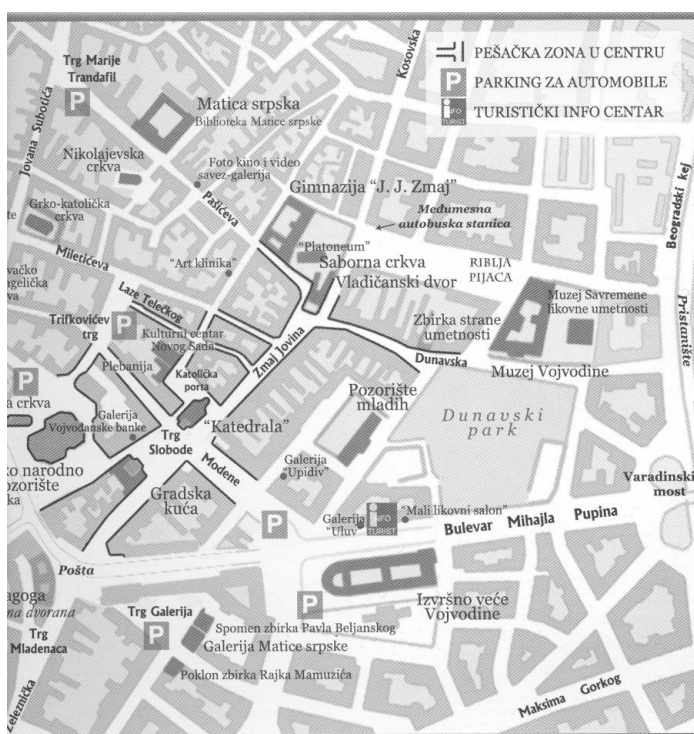
Na ovakvim crtežima je obavezna razmera (1: 1000), oznaka za strane sveta kao i drugi bitni podaci, kao što su grafički prikazi i simboli za objekte, postojeće rastinje, naziv ulice, katastarski brojevi parcela, postojeća vodovodna, kanalizaciona i elektro mreža (ako je to bitno), kanal i sl.





Sl. 17.31: Kotirana projekcija postojećeg stanja prostora za pejzažno uređenje

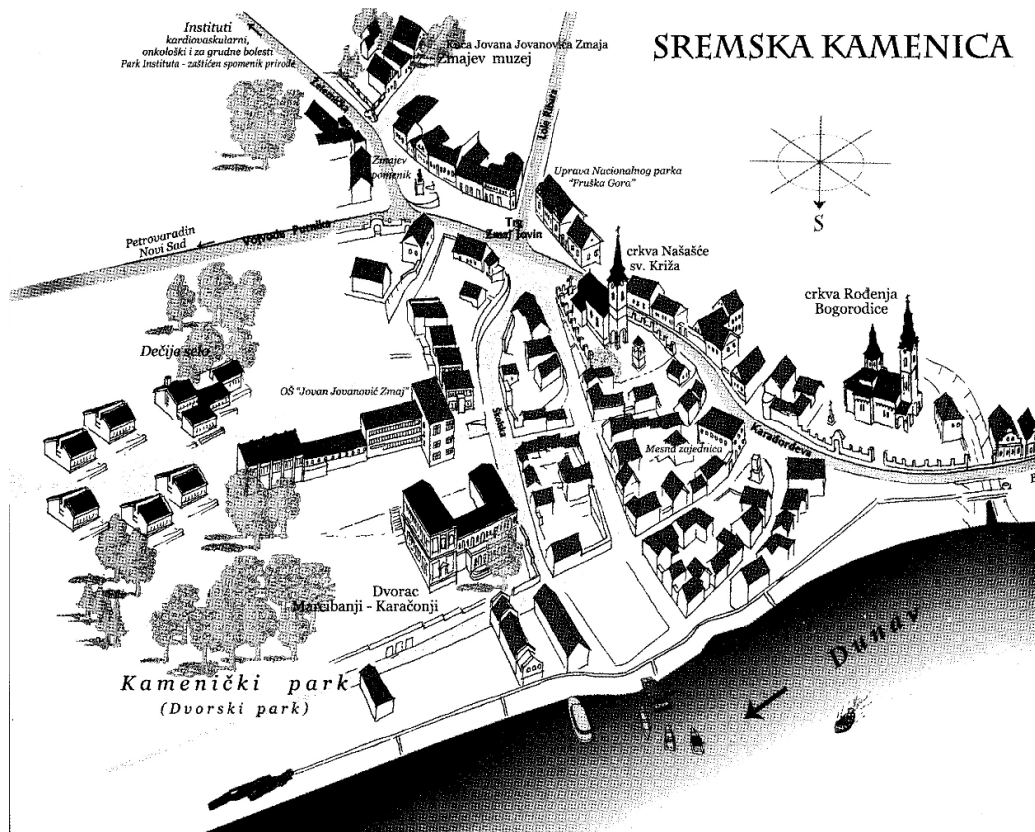
Ako nije bitan reljefni izgled pejzaža, tada se ne crtaju izohipse terena, npr. pri crtanju gradova, ravnog terena i sl. Primer šematskog crteža, koji služi kao projektni zadatak prikazan je na sl. 17.32. To je deo grada, gde su grafičkim prikazom nacrtani grupisani objekti, ulice, važniji objekti itd. Na ovakvom crtežu treba da se daju i ostali potrebni podaci bitni onome ko }e pejzažno da uredi i menja dati prostor (razmera, oznaka za strane sveta, postoje}e rastinje, tip zemljišta, klimatski uslovi, broj stanovnika, broj i frekvencija vozila i sl.).



Sl. 17.32: Šematski crtež dela Novog Sada (postojeće stanje), (Stanojlović Aleksandar, @iža, Pančevo- Novi Sad, 2005.

Kada je potreban vizuelniji, prostorni izgled postojećeg pejzažnog prostora koristi se aksonometrija ili ptičija perspektiva sa grafičkim prikazom biljnih vrsta (sl. 17.33). Na ovoj slici nacrtan je deo varošice sa ulicama, objektima i značajnijim rastinjem.

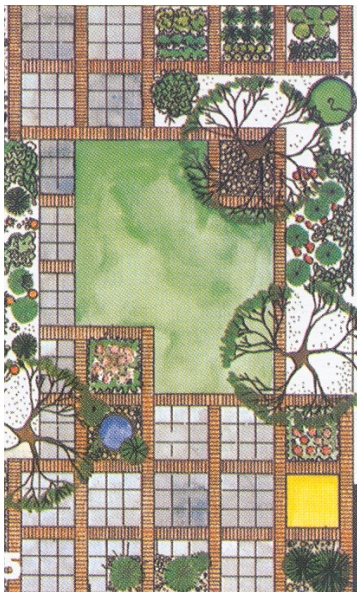
Crteži postojećeg pejzažnog prostora koriste se uz projektne zadatke.



Sl. 17. 33: Šematski crtež - ptičija perspektiva dela varošice (Sremska Kamenica) – projektni zadatak (StanojlovićAleksandar, @iža, Pančevo- Novi Sad, 2005.)

