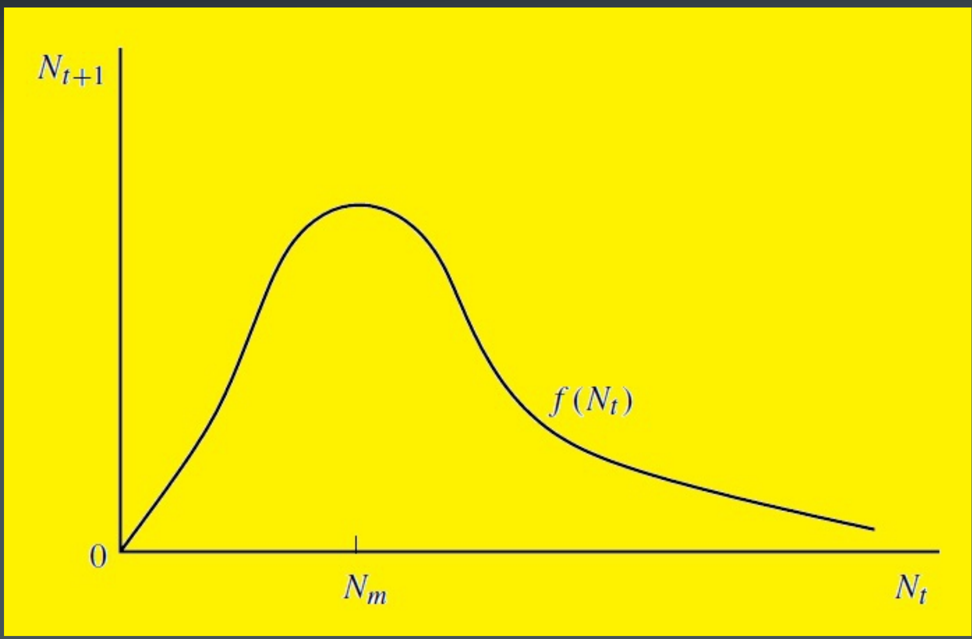
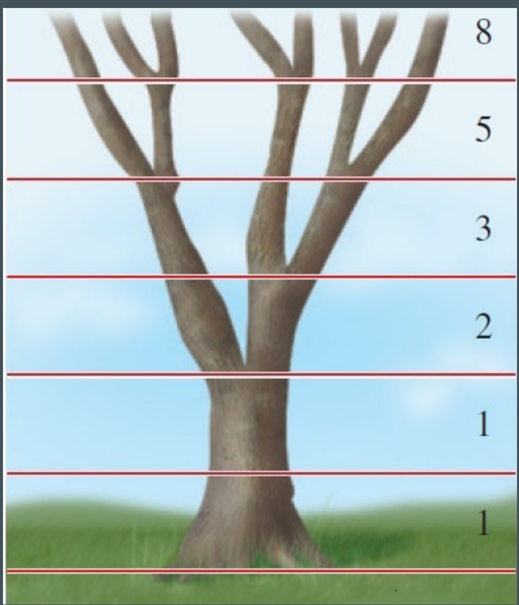
УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПОЉОПРИВРЕДНИ ФАКУЛТЕТ

MATEMATIČKE METODE U FITOMEDICINI

dr Nebojša Dedović





1

MATEMATIČKE METODE U FITOMEDICINI

dr Nebojša Dedović

Predgovor

Udžbenik **MATEMATIČKE METODE U FITOMEDICINI** namenjen je pre svega studentima Poljoprivrednog fakulteta koji su izabrali da slušaju predavanja i vežbe iz izbornog predmeta *Matematičke metode u fitomedicini*, ali ga mogu koristiti i studenti drugih smerova i fakulteta.

Autor udžbenika je svoje dvadesetsedmogodišnje iskustvo u držanju vežbi (Primenjena matematika, Poslovna matematika, Matematika 1 i Matematika 2) i trogodišnje u držanju predavanja i vežbi (Matematika i Matematičke metode u fitomedicini) na Poljoprivrednom fakultetu u Novom Sadu, pretočio u ovu knjigu.

Udžbenik se sastoji od osam glava iz udžbenika *Matematika* i 7 novih glava koje prate kurs iz gore navedenog predmeta. Dat je veliki broj primera u svrhu što boljeg savladavanja gradiva, a akcenat je bio na primerima iz biologije i fitomedicine. Takođe, dati su i dokazi pojedinih teorema da bi se studenti upoznali i sa tom stranom matematike. Na kraju svake glave, pažljivo su odabrani zadaci iz literature navedene na kraju udžbenika, koji služe za samostalno vežbanje.

Slike su dobijene u programskom paketu *Mathematica 6*, zatim su obrađene u programu Microsoft Visio 2000 i na kraju, korišćenjem programa *CorelDRAW X3*, pripremljene za obradu, zajedno sa tekstom udžbenika, u programskom paketu MiKTeX 2.9.

Autor se zahvaljuje recezentima, dugogodišnjoj koleginici profesorki dr Snežani Matić-Kekić i docentu dr Snežani Gordić na detaljno pročitanom rukopisu i na sugestijama koje su doprinele da udžbenik bude bolji i prihvatljiviji za studente.

Autor se zahvaljuje i Poljoprivrednom fakultetu u Novom Sadu na izdvojenim sredstvima za štampanje ovog udžbenika.

U Novom Sadu, 27. juna 2023. godine — dr Nebojša Dedović

Sadržaj

GLAVA 1

Uvod

U ovoj glavi biće dati neki osnovni pojmovi iz matematike pomoću kojih će se moći pratiti sadržaj ovog udžbenika. Čitalac će se podsetiti matematičke logike, skupova i relacija. Poglavlje *Algebarske strukture* su tu da pomognu pri definisanju polja realnih brojeva i operacija u tom polju. Poslednje poglavlje prati formiranje skupova brojeva zajedno sa njihovim osobinama i operacijama na tim skupovima.

1.1 Matematička logika

Kako se za definiciju skupova koriste simboli iz matematičke logike, samo ćemo dotaći tu granu matematike. Osnovni pojam je iskaz, odnosno rečenica za koju se može odrediti da li je ona tačna ili netačna.

Primer 1.1.1 Navešćemo nekoliko rečenica i odrediti da li su one iskazi ili ne.

- *Minus tri je manje od minus dva* je tačan iskaz.
- *Arhimed je živeo u drugom veku pre nove ere* je netačan iskaz (živeo je u trećem veku p.n.e.).
- *Rene Dekart je izgovorio „mislim, dakle postojim”* je tačan iskaz.
- $2 + 3 \cdot 0 = 0$ je netačan iskaz.
- $x^2 - 4 = 0$ nije iskaz.
- *Godina ima 365 dana* nije iskaz.

■

Iskazi se obeležavaju slovima p, q, r, $\ldots$, povezuju se logičkim operacijama i time se dobijaju novi iskazi. Tačni iskazi obeležavaju se sa $\top$, a netačni sa $\perp$. Logičke operacije su:

- *konjunkcija* iskaza p i q u oznaci $p \wedge q$, a čita se p *i* q i ona je tačna jedino kada su iskazi p i q tačni (tabela 1.1).

Tabela 1.1: Konjunkcija dva iskaza p i q.

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Primer 1.1.2 $p \wedge q$: Na utakmici je bilo više od 50000 gledalaca *i* većina je navijala za Partizan. Cela rečenica je istinita (tačna), kada su oba njena dela istinita. ■

- *disjunkcija* iskaza p i q u oznaci $p \vee q$, a čita se p *ili* q i ona je netačna kada su iskazi p i q netačni (tabela 1.2).

Tabela 1.2: Disjunkcija dva iskaza p i q.

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Primer 1.1.3 $p \vee q$: Banka radi od 7 *ili* od 8. Dakle, rečenica je tačna ako banka radi od 7, a tačna je i ako banka radi od 8. U suprotnom je netačna. ■

- *implikacija* iskaza p i q u oznaci $p \Rightarrow q$, a čita se *ako* p *onda* q (ili *iz* p *sledi* q ili p *implicira* q ili p *je potreban uslov za* q ili q *je dovoljan uslov za* p) i ona je netačna kada je iskaz p tačan, a iskaz q netačan (tabela 1.3).

Primer 1.1.4 $p \Rightarrow q$: *Ako* je dva ujutru, *onda* je Sunce zašlo. Dakle p je pretpostavka (dva je ujutru), a q posledica (Sunce je zašlo). Rečenica je netačna ako u njenom drugom delu tvrdimo da Sunce nije zašlo ako je dva ujutru. Daćemo sada dva primera koja ilustruju da iz netačne pretpostavke sledi netačna ili tačna posledica. Recimo, *ako* je Zemlja ravna ploča, *onda* nije elipsoid. Rečenica je tačna, jer ako je Zemlja ploča, onda ne može biti i elipsoid. Ipak Zemlja nije ravna ploča pa je pretpostavka netačna,

Tabela 1.3: Implikacija dva iskaza p i q.

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

ali je i posledica netačna (jer Zemlja jeste elipsoid). A ako kažemo, *ako* je Zemlja ravna ploča, *onda* nije kocka, tada je opet rečenica tačna, iako je iz netačne pretpostavke sledila tačna posledica (Zemlja nije kocka). ■

- *ekvivalencija* iskaza p i q u oznaci $p \Leftrightarrow q$, a čita se p *ako i samo ako* q (ili *ako* p, *onda* q i *ako* q, *onda* p ili p *je potreban i dovoljan uslov za* q) i ona je tačna ako i samo ako su oba iskaza p i q ili tačni ili netačni (tabela 1.4).

Tabela 1.4: Ekvivalencija dva iskaza p i q.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Primer 1.1.5 $p \Leftrightarrow q$: Neparan broj nije deljiv sa dva. Dakle, *ako* je broj neparan, *onda* nije deljiv sa dva, ali važi i *ako* broj nije deljiv sa dva, *onda* je neparan. Možemo napisati i broj je neparan ako i samo ako nije deljiv sa dva. ■

- *negacija* iskaza p u oznaci $\neg p$, a čita se *ne* p i ona je tačna ako i samo ako je iskaz p netačan (tabela 1.5).

Tabela 1.5: Negacija iskaza p.

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Primer 1.1.6 $\neg p$: Negacija iskaza matematika je teška je matematika nije teška. ■

Prioritet operacija je sledeći:

1. negacija ($\neg$) ima najveći prioritet, zatim
2. konjunkcija ($\wedge$) i disjunkcija ($\vee$) i na kraju
3. implikacija ($\Rightarrow$) i ekvivalencija ($\Leftrightarrow$).

Iskaznu algebru čine logičke operacije $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ i skup $\{\top, \bot\}$. *Iskazna slova* su slova p, q, r, $\ldots$, odnosno slova kojima obeležavamo iskaze. *Iskazne formule* čine: (i) iskazna slova, (ii) iskazi $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ i $\neg p$, (iii) ako su A i B iskazne formule, tada su to i $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ i $\neg A$, (iv) konačan broj primena (i), (ii), (iii). *Tautologija* je formula koja je tačna za bilo koju vrednost iskaznih slova. Navešćemo sada neke poznate tautologije i dokazati jednu preko odgovarajuće tabele:

(t1) $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ (*princip dvojne negacije*),

(t2) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (*idempotentnost konjunkcije*),

(t3) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (*idempotentnost disjunkcije*),

(t4) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (*zakon apsorpcije*),

(t5) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (*zakon apsorpcije*),

(t6) $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (*modus ponens*),

(t7) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (*komutativnost konjunkcije*),

(t8) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (*komutativnost disjunkcije*),

(t9) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ (*asocijativnost konjunkcije*),

(t10) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (*asocijativnost disjunkcije*),

(t11) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (*distributivnost konjunkcije prema disjunkciji*),

(t12) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (*distributivnost disjunkcije prema konjunkciji*),

(t13) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (*zakon kontrapozicije*),

(t14) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (*zakon uklanjanja implikacije*),

(t15) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (*zakon uklanjanja ekvivalencije*),

(t16) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (*De Morganovi zakoni*).

Primer 1.1.7 Dokazati da je zakon uklanjanja implikacije $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (t14) tautologija.

Rešenje. Pogledati tabelu 1.6.

Tabela 1.6: Zakon uklanjanja implikacije je tautologija.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Kako se u poslednjoj koloni tabele 1.6 nalazi samo $\top$, forumula je tautologija. ■

Primer 1.1.8 Daćemo primer logičkog zaključivanja koristeći, recimo, $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ - modus ponens (t6). Recimo, neka $p \Rightarrow q$ ima značenje *Ako napolju pada kiša, poneću kišobran.* Ako važi još i p *napolju pada kiša*, modus ponens daje da važi q, odnosno *poneću kišobran.* ■

Primer 1.1.9 Daćemo još jedan primer logičkog zaključivanja koristeći, ovog puta, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ - zakon kontrapozicije (t13). Neka $p \Rightarrow q$ ima značenje *Ako je kiša padala, ulice su mokre.* Ekvivalentno zaključivanje je *Ako ulice nisu mokre, kiša nije padala.* Pogrešan bi zaključak bio da je *ako je kiša padala, ulice su mokre* logički isto sa *ako kiša nije padala, ulice nisu mokre* jer su možda čistači ulica oprali ulice, pa su one, ipak, mokre. ■

Napomena 1.1.10 *Često se u dokazima teorema koristi negacija zakona uklanjanja implikacije. Naime, tautologija je i formula*

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q\,. \tag{1.1}$$

1.2 Skupovi

Skupovi su jedan od osnovnih pojmova u matematici. Obeležavaju se velikim slovima, npr. A, B, C, ..., dok elementi skupa malim, npr. a, b, c, ... Skup je poznat ako je poznato pravilo, ograničenje ili osobina na osnovu koje možemo odrediti sve njegove elemente. Ako element x pripada (odnosno ne pripada) skupu X pišemo $x \in X$ ($x \notin X$). Ako element x ima osobinu P, tada pišemo $P(x)$. Skup elemenata x sa osobinom P zapisujemo $\{x |\ P(x)\}$. U teoriji skupova koriste se kvantifikatori 'za svako' - $\forall$ i 'postoji' - $\exists$. Podsetimo se još:

- $\emptyset$ je oznaka za prazan skup koji nema elemenata,
- razlika skupova X i Y je skup $X \setminus Y$ koji sadrži sve elemente skupa X koji nisu u skupu Y, odnosno $X \setminus Y = \{x |\ x \in X \wedge x \notin Y\}$,
- skup X je podsup skupa Y ako svaki element skupa X pripada skupu Y i pišemo $X \subseteq Y = \{x |\ x \in X \Rightarrow x \in Y\}$,

- dva skupa X i Y su jednaka ($X = Y$) ako i samo ako svi elementi skupa X pripadaju i skupu Y ($X \subseteq Y$) i svi elementi skupa Y pripadaju skupu X ($Y \subseteq X$), odnosno $X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$.
- skup X je pravi podsup skupa Y ako svaki element skupa X pripada skupu Y i postoje elementi u Y koji nisu u X što zapisujemo $X \subset Y = \{x | \ x \in X \Rightarrow x \in Y\}$ i $Y \setminus X \neq \emptyset$,
- presek skupova X i Y je skup $X \cap Y$ koji čine svi elementi koji pripadaju i skupu X i skupu Y, tj. $X \cap Y = \{x | \ x \in X \wedge x \in Y\}$,
- unija skupova X i Y je skup $X \cup Y$ koji čine svi elementi koji pripadaju ili skupu X ili skupu Y, što zapisujemo $X \cup Y = \{x | \ x \in X \vee x \in Y\}$,
- Dekartov proizvod skupova X i Y je skup $X \times Y$ koji čine uređeni parovi (x, y) gde je element x iz skupa X, a element y iz skupa Y što zapisujemo $X \times Y = \{(x, y) | \ x \in X \wedge y \in Y\}$,
- skupovi X i Y su disjunktni ako im je presek prazan skup, odnosno $X \cap Y = \emptyset$.

Primer 1.2.1 Dati su skupovi $A = \{1, 3, 4, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ i $C = \{2, 4, 6, 10\}$. Odrediti $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $B \setminus A$, $C \setminus A$ i $C \setminus B$.

Rešenje. $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10\}$, $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 10\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cap C = \{4\}$, $B \cap C = \{4, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{4\}$, $A \setminus B = \{1, 7\}$, $A \setminus C = \{1, 3, 7\}$, $B \setminus C = \{3, 5\}$, $B \setminus A = \{5, 6\}$, $C \setminus A = \{2, 6, 10\}$ i $C \setminus B = \{2, 10\}$. ■

Primer 1.2.2 Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 5\}$ i $B = \{a, b\}$. Odrediti $A \times B$ i $B \times A$.