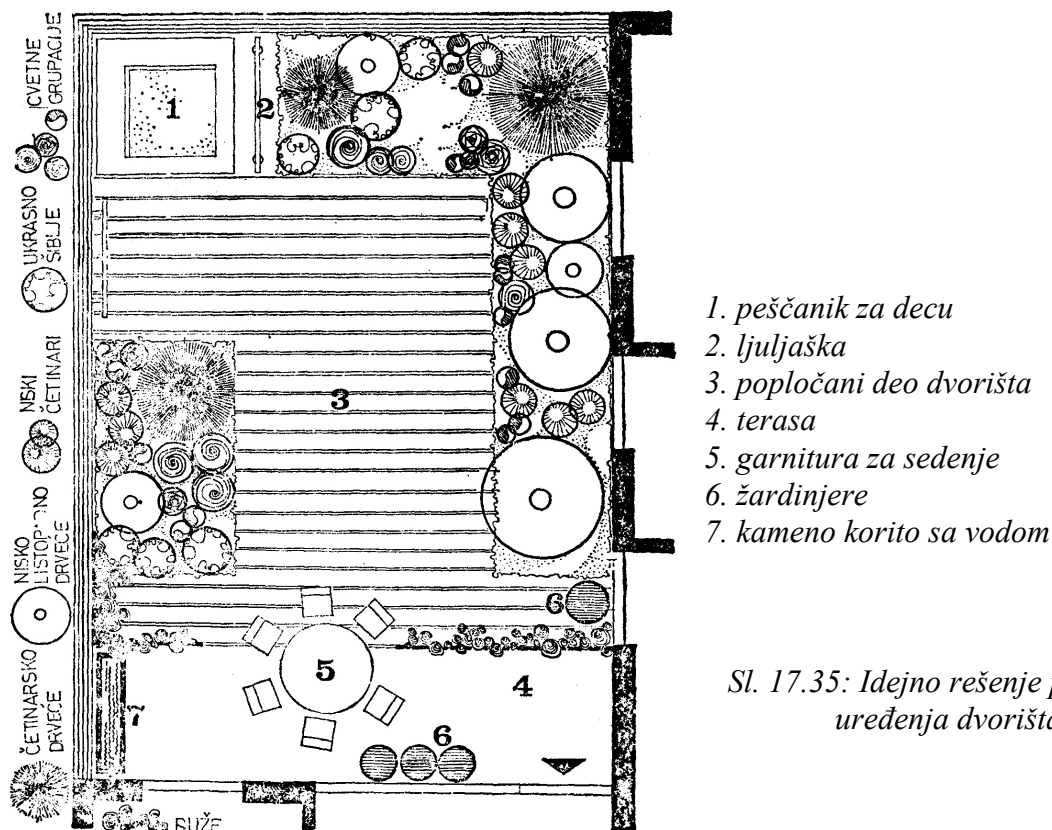
### 17.3. CRTEŽI IDEJNIH REŠENJA

Za crtanje idejnih rešenja za uređenje pejzažnih prostora koriste se sve navedene vrste crteža zavisno od toga kome je crtež namenjen. Ako će crtež koristiti stručno lice može se koristiti ortogonalni pogled sa grafičkim prikazom biljnih vrsta i elemenata za uređenje (sl 17.34). Ovaj crtež je nacrtan na računaru primenom nekih od mnogobrojnih softvera. Na osnovu ovakvog crteža stručnjak će moći da zamisli kako će to rešenje izgledati u prostoru nakon pune vegetacije.



Na slici 17.35 prikazano je idejno rešenje za pejzažno uređenje dvorišta. Korišćen je ortogonalni pogled sa grafičkim prikazom biljnih vrsta i legendom. Crtež nije pogodan za laike (nestručna lica).

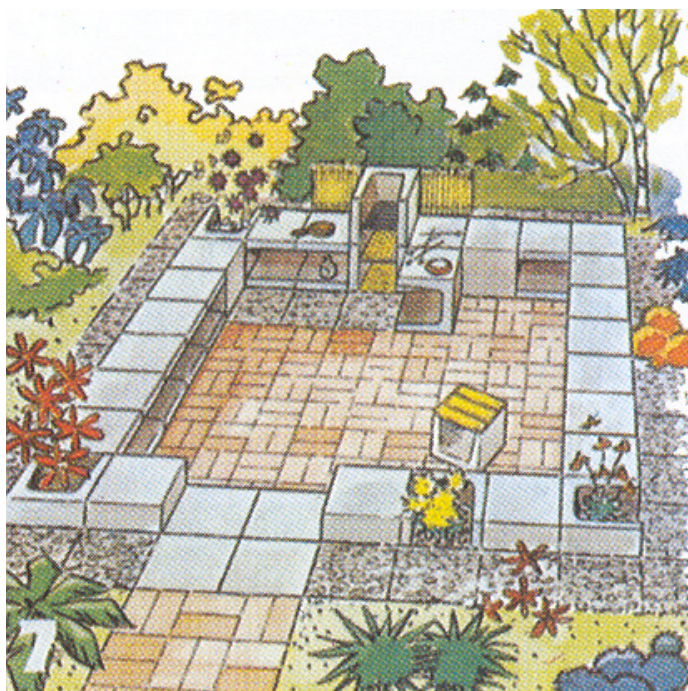
Sl. 17.34: Idejno rešenje platoa. Ortogonalni pogled odozgo (Grupa autora: Velika knjiga o bašti)



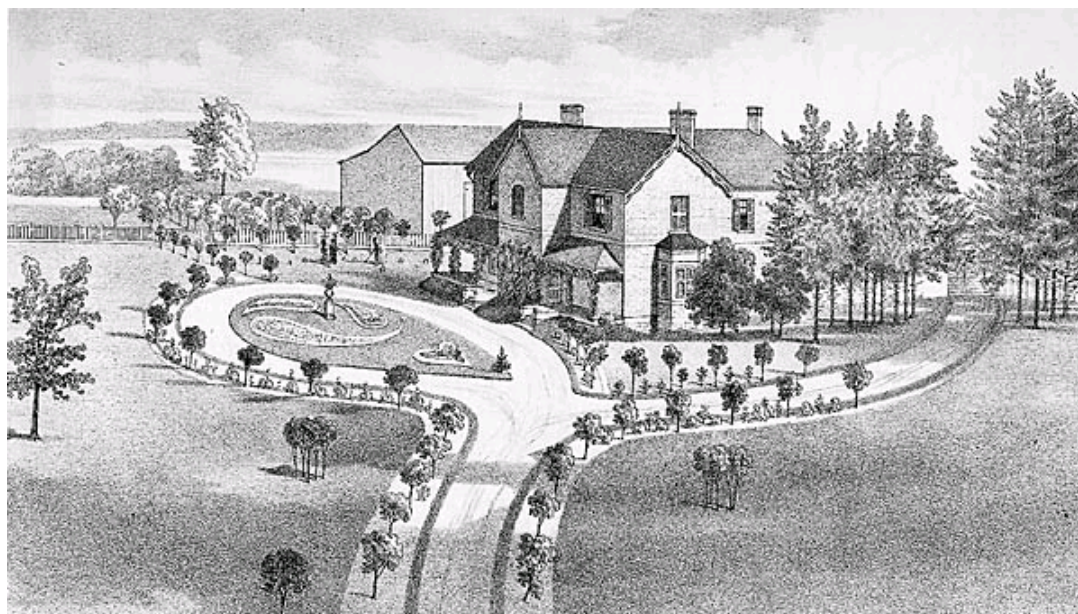
Sl. 17.35: Idejno rešenje pejzažnog uređenja dvorišta.

Ako će crtež koristiti manje stručna lica i na osnovu njega će odlučivati da li će predlog uređenja prihvatiti ili ne, korišćemo aksonometrijski crtež ili centralnu projekciju kako bi bio prilagođeniji i vizuelniji korisnicima. Na sl. 17.36 za crtanje idejnog rešenja dela dvorišta korišćena je približna perspektiva sa grafičkim prikazom zelenila.

Na crtežu sl. 17.37 prikazana je ideja za uređenje prilaza imanju sa drvoredom i istaknutom skulpturom ispred centralne zgrade. Takođe, korišćena je približna perspektiva, ali i veština talentovanog crtača.



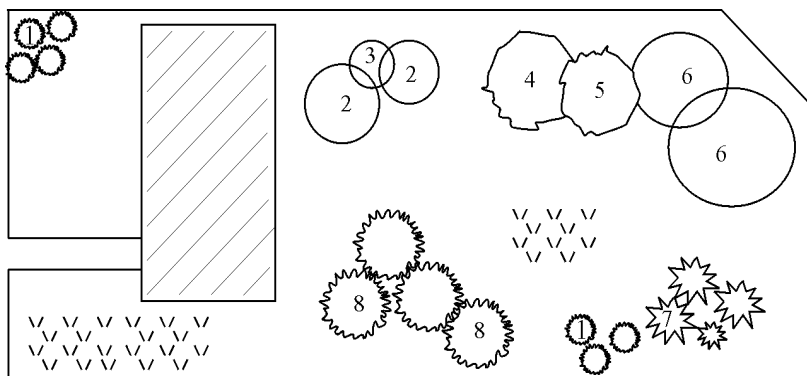
Sl. 17.36: Idejno rešenje dela vrta – približna perspektiva sa grafičkim prikazom zelenila  
(Grupa autora: Velika knjiga o bašti)



Sl. 17.37: Ideja za pejzažno uređenje prilaza imanju (približna perspektiva)

#### 17.4. IZVOĐAČKI CRTEŽI

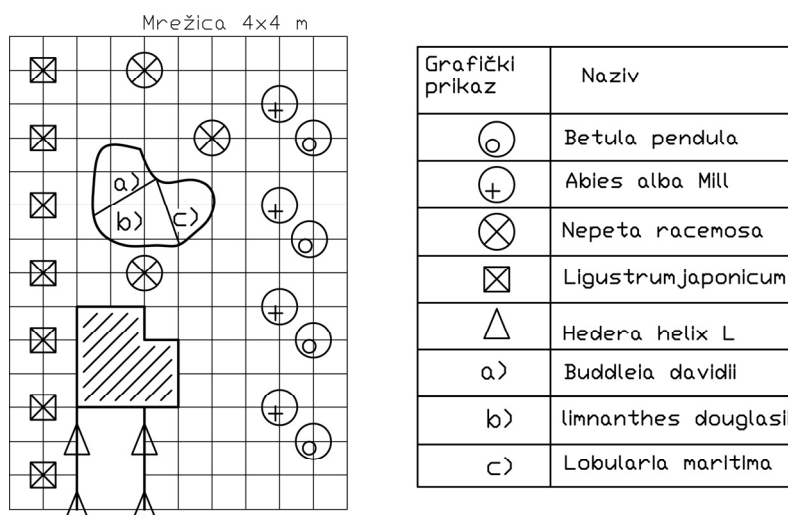
Izvođački crteži su crteži za prikazivanje načina uređenja pejzažnog prostora i mesta za sadnju i setvu biljnih vrsta. Najčešće se koristi kotirana projekcija ili ortogonalni pogled odozgo u kombinaciji sa grafičkim prikazima i grafičkim simbolima za rastinje i ostale elemente (sl. 17.38). Na ovom crtežu orijentaciono su zadata mesta sadnje naznačenog rastinja bez tačno zadatih mesta i međusobnih rastojanja. Međutim, to je uglavnom potrebno, te se to definiše na jedan od načina za dimenzionisanje, poglavlje 12, 12.1. RAZMERA CRTANJA (OZNAČAVANJE DIMENZIJA).



Sl. 17.38: Idejno rešenje pejzažnog izgleda dvorišta (šematski crtež)

1. piramidalna tuja (*Thuja occ "Smaragd"*), 2. bor (*Pinus nigra*), 3. smrča (*Picea abies*), 4. lipa (*Tilia tomentosa*), 5. sofora (*Sophora japonica*), 6. kesten (*Aesculus hippocastanum*), 7. mablura (*Maclura aurantiaca*), 8. dudovac (*Brussonetia papyrifera*)

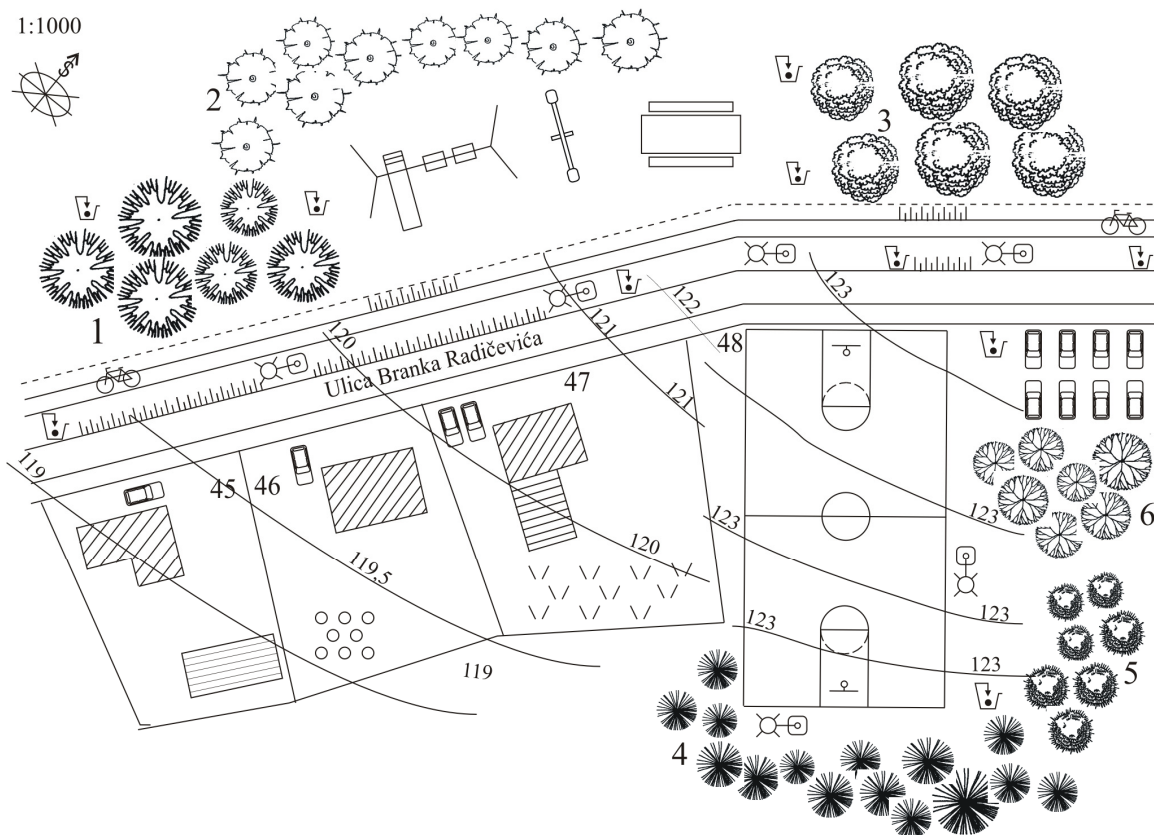
Označavanje dimenzija međusobnog rastojanja između biljnih vrsta pri sadnji i setvi je važno kako bi se pravilno razvijali i u punoj vegetaciji imali dovoljno svetlosti i životnog prostora. Takav jedan izvođački crtež prikazan je na sl. 17.39. Dimenzije su zadate mrežicom od 4 x 4 m. Biljne vrste su date kao primer, a ne kao projektno rešenje.