Rešenje. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b)\}$, dok je
$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 5)\}$. ■

Primer 1.2.3 Ako je skup A, skup svih studenata Poljoprivrednog fakulteta, tada su njegovi pravi podskupovi skupovi koje čine studenti različitih smerova. Svi ti podskupovi su disjunktni, a njihova unija je skup A. ■

Za operacije sa skupovima važe sledeće osobine:

(s1) $A \cap A = A$ (*idempotentnost preseka*),

(s2) $A \cup A = A$ (*idempotentnost unije*),

(s3) $A \cap (A \cup B) = A$ (*zakon apsorpcije*),

(s4) $A \cup (A \cap B) = A$ (*zakon apsorpcije*),

(s5) $A \cap B = B \cap A$ (*komutativnost preseka*),

(s6) $A \cup B = B \cup A$ (*komutativnost unije*), (s7) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*asocijativnost preseka*),

(s8) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*asocijativnost unije*),

(s9) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*distributivnost preseka prema uniji*),

(s10) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributivnost unije prema preseku*),

(s11) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(s12) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$.

Primer 1.2.4 Korišćenjem odgovarajućih tautologija i skupovnih operacija dokazati da je

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)\,.$$

Rešenje. Neka $x \in A \setminus (B \cap C)$. Tada važi

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \cap C \text{ (definicija razlike skupova)}\\
&\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C)\\
&\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \text{ (definicija preseka skupova)}\\
&\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \text{ (t16)}\\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \text{ (t11)}\\
&\Leftrightarrow \quad x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \text{ (definicija razlike skupova)}\\
&\Leftrightarrow \quad x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \text{ (definicija unije skupova)}
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ■

1.3 Relacije

Definicija 1.3.1 *Binarna relacija ρ na nepraznom skupu X je podskup skupa $X \times X$.*

Dakle, pišemo $\rho \subseteq X \times X = \{(x, y) | x, y \in X\}$ i ako $(x, y) \in \rho$ tada kažemo da je „x u relaciji ρ sa y" ili „x i y su u relaciji ρ" i zapisujemo još i kao $x\rho y$.

Primer 1.3.2 Neka je dat skup $X = \{a, b, c, d\}$. Odrediti pet binarnih relacija na ovom skupu.

Rešenje. Pošto je

$$\begin{aligned}
X \times X \quad = \quad &\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),\\
&(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}\ ,
\end{aligned}$$

tada je, recimo,

$$\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}\,,$$

$$\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,d),(a,d)\}\,,$$

$$\rho_3 = \{(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}\,,$$

$$\rho_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}\,.$$

$$\rho_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d),(d,a),(b,c),(c,a)\}\,.$$

■

Neke od važnijih osobina relacije ρ su refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivost. Naime, relacija $\rho \subseteq X \times X$ je:

(o1) *refleksivna (R)* ako je $x\rho x$ za svako $x \in X$, odnosno

$$(\forall\, x \in X)\ \ x\rho x\,,$$

(o2) *simetrična (S)* ako iz $x\rho y$ sledi $y\rho x$ za svako $x, y \in X$, tj.

$$(\forall\, x, y \in X)\ \ x\rho y \Rightarrow y\rho x\,,$$

(o3) *antisimetrična (AS)* ako iz $x\rho y$ i $y\rho x$ sledi $x = y$ za svako $x, y \in X$, odnosno

$$(\forall\, x, y \in X)\ \ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y\,,$$

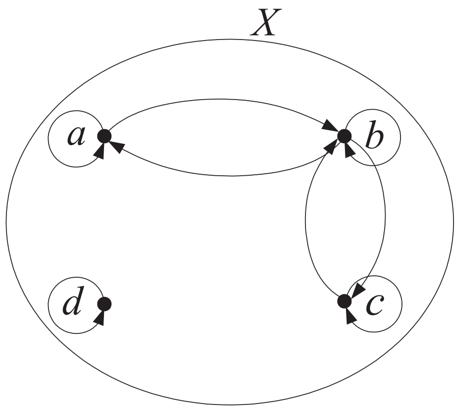
(o4) *tranzitivna (T)* ako iz $x\rho y$ i $y\rho z$ sledi $x\rho z$ za svako $x, y, z \in X$, tj.

$$(\forall\, x, y, z \in X)\ \ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z\,.$$

Primer 1.3.3 Odrediti osobine relacija datih u primeru 1.3.2.

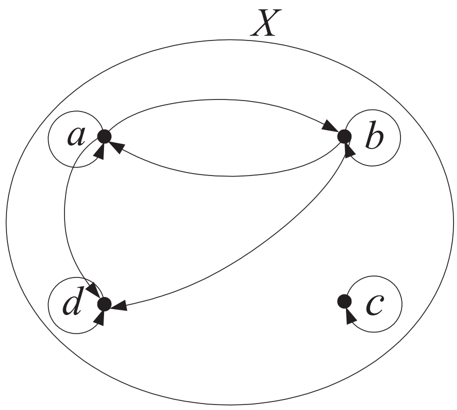
Rešenje.

- Relacija $\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ (slika 1.1)
  - je refleksivna, jer sadrži sve uređene parove (a,a), (b,b), (c,c) i (d,d),
  - je simetrična, jer sadrži parove (a,b) i (b,a), (b,c) i (c,b),
  - nije tranzitivna, jer, na primer, sadrži (a,b) i (b,c), a ne sadrži (a,c).



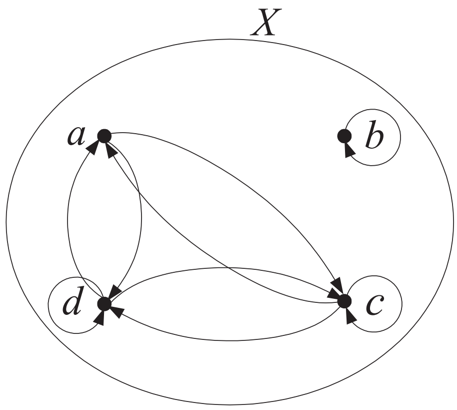
Slika 1.1: Relacija $\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ je R i S, a nije T.

- Relacija $\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,d),(a,d)\}$ (slika 1.2)
  - je refleksivna, jer sadrži sve uređene parove (a,a), (b,b) , (c,c) i (d,d),
  - nije simetrična, jer, na primer, sadrži par (b,d), a ne sadrži par (d,b),
  - je tranzitivna, jer sadrži (a,b), (b,d) i (a,d); (b,a), (a,d) i (b,d), itd.



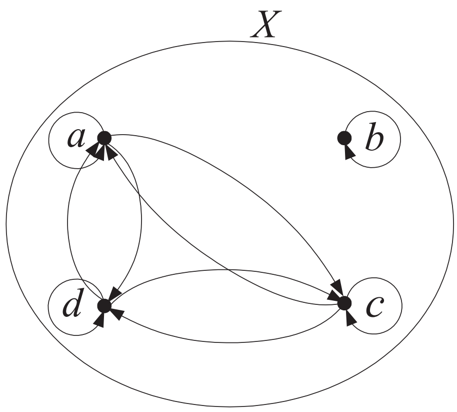
Slika 1.2: Relacija $\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,d),(a,d)\}$ je R i T, a nije S.

- Relacija $\rho_3 = \{(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}$ (slika 1.3)
  - nije refleksivna, jer ne sadrži uređen par (a,a),
  - jeste simetrična, jer sadrži parove (a,c) i (c,a); (c,d) i (d,c); (a,d) i (d,a),
  - jeste tranzitivna, jer sadrži (a,c), (c,d) i (a,d), itd.



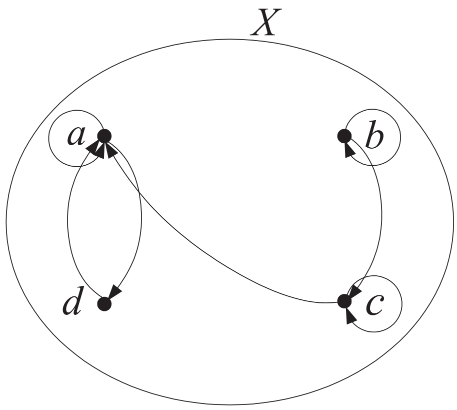
Slika 1.3: Relacija $\rho_3 = \{(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}$ nije R, a jeste S i T.

- Relacija $\rho_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}$ (slika 1.4) je
  - refleksivna, jer sadrži uređene parove (a,a), (b,b) , (c,c) i (d,d),
  - simetrična, jer sadrži parove (a,c) i (c,a); (c,d) i (d,c); (a,d) i (d,a),
  - tranzitivna, jer sadrži (d,c), (c,a) i (d,a), itd.



Slika 1.4: Relacija $\rho_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d),(c,a),(d,c),(d,a)\}$ jeste R, S i T.

- Relacija $\rho_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d),(d,a),(b,c),(c,a)\}$ (slika 1.5)
  - nije refleksivna, jer ne sadrži uređen par (d,d),
  - nije simetrična, jer ne sadrži parove (c,b) i (a,c),
  - nije tranzitivna, jer sadrži, na primer, (b,c) i (c,a), a ne sadrži (b,a).



Slika 1.5: Relacija $\rho_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d),(d,a),(b,c),(c,a)\}$ nije ni R, ni S, ni T.

Ovim je zadatak urađen. ■

Definicija 1.3.4 *Binarna relacija ρ definisana na skupu $X \times X$ je relacija ekvivalencije (RST) ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Ako je relacija ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, tada se naziva relacija poretka (RAST).*

Napomena 1.3.5 *Relacija ρ_4 iz primera 1.3.2 je relacija ekvivalencije.*

Ako je ρ relacija ekvivalencije na skupu X, tada možemo definisati klase ekvivalencije za element $x \in X$ u oznaci $C(x) = \{y \in X |\ x\rho y\}$. Unija svih klasa ekvivalencija je ceo skup X, a dve klase ekvivalencije se ili poklapaju ili su disjunktne.

Napomena 1.3.6 *Klase ekvivalencije za relaciju ρ_4 iz primera 1.3.2 su $C(a) = C(c) = C(d) = \{a,c,d\}$ i $C(b) = \{b\}$.*

Još primera relacija biće dato nakon uvođenja skupova brojeva.

1.4 Preslikavanja

Definišimo sada još jedan od osnovnih pojmova u matematici.

Definicija 1.4.1 *Neka su A i B neprazni skupovi. Pridruživanje f koje svakom elementu x iz skupa A dodeli tačno jedan element $f(x)$ iz skupa B, naziva se preslikavanje skupa A u skup B. Pišemo $f : A \to B$. Elementi iz skupa A se još nazivaju originali, a iz skupa B, slike.*

Preslikavanje f naziva se i funkcija koja preslikava skup A u skup B. Pojam funkcije se može definisati i na sledeći način:

Definicija 1.4.2 *Neka su A i B neprazni skupovi. Podskup f od $A \times B$ je funkcija ako važi:*

(i) $(\forall\, x \in A)(\exists y \in B)\ (x, y) \in f$,

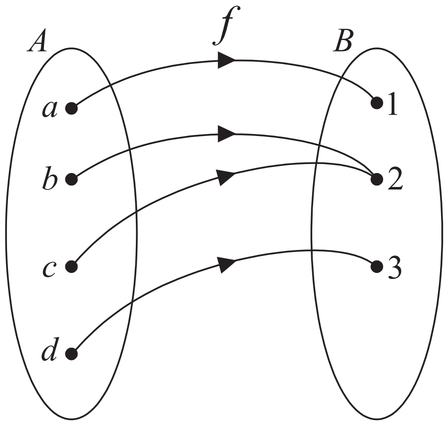
(ii) $(\forall\, x \in A)(\forall\, y_1, y_2 \in B)((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2)$.

Pišemo i $f : A \to B$.

Primer 1.4.3 Ako je skup $A = \{a, b, c\}$ i skup $B = \{1, 2, 3\}$, tada je jedna funkcija $f : A \to B$ oblika $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$. ■

Preslikavanje $f : A \to B$ je sirjektivno (slika 1.6) ili „na" ako svaka slika iz skupa B ima bar jedan original iz skupa A, odnosno

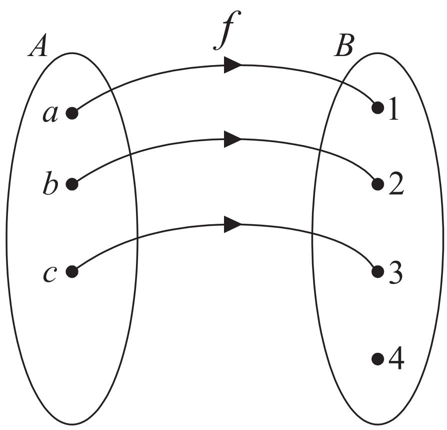
$$(\forall\, y \in B)(\exists x \in A)((x, y) \in f) \text{ ili } (\forall\, y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)).$$



Slika 1.6: Sirjektivno preslikavanje $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je injektivno (slika 1.7) ili „1-1" ako svaki original iz skupa A ima tačno jednu sliku iz skupa B, odnosno

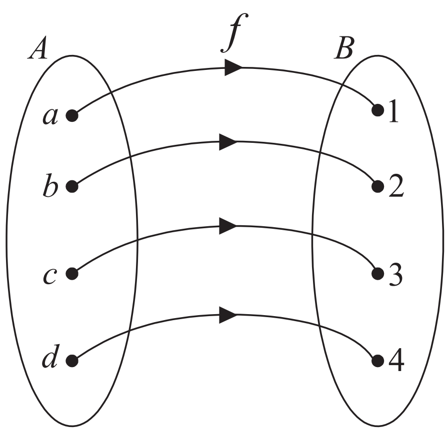
$$(\forall\, x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$



Slika 1.7: Injektivno preslikavanje $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$.

Preslikavanje $f : A \to B$ je bijektivno (slika 1.8) ili „1-1" i „na" ako svaka slika iz skupa B ima tačno jedan original iz skupa A, odnosno,

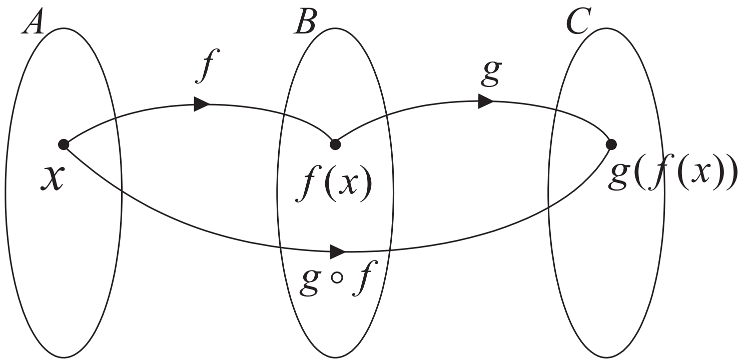
$$(\forall\, y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)) \ \text{ i } (\forall\, x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)\,.$$



Slika 1.8: Bijektivno preslikavanje $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$.

Sada ćemo definisati kompoziciju dve funkcije.

Definicija 1.4.4 *Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dve funkcije. Funkcija $g \circ f : A \to C$ definisana sa $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, gde $x \in A$, naziva se kompozicija funkcija f i g (slika 1.9).*



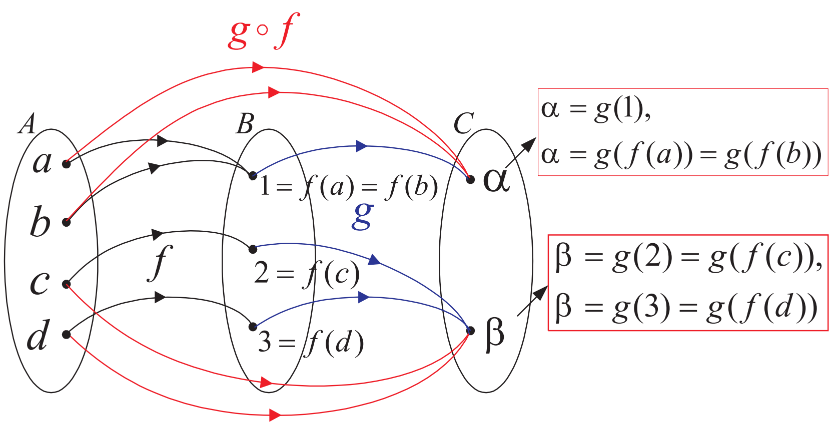
Slika 1.9: Kompozicija funkcija f i g.

Primer 1.4.5 Neka su dati skupovi $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ i $C = \{\alpha, \beta\}$. Neka je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$, a funkcija $g : B \to C$ sa $g = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \beta)\}$. Odrediti funkciju $g \circ f : A \to C$.

Rešenje. Funkcija $g \circ f$ definisana je kao (slika 1.10)

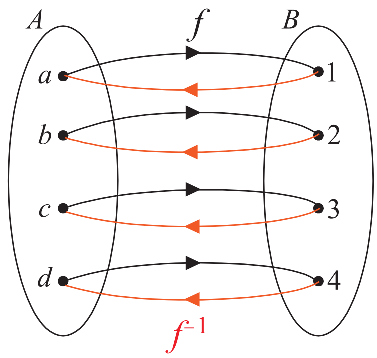
$$g \circ f = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \beta), (d, \beta)\}.$$

■



Slika 1.10: Kompozicija funkcija f i g.

Za bijektivno preslikavanje možemo definisati i inverzno preslikavanje. Bijektivno preslikavanje $f : A \to B$, ima inverzno preslikavanje $f^{-1} : B \to A$, gde važi da iz $y = f(x)$ sledi $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$, a onda i $x = f^{-1}(y)$ (slika 1.11).



Slika 1.11: $f = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$ i $f^{-1} = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$.

Još primera složenih i inverznih funkcija biće dato nakon uvođenja skupova brojeva.

1.5 Algebarske strukture

U ovom udžbeniku, osnovni skup koji budemo koristili biće skup realnih brojeva i, zbog kompletnosti, moramo prikazati put kojim se dolazi do toga da je skup $\mathbb{R}$ uređeno polje i koje su operacije na njemu definisane. Krenimo redom.

Definicija 1.5.1 *Neka je dat skup A i neka je na njemu definisana operacija $\oplus$. Ako za svaki uređeni par $(x, y) \in A \times A$ postoji element $z \in A$, dobijen primenom operacije $\oplus$ na (x, y), odnosno ako važi $x \oplus y = z$, tada skup A zajedno sa operacijom $\oplus$ čini grupoid $(A, \oplus)$.*

Primer 1.5.2 Proveriti da li je struktura $(A, \oplus)$ grupoid ako je $A = \{a, b, e\}$ i operacija $\oplus$ definisana u tabeli 1.7 i, ako jeste, proveriti da li je ta operacija komutativna, odnosno

$$(\forall x, y \in A)\ \ x \oplus y = y \oplus x$$

i asocijativna, tj.

$$(\forall x, y, z \in A)\ \ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z\,.$$

Tabela 1.7: Na skupu $A = \{a, b, e\}$ definisana je operacija $\oplus$.

$\oplus$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Rešenje. Kako se u tabeli 1.7 nalaze samo elementi skupa A, jasno je da je $(A, \oplus)$ grupoid. Pošto je tablica 1.7 simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu (koja sadrži elemente e, b, a), to znači da je $\oplus$ komutativna operacija. Asocijativnost se proverava po definiciji, a zbog komutativnosti operacije $\oplus$, dovoljno je proveriti

$$e \oplus (e \oplus a) = e \oplus a = a\,, \quad (e \oplus e) \oplus a = e \oplus a = a\,,$$

$$e \oplus (e \oplus b) = e \oplus b = b\,, \quad (e \oplus e) \oplus b = e \oplus b = b\,,$$

$$e \oplus (a \oplus a) = e \oplus b = b\,, \quad (e \oplus a) \oplus a = a \oplus a = b\,,$$

$$e \oplus (a \oplus b) = e \oplus e = e\,, \quad (e \oplus a) \oplus b = a \oplus b = e\,,$$

$$e \oplus (b \oplus b) = e \oplus a = a\,, \quad (e \oplus b) \oplus b = b \oplus b = a\,,$$

$$a \oplus (a \oplus b) = a \oplus e = a\,, \quad (a \oplus a) \oplus b = b \oplus b = a\,,$$

$$a \oplus (b \oplus b) = a \oplus a = b\,, \quad (a \oplus b) \oplus b = e \oplus b = b\,.$$

pa je operacija $\oplus$ asocijativna na skupu A. ■

Primer 1.5.3 Proveriti da li je struktura $(A, \oplus)$ grupoid ako je $A = \{a, b, c, d\}$ gde je operacija $\oplus$ definisana u tabeli 1.8. U slučaju potvrdnog odgovora, ispitati da li je ta operacija komutativna i asocijativna.

Tabela 1.8: Na skupu $A = \{a, b, c, d\}$ definisana je operacija $\oplus$.

$\oplus$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	a
d	c	d	a	a

Rešenje. Struktura $(A, \oplus)$ je, očigledno, grupoid. Operacija $\oplus$ je, takođe, i komutativna. Proverimo još asocijativnost.

$$a \oplus (d \oplus c) = a \oplus a = b\,, \quad (a \oplus d) \oplus c = c \oplus c = a\,,$$

što znači da $\oplus$ nije asocijativna operacija. ■

Definicija 1.5.4 *Grupoid $(A, \oplus)$ sa asocijativnom operacijom $\oplus$, naziva se polugrupa ili semigrupa.*

Primer 1.5.5 Proveriti da li su grupoidi iz primera 1.5.2 i 1.5.3 polugrupe.

Rešenje. Grupoid u primeru 1.5.2 jeste polugrupa jer je operacija $\oplus$ asocijativna, dok grupoid iz primera 1.5.3 nije. ■

Definicija 1.5.6 *Neka je $(A, \oplus)$ polugrupa. Ako*

$$(\exists e \in A)(\forall x \in A) \;\; x \oplus e = e \oplus x = x \,,$$

i ako

$$(\forall x \in A)(\exists x' \in A) \;\; x \oplus x' = x' \oplus x = e \,,$$

tada je $(A, \oplus)$ grupa, element e naziva se neutralni element u odnosu na operaciju $\oplus$, a x' inverzni element elementa x u odnosu na operaciju $\oplus$.

Primer 1.5.7 Proveriti da li grupoidi iz primera 1.5.2 i 1.5.3 imaju neutralni element i inverzni element za svaki element.

Rešenje. Grupoid u primeru 1.5.2 ima neutralni element e, jer je $e \oplus e = e$, $a \oplus e = e \oplus a = a$ i $b \oplus e = e \oplus b = b$. Pošto je $e \oplus e = e$, sledi da je za element e, inverzni element e. Kako je $a \oplus b = b \oplus a = e$, znači da je su elementi a i b inverzni jedan drugom. Zaključujemo da je grupiod iz primera 1.5.2 grupa. Za grupoid iz primera 1.5.3 važi da je neutralni element b zbog toga što je $b \oplus b = b$, $a \oplus b = b \oplus a = a$, $c \oplus b = b \oplus c = c$ i $d \oplus b = b \oplus d = d$, ali, recimo, element c nema svoj inverzni, jer ne postoji $x \in A$ tako da je $c \oplus x = x \oplus c = b$. Isto važi i za element d. ■

Definicija 1.5.8 *Uređena dvojka $(A, \oplus)$ je Abelova grupa (komutativna grupa) ako je*

$$(\forall x, y \in A) \;\; x \oplus y = y \oplus x \,.$$

Napomena 1.5.9 *Sada je jasno da je grupoid iz primera 1.5.2 i Abelova grupa.*

Definicija 1.5.10 *Uređena trojka $(A, \oplus, \diamond)$ je prsten ako važi:*

(1) $(A, \oplus)$ *je Abelova grupa,*

(2) $(A, \diamond)$ *je polugrupa,*

(3) $(\forall x, y, z \in A) \;\; x \diamond (y \oplus z) = (x \diamond y) \oplus (x \diamond z)$ *(levi distributivni zakon operacije $\diamond$ u odnosu na $\oplus$)*
$(\forall x, y, z \in A) \;\; (x \oplus y) \diamond z = (x \diamond z) \oplus (y \diamond z)$ *(desni distributivni zakon operacije $\diamond$ u odnosu na $\oplus$)*

Definicija 1.5.11 *Uređena trojka $(A, \oplus, \diamond)$ je komutativan prsten ako važi:*

(1) $(A, \oplus, \diamond)$ *je prsten,*

(2) $(\forall x, y \in A) \;\; x \diamond y = y \diamond x \,.$

Definicija 1.5.12 *Uređena trojka* $(A, \oplus, \diamond)$ *je polje ako važi:*

(1) $(A, \oplus, \diamond)$ *je komutativan prsten,*

(2) $(A \setminus \{e\}, \diamond)$*, gde je e neutralni element u skupu A za operaciju* $\oplus$*, je Abelova grupa,*

Primeri iz struktura prstena i polja biće takođe dati nakon uvođenja skupova brojeva.

1.6 Skupovi brojeva

Sada ćemo navesti skupove prirodnih ($\mathbb{N}$), celih ($\mathbb{Z}$), racionalnih ($\mathbb{Q}$), iracionalnih ($\mathbb{I}$), realnih ($\mathbb{R}$) i kompleksnih brojeva ($\mathbb{C}$).

1.6.1 Skup prirodnih brojeva

Skup prirodnih brojeva obeležavaćemo sa $\mathbb{N}$ i definisati kao

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Skup $\mathbb{N}$ je *uređen* jer se za svaka dva njegova elementa m i n može utvrditi da li je $m = n$ ili $m < n$ ili $m > n$. Broj za jedan veći od datog prirodnog broja naziva se *sledbenik*, a broj za jedan manji od datog prirodnog broja je *prethodnik* tog broja. Broj 1 nema svog prethodnika u skupu $\mathbb{N}$.

Struktura $(\mathbb{N}, +)$, gde je $+$ operacija sabiranja dva prirodna broja, jeste grupoid. Važi i $(\forall\, m, n \in \mathbb{N})\;\; m + n = n + m$ i $(\forall\, m, n, p \in \mathbb{N})\;\; m + (n + p) = (m + n) + p$, te je operacija $+$ komutativna i asocijativna. Grupoid $(\mathbb{N}, +)$ nema neutralni element.

Struktura $(\mathbb{N}, \cdot)$, gde je $\cdot$ operacija množenja dva prirodna broja, jeste grupoid. Važi i $(\forall\, m, n \in \mathbb{N})\;\; m \cdot n = n \cdot m$ i $(\forall\, m, n, p \in \mathbb{N})\;\; m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$, te je operacija $\cdot$ komutativna i asocijativna. Grupoid $(\mathbb{N}, \cdot)$ ima neutralni element, to je broj 1, jer važi

$$(\forall\, m \in \mathbb{N})\;\; m \cdot 1 = 1 \cdot m = m\,,$$

ali, za svaki broj $m \in \mathbb{N}$ ne postoji inverzni element m' tako da važi $m \cdot m' = m' \cdot m = 1$.

Napomena 1.6.1 *Struktura* $(\mathbb{N}, -)$*, gde je* $-$ *operacija oduzimanja dva prirodna broja nije grupoid jer razlika dva prirodna broja ne mora biti prirodan broj.*

Kao što je bilo rečeno da će biti dati još neki primeri relacija, sada dajemo primer jedne relacije ekvivalencije na skupu $\mathbb{N}$.

Primer 1.6.2 Neka je na skupu $\mathbb{N}$ definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall\, x, y \in \mathbb{N})\;\; x\rho y \Leftrightarrow 2 | x + y \quad (\text{tj. } x + y \text{ je paran broj})\,.$$

Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{N}$ i odrediti klase ekvivalencije.

Rešenje. Pokažimo prvo da je ρ zapravo RST relacija.

- refleksivnost: $(\forall\, x \in \mathbb{N})$ važi $x + x = 2x$, a broj $2x$ je deljiv sa dva, pa sledi $x\rho x$,
- simetričnost: $(\forall\, x, y \in \mathbb{N})\;\; x\rho y \Rightarrow 2|x + y \Rightarrow 2|y + x \Rightarrow y\rho x$,

- tranzitivnost: $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{N})\ \ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow 2|x+y \wedge 2|y+z \Rightarrow 2|x+y+y+z \Rightarrow 2|x+z \Rightarrow x\rho z$, jer ako je broj $x + 2y + z$ deljiv sa 2, tada je i broj $x + z$ deljiv sa 2.

Jasno je da će postojati dve različite klase ekvivalencije $C(1) = \{1, 3, 5, \dots\}$ i $C(2) = \{2, 4, 6, \dots\}$, jer je zbir dva neparna broja deljiv sa dva i zbir dva parna broja deljiv sa dva. Zbir parnog i neparnog broja nije deljiv sa dva. ■

Ako proširimo skup $\mathbb{N}$ sa nulom, dobijamo skup

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}\,.$$

Struktura $(\mathbb{N}_0, +)$ jeste komutativni i asocijativni grupoid sa neutralnim elementom 0 jer važi $(\forall\, m \in \mathbb{N}_0)\ \ m + 0 = 0 + m = m$. Grupoid $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ je komutativan, asocijativan, sa neutralnim elementom 1.

U skupu $\mathbb{N}$ važi princip matematičke indukcije koji glasi: *Neka je skup X podskup skupa prirodnih brojeva i neka sadrži broj 1. Dalje, neka skup X ima osobinu da ako $k \in X \cap \mathbb{N}$, tada i $k + 1 \in X \cap \mathbb{N}$. Odavde sledi da je $X = \mathbb{N}$.*

Koristi se pri dokazivanju da formula $T(n)$ važi za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Postupak dokazivanja je sledeći:

- pokaže se da je formula $T(n)$ tačna za $n = n_0$,
- pretpostavi se da je formula $T(n)$ tačna za proizvoljno $n = k > n_0$ (*induktivna pretpostavka (ip)*),
- dokaže se da je formula $T(n)$ tačna za $n = k + 1$.

Primer 1.6.3 Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$T(n) \equiv 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Rešenje. Proverimo da li važi $T(1)$ (ili formula $T(n)$ za $n = 1$).

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1\,,$$

što je tačno. Proverimo, radi vežbe, da formula važi i za $n = 2$.

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2} \Rightarrow 3 = 3\,.$$

Pretpostavimo sada da formula $T(n)$ važi za $n = k$, odnosno

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\textit{induktivna pretpostavka (ip)})$$

i dokažimo da važi za $n = k + 1$, tj.

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\,.$$

Krenimo od leve strane jednakosti

$$\begin{aligned}\underbrace{1+2+\cdots+k}_{ip}+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2},\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ■

Primer 1.6.4 Dokazati da za svaki prirodan broj n važi

$$T(n) \equiv 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Rešenje. Proverimo da li važi formula za $n=1$.

$$1=1^2 \Rightarrow 1=1,$$

što je tačno. Proverimo još i valjanost formule $T(n)$ za $n=2$.

$$1+3=2^2 \Rightarrow 4=4.$$

Pretpostavimo sada da formula $T(n)$ važi za $n=k$, odnosno

$$1+3+\cdots+(2k-1)=k^2 \ (\textit{induktivna pretpostavka (ip)})$$

i dokažimo da važi za $n=k+1$, tj.

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2.$$

Sada je,

$$\underbrace{1+3+\cdots+2k-1}_{ip}+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

čime je dokazana formula. ■

Primer 1.6.5 Dokazati da važi

$$T(n) \equiv 6|n(n+1)(2n+1)$$

za svaki prirodan broj n, odnosno da je broj $n(n+1)(2n+1)$ deljiv sa 6 za svako $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Proverimo formulu za $n=1$.

$$1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)=1\cdot2\cdot3=6,$$

što je tačno jer je rezultat deljiv sa 6. Pretpostavimo da je formula $T(n)$ tačna za $n=k$, odnosno

$$6|k(k+1)(2k+1) \ (\textit{induktivna pretpostavka (ip)})$$

i dokažimo da važi za $n = k+1$, tj.

$$6|(k+1)(k+2)(2k+3)\,.$$

Zapišimo $k(k+1)(2k+1) = 6\,M$, $M \in \mathbb{N}$, jer je $k(k+1)(2k+1)$ deljivo sa 6 po induktivnoj pretpostavci. Sada je

$$\begin{aligned}
(k+1)(k+2)(2k+3) &= k(k+2)(2k+3) + (k+2)(2k+3)\\
&= k(k+1+1)(2k+3) + (k+2)(2k+3)\\
&= k(k+1)(2k+3) + k(2k+3) + (k+2)(2k+3)\\
&= k(k+1)(2k+1+2) + k(2k+3) + (k+2)(2k+3)\\
&= k(k+1)(2k+1) + k(k+1)\cdot 2 + k(2k+3) + (k+2)(2k+3)\\
&= \underbrace{k(k+1)(2k+1)}_{ip} + 6k^2 + 12k + 6 = 6\,M + 6(k^2+2k+1)
\end{aligned}$$

što je deljivo sa 6 kao zbir dva broja deljiva sa 6. ■

Primer 1.6.6 Neka je $n, p \in \mathbb{N}_0$ i $0 \le p \le n$. Dokazati binomnu formulu

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p\,, \tag{1.2}$$

gde je

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

i

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\,,\quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}\,,$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}\,,\quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,,\quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n\,.$$

Izraz $\binom{n}{p}$ naziva se binomni koeficijent.

Rešenje. Proverimo da li važi formula za $n = 0$.

$$(a+b)^0 = \sum_{p=0}^{0} \binom{0}{p} a^{0-p}\, b^p \Rightarrow 1 = \binom{0}{0} a^{0-0}\, b^0 \Rightarrow 1 = 1$$

što je tačno. Proverimo, još i tačnost formule $T(n)$ za $n = 1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 = \sum_{p=0}^{1} \binom{1}{p} a^{1-p}\, b^p \quad &\Rightarrow \quad a+b = \binom{1}{0} a^{1-0}\, b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1}\, b^1\\
&\Rightarrow \quad a+b = 1\cdot a^1\, b^0 + 1\cdot a^0\, b^1 \Rightarrow a+b = a+b\,.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da formula $T(n)$ važi za $n = k$, odnosno

$$(a+b)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^{k-p}\, b^p \ (\textit{induktivna pretpostavka (ip)})$$

i dokažimo da važi za $n = k+1$, tj.