Sl. 17.39: Izvođački crtež

### 17.5. CRTEŽI IZVEDENIH (UREĐENIH) PEJZAŽNIH PROSTORA

Na ovim crtežima treba prikazati uređene i ulepšane pejzažne prostore koji će biti prilagođeni nameni, koji će zadovoljiti zahteve korisnika, kao i osnovne principe pejzažne arhitekture. Koriste se sve vrste crteža sa grafičkim prikazima i simbolima, a najčešće kotirana projekcija ili ortogonalni pogled odozgo. Na sl. 17.40 prikazan je šematski crtež izvedenog, uređenog prostora koji je bio zadat na sl. 17.31. Glavni elementi uređenog prostora su rastinje, košarkaško igralište, dečiji kutak sa ljuľjaškom i klackalicom, biciklistička staza, kanal, osvetljenje, parking za automobile i kante za otpad.

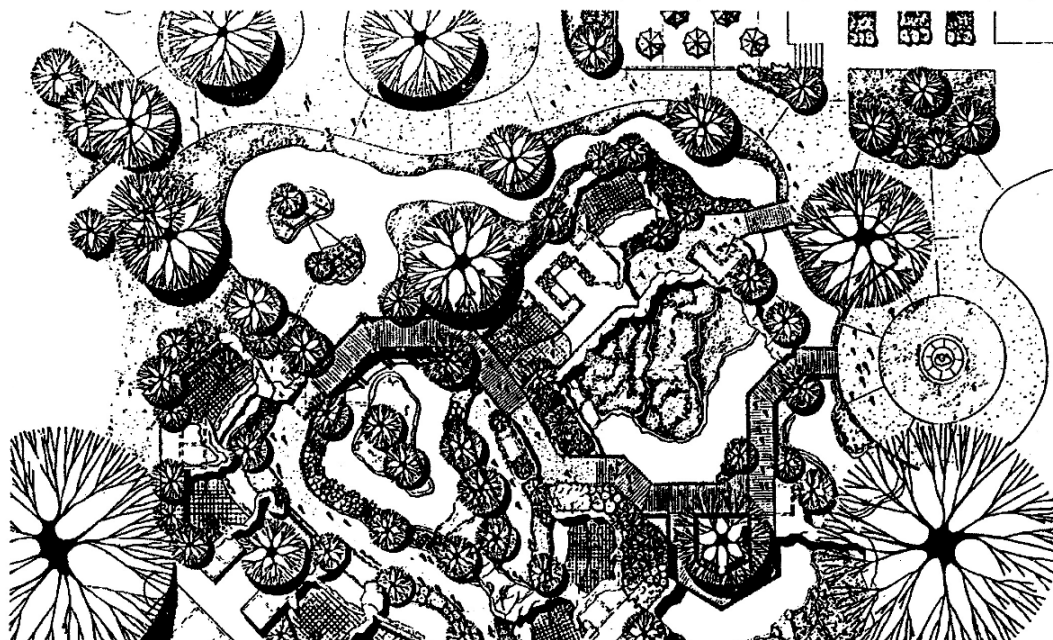


Sl. 17.40. Idejno rešenje postavljenog zadatka sa sl. 17.31.

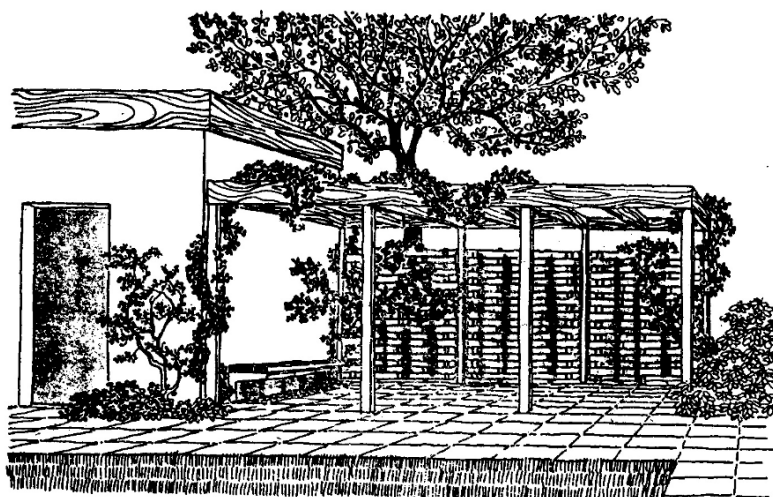
1. visoka tuja (*Thuja orientalis*), 2. bagrem (*Robinia pseudoacacia*), 3. kesten (*Aesculus hippocastanum*), 4. bor (*Pinus nigra*), 5. bodljikava smrča (*Picea pungens*), 6. lipa (*Tilia tomentosa*)

Na sl. 17.41 prikazano je izvedeno pejzažno uređenje, koristeći ortogonalni pogled odozgo sa grafičkim prikazima i simbolima važnijeg rastinja

Na sl. 17.42 data je normalna pespektiva uređenog kutka dvorišta za grafičkim prikazom pejzažnog rastinja u fazi vegetacione bujnosti. Na ovom crtežu došla je do izražaja umešnost crtača.



Sl. 17.41: Ortogonalna projekcija pejzažno uređenog prostora i primena grafičkih simbola (Tore A.L., 1986.)