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} a^{k+1-p}\, b^p \,.$$

Krenimo od leve strane jednakosti

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)\underbrace{(a+b)^k}_{ip} = (a+b)\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} a^{k-p}\, b^p \\
&= \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} a^{k+1-p}\, b^p + \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} a^{k-p}\, b^{p+1} \\
&= \binom{k}{0} a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p} a^{k+1-p}\, b^p + \sum_{p=1}^{k+1}\binom{k}{p-1} a^{k-p+1}\, b^p \\
&= a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p} a^{k+1-p}\, b^p + \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p-1} a^{k-p+1}\, b^p + \binom{k}{k} b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k}\left(\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1}\right) a^{k+1-p}\, b^p + b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k}\binom{k+1}{p} a^{k+1-p}\, b^p + b^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p} a^{k+1-p}\, b^p
\end{aligned}$$

čime je dokazana formula (1.2). ■

1.6.2 Skup celih brojeva

U skupu $\mathbb{N}$, jednačina $x + 2 = 1$ nema rešenje, te je potrebno formirati skup u kojem će postojati rešenje $x = -1$. Taj skup obeležava se sa $\mathbb{Z}$ i naziva skup celih brojeva,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Očigledno je $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Posmatrajmo strukturu $(\mathbb{Z}, +)$, gde je $+$ operacija sabiranja u skupu $\mathbb{Z}$. Napomenimo da je za $m, n \in \mathbb{Z}$, $m - n = m + (-n)$. Primetimo da važi

$$(\forall\, m \in \mathbb{Z})\;\; m + 0 = 0 + m = m$$

i

$$(\forall\, m \in \mathbb{Z})(\exists\,(-m) \in \mathbb{Z})\;\; m + (-m) = (-m) + m = 0\,,$$

te je $(\mathbb{Z}, +)$ Abelova grupa zbog komutativnost i asocijativnosti operacije $+$. Jasno je da je i $(\mathbb{Z}, \cdot)$, gde je $\cdot$ operacija množenja u skupu $\mathbb{Z}$, polugrupa i da važe levi i desni distributivni zakoni operacije $\cdot$ u odnosu na $+$. Time je pokazano da je struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ prsten, a zbog komutativnosti operacije $\cdot$, pomenuta struktura je, zapravo, komutativni prsten. Ipak, usled nemogućnosti da se odredi inverzni element za svaki ceo broj (bez nule) u strukturi $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nije polje.

Dajmo sada jedan primer relacije definisane na skupu $\mathbb{Z}$.

Primer 1.6.7 Neka je na skupu X definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall\, x, y \in X)\;\; x\rho y \Leftrightarrow x - y \in X\,.$$

Ispitati vrstu relacije ρ u skupu X ako je: $a)$ $X = \mathbb{N}_0$ i $b)$ $X = \mathbb{Z}$.

Rešenje.
$a)$ Neka je $X = \mathbb{N}_0$. Pokazaćemo da je relacija ρ relacija poretka (i zbog čega nije simetrična)

- refleksivnost: $(\forall\, x \in \mathbb{N}_0)\;\; x - x = 0 \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow x\rho x$,
- nije simetrična jer $(\forall\, x, y \in \mathbb{N}_0)\;\; x\rho y \Rightarrow x - y \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow y - x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow y\rho x$ nije tačno kada je $x \neq y$.
- antisimetričnost:
$$\begin{aligned}(\forall\, x, y \in \mathbb{N}_0)\;\; x\rho y \wedge y\rho x \;\; &\Rightarrow\;\; x - y \in \mathbb{N}_0 \wedge y - x \in \mathbb{N}_0 \\ &\Rightarrow\;\; x - y = y - x = 0 \Rightarrow x = y\,.\end{aligned}$$
- tranzitivnost:
$$\begin{aligned}(\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}_0)\;\; x\rho y \wedge y\rho z \;\; &\Rightarrow\;\; x - y \in \mathbb{N}_0 \wedge y - z \in \mathbb{N}_0 \\ &\Rightarrow\;\; (x - y) + (y - z) \in \mathbb{N}_0 \\ &\Rightarrow\;\; x - z \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow x\rho z\,.\end{aligned}$$

$b)$ Refleksivnost i tranzitivnost se dokazuje potpuno analogno kao i pod $a)$ kada se umesto skupa $\mathbb{N}_0$ koristi $\mathbb{Z}$. Pokažimo simetričnost.

$$(\forall\, x, y \in \mathbb{Z})\;\; x\rho y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x - y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y\rho x\,.$$

■

1.6.3 Skup racionalnih brojeva

Kako jednačina $2\,x = 3$ nema rešenje u skupu celih brojeva, skup u kom će $x = 3/2$ biti rešenje date jednačine se obeležava sa $\mathbb{Q}$ i on se naziva skup racionalnih brojeva i zapisuje kao

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} |\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ovaj skup čine svi brojevi koji se mogu napisati u obliku razlomaka. Treba napomenuti da su elementi ovog skupa i brojevi koji su predstavljeni u decimalnom zapisu, kod kojih, posle decimalnog zareza, postoji pravilno ponavljanje iste grupe brojeva. Na primer, $0.3333\ldots = 0.\dot{3} = 1/3$, $1.23232323\ldots = 1.\overline{23} = 122/99$. Zaključujemo da je $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Napomena 1.6.8 *Ako je broj* $a = 1.\overline{23}$, *tada je* $100a = 123.\overline{23}$ *pa je* $100a - a = 122$, *te je* $a = 122/99$.

Jednakost dva racionalna broja u skupu $\mathbb{Q}$ definisana je na sledeći način:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1\,,\ p_1, p_2 \in \mathbb{Z}\,,\ q_1, q_2 \in \mathbb{N}\,.$$

Sabiranje dva racionalna broja p_1/q_1 i p_2/q_2, $q_1, q_2 \neq 0$, definiše se kao

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}\,,$$

a množenje sa

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}\,.$$

Pokazaćemo da je struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ zapravo polje. Prvo $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelova grupa, neutralni element je 0, a za element $\frac{p}{q}$ inverzni je $-\frac{p}{q}$ jer važi

$$\left(\forall\, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right)\ \ \frac{p}{q} + 0 = 0 + \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$$

i

$$\left(\forall\, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right) \left(\exists \left(-\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Q}\right)\ \ \frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = \left(-\frac{p}{q}\right) + \frac{p}{q} = 0\,.$$

Operacija $+$ je i komutativna i asocijativna na posmatranom skupu. Jasno je da je $(\mathbb{Q}, \cdot)$ polugrupa jer je operacija $\cdot$ asocijativna. Pokažimo da je $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ Abelova grupa. Neutralni element je sada broj 1 jer važi

$$\left(\forall\, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right)\ \ \frac{p}{q} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q}\,,$$

a pošto važi i

$$\left(\forall\, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\right) \left(\exists\, \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\right)\ \ \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q} = 1\,,$$

imamo da je, zbog komutativnosti i asocijativnosti operacije $\cdot$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ zaista Abelova grupa. Kako važe i oba zakona distributivnosti

$$(\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q})\ \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,,\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,,$$

jasno je da je $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ polje.

Na skupu $\mathbb{Q}$, relacija $\leq$ je relacija poretka. Za svaka dva racionalna broja može se odrediti da li su jednaki ili je jedan manji ili veći od drugog. Naime,

$$\frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 \leq p_2 \cdot q_1\,,\ p_1, p_2 \in \mathbb{Z}\,,\ q_1, q_2 \in \mathbb{N}\,.$$

Pošto važi

$$(\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q})\ \ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

i

$$(\forall\, a, b \in \mathbb{Q})\ \ a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0\,,$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sa relacijom $\leq$ čini uređeno polje.

Napomena 1.6.9 *Između bilo koja dva racionalna broja* $a = \frac{p_1}{q_1}$ *i* $b = \frac{p_2}{q_2}$, $a < b$ *uvek postoji racionalan broj* c *za koji važi* $a < c < b$*. Taj broj je, na primer,*

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}{2} = \frac{p_1\, q_2 + p_2\, q_1}{2\, q_1\, q_2} \in \mathbb{Q}\,.$$

Ova osobina ne važi u skupovima $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Z}$*.*

1.6.4 Skup iracionalnih brojeva

U skupu racionalnih brojeva, jednačina $x^2 = 2$ nema rešenja jer brojevi $x = \pm\sqrt{2}$ nisu racionalni. Ako pretpostavimo da jesu, to bi značilo da se, recimo, $\sqrt{2}$ može zapisati kao količnik dva uzajamno prosta prirodna broja, tj. $\sqrt{2} = p/q$. Ako kvadriramo tu jednakost imaćemo $p^2 = 2\,q^2$, odnosno p^2 je paran broj, a time i p. Ako p zamenimo sa $p = 2k$, tada je $(2k)^2 = 2\,q^2 \Rightarrow 4\,k^2 = 2\,q^2 \Rightarrow 2\,k^2 = q^2$, te je i q^2 paran broj, a time i q. Dolazimo do zaključka da su i p i q parni brojevi, a to je u suprotnosti sa pretpostavkom da su uzajamno prosti. Dakle, pogrešna je pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Potrebno je formirati skup brojeva koji nisu racionalni i njega ćemo zvati skup iracionalnih brojeva i obeležavati sa $\mathbb{I}$,

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \pi, e, \ldots\}.$$

Treba napomenuti da u ovaj skup ulaze i brojevi u decimalnom zapisu kod kojih se cifre iza decimalnog zareza ne ponavljaju po nekom pravilu, na primer broj $3,1415926535\ldots = \pi$ je iracionalan[1]. Sada je jasno da je $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

1.6.5 Skup realnih brojeva

Skup koji čine unija skupova racionalnih i iracionalnih brojeva nazvaćemo skup realnih brojeva i obeležavati sa $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

[1]Zapis broja π do desete decimale može se lako zapamtiti ako se u narednoj rečenici umesto reči upiše broj slova u svakoj reči „Čuj, i broj i možeš zapamtiti sa pesmom dragi moj brate."

Sada ćemo dati primere relacija i na skupu $\mathbb{R}$.

Primer 1.6.10 Daćemo primere relacija ekvivalencije i poretka.

- Relacija ρ definisana sa $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Leftrightarrow x = y$ je relacija ekvivalencije.
  - refleksivnost: $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ \ x\rho x$ jer je $x = x$,
  - simetričnost: $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow y\rho x$,
  - tranzitivnost: $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \Rightarrow x\rho z$.
- Relacija ρ definisana sa $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Leftrightarrow x \geq y$ je relacija poretka.
  - refleksivnost: $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ \ x\rho x$ jer je $x \geq x$,
  - antisimetričnost: $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$,
  - tranzitivnost: $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z \Rightarrow x\rho z$.

■

Napomena 1.6.11 *Relacija ρ definisana sa $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})\ \ x\rho y \Leftrightarrow x > y$ nije relacija poretka jer ne važi da je $x > x$ pa nije refleksivna.*

Primetimo da za strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, gde su $+$ i $\cdot$ operacije sabiranja i množenja, redom, sa relacijom $\geq$ važi: neutralni element za operaciju sabiranja je 0, za operaciju množenja 1 i svaki realan broj x (ne uključujući nulu) ima inverzni $1/x$. Lako se proverva da važi i da je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ uređeno polje. Između svaka dva realna broja a i b, postoji realan broj c tako da je $a < c < b$.

Sada ćemo dati i nekoliko primera složenih i inverznih funkcija, kao što je ranije bilo napomenuto.

Primer 1.6.12 Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 3x + 4$ i $g(x) = 2x^2 - 3$. Odrediti $g \circ f$.

Rešenje. Tada i $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i važi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+4) = 2(3x+4)^2 - 3 = 2(9x^2 + 24x + 16) - 3 = 18x^2 + 48x + 29\,.$$

■

Primer 1.6.13 Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = e^x$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Odrediti $f \circ g$ i $g \circ g$.

Rešenje. Imamo da $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i da važi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = e^{\sqrt[3]{x}}\,,$$

dok je

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[9]{x}\,.$$

■

Primer 1.6.14 Odrediti inverznu funkciju za $f(x) = 2x - 4$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rešenje.

$$f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 4) \Rightarrow x = f^{-1}(2x - 4)$$

Uvođenjem smene $t = 2x - 4 \Rightarrow x = \frac{t+4}{2}$ imaćemo

$$\frac{t+4}{2} = f^{-1}(t)$$

i nakon zamene $t \to x$ dobijamo inverznu funkciju

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}\,.$$

Sada možemo i da proverimo da li je $f^{-1}(f(x)) = x$.

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)+4}{2} = \frac{2x-4+4}{2} = x\,.$$

■

Primer 1.6.15 Odrediti inverznu funkciju za $f(x) = \sqrt[3]{3 - x}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rešenje.

$$f(x) = \sqrt[3]{3-x} \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{3-x}) \Rightarrow x = f^{-1}(\sqrt[3]{3-x})$$

Smenom $t = \sqrt[3]{3-x} \Rightarrow t^3 = 3 - x \Rightarrow x = 3 - t^3$ imamo

$$3 - t^3 = f^{-1}(t)\,,$$

a nakon zamene $t \to x$, inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = 3 - x^3$. ■

Primer 1.6.16 Odrediti inverznu funkciju za $f(x) = \ln x$, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Rešenje.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\ln x) \Rightarrow x = f^{-1}(\ln x)$$

Smenom $t = \ln x \Rightarrow e^t = e^{\ln x} \Rightarrow e^t = x$ imaćemo

$$e^t = f^{-1}(t)\,,$$

pa nakon zamene $t \to x$, inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = e^x$. ■

Apsolutna vrednost broja $x \in \mathbb{R}$ definiše se kao:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0\,. \end{cases}$$

Na primer, $|7| = 7$, $|0| = 0$, $|-7| = -(-7) = 7$.

Teorema 1.6.17 *Neka su x i y proizvoljni realni brojevi. Tada važi (nejednakost trougla)*

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \tag{1.3}$$

Dokaz. Postoje četiri mogućnosti:

- Ako je $x \geq 0$ i $y \geq 0$, tada je $|x+y| = x+y = |x|+|y|$.
- Ako je $x \leq 0$ i $y \leq 0$, tada je $|x+y| = -x+(-y) = |x|+|y|$.
- Ako je $x \geq 0$ i $y \leq 0$, tada je $|x+y| \leq |x+(-y)| = x+(-y) = |x|+|y|$.
- Ako je $x \leq 0$ i $y \geq 0$, tada je $|x+y| \leq |-x+y| = -x+y = |x|+|y|$.

Time je teorema dokazana. ■

Posledica teoreme 1.6.17 je:

Posledica 1.6.18 *Neka su x i y proizvoljni realni brojevi. Tada važi*

$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|.$$

Dokaz. Koristeći nejednakost trougla (1.3) imaćemo

$$|(x-y)+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|.$$

Tada je i

$$|y-x| \geq |y|-|x| \Rightarrow |x-y| \geq |y|-|x| \Rightarrow -|x-y| \leq |x|-|y|.$$

Dakle važi

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \Rightarrow \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|.$$

■

Lako je pokazati da važi i $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ i $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

Koristićemo i uobičajene oznake za intervale:

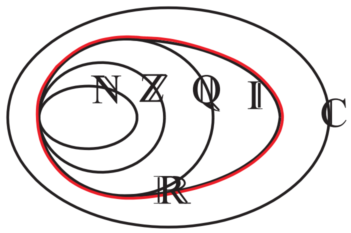
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$,
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}$,
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\}$,
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$,
- $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x\}$,
- $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\}$,
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq b\}$,
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ x < b\}$,
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$,
- $\mathbb{R}^- = (-\infty,0)$.

1.6.6 Skup kompleksnih brojeva

Ako se želi rešiti jednačina $x^2 = -1$, jasno je da, u skupu realnih brojeva, ova jednačina nema rešenje jer je $x^2 \geq 0$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Uvodi se novi skup, skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, kojem će pripadati rešenje ove jednačine $x = \pm i$, gde se i naziva imaginarna jedinica i definiše kao $i^2 = -1$,

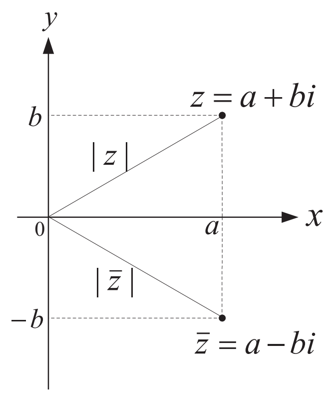
$$\mathbb{C} = \{a + b\,i = (a,b) |\ a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Važi i $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (slika 1.12).



Slika 1.12: Skupovi brojeva.

Broj a se naziva realni deo, a broj b imaginarni deo kompleksnog broja $z = a + b\,i = (a, b)$. Sa $\bar{z} = a - b\,i = (a, -b)$ označavamo konjugovano kompleksan broj kompleksnom broju $z = a + b\,i = (a, b)$. Udaljenost kompleksnog broja z od koordinatnog početka označavamo sa $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i nazivamo moduo kompleksnog broja (slika 1.13).



Slika 1.13: Kompleksna ravan, Dekartov koordinatni sistem, x-realna osa, y-imaginarna osa.

Dva kompleksna broja $z_1 = (a_1, b_1)$ i $z_1 = (a_2, b_2)$ su jednaka ako i samo ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$. Sabiranje dva kompleksna broja se definiše kao

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

ili

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\,,$$

a proizvod

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

ili

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + b_1 \cdot b_2\, i^2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i\,.$$

Struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ čini polje, gde je $+$ operacija sabiranja, a $\cdot$ operacija množenja kompleksnih brojeva. Koristeći oznaku kompleksnog broja $z = a + b\,i$ daćemo primer da bismo ilustrovali pomenute operacije.

Napomena 1.6.19 *Primetimo da ako saberemo kompleksni broj i njegov konjugovani kompleksni broj dobijamo realan broj, odnosno*

$$(a + b\,i) + (a - b\,i) = 2\,a\,.$$

Napomena 1.6.20 *Primetimo da ako pomnožimo kompleksni broj i njegov konjugovani kompleksni broj dobijamo kvadriran moduo kompleksnog broja, tj.*

$$(a + b\,i) \cdot (a - b\,i) = a^2 - a\,b\,i + a\,b\,i - b^2\,i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2 = |z|^2\,.$$

Primer 1.6.21 Neka je $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = -3 + 5i$. Odrediti $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$.

Rešenje.

- $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-3 + 5i) = -1 + 2i\,,$
- $z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (-3 + 5i) = 2 - 3i + 3 - 5i = 5 - 8i\,,$
- $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-3 + 5i) = -6 + 10i + 9i - 15i^2 = -6 + 19i + 15 = 9 + 19i\,.$

Ovim je kompltirano rešenje zadatka. ■

Deljenje kompleksnih brojeva $z_1 = a_1 + b_1\,i$ i $z_2 = a_2 + b_2\,i$ definiše se na sledeći način:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\,i}{a_2 + b_2\,i} = \frac{a_1 + b_1\,i}{a_2 + b_2\,i} \cdot \frac{a_2 - b_2\,i}{a_2 - b_2\,i} = \frac{(a_1\,a_2 + b_1\,b_2) + (a_2\,b_1 - a_1\,b_2)\,i}{(a_2)^2 + (b_2)^2}\,,$$

uz uslov $(a_2)^2 + (b_2)^2 \neq 0$ što je ekvivalentno sa uslovom da a_2 i b_2 nisu istovremeno jednaki nuli.

Primer 1.6.22 Neka je $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = -3 + 5i$. Odrediti $\frac{z_1}{z_2}$.

Rešenje.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{-3 + 5i} \cdot \frac{-3 - 5i}{-3 - 5i} = \frac{(2 - 3i)(-3 - 5i)}{(-3)^2 + 5^2} = \frac{-6 - 10i + 9i - 15}{9 + 25} = \frac{-21 - i}{34}\,.$$

■

Napomena 1.6.23 *Pošto važi*

$$i^0 = 1\,,\ i^1 = i\,,\ i^2 = -1\,,\ i^3 = i \cdot i^2 = -i\,,\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1\,,\ i^5 = i^4 \cdot i = i\,,\ i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1\,, \ldots,$$

a takođe i

$$\ldots, i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i\,,\ i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1\,,\ i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i\,,$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1\,,\ i^{-1} = \frac{1}{i} = -i\,.$$

vidimo da važi $i^{-5} = i^{-1} = i^3 = -i$, $i^{-4} = i^0 = i^4 = 1$, $i^{-3} = i^1 = i^5 = i$, $i^{-2} = i^2 = i^6 = -1$, *odnosno, uopšteno, važiće* $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, $i^{4k} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Napomena 1.6.24 *Primetimo da je*

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$$

i

$$(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i\,.$$

Primer 1.6.25 Izračunati: *a*) $(1+i)^{132}$ i *b*) $(2-2i)^{73}$ korišćenjem napomena 1.6.23 i 1.6.24.

Rešenje.
a)

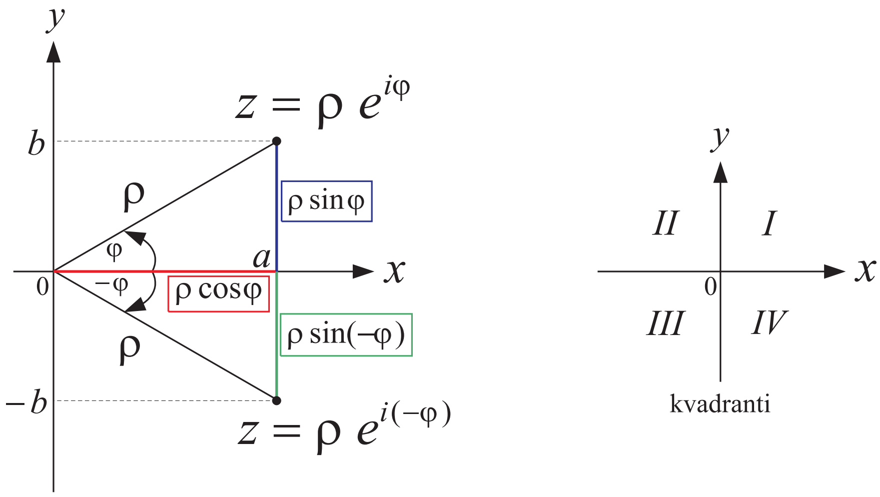
$$(1+i)^{132} = \left((1+i)^2\right)^{66} = (2\,i)^{66} = 2^{66}\,i^{66} = 2^{66} i^{4\cdot 16+2} = 2^{66}\,i^2 = -2^{66}$$

b)

$$\begin{aligned}(2-2i)^{75} &= (2(1-i))^{75} = 2^{75}(1-i)^{75} = 2^{75}(1-i)(1-i)^{74} = 2^{75}(1-i)\left((1-i)^2\right)^{37} \\ &= 2^{75}(1-i)\,(-2i)^{37} = 2^{75}(1-i)(-2)^{37}\,i^{37} = -2^{112}(1-i)\,i^{4\cdot 9+1} \\ &= -2^{112}(1-i)\,i = -2^{112}(i-i^2) = -2^{112}(1+i)\,.\end{aligned}$$

■

Kompleksni broj $z = a + b\,i$ može se napisati i u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku. Kao što je prikazano na slici 1.14, sa ρ ćemo obeležiti radijus, odnosno udaljenost broja z od koordinatnog početka ($\rho = |z|$), a sa φ ugao (argument kompleksnog broja) koji radijus zaklapa sa pozitivnim delom x-ose.



Slika 1.14: Kompleksna ravan, polarni koordinatni sistem, x-realna osa, y-imaginarna osa. Kvadranti.

Tada je $\cos\varphi = a/\rho$, a $\sin\varphi = b/\rho$, odnosno

$$a = \rho\cos\varphi\,,\ b = \rho\sin\varphi$$

i sada dobijamo trigonometrijski oblik broja z

$$z = a + b\,i = \rho\cos\varphi + i\,\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,. \tag{1.4}$$

Argument kompleksnog broja je, dakle, ugao $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ i njega određujemo pri prelasku sa Dekartovih na polarne koordinate. Ako se podsetimo Ojerove formule

$$e^{i\,x} = \cos\,x + i\,\sin x\,,\ x \in \mathbb{R}$$

na osnovu (1.4), dolazimo do eksponencijalnog oblika kompleksnog broja z, tj.

$$z = \rho\,e^{i\,\varphi}\,. \tag{1.5}$$

Čitaocu se preporučuje da, pre prelaska na naredne primere, pogleda poglavlje o trigonometrijskim funkcijama (poglavlje 7.2.5).

Primer 1.6.26 Predstaviti sledeće kompleksne brojeve u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku: $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$, $z_2 = -1 + i$ i $z_3 = -i$.

Rešenje.

Krenimo od broja $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$. Pošto je $a = 1$ i $b = \sqrt{3}$, tada je $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Pošto je $a, b > 0$, ugao φ je u prvom kvadrantu. Sada je $\operatorname{tg}\varphi = b/a = \sqrt{3}$, te je $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3$. Dakle, $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ je trigonometrijski oblik broja z_1. Eksponencijalni oblik je $z_1 = 2\,e^{i\pi/3}$.

Za $z_2 = -1 + i$ važi $a = -1$, $b = 1$ (ugao φ je u drugom kvadrantu), $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$ i $\varphi = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$. Tada je $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ili $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\,3\pi/4}$.

Neka je $z_3 = -i$. On se nalazi na udaljenosti 1 od koordinatnog početka na negativnom delu imaginarne ose. Dakle, $\rho = 1$ i $\varphi = 3\pi/2$. Tada je $z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = e^{i\,3\pi/2}$. ■

Ako se želi izražunati z^n, $n \in \mathbb{N}$, tada je, korišćenjem (1.5),

$$z^n = \rho^n\left(e^{i\,\varphi}\right)^n = \rho^n\,e^{i\,n\varphi}\,,$$

dok se za računanje $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, koristi formula

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Primer 1.6.27 Ako je $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ i $z_2 = -1 + i$, izračunati $(z_1)^{12}$ i $\sqrt[3]{z_2}$.

Rešenje.

U primeru 1.6.26 je pokazano da je eksponencijalni oblik kompleksnog broja $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ zapravo

$$z_1 = 2\,e^{i\pi/3} \Rightarrow (z_1)^{12} = 2^{12}\,e^{i12\pi/3} = 2^{12}\,e^{i4\pi}\,,$$

a pošto je $e^{i4\pi} = \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = 1 + i \cdot 0 = 1$, tada je $(z_1)^{12} = 2^{12}$.

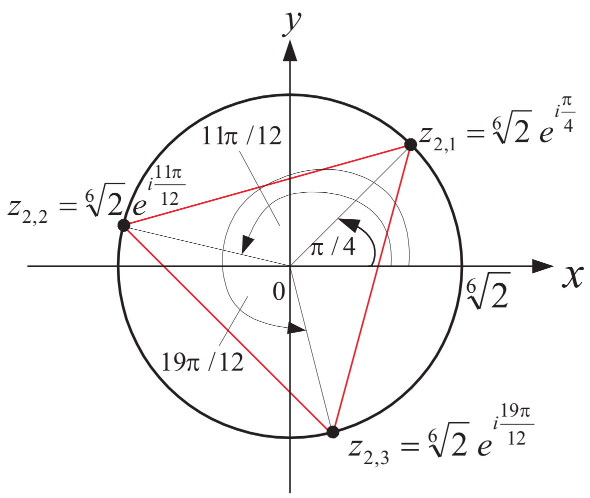
Ako je $z_2 = -1 + i$, tada je (vidi primer 1.6.26) $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\,3\pi/4}$, pa je

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}}\,,\ k = 0, 1, 2\,,$$

odnosno

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[6]{2}\cdot\begin{cases} e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{3}}, & (k=0),\\ e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}}, & (k=1),\\ e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}}, & (k=2),\end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{z_2} = \begin{cases} \sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} =: z_{2,1}\,,\\ \sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{11\pi}{12}} =: z_{2,2}\,,\\ \sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{19\pi}{12}} =: z_{2,3}\,.\end{cases}$$

Geometrijski, tri rešenja koja smo dobili obrazuju jednakostranični trougao (slika 1.15). ■



Slika 1.15: Geometrijski prikaz $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{-1+i}$ sa rešenjima $z_2 = z_{2,1}$, $z_2 = z_{2,2}$ i $z_2 = z_{2,3}$.

1.7 Zadaci za vežbu

1. Navesti pet potvrdnih rečenica i odrediti njihovu istinitost.

2. Za svaku logičku operaciju navesti po jednu rečnicu i objasniti njenu tačnost.

3. Dokazati preostale navedene tautologije iz ovog udžbenika.

4. Dati su skupovi $A = \{2,4,6,8,10,12\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ i $C = \{1,2,3,5,8,13\}$. Odrediti $A\cup B$, $A\cup C$, $B\cup C$, $A\cup B\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\cap B\cap C$, $A\setminus B$, $A\setminus C$, $B\setminus C$, $B\setminus A$, $C\setminus A$, $C\setminus B$.

5. Dati su skupovi $A = \{a,b,c,d\}$ i $B = \{1,2,3\}$. Odrediti $A\times B$ i $B\times A$.

6. Dokazati preostale osobine skupovnih operacija koristeći iskazni račun.

7. Odrediti osobine relacije ρ definisane na skupu $X = \{a,b,c,d,e\}$, ako je

$$\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,c),(a,c),(b,a),(c,b),(c,a),(d,e),(e,d)\}\,.$$

Ako je u pitanju relacija ekvivalencije, odrediti klase ekvivalencije.

8. Pokazati da je relacija ρ definisana sa $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})\;\; x\rho y \Leftrightarrow x \leq y$ relacija poretka.

9. Neka je na skupu $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall\, x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\;\; x\rho y \Leftrightarrow x\, y > 0\,.$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i odrediti klase ekvivalencije za elemente -1 i 1.

10. Neka je na skupu $\mathbb{N}$ definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall\, x, y \in \mathbb{N})\;\; x\rho y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\;\; x - y = 3k\,.$$

Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{N}$ i odrediti klase ekvivalencije.

11. Neka je na skupu $\mathbb{N}$ definisana relacija ρ na sledeći način

$$(\forall\, x, y \in \mathbb{N})\;\; x\rho y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\;\; y = k\, x\,.$$

Pokazati da je ρ relacija poretka na skupu $\mathbb{N}$.

12. Naći sve funkcije koje preslikavaju skup $A = \{1, 2, 3\}$ u skup $B = \{a, b\}$ i odrediti tip preslikavanja.

13. Dati primer dva skupa i definisati bijektivno preslikavanje. Odrediti i inverzno preslikavanje.

14. Ispitati da je grupa, polugrupa ili grupa svaki od sledećih skupova zajedno sa naznačenom operacijom:

(i) parni brojevi u odnosu na sabiranje,

(ii) celi brojevi, deljivi sa datim $n \in \mathbb{N}$, u odnosu na sabiranje,

(iii) negativni celi brojevi u odnosu na množenje,

(iv) pozitivni racionalni brojevi u odnosu na deljenje,

(v) skup kompleksnih brojeva $\{1, -1, i, -i\}$ u odnosu na operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

15. Neka je S skup pozitivnih realnih brojeva i $*$ operacija u tom skupu definisana kao a) $a * b = a^b$ i b) $a * b = a^2 b^2$. Šta je algebarska struktura $(S, *)$?

16. Ispitati da li su sledeći skupovi, sa naznačenim operacijama, prsten ili polje:

(i) parni brojevi sa operacijama sabiranja $+$ i množenja $\cdot$,

(ii) skup brojeva oblika $a + b\sqrt{2}$, gde su a i b celi brojevi, u odnosu na $+$ i $\cdot$,

(iii) skup brojeva oblika $a + b\sqrt{3}$, gde su a i b racionalni brojevi, u odnosu na $+$ i $\cdot$.

17. Matematičkom indukcijom dokazati da važi:

(i) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dfrac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$,

(ii) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$,

(iii) da je $2^{12n+3} - 3^{6n+2}$ deljivo sa 13 za $n \geq \mathbb{N}_0$,

(iv) da je $3^{2n+3} + 40n - 27$ deljivo sa 64 za $n \geq \mathbb{N}_0$,

(v) $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$, $n \in \mathbb{N}$, $a > -1$.

18. Dokazati da je
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2, \ n \in \mathbb{N}\,.$$

19. Dokazati da je
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \ n \in \mathbb{N}\,.$$

20. Broj $4n+3$ ne može biti kvadrat ni jednog prirodnog broja za bilo koje $n \in \mathbb{N}$. Dokazati.

21. Dokazati da ako je n prirodan broj i ako je $n^3 + 5$ neparan broj, tada n mora biti paran broj.

22. Pokazati da brojevi $3n + 1$ i $2n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}$, nemaju zajedničkih delitelja.

23. Ako su a i b prosti brojevi veći od 3, pokazati da je broj $a^2 - b^2$ deljiv sa 24.

24. Dokazati da $\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

25. Dokazati da $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nije racionalan broj.

26. Ako je $z_1 = 4 - 3i$ i $z_2 = -1 + 2i$, odrediti realne i imaginarne delove kompleksnih brojeva $3z_1 + z_2$, $z_1 - 2z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, kao i njihove udaljenosti od koordinatnog početka.

27. Odrediti kompleksni broj z koji zadovoljava jednačinu $|z| + z = 2 + i$.

28. Odrediti kompleksne brojeve z_1 i z_2 ako je
$$z_1 + z_2 = 1 - i, \ \arg(z_1) = \frac{\pi}{6}, \ \arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}\,.$$

29. Ako je $z = -2\sqrt{3} - 2i$, odrediti z^4 i $\sqrt[4]{z}$.

30. Rešiti jednačinu $e^{i\pi/4}z + e^{i\pi/6}z + i = 0$.

GLAVA 2

Finansijska matematika

U ovoj glavi biće prikazani procentni račun, složeni kamatni račun, složeni kamatni račun sa češćim kapitalisanjem, račun ulaganja (štednje), račun otplate duga i konformna kamatna stopa sa odgovarajućim primerima.