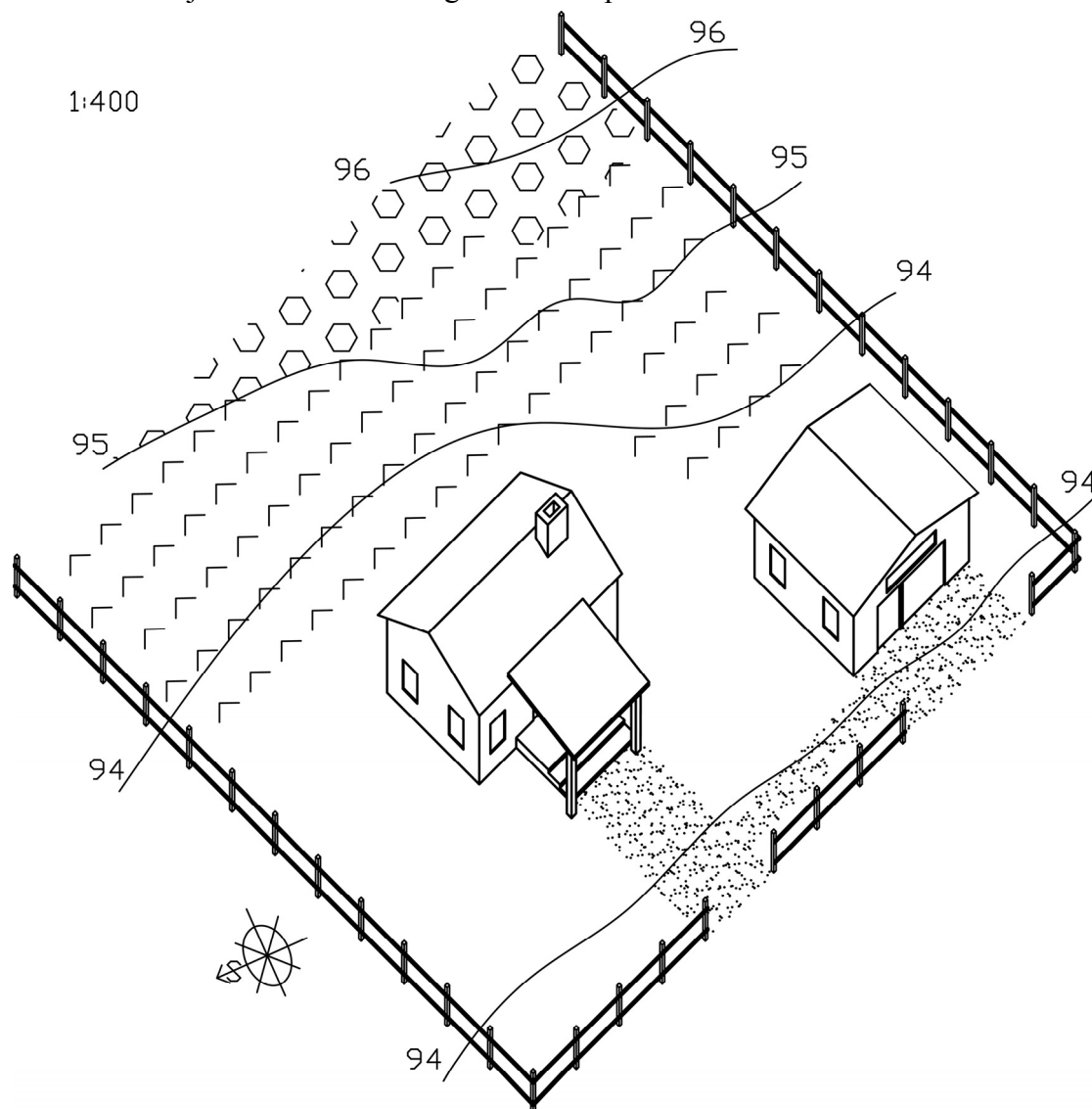


Sl. 17.42: Perspektiva detalja dvorišta (DulićGordana, Tehničko crtanje, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2001.)

**Zadatak 17.2.** Zadat je crtež postojećeg stanja (situacioni plan) dvorišta sa kućom (sl. 17.43). Nacrtati šematski crtež uređenog prostora. Nema posebnih zahteva niti ograničenja u pogledu rešenja zadatka. Razmera crtanja je 1:400.

Prema zadatom crtežu u dvorištu osim kuće i radionice sa garažom nalazi se samo voćnjak i povrtnjak. Ovom dvorištu nedostaje ukrasnih biljaka i dečiji kutak. Uređenje dvorišta može biti vrlo različito. Jedno od dobrih rešenja je da se zadrži i proširi voćnjak, a da

se povrtnjak izmesti i malo smanji, obzirom na značajne dimenzije dvorišta. Da bi se dobio ravan teren za dečiji kutak dvorište iza garaže treba poravnati na kotu 94.

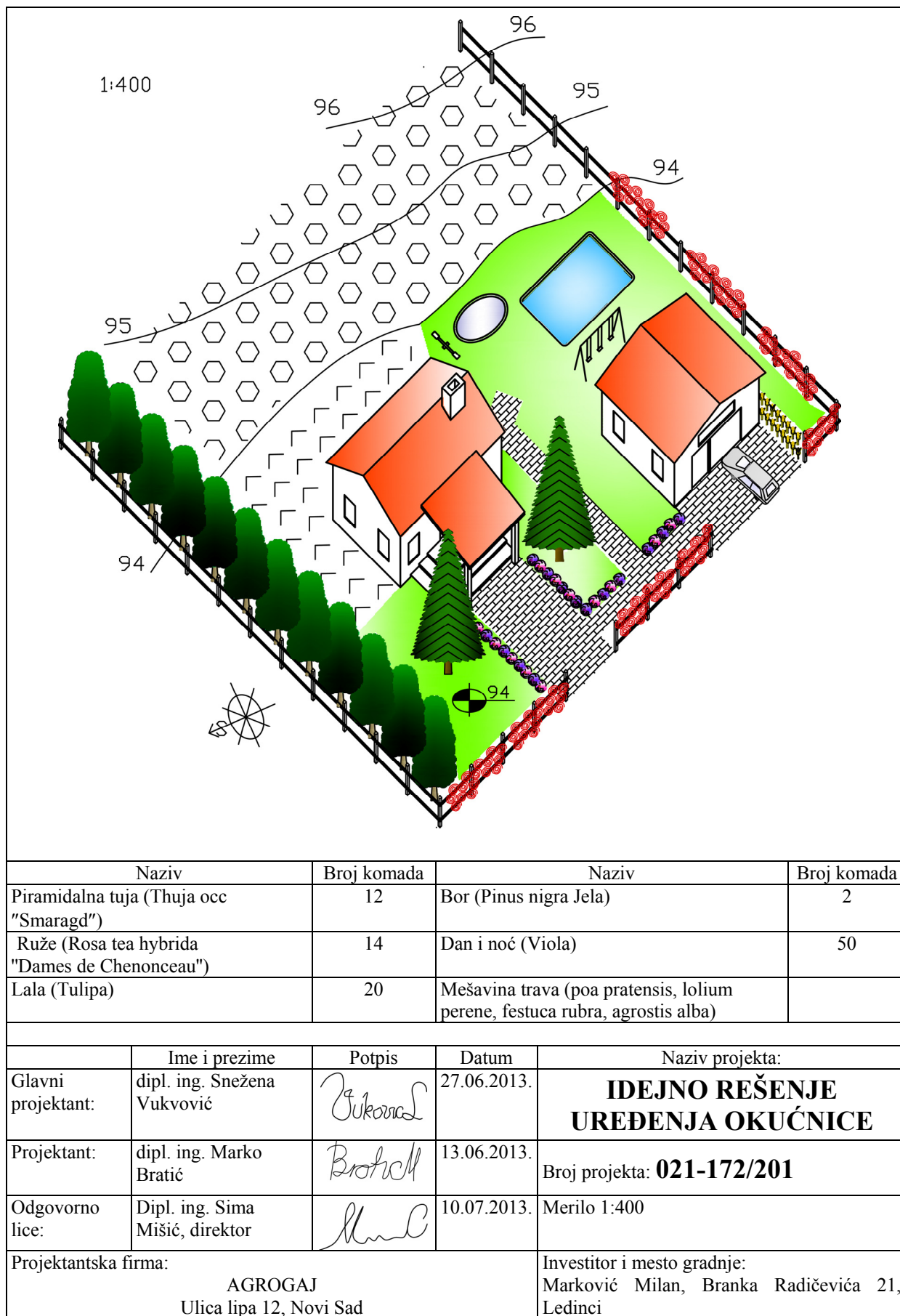


Sl. 17.43: Postavka zadatka 17.2

Predlog osnovnih elementi za uređenje kuće i dvorišta su:

- drvodred piramidalnih tuja na severnoj strani kako bi štitio dvorište i kuću od vetra i nanosa snega,
- dva bora ispred kuće da prave hladovinu i ulepšaju prostor,
- proširen voćnjak, a povrtnjak malo pomeren,
- bazen za decu sa peščanicom, ljuljaškom i klackalicom,
- staze od cigala,
- trava ispred kuće i oko radionice,
- puzajuće ruže oko ograde i
- sezonsko cveće oko staze.

Za crtanje kuće i garaže sa radionicom korišćena je dimetrija sa uglovima od  $45^\circ$  za ose X i Y. Za ostale elemente korišćeni su grafički prikazi i grafički simboli (sl. 17.44).



Sl. 17.44: Idejno rešenje uređenja okućnice (Zadatak 17.2)



## 17.6. SKICE I FOTOGRAFIJE

**Skice** se koriste da se brzo, u osnovnim crtama, zabeleži neka pejzažna zamisao ili lep pejzažni postojeći prostor. Skice se mogu crtati priborom ili slobodnom rukom. Za crtanje skica koriste se sve vrste crteža, pri čemu ne postoje “čvrsta pravila”, već su stvar veštine, iskustva i talenta, da se ideja i vizija koji imamo u glavi brzo, što lepše i stvarnije predstavi na papiru (sl. 17.45). Na osnovu skice crta se i razrađuje potrebna tehnička dokumentacija.

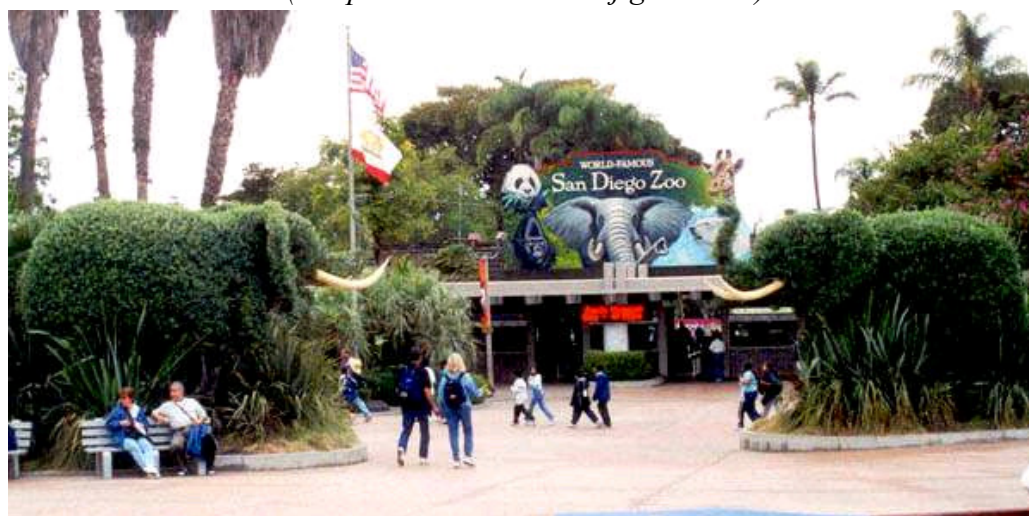


Sl. 17.45: Skice pejzažnih prostora

**Fotografije** su vrlo jasne širokom krugu korisnika, međutim mogu se koristiti samo za većgotove oformljene pejzažne prostore (sl. 17.46). Na fotografiji se najjasnije vidi spoljašnji vizuelni izgled gotovog uređenog pejzažnog prostora (sl. 17.47 i sl. 17.48). Izgled pejzažnog prostora na fotografiji je najsličniji izgledu koje vidi naše oko.



Sl. 17.46: Fotografije detalja pejzažno uređenih prostora u punoj vegetaciji  
(Grupa autora: Velika knjiga o bašti)



Sl. 17.47: Fotografija lepo uređenog ulaza u zoološki park u San Dijegu, Amerika



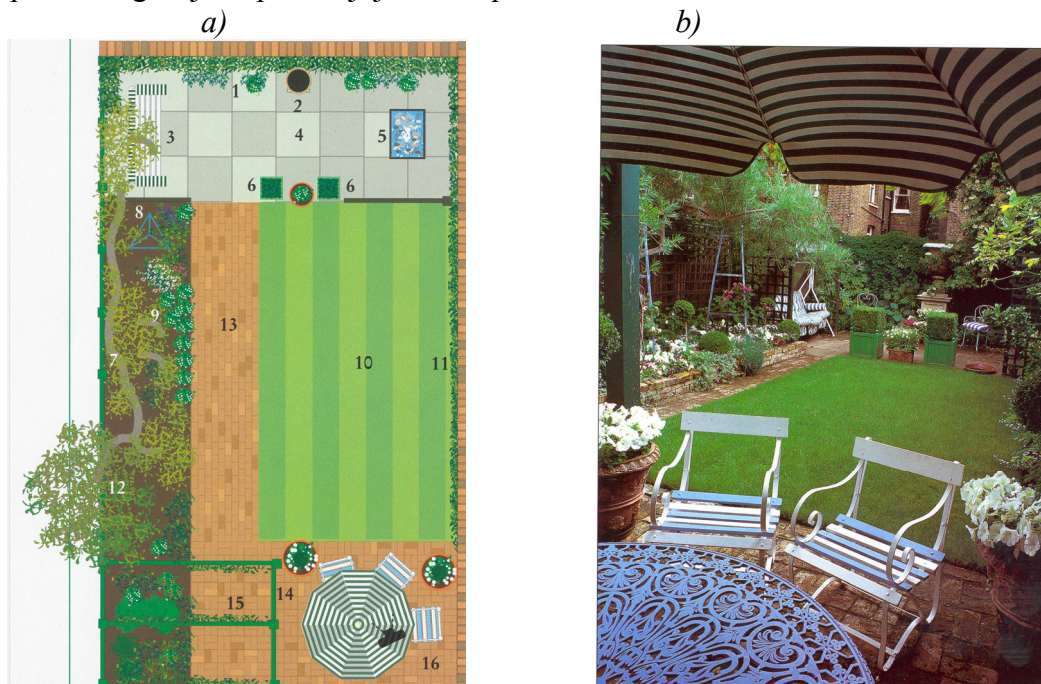
Sl. 17.48: Fotografije kuće sa delom uredenog dvorišta

### 17. 7. MARKETINŠKI CRTEŽI

Marketinški crteži namenjeni su širem krugu korisnika, sa ciljem da se pokaže ideja, mogućnost, i da se privuku korisnici bilo projektne dokumentacije, bilo biljnih vrsta. Marketinški crteži treba da su u boji, lepi i dopadljivi, bar toliko koliko će lepo izgledati prostor nakon izvedenog stanja. Koriste se sve vrste crteža, najčešće aksonometrija i perspektiva u kombinaciji sa fotografijama.