2.1 Procentni račun

Sa G označićemo veličinu od koje se izračunava procenat i zvaćemo je *glavnica*. Sa p označavamo broj koji pokazuje koliko jedinica treba uzeti od svakih 100 jedninica glavnice i nazvaćemo ga *procenat*. Oznaka za procenat je %. Sa P označavamo iznos koji se dobije kada se izračuna p procenata od G. Tada je

$$P = \frac{p}{100} \cdot G. \tag{2.1}$$

Primer 2.1.1 Koliko evra iznosi sniženje cene automobila ako je početna cena 6500 evra, a popust 20%?

Rešenje. Sada je $G = 6500$ evra, a $p\% = 20\%$, tj. $p = 20$, te na osnovu formule (2.1) važiće

$$P = \frac{20}{100} \cdot 6500 = 1300 \text{ evra}.$$

■

Primer 2.1.2 Cena kotla na biomasu snage do 25 kW, uz montažu, je povećana za 4% i to povećanje je 48 evra. Kolika je cena kotla pre i posle povećanja?

Rešenje. Dakle, sada tražimo glavnicu G, a znamo $P = 48$ i $p = 4$. Iz formule (2.1) sledi

$$G = \frac{100}{p} \cdot P = \frac{100}{4} \cdot 48 = 1200 \text{ evra}.$$

Nakon povećanja od 4%, cena kotla je $G + P = 1200 + 48 = 1248$ evra. ■

Primer 2.1.3 Na ime troškova prevoza pelena plaćeno je 120 evra. Koliko je to u procentima, ako je ukupna vrednost pelena 3000 evra?

Rešenje. Sada je poznato $G = 3000$ i $P = 120$, a potrebno je da nađemo procenat p.

$$p\% = \frac{100 \cdot P}{G} = \frac{100 \cdot 120}{3000} = 4\% .$$

■

Neka se glavnica G poveća za p procenata. To znači da se G poveća za p procenata od G, odnosno:

$$G \nearrow p\% = G + (p\% \text{ od } G) = G + \frac{p}{100} \cdot G = G\Big(1 + \frac{p}{100}\Big) . \tag{2.2}$$

Ako je u pitanju smanjenje za $p\%$ tada važi

$$G \searrow p\% = G - (p\% \text{ od } G) = G - \frac{p}{100} \cdot G = G\Big(1 - \frac{p}{100}\Big) . \tag{2.3}$$

Primer 2.1.4 Cena neke robe od 200 evra povećana je za 7%, a potom je nova cena snižena za 10%. Kolika je trenutna cena?

Rešenje. Neka je $G = 200$. Tada je trenutna cena

$$G\left(1 + \frac{7}{100}\right)\left(1 - \frac{10}{100}\right) = 200 \cdot 1.07 \cdot 0.90 = 192.6 \text{ evra.}$$

■

Primer 2.1.5 Na širem području Novog Sada, 2019. godine, bilo je 402696 stanovnika što je za 2% više nego pre 8 godina. Koliko je stanovnika bilo 2011. godine?

Rešenje. Ako sa G označimo broj stanovnika 2011. godine, a sa p procenat povećanja broja stanovnika, tada će važiti

$$G\left(1 + \frac{2}{100}\right) = 402696 \Rightarrow G = \frac{402696}{1 + \frac{2}{100}} = \frac{402696}{1.02} = 394800 \text{ stanovnika.}$$

■

Primer 2.1.6 Ukupan rabat je 20%, a nabavna cena u trgovini na veliko je 1200 evra. Kolika je prodajna i nabavna cena u trgovini na malo, ako je u trgovini na malo rabat 6%?

Rešenje. Dakle, početna cena G je umanjena za 20% i iznosi 1200 evra. Sledi

$$G\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 1200 \Rightarrow G = \frac{1200}{0.80} = 1500 \text{ evra}$$

i to je prodajna cena u trgovini na malo. Nabavnu cenu u trgovini na malo dobijamo ako prodajnu cenu u trgovini na malo smanjimo za 6%. Dakle, nabavna cena u trgovini na malo je

$$1500\left(1 - \frac{6}{100}\right) = 1410 \text{ evra.}$$

■

Primer 2.1.7 Po odbitku 8% provizije, uplaćeno je 4140 evra. Koliko iznosi plaćena provizija?

Rešenje. Neka je G početna suma. Tada će važiti

$$G \searrow 8\% = 4140 \Rightarrow G\left(1 - \frac{8}{100}\right) = 4140 \Rightarrow G = \frac{4140}{0.92} = 4500,$$

te je plaćena provizija $4500 - 4140 = 360$ evra.

■

Primer 2.1.8 Jedna stranica pravougaone njive je povećana za 24%, a druga je smanjena za 24%. Da li se promenila površina njive?

Rešenje. Neka je jedna stranica pravougaone njive obeležena sa a, a druga sa b. Njena površina je $P_1 = a \cdot b$. Neka se sada a poveća za 24%, a b smanji za 24%. Nova površina će biti

$$P_2 = a\left(1 + \frac{24}{100}\right) \cdot b\left(1 - \frac{24}{100}\right) = a \cdot 1.24 \cdot b \cdot 0.76 = a \cdot b \cdot 0.9424 = P_1 \cdot 0.9424.$$

Jasno je da je P_2 manje od P_1, a sada još treba odrediti za koliko procenata. To dobijemo nalaženjem p iz jednakosti

$$1 - \frac{p}{100} = 0.9424 \Rightarrow p = (1 - 0.9424) \cdot 100 = 5.76.$$

Znači da se površina smanjila za 5.76%. ■

Primer 2.1.9 Neka je cena neke robe povećana za 25%, a nakon toga bila na akciji sa sniženjem od 18%. Da li će kupac platiti više ili manje u odnosu na početnu cenu? Šta bi se desilo da je sniženje bilo 20%, a šta da je bilo 25%?

Rešenje. Posmatrajmo prvi deo zadatka. Ako je x cena robe, nakon povećanja od 25%, nova cena je $x \cdot 1.25$. Sada je nova cena snižena za 18%, što znači da je sada nova cena $x \cdot 1.25 \cdot 0.82 = x \cdot 1.025$. Dakle, kupac će platiti više i to $(1.025 - 1) \cdot 100\% = 2.5\%$.

Da je sniženje bilo 20%, tada se početna cena ne bi promenila jer je

$$x \cdot 1.25 \cdot 0.80 = x.$$

Da je sniženje bilo 25%, tada bi krajnja cena bila manja od početne jer je

$$x \cdot 1.25 \cdot 0.75 = x \cdot 0.9375.$$

Krajnja cena bi bila manja od početne za $(1 - 0.9375) \cdot 100\% = 6.25\%$. ■

Primer 2.1.10 Nakon sniženja od 40%, cena neke robe iznosi 360 evra. Za koliko procenata treba povećati sadašnju cenu da bi se roba prodavala po ceni pre sniženja?

Rešenje. Neka je početna cena robe obeležena sa x. Nakon sniženja od 40%, njena cena je $x \cdot 0.60$, odnosno 360 evra. Dakle,

$$x \cdot 0.60 = 360 \Rightarrow x = 600 \text{ evra}.$$

Sada treba izračunati za koliko procenata treba povećati 360 evra da bismo dobili cenu od 600 evra.

$$\frac{600}{360} = 1.667$$

što znači da cenu od 360 evra treba povećati za $(1.667 - 1) \cdot 100\% = 66.7\%$ da bismo dobili cenu od 600 evra. ■

Primer 2.1.11 Tek oboreno stablo bilo je teško 2.25 tona i sadržalo je 64% vode. Posle nedelju dana to stablo je sadržalo 46% vode. Za koliko se promenila težina stabla za tu nedelju?

Rešenje. Izračunajmo prvo suvi deo stabla kada je tek oboreno. Suvi deo je 36% od 2.25 tona, a to je $2.25 \cdot 0.36 = 0.81$ tona. Nakon sedam dana, ta 0.81 tona postaje $(100 - 46)\% = 54\%$ ukupne težine stabla, koju ćemo označiti sa x. Dakle, $x \cdot 0.54 = 0.81$ pa je ukupna težina stabla $x = 1.5$ tona. Razlika u težini je $2.25 - 1.5 = 0.75$ tona. ■

Primer 2.1.12 Prodavnica sadnog materijala naplaćuje 30% marže na sve što prodaje. Ona nudi 20% popusta na prodajnu cenu svojim zaposlenima. Zaposleni traže 25% popusta, tvrdeći da će prodavnica opet imati profit. Menadžer kaže da će tako prodavnica biti na gubitku. Ko je u pravu?

Rešenje. Neka je x nabavna cena nekog sadnog materijala. Kada se doda marža, prodajna cena je $x \cdot 1.30$. Ako se na tu cenu uračuna popust koji nudi menadžer, dobijamo cenu $x \cdot 1.30 \cdot 0.80 = x \cdot 1.04$. To znači da bi prodavnica i tada imala zaradu od 4% od nabavne cene. Ako radnicima bude odobren popust od 25%, tada bi oni dobijali sadni materijal po ceni $x \cdot 1.30 \cdot 0.75 = x \cdot 0.975$, tj. prodavnica bi bila na gubitku od $(1 - 0.975) \cdot 100\% = 2.5\%$, tako da je menadžer u pravu. ■

Primer 2.1.13 Ako u 200 grama vode rastvorimo 50 grama šećera, koliki je maseni procentni sastav tog rastvora?

Rešenje. Ako rastvorimo šećer u vodi, tražimo koliko je, u procentima, 50 grama šećera u $200 + 50$ grama smese.

$$\frac{50}{250} \cdot 100\% = 20\%.$$

Dobijen je 20% rastvor. ■

Primer 2.1.14 Izračunati masu 24% rastvora kuhinjske soli u vodi u kome je rastvoreno 3 grama kuhinjske soli.

Rešenje. Neka je x tražena masa. 3 grama kuhinjske soli čini 24% mase. Imamo $x \cdot 0.24 = 3$, pa je $x = 12.5$ grama. ■

Primer 2.1.15 U koliko grama vode treba rastvoriti 20 grama kalijum-permanganata da bi se dobio 40% rastvor?

Rešenje. Neka je x tražena gramaža vode. 20 grama kalijum-permaganata u $x + 20$ grama rastvora čini 40%. Dakle,

$$\frac{20}{x + 20} = 0.4 \Rightarrow 20 = 0.4x + 0.4 \cdot 20 \Rightarrow x = \frac{20 - 8}{0.4} = 30 \text{ grama.}$$

■

Primer 2.1.16 Da bi se pripremila infuzija potrebno je 150 grama 0.9% fiziološkog rastvora. Koliko je potrebno pripremiti natrijum-hlorida koji ćemo rastvoriti u vodi?

Rešenje. Neka je x tražena masa natrijum-hlorida koja čini 0.9% od 150 grama. Dakle,

$$\frac{x}{150} = \frac{0.9}{100} \Rightarrow x = 0.009 \cdot 150 = 1.35 \text{ grama.}$$

■

2.2 Složeni kamatni račun

Definišimo prvo nekoliko osnovnih pojmova. Pod *obračunskim periodom* smatraćemo period (godina, mesec, nedelja,...) za koje se neki kapital uveća pri jednom računanju kamatne stope za taj period. Dodavanje kamate na glavnicu ili kapital naziva se *kapitalisanje*. U svim poglavljima do kraja ove glave, kamata će se obračunavati na kraju obračunskog perioda i to je *dekurzivno računanje* kamate.

Obeležićemo sa G sumu novca koja se jednom uloži na račun u banci. *Kamatna stopa* p je kamata koju plaća banka na svakih 100 novčanih jedinica uložene sume u svakom obračunskom periodu (godina, mesec,...). Nakon n obračunskih perioda, suma koja se nalazi na računu biće obeležena sa G_n, $n = 1, 2, \ldots$ Dakle,

$$G_1 = G + (p\% \text{ od } G) = G\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

nakon prvog obračunskog perioda. Nakon drugog obračunskog perioda, na računu će biti

$$G_2 = G_1 + (p\% \text{ od } G_1) = G_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = G\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

korišćenjem formule za G_1. Nakon n obračunskih perioda, na računu će biti

$$G_n = G\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \tag{2.4}$$

Iz formule (2.4) slede i formule za G, p i n, odnosno

$$G = \frac{G_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}, \tag{2.5}$$

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G}} - 1\right) \cdot 100 \tag{2.6}$$

i

$$n = \frac{\ln\left(\frac{G_n}{G}\right)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}. \tag{2.7}$$

Primer 2.2.1 Neka je uplaćena suma na račun u banci $G = 1000$ evra, sa godišnjom kamatnom stopom od 10% ($p = 10$). Koliko će biti na računu nakon 3 godine ($G_3 = ?$) od dana ulaganja? Ne koristiti formulu (2.4) već računati sumu nakon svake godine.

Rešenje. G_1 se dobija tako što se na $G = 1000$ doda 10% od 1000 što je 100. Dakle,

$$G_1 = 1000 + 100 = 1100.$$

Sada se G_2 dobija tako što se $G_1 = 1100$ poveća za 10%, odnosno za 110. Dakle,

$$G_2 = 1100 + 110 = 1210\,.$$

Dalje nastavljamo istom logikom,

$$G_3 = 1210 + 121 = 1331$$

i tako dalje. ■

Primer 2.2.2 Na koju sumu će porasti kapital od 2200 evra uz godišnju kamatnu stopu od 6% nakon 8 godina?

Rešenje. Sada je $G = 2200$, $p = 6$ i $n = 8$. Treba da odredimo G_n odnosno G_8. Na osnovu (2.4) dobijamo

$$G_8 = 2200 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^8 = 2200 \cdot 1.06^8 = 3506.47 \text{ evra.}$$

■

Primer 2.2.3 Iznos od 60089 evra je dobijen nakon ulaganja nepoznate sume u banku na vreme od 8 godina i 6 meseci uz mesečnu kamatnu stopu od 4%. Koliko iznosi početni (uloženi) kapital?

Rešenje. Sada je $n = 8 \cdot 12 + 6 = 102$ meseca, $p = 4$ i $G_n = G_{102} = 60089$. Tražimo G. Zamenjujući vrednosti u formuli (2.5 dobijamo

$$G = \frac{60089}{\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{102}} = 1100 \ \text{ evra.}$$

■

Primer 2.2.4 Uloženo je 20000 evra u banku koja isplaćuje kamatu po mesečnoj kamatnoj stopi od p%. Krajem prve godine je povučeno 20000 evra, a ostatak krajem druge godine u iznosu od 500 evra. Odrediti mesečnu kamatnu stopu.

Rešenje. Nakon prve godine na računu je

$$G_{12} = 20000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12}.$$

Nakon povlačenja 20000 evra i još jedne godine, na računu je

$$\left(20000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} - 20000\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} = 500 \ \text{ evra.}$$

Ako uvedemo smenu $t = (1 + p/100)^{12}$, gornja jednačina postaje

$$(20000 \cdot t - 20000) \cdot t = 500 \Rightarrow 20000t^2 - 20000t - 500 = 0.$$

Rešavajući po t, dobijamo da je $t = 1.0244$ (drugo rešenje jednačine je negativno i zbog toga ga odbacujemo). Sada je

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} = 1.0244 \Rightarrow p\% = \left(\sqrt[12]{1.0244} - 1\right) \cdot 100 = 0.2011\%.$$

■

Primer 2.2.5 Neka je pre šest godina uloženo 1000 evra, a pre dve godine još 1500 evra. Koliko danas iznosi uvećani kapital ako je kamatna stopa mesečna i iznosi 2%?

Rešenje. Izračunajmo sumu nakon prvih 6 godina od dana ulaganja. $G = 1000$, $n = 6 \cdot 12 = 72$ jer je kamatna stopa mesečna ($p = 2$) pa se i n mora izraziti u mesecima. Tada je

$$G_{72} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{72} = 4161.14 \text{ evra.}$$

Sada se uloži dodatnih 1500 evra i nova glavnica je

$$G^{\star} = G_{72} + 1500 = 5661.14 \text{ evra,}$$

pa je nakon $n = 2 \cdot 12 = 24$ meseci, uvećani kapital jednak

$$G^{\star}_{24} = 5661.14 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{24} = 9105.59 \text{ evra.}$$

■

Primer 2.2.6 Neka se količina virusa V neprestano naizmenično u periodu od 5 minuta uvećava za 5% u toku svakog minuta, a zatim u narednih 12 minuta se smanjuje za 2% u svakoj minuti. Tada će količina virusa V u toku vremena neograničeno rasti. Da li je ovo tačna tvrdnja?

Rešenje. U ovom primeru možemo primeniti formulu za složeni kamatni račun gde je glavnica G zapravo količina virusa V, $n = 5$ minuta, $p = 5$. Nakon prvih 5 minuta nova količina virusa će biti

$$V \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{5} = V \cdot 1.05^5 = V \cdot 1.276.$$

Nakon narednih 12 minuta, količina virusa će biti

$$V \cdot 1.276 \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)^{12} = V \cdot 1.276 \cdot 0.98^{12} = V \cdot 1.002.$$

Dakle, nakon prvih $5 + 12 = 17$ minuta, količina virusa je veća za $(1.002 - 1) \cdot 100\% = 0.2\%$, tako da će vremenom količina virusa stalno rasti. ■

Primer 2.2.7 Pčelar je shvatio da mu je potrebno najmanje 5300 pčela za pašu. Takođe zna da se broj pčela svake godine povećava za 10%. Ako je kupio 4000 pčela, koliko godina mora da prođe da bi imao dovoljan broj pčela za pašu?

Rešenje. Početni broj pčela obeležićemo sa $G = 4000$. Nakon n godina imaće $G_n = 5300$ pčela, a $p = 10$. Odredimo n tako što zamenimo vrednosti u formuli (2.7) da bismo dobili

$$n = \frac{\ln\left(\frac{5300}{4000}\right)}{\ln\left(1 + \frac{10}{100}\right)} = 2.95 \text{ godina} \approx 3 \text{ godine.}$$

■

Primer 2.2.8 Neka je goveđi fond Srbije 1998. godine milion grla. 60% od osnovnog fonda je predviđeno za priplod. Od predviđenog broja 90% se teli svake godine. Zna se da u proseku svaka dvadeseta krava ima dva teleta. Godišnje ugine ili se pokolje 40% od osnovnog fonda. Koliki će goveđi fond biti 2001. godine u Srbiji?

Rešenje. Uradimo ovaj zadatak na dva načina. Prvo godinu po godinu, a posle i preko odgovarajuće formule. Na početku 1998. godine u fondu je 1000000 grla. Odmah se zna da je 600000 za priplod, tj. 60%. Od tog broja oteli se 90%, odnosno $600000 \cdot 0.90 = 540000$ i na to treba dadati još jedno tele na svakih 20 krava, a to je 5%, $600000 \cdot 0.90 \cdot 0.05 = 27000$. Znači, na početku 1999. godine raspolažemo sa $600000 + 540000 + 27000 = 1167000$ grla. Sada se opet 40% ne koristi za priplod, ostalo je $1167000 \cdot 0.60 = 700200$, i od tog broja se oteli 90% krava i svaka 20 daje dva teleta pa je broj novih grla $700200 \cdot 0.9 + 700200 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 661689$. Na početku 2000. imamo ukupno $702000 + 661689 = 1361889$ grla. Taj broj smanjimo za 40% i dobijamo $1361889 \cdot 0.6 = 817133.4$, i dalje $817133.4 \cdot 0.9 + 817133.4 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 772191.063$. Na početku 2001. godine biće $817133.4 + 772191.063 = 1589324.463 \approx 1589324$ grla.

Uradimo sada preko formule za složeni kamatni račun. Odradimo godišnji procenat povećanja krda.

$$\frac{p}{100} = \underbrace{-\frac{40}{100}}_{40\%\text{ grla se eliminiše}} + \underbrace{\frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100} \cdot \frac{5}{100}}_{90\%\text{ od preostalih }60\%\text{ se oteli i }5\%\text{ daje još jedno tele}} = \frac{16.7}{100}.$$

Znači da je procenat povećanja krda 16.7. Od 1998. do 2001. godine ima tri godine, pa je $n = 3$, $G = 1000000$ i $p = 16.7$. Tada je

$$G_3 = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{16.7}{100}\right)^3 = 1589324.463 \text{ grla.}$$

■

Pre izrade narednog zadataka pogledati primer 8.1.5 gde je definisan geometrijski niz.

Primer 2.2.9 Prosečna dnevna konzumacija hrane kod svinja u tovu iznosi 3% od telesne mase, a kilogram hrane košta 30 dinara. Masa svinja na ulasku u tov je 20 kg, a na kraju tova 120 kg. Tov traje 140 dana (141. dana se otpuštaju iz tova). Koliko košta hrana za tov jedne svinje? Koji procenat od pojedene hrane se zadržavao u organizmu?

Rešenje. Količina hrane koju svinja od $t_1 = 20$ kg treba da pojede prvog dana je

$$h_1 = t_1 \cdot \frac{3}{100} = 20 \cdot \frac{3}{100} \text{ kg.}$$

Na početku drugog dana, težina svinje je (u kg)

$$t_2 = t_1 + h_1 \cdot x = 20 + 20 \cdot \frac{3}{100} \cdot x = 20\left(1 + \frac{3}{100} \cdot x\right) = 20\,q,$$

gde je x deo od pojedene hrane koji će se zadržati u organizmu, a $q = 1 + 3x/100$. Drugog dana svinja treba da pojede

$$h_2 = t_2 \cdot \frac{3}{100} = 20\,q \cdot \frac{3}{100} \text{ kg.}$$

Težina svinje (u kg) na početku trećeg dana je

$$t_3 = t_2 + h_2 \cdot x = 20\,q + 20\,q \cdot \frac{3}{100} \cdot x = 20\,q\left(1 + \frac{3}{100} \cdot x\right) = 20\,q^2,$$

dok je količina hrane koju treba da pojede trećeg dana jednaka

$$h_3 = t_3 \cdot \frac{3}{100} = 20\,q^2 \cdot \frac{3}{100} \text{ kg}.$$

Zaključujemo da će težina svinje (u kg) na početku 140. dana biti

$$t_{140} = 20\,q^{139},$$

a da će pojesti hrane

$$h_{140} = t_{140} \cdot \frac{3}{100} = 20\,q^{139} \cdot \frac{3}{100} \text{ kg}.$$

Ukupnu količinu pojedene hrane obeležićemo sa h_{total} (u kg). Dnevna pojedena količina hrane čini jedan geometrijski niz čija je suma jednaka

$$h_{total} = \sum_{i=1}^{140} h_i = 20 \cdot \frac{3}{100} \sum_{i=1}^{140} q^{i-1} = 20 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{q^{140} - 1}{q - 1}.$$

Težina (u kg) na početku 141. dana (koja će biti jednaka 120 kg) biće

$$t_{141} = 20\,q^{140} = 120 \Rightarrow q^{140} = 6 \Rightarrow q = \sqrt[140]{6}\,.$$

Sada je

$$h_{total} = 20 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{6-1}{\frac{3}{100} \cdot x} = \frac{100}{x}.$$

Kako je

$$q = \sqrt[140]{6} \Rightarrow 1 + \frac{3}{100} \cdot x = \sqrt[140]{6} \Rightarrow x = \left(\sqrt[140]{6} - 1\right) \cdot \frac{100}{3}$$

dobijamo da je

$$h_{total} = \frac{3}{\sqrt[140]{6} - 1} = 232.91 \text{ kg}$$

čija je cena 6987.3 dinara. Koristeći da je

$$q = 1 + \frac{3}{100} \cdot x = \sqrt[140]{6}\,,$$

možemo primetiti da se težina svinje svakoga dana povećavala za

$$\frac{p}{100} = \frac{3 \cdot x}{100} = \sqrt[140]{6} - 1 = 0.01288,$$

odnosno za $p\% = 1.288\%$, a da se od pojedene količine hrane svakoga dana, $x = 0.429$ ili 42.9% zadržavalo u organizmu svinje. ■

2.3 Složeni kamatni račun sa češćim kapitalisanjem

Sada će se kamata dodavati na kapital u kraćem periodu u odnosu na obračunski period. Koliko se puta taj kraći period sadrži u jednom obračunskom periodu obeležićemo sa m. Recimo, ako je obračunski period godina, a kamatu računamo na pola godine (tj. kapitalisanje je polugodišnje), tada je $m = 2$. Ako je obračunski period godina, a kapitalisanje četvoromesečno, tada je $m = 3$, a ako je kapitalisanje kvartalno, $m = 4$, itd. Kamatna stopa za jedan period kapitalisanja će biti p/m, gde je p kamatna stopa za obračunski period. Sa G ćemo obeležiti početnu sumu novca, a sa $G_{m,n}$ sumu nakon n obračunskih perioda i sa m broj kapitalisanja u jednom obračunskom periodu. Formulu dobijamo korišćenjem (2.4):

$$G_{m,n} = G\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^{m\cdot n} = G\left(1 + \frac{p}{100\cdot m}\right)^{m\cdot n}. \tag{2.8}$$

Preostale formule su

$$G = \frac{G_{m,n}}{\left(1 + \frac{p}{100\cdot m}\right)^{m\cdot n}}, \tag{2.9}$$

$$p = \left(\sqrt[m\cdot n]{\frac{G_{m,n}}{G}} - 1\right)\cdot 100\cdot m\,. \tag{2.10}$$

i

$$n = \frac{\ln\left(\frac{G_{m,n}}{G}\right)}{m\cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100\cdot m}\right)}. \tag{2.11}$$

Kamatnu stopu p/m zovemo još i neprecizna kamatna stopa zbog toga što će se dobiti više novca ako se ta stopa koristi m puta nego p jedanput u jednom obračunskom periodu.

Ako broj kapitalisanja u jednoj godini teži beskonačnosti ($m \to \infty$), tada je

$$G_{\infty,n} = G\, e^{\frac{np}{100}}.$$

Takvo kapitalisanje nazivamo neprekidno (kontinualno) kapitalisanje. Kod takvog kapitalisanja, vremenski interval između dva kapitalisanja teži nuli.

Primer 2.3.1 Pozajmljen je iznos od 1000 evra na 5 godina, uz 18% godišnje kamatne stope i kapitalisanje:

a) godišnje,

b) polugodišnje (semestralno),

c) tromesečno (kvartlano),

d) mesečno,

e) dnevno,

f) kontinualno.

Koliko dužnik treba da vrati poveriocu?

Rešenje. Sada je $G = 1000$, $n = 5$ i $p = 18$. Porebno je odrediti m.
a) Ako je kapitalisanje godišnje, tada je $m = 1$ i u pitanju je običan složeni kamatni račun. Dakle,

$$G_{m,n} = G_{1,5} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{18}{100}\right)^5 = 2287.76 \text{ evra.}$$

b) Kada je kapitalisanje polugodišnje, onda je $m = 2$ i imamo

$$G_{m,n} = G_{2,5} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{18}{100 \cdot 2}\right)^{2 \cdot 5} = 2367.36 \text{ evra.}$$

c) Ako je kapitalisanje kvartalno, tada je $m = 4$ jer u jednoj godini ima 4 kvartala. Dakle,

$$G_{m,n} = G_{4,5} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{18}{100 \cdot 4}\right)^{4 \cdot 5} = 2411.71 \text{ evra.}$$

d) Kada je kapitalisanje mesečno, tada je $m = 12$ i imaćemo

$$G_{m,n} = G_{12,5} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{18}{100 \cdot 12}\right)^{12 \cdot 5} = 2443.22 \text{ evra.}$$

e) Ako je kapitalisanje dnevno, banke računaju da je $m = 360$. Dakle,

$$G_{m,n} = G_{360,5} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{18}{100 \cdot 360}\right)^{360 \cdot 5} = 2459.05 \text{ evra.}$$

f) Kada je kapitalisanje neprekidno, tada je $m = \infty$, pa je

$$G_{\infty,n} = G_{\infty,5} = 1000 \cdot e^{\frac{5 \cdot 18}{100}} = 2459.60 \text{ evra.}$$

■

Primer 2.3.2 Dete je rođeno sa 3.9 kg. Ako se pretpostavi da će u prvih pola godine dobijati u masi prosečno 15% mesečno, u drugih pola godine 5% mesečno, u drugoj godini 2% mesečno, a u naredne tri godine 1% mesečno, izračunati kolika bi mogla da bude masa deteta na 5. rođendan.

Rešenje. Obeležimo sa $G = 3.9$ kg. Problem je takav da mu odgovara neprekidno kapitalisanje. Tada je masa deteta nakon punih 5 godina

$$\underbrace{\overbrace{\underbrace{3.9 \cdot e^{\frac{6 \cdot 15}{100}}}_{\text{nakon 6 meseci}} \cdot e^{\frac{6 \cdot 5}{100}}}^{\text{nakon 12 meseci}} \cdot e^{\frac{12 \cdot 2}{100}}}_{\text{nakon 2 godine}} \cdot e^{\frac{36 \cdot 1}{100}} = 23.59 \text{ kg.}$$

■

Primer 2.3.3 Na ulog od 25000 dinara obračunata je kamata od 10000 dinara za vreme od 8 godina. Kojom godišnjom kamatnom stopom je vršeno kamaćenje ako je kapitalisanje:
a) polugodišnje, b) kontinualno?

Rešenje. Sada je $G = 25000$, $G_{m,n} = 25000 + 10000 = 35000$ i $n = 8$. Ako je kapitalisanje polugodišnje, $m = 2$ i onda je

$$p = \left(\sqrt[m\cdot n]{\frac{G_{m,n}}{G}} - 1 \right) \cdot 100 \cdot m = \left(\sqrt[2\cdot 8]{\frac{35000}{25000}} - 1 \right) \cdot 100 \cdot 2 = 4.25\,.$$

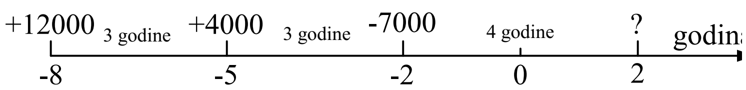
Ako je kapitalisanje neprekidno, tada je

$$p = \frac{100 \ln \frac{G_{\infty,n}}{G}}{n} = \frac{100 \ln \frac{35000}{25000}}{8} = 4.21.$$

■

Primer 2.3.4 Pre osam godina uloženo je 12000 dinara, pre pet godina uplaćeno je još 4000 dinara, a pre dve godine isplaćeno je 7000 dinara. Kojim ukamaćenim iznosom će se raspolagati četiri godine od poslednje promene? Godišnja kamatna stopa je 16%, a kapitalisanje je:
a) kvartalno, b) kontinualno.

Rešenje.



Slika 2.1: Primer 2.3.4.

Na osnovu slike 2.1, uz $m = 4$ zbog kvartalnog kapitalisanja, dobijamo postavku problema:

$$\left(\left(12000 \cdot \left(1 + \frac{16}{100 \cdot 4}\right)^{4\cdot 3} + 4000\right) \cdot \left(1 + \frac{16}{100 \cdot 4}\right)^{4\cdot 3} - 7000\right) \cdot \left(1 + \frac{16}{100 \cdot 4}\right)^{4\cdot 4} = 56496.19$$

dinara. Ako je u pitanju neprekidno kapitalisanje, tada je

$$\left(\left(12000 \cdot e^{\frac{3\cdot 16}{100}} + 4000\right) \cdot e^{\frac{3\cdot 16}{100}} - 7000\right) \cdot e^{\frac{4\cdot 16}{100}} = 58420.44 \text{ dinara.}$$

■

2.4 Račun ulaganja (štednje)

Kod ovog tipa računa, na početku svakog obračunskog perioda ulaže se ista suma novca. Tu sumu novca označićemo sa U, kamatnu stopu sa p, a sumu nakon n obračunskih perioda sa S_n. Izvedimo sada formulu za S_n. Nakon prvog obračunskog perioda imaćemo

$$S_1 = U + p\%\, U = U\left(1 + \frac{p}{100}\right) = U\,q\,,$$

gde je $q = 1 + p/100$. Na kraju drugog obračunskog perioda biće

$$S_2 = (S_1 + U) + p\%\,(S_1 + U) = (S_1 + U)\,q = (U\,q + U)\,q = U\,q^2 + U\,q\,.$$

Na kraju trećeg obračunskog perioda imaćemo

$$S_3 = (S_2 + U) + p\%\,(S_2 + U) = (S_2 + U)\,q = (U\,q^2 + U\,q + U)\,q = U\,q^3 + U\,q^2 + U\,q\,,$$

i tako dalje. Dakle, na kraju n-tog obračunskog perioda važiće

$$S_n = U\,q^n + U\,q^{n-1} + \cdots + U\,q^2 + U\,q = U(q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q)\,.$$

Izraz u zagradi u poslednjoj jednakosti je suma geometrijskog niza sa n sabiraka, prvim članom q i količnikom q. Tada je

$$q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

pa je

$$S_n = U\,q\,\frac{q^n - 1}{q - 1}\,, \quad q = 1 + \frac{p}{100}\,. \tag{2.12}$$

Izrazimo sada

$$U = \frac{S_n(q-1)}{q(q^n - 1)} \tag{2.13}$$

i

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{S_n(q-1)}{U\,q}\right)}{\ln q}\,. \tag{2.14}$$

Primer 2.4.1 Tokom 7 godina, početkom svake godine uplaćuje se iznos od 1000 evra. Ako je godišnja kamatna stopa 10%, koliko će biti na računu nakon 7 godina?