Na sl. 17.49,a nacrtan je marketinški ortogonalni šematski crtež kutka dvorišta primenom računara, sa fotografijom izvedenog stanja, sl. 17.49,b.

Fotografije sa sl. 17.50 najbolje idu u prilog marketingu za one koji su projektovali, izveli i koji održavaju osmišljeno rešenje. Prisustvo ovakvih i sličnih zelenih i cvetnih skulptura obogaćuje i oplemenjuje i nas i prostor oko nas.



Sl. 17.49: Marketinški crtež: a) projekat), b) izvedeno rešenje



Sl. 17.50: Fotografije kao deo marketinške dokumentacije

## 17.8. CRTEŽI NACRTANI RUKOM

Do pojave računara i softvera za crtanje i projektovanje, crteži su se crtali isključivo rukom pomoću pribora za crtanje. Najčešći pribor koji se koristi za ručno crtanje su olovke, tuševi, razne drvene bojice, vodene boje i sl. a često i kombinacija svega nabrojanog. Osnovni deo projektne dokumentacije su crteži, za koje je potrebno je mnogo vremena, naročito ako se crta ručno. Stoga izrada projektne dokumentacije znatno poskupljuje pejzažno uređenje prostora. Crteže za projektnu dokumentaciju pejzažne arhitekture, može da nacrti rukom samo onaj ko nauči sva pravila i metode za crtanje i ko ima umetnički smisao za ovu veštinu. Ručno nacrtana kotirana projekcija sa grafičkim prikazima i simbolima data je na slikama 17.51 i 17.52,a.

Perspektiva ulice, ručno nacrtana, za potrebe tehničke dokumentacije pejzažne arhitekture prikazana je na sl. 17.52,b.

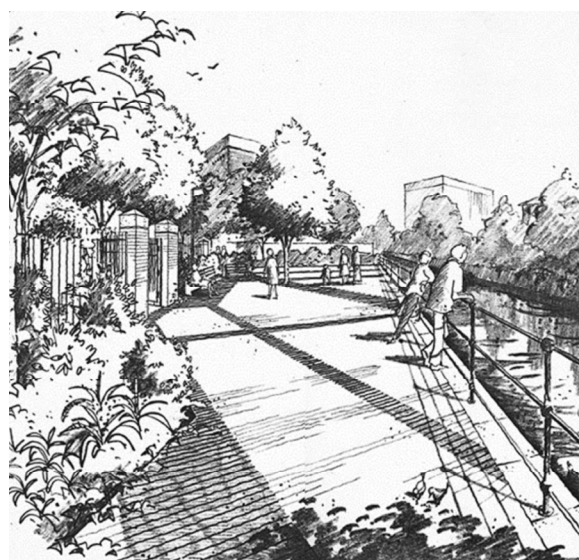
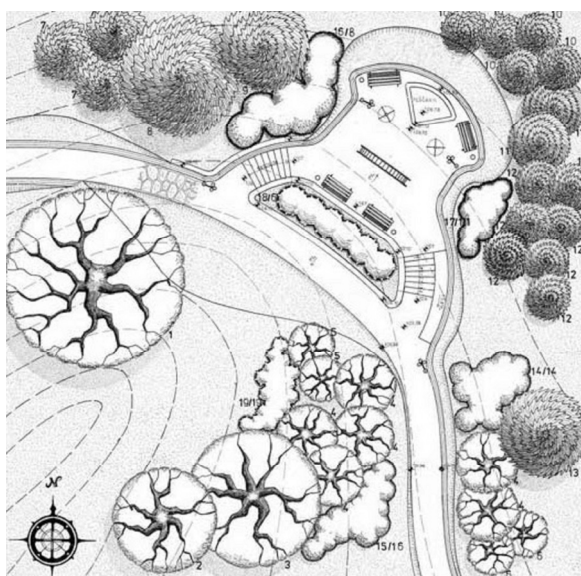
Originalni crteži ručno nacrtani čuvaju se u arhivi, a koriste se njihove kopije.



Sl. 17.51.  
Ručno nacrtana  
kotirana projekcija  
u boji

a)

b)

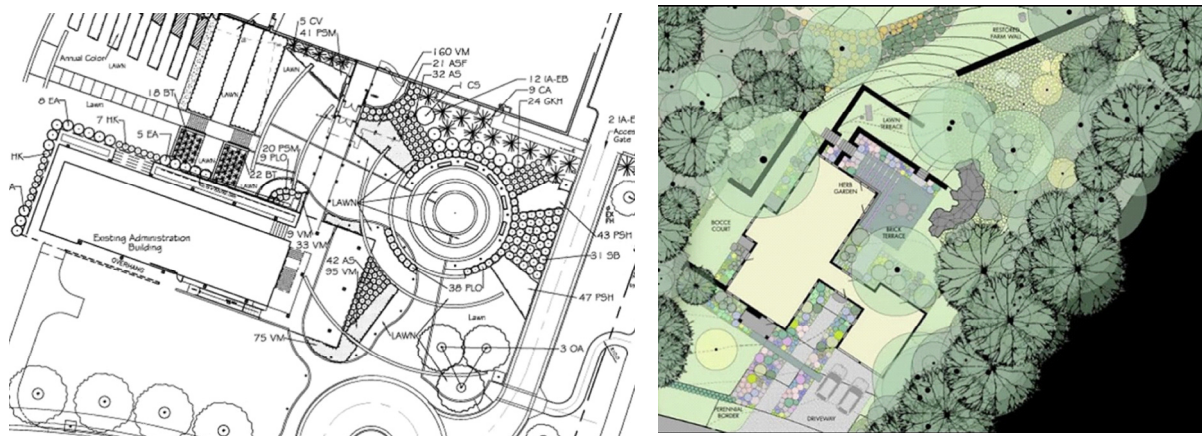


Sl. 17.52: Ručna izrada crteža za potrebe tehničke dokumentacije  
a) kotirana projekcija, b) perspektiva

## 17.9. CRTEŽI NACRTANI POMOĆU RAČUNARA

Pojava računara i računarskih softvera znatno je olakšala i ubrzala crtanje i izradu projektne tehničke dokumentacije za potrebe pejzažne arhitekture. Najčešće korišćeni softver je AutoCAD, softverske korporacije Autodesk, koji je prilagođen za potrebe pejzažne arhitekture. Jednom nacrtani crtež pomoću računara, može se ponovo koristiti u celosti ili delimično, što je posebno dobro pri crtanju grafičkih prikaza i grafičkih simbola.

Da bi se za crtanje koristio računar, potrebno je znati sva pravila crtanja i potrebno je naučiti softver, što je daleko složenije nego naučiti koristiti trouglove, šestar, olovke... Crtanje na računaru nije automatski, jer je računar samo brza i precizna mašina koja ništa ne može uraditi sama. Pomoću računara crtaju se uglavnom 2D (dvodimenzionalni) crteži, mogu i 3D (trodimenzionalni), ali su manje lepi nego kada se crtaju rukom. Crteži pejzažnih prostora nacrtanih pomoću računara, prikazani su na sl. 17. 53 i sl. 17.54.



Sl. 17.53: Crteži nacrtani pomoću računara



Sl. 17.54: Ortogonalni crtež sa šematskim prikazima, nacrtan pomoću računara

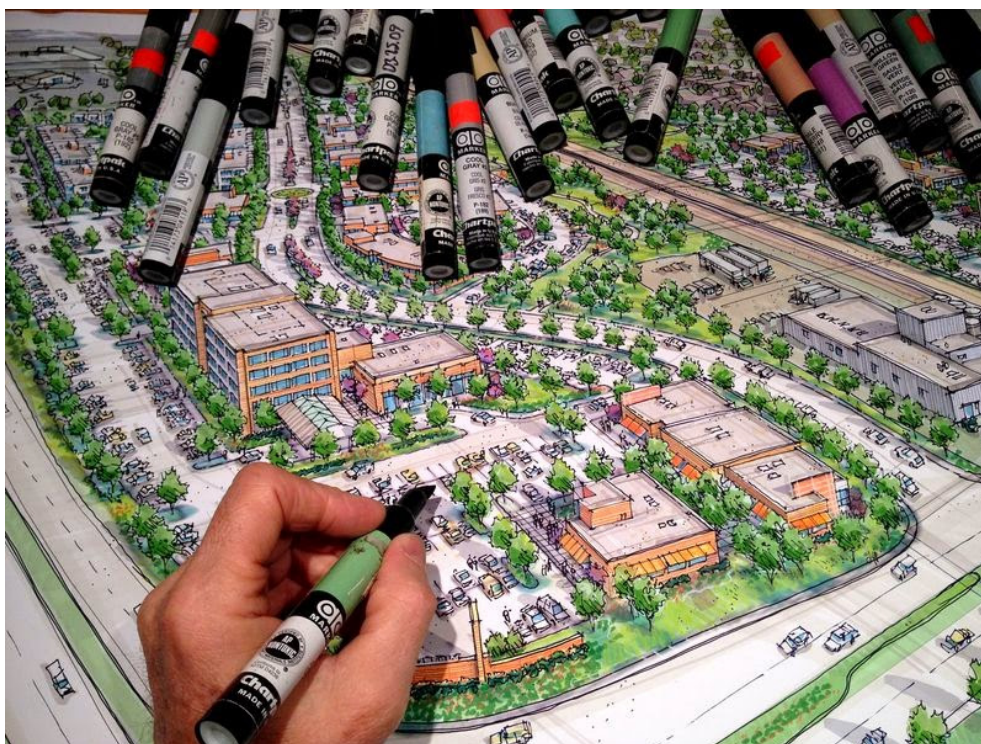
### 17. 10. KOMBINOVANI NAČIN CRTANJA

Kako ručno crtanje i crtanje pomoću računara imaju svoje prednosti i nedostatke, može se koristiti kombinovani način crtanja. Kombinovani način crtanja je mogućnost da se npr. fotografija ili ručno nacrtani crtež digitalizuje i da se na taj način brže dobije crtež u digitalnom obliku. Preko fotografije polako ce crta crtež (sl. 17.55) bilo u sofveru ili na providnom paus papiru.

Crtanje crteža preko fotografije je daleko brže nego crtanje bez nje (sl. 17.56).



Sl. 17.55. Crtanje crteža na računaru preko skenirane fotografije



Sl. 17.56. Crtanje crteža rukom preko fotografije

**LITERATURA**

1. Aleksić V., Kosi F., Petrović D.: Nacrtna geometrija sa tehničkim crtanjem, Nauka, Beograd, 1994.
2. Anagnosti P.: Perspektiva, Naučna knjiga, Beograd 1961.
3. Gagić Lj.: Nacrtna geometrija, Naučna knjiga, Beograd, 1993.
4. Gary Bertoline, Eric Wiebe: Fundamentals of graphics communication, McGraw-Hill Higher Education, 2002. god.
5. Gligorić R., Milošević T.: Nacrtna geometrija, Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet, 1999.
6. Gligorić R., Milojević Z.: Tehničko crtanje - inženjerske komunikacije, Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet, 2004.
7. Gligorić R.: Nacrtna geometrija – primena, Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet, 2015.
8. Grupa autora: Velika knjiga o bašti, IKP Evro, Beograd, MK Panonija, Novi Sad. 2001.
9. Dovniković L.: Nacrtna geometrija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1994.
10. Dovniković L.: Tehničko crtanje, uvođenje u mašinske konstrukcije, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1989.
11. Dulić G.: Tehničko crtanje, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.
12. Đorđević S.: Inženjerska grafika, Mašinski fakultet, Beograd, 1983.
13. Đorđević V. D.: Tehničko crtanje sa nacrtnom geometrijom, Kragujevac, 1994.
14. Đorđević V. D.: Praktikum za tehničko crtanje sa nacrtnom geometrijom, Naučna knjiga, Beograd, 1998.
15. Đorđević S.: Inženjerska grafika, Mašinski fakultet, Beograd, 1994.
16. Đurović V.: Nacrtna geometrija, Naučna knjiga, Beograd, 1971.
17. Frederick E. Giesecke ... (et al.): Modern graphics communication, second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2001. god.
18. Ilijević K.: Tehničko sporazumevanje u mašinstvu, Naučna knjiga, Beograd, 1992.
19. Josifović D.: Zbirka rešenih zadataka iz nacrtna geometrije, Naučna knjiga, Beograd, 1991.
20. Kokar B.: Idejno rešenje uređenja vrta za odmor, diplomski rad, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad, 2005.
21. McHou P.: The garden planer, Publikum, Zagreb, 2004.
22. Obradović R., Stojaković V.: Zbirka rešenih zadataka iz Nacrtna geometrije, Fakultet tehničkih nauka Novi Sad, 2006.
23. Popov R.: Osnovi nacrtna geometrije, Naučna knjiga, Beograd, 1983.
24. Rajner T.: Perspektiva i aksonometrija, Evropsko slovo, Beograd, 1994.
25. Radojčić M, Radojčić V.: Nacrtna geometrija, Naučna knjiga, Beograd, 1961,
26. Ročkomanović B: Elementi projektovanja, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2004.
27. Skala A.: Nacrtna geometrija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1988.
28. Šnajder Z.: Nacrtna geometrija, Naučna knjiga, Beograd, 1991.
29. Vujković Lj.: Tehnika pejzažnog projektovanja, Šumarski fakultet, Beograd, 2003.
30. Živanović S.: Tehničko crtanje, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1995.
31. SRPS standardi
32. [www.rgz.gov.rs](http://www.rgz.gov.rs)
33. <http://pejzazna-arh.blogspot.com/2014/03/najpoznatiji-svetski-pejzazni-arhitekti.html>