Rešenje. Sada je $U = 1000$, $n = 7$ i $p = 10$. Pošto je $q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$, dobijamo

$$S_n = 1000 \cdot 1.1 \cdot \frac{1.1^7 - 1}{1.1 - 1} = 10435.89 \text{ evra.}$$

■

Primer 2.4.2 Koliko treba uplaćivati početkom svakog meseca tokom 10 godina da bi se na kraju 10. godine raspolagalo iznosom od 99605 evra? Mesečna kamatna stopa je 2%.

Rešenje. Sada je nepoznata veličina U, dok je $n = 10$, $S_n = 99605$ i $p = 2$. Pošto je kamata na mesečnom nivou, možemo n pretvoriti u broj meseci, pa je $n = 10 \cdot 12 = 120$ meseci. Sada je

$$U = \frac{99605 \cdot (1.02 - 1)}{1.02 \cdot (1.02^{120} - 1)} = 200 \text{ evra.}$$

Dakle, ako na početku svakog meseca ulažemo po 200 evra, za 10 godina ćemo imati 99605 evra na računu. ■

Primer 2.4.3 Sedam godina je ulagano početkom svake godine po 1200 evra u banku koja je obračunavala kamatu: prve 3 godine po 5%, a naredne 4 po 7% godišnje kamatne stope. Izračunati vrednost imovine na kraju sedme godine.

Rešenje. Neka je $U = 1200$, $n = 3$ i $p = 5$. Nakon tri godine, na računu će biti ($q = 1 + 5/100 = 1.05$)

$$S_n = 1200 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^3 - 1}{1.05 - 1} = 3972.15 \text{ evra.}$$

Nakon 4. godine, na računu će biti

$$(3972.15 + 1200) \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right) = 5534.2 \text{ evra.}$$

Nakon 5. godine

$$(5534.2 + 1200) \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right) = 7070.91 \text{ evra.}$$

Nakon 6. godine

$$(7070.91 + 1200) \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right) = 8684.46 \text{ evra}$$

i nakon 7. godine

$$(8684.46 + 1200) \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right) = 10378.68 \text{ evra.}$$

■

2.5 Otplata duga

Sa D ćemo obeležiti pozajmljeni novac koji se vraća u n jednakih rata koje ćemo obeležiti sa R. Rate se vraćaju na kraju svakog obračunskog perioda. Neka je p kamatna stopa za jedan obračunski period. Odredimo sada vezu između rate i duga. Ako se na početku obračunskog perioda duguje novac D, na kraju tog perioda će se dugovati

$$D + (p\% \text{ od } D) = D\left(1 + \frac{p}{100}\right) = D\,q\,,$$

za $q = 1 + p/100$. Sada je potrebno vratiti ratu R, te je dugovanje sa kojim se ulazi u drugi obračunski period $D\,q - R$ i kamata se sada računa na taj iznos. Na kraju drugog obračunskog perioda dugovanje je

$$D\,q - R + (p\% \text{ od } (D\,q - R)) = (D\,q - R)\,q = D\,q^2 - R\,q\,.$$

Sada se vrati rata R i ukupan dug je $D\,q^2 - R\,q - R$. Na ovu veličinu se na kraju trećeg obračunskog perioda računa kamata, pa je tada dug

$$D\,q^2 - R\,q - R + (p\% \text{ od } (D\,q^2 - R\,q - R)) = (D\,q^2 - R\,q - R)\,q = D\,q^3 - R\,q^2 - R\,q\,.$$

Kada se vrati rata, ukupan dug na kraju trećeg obračunskog perioda je $D\,q^3 - R\,q^2 - R\,q - R$. Na kraju n-tog obračunskog perioda, sav novac mora biti vraćen, tako da mora važiti

$$D\,q^n - R\,q^{n-1} - \cdots - R\,q^2 - R\,q - R = 0 \Rightarrow D\,q^n = R\,(q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1)\,.$$

Izraz u zagradi u poslednjoj jednakosti predstavlja sumu n članova geometrijskog niza čiji je prvi član 1, a količnik q, te je

$$q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1 = 1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

pa dobijamo

$$D\,q^n = R\,\frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

Znači da je rata jednaka

$$R = D\,q^n\,\frac{q-1}{q^n - 1}\,, \quad q = 1 + \frac{p}{100}\,, \tag{2.15}$$

a dug

$$D = R\,\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \tag{2.16}$$

i

$$n = \frac{\ln \frac{R}{R - D(q-1)}}{\ln q}\,. \tag{2.17}$$

Daćemo sada primere plana otplate kredita.

2.5.1 Plan otplate duga (kredita)

Sa DP_i ćemo obeležiti dugovanje na početku i-tog obračunskog perioda, sa DK_i ćemo obeležiti dugovanje nakon i-tog obračunskog perioda pre vraćanja rate, a sa K_i kamatu u i-tom obračunskom periodu, $i = 1, 2, \ldots, n$. Plan otplate kredita biće prikazan u tabeli 2.1.

Tabela 2.1: Plan otplate duga D uzetog na n obračunskih perioda sa p kamatnom stopom i ratom R.

Redni broj otplate	Iznos osnovnog duga	Kamata	Ukupan dug	Isplaćeni deo od glavnice
1	$DP_1 = D$	$K_1 = \frac{DP_1 \cdot p}{100}$	$DK_1 = DP_1 + K_1$	$R - K_1$
2	$DP_2 = DK_1 - R$	$K_2 = \frac{DP_2 \cdot p}{100}$	$DK_2 = DP_2 + K_2$	$R - K_2$
3	$DP_3 = DK_2 - R$	$K_3 = \frac{DP_3 \cdot p}{100}$	$DK_3 = DP_3 + K_3$	$R - K_3$
$\vdots$				
$n-1$	$DP_{n-1} = DK_{n-2} - R$	$K_{n-1} = \frac{DP_{n-1} \cdot p}{100}$	$DK_{n-1} = DP_{n-1} + K_{n-1}$	$R - K_{n-1}$
n	$DP_n = DK_{n-1} - R$	$K_n = \frac{DP_n \cdot p}{100}$	$DK_n = DP_n + K_n = R$	$R - K_n$
provera	$a = \sum_{i=1}^{n} DP_i$	$b = \sum_{i=1}^{n} K_i = \frac{a \cdot p}{100}$		$n \cdot R - b = D$

Objašnjenje tabele 2.1 biće dato u narednom primeru, korak po korak.

Primer 2.5.1 Neka je pozajmljeno 1000 evra uz mesečnu kamatu od 20%. Novac bi trebalo vratiti za 4 meseca. Odrediti veličinu rate zaokružene na dve decimale i napraviti plan otplate kredita. Koliko evra je ukupno vraćeno banci?

Rešenje. Znači da je dug $D = 1000$, $p = 20 \Rightarrow q = 1.20$ i $n = 4$. Na osnovu formule (2.15)

$$R = 1000 \cdot 1.20^4 \cdot \frac{1.20 - 1}{1,20^4 - 1} = 386.29 \text{ evra.}$$

Dakle, ukupno je vraćeno banci $n \cdot R = 4 \cdot 386.29 = 1545.16$. Ako izračunamo $1545.16 - 1000 = 545.16$ dobijamo zaradu banke. Objasnimo sada tabelu 2.2. Na početku prvog obračunskog perioda, osnovni dug je 1000 evra što se vidi u koloni *iznos osnovnog duga*, *redni broj otplate* 1. Na taj iznos se računa kamata od 20% i ukupan dug je sada $1000 + 200 = 1200$ evra što se vidi u koloni *ukupan dug*, *redni broj otplate* 1. Sada se od te sume vrati rata od 386.19 evra i preostalo je da se vrati $1200 - 386.19 = 813.71$ što se vidi u koloni *iznos osnovnog duga*, *redni broj otplate* 2. Ako se od rate oduzme kamata, dobijamo koliko je od glavnice ukupno vraćeno evra, tj. $386.29 - 200 = 186.29$ (kolona *isplaćeni deo od glavnice*, *redni broj otplate* 1). Na taj iznos se računa 20% kamate koja iznosi $813.71 \cdot 0.2 = 162.74$ (kolona *kamata*, *redni broj otplate* 2) i ona se dodaje na 813.71, pa je ukupan dug $813.71 + 162.74 = 976.45$ (kolona *ukupan dug*, *redni broj otplate* 2). Sada se opet vrati rata pa je preostali deo duga $976.45 - 386.29 = 590.16$ (kolona *iznos osnovnog duga*, *redni broj otplate* 3). Od glavnice ukupno je sada vraćeno $386.29 - 162.74 = 223.55$ (kolona *isplaćeni deo od glavnice*, *redni broj otplate* 2). Nastavljamo dalje, na sumu od 590.16 računamo 20% kamate što iznosi 118.04 te je novi dug $590.16 + 118.04 = 708.20$, a vraća se 386.29, te je preostali dug $708.20 - 386.29 = 321.91$, a od glavnice ukupno je sada vraćeno $386.29 - 118.04 = 268.25$. Na kraju četvrtog obračnskog perioda, dug je $321.91 + 64.38 = 386.29$ što je jednako poslednjoj rati koja još treba da se vrati. Od glavnice ukupno je sada vraćeno $386.29 - 64.38 = 321.91$.

Tabela 2.2: Plan otplate duga $D = 1000$ za kamatnu stopu 20%, $p = 20$, ako je broj rata $n = 4$ i rata $R = 386.29$. Ukupno je vraćeno $n \cdot R = 1545.16$ evra.

Redni broj otplate	Iznos osnovnog duga	Kamata	Ukupan dug	Isplaćeni deo od glavnice
1	1000	200	1200	$386.29 - 200 = 186.29$
2	813.71	162.74	976.45	$386.29 - 162.74 = 223.55$
3	590.16	118.04	708.20	$386.29 - 118.04 = 268.25$
4	321.91	64.38	386.29=R	$386.29 - 64.38 = 321.91$
provera	2725.78	$545.16 = \frac{2725.78 \cdot 20}{100}$		$4 \cdot 386.29 - 545.16 = 1000$

Ako se pogleda poslednja vrsta u tabeli (2.2), tj. *provera*, vidimo da ako saberemo sve vrednosti u koloni *iznos osnovnog duga* dobićemo 2725.78 i ako to sada pomnožimo sa $p/100 = 0.2$, dobićemo ukupnu kamatu dobijenu kao zbir svih vrednosti u koloni *kamata*, tj. $2725.78 \cdot 0.2 = 545.16$. Još jedan način provere je da je vrednost u koloni *ukupan dug*, *redni broj otplate* 4, jednak veličini rate. Ako saberemo sve vrednosti u koloni *isplaćeni deo glavnice*, moramo dobiti početni dug $D = 1000$ evra. Takođe, možemo i proveriti da je $4 \cdot 386.29 - 545.16 = 1000$. ■

Primer 2.5.2 Zajam od 10000 evra treba otplatiti za 5 godina u jednakim godišnjim ratama, uz godišnje kapitalisanje i 18% godišnje kamatne stope. Napraviti plan otplate kredita.

Rešenje. Plan otplate je dat u narednoj tabeli 2.3. ■

Tabela 2.3: Plan otplate duga $D = 10000$ za kamatnu stopu 18%, $p = 18$, ako je broj rata $n = 5$ i rata $R = 3197.78$. Ukupno je vraćeno $n \cdot R = 15988.9$ evra.

Redni broj otplate	Iznos osnovnog duga	Kamata	Ukupan dug	Isplaćeni deo od glavnice
1	10000	1800	11800	$3197.78 - 1800 = 1397.78$
2	8602.22	1548.40	10150.62	$3197.78 - 1548.40 = 1649.38$
3	6952.84	1251.51	8204.35	$3197.78 - 1251.51 = 1946.27$
4	5006.57	901.18	5907.75	$3197.78 - 901.18 = 2296.60$
5	2709.97	487.79	3197.76=R	$3197.78 - 487.79 = 2709.99$
provera	33271.30	$5988.88 = \frac{33271.30 \cdot 18}{100}$		$5 \cdot 3197.78 - 5988.88 = 10000$

Primer 2.5.3 Zajam od 20000 evra treba otplatiti za 3 godine u jednakim polugodišnjim ratama uz 10% polugodišnje kamatne stope. Napraviti plan otplate kredita.

Rešenje. Ovde je $n = 6$ polugodina. Plan otplate je dat u tabeli 2.4.

Tabela 2.4: Plan otplate duga $D = 20000$ za kamatnu stopu 10%, $p = 10$, ako je broj rata $n = 6$ i rata $R = 4592.15$. Ukupno je vraćeno $n \cdot R = 27552.89$ evra.

Redni broj otplate	Iznos osnovnog duga	Kamata	Ukupan dug	Isplaćeni deo od glavnice
1	20000	2000	22000	$4592.15 - 2000 = 2592.15$
2	17407.85	1740.78	19148.63	$4592.15 - 1740.78 = 2851.37$
3	14556.48	1455.65	16012.13	$4592.15 - 1455.65 = 3136.50$
4	11419.98	1142.00	10277.98	$4592.15 - 1142.00 = 3450.15$
5	7969.83	796.98	8766.81	$4592.15 - 796.98 = 3795.17$
6	4174.66	417.47	4592.13=R	$4592.15 - 417.47 = 4174.68$
provera	75528.80	$7552.88 = \frac{75528.80 \cdot 10}{100}$		$6 \cdot 4592.15 - 7552.9 = 20000$

■

Primer 2.5.4 Dug se isplaćuje 15 godina u jednakim mesečnim ratama od po 200 evra uz mesečnu kamatnu stopu od 2%. Međutim, dužnik nije plaćao rate prvih 5 godina, ali želi da u narednih 10 sve otplati. Kolika bi nova rata trebalo da bude?

Rešenje. Izračunajmo prvo koliki je dug. Za $n = 15 \cdot 12 = 180$ meseci, $q = 1 + 2/100 = 1.02$ i $R = 200$ evra, sledi

$$D = 200 \cdot \frac{1.02^{180} - 1}{1.02^{180}(1.02 - 1)} = 9716.88 \text{ evra.}$$

Pošto nije plaćao prvih 5 godina, tada novi dug računamo na osnovu složenog kamatnog računa. Imamo da je $n = 60$ meseci, $q = 1.02$ i $G = D = 9716.88$, pa je

$$G_n = G_{60} = 9716.88 \cdot 1.02^{60} = 31881.38 \text{ evra.}$$

Novi dug je $D = 31881.38$ evra, $n = 10 \cdot 12 = 120$ meseci i $q = 1.02$. Nova rata je

$$R = 31881.38 \cdot 1.02^{120} \cdot \frac{1.02 - 1}{1.02^{120} - 1} = 702.92 \text{ evra.}$$

■

2.6 Konformna kamatna stopa

Pretpostavimo da imamo glavnicu G koja za jedan obračunski period uz $p\%$ kamatne stope naraste na $G(1+p/100)$. Pitamo se kako odrediti kamatnu stopu koja će važiti za manji obračukski period, a da se primenom te stope, na kraju obračunskog perioda raspolaže istom sumom novca kao pri jednoj primeni stope p. Ako sa p_k označimo kamatnu stopu za manji obračunski period i ako se manji obračunski period sadrži s puta u većem obračunskom periodu, tada mora važiti

$$G\left(1+\frac{p}{100}\right)=G\left(1+\frac{p_k}{100}\right)^s,$$

odnosno

$$p_k=\left(\sqrt[s]{1+\frac{p}{100}}-1\right)\cdot 100<\frac{p}{s}. \tag{2.18}$$

Sa druge strane, ako želimo da izračunamo kamatnu stopu p_k za duži obračunski period u odnosu obračunski period za koji je data kamatna stopa p, pod pretpostavkom da se manji obračunski period sadrži s puta u većem iz

$$G\left(1+\frac{p_k}{100}\right)=G\left(1+\frac{p}{100}\right)^s$$

sledi

$$p_k=\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^s-1\right)\cdot 100>p\cdot s. \tag{2.19}$$

Kamatna stopa p_k naziva se *konformna kamatna stopa* ili precizna kamatna stopa.

Primer 2.6.1 Neka je data godišnja kamatna stopa od 24%. Odrediti mesečnu i nedeljnu konformnu kamatnu stopu.

Rešenje. Sada je $p=24$ i treba na konformna mesečna kamatna stopa p_k gde je $s=12$. Na osnovu (2.18)

$$p_k=\left(\sqrt[12]{1+\frac{24}{100}}-1\right)\cdot 100=1.81,$$

a to je manje od $p/s=24/12=2$. Ako nam treba nedeljna konformna kamatna stopa, $s=52$, pa je

$$p_k=\left(\sqrt[52]{1+\frac{24}{100}}-1\right)\cdot 100=0.41,$$

a to je manje od $24/52=0.46$. ■

Primer 2.6.2 Neka je data kvartalna kamatna stopa od 6%. Odrediti konformnu godišnju kamatnu stopu.

Rešenje. Sada je $p=6$ i $s=4$ jer imamo 4 kvartala u jednoj godini. Na osnovu (2.19)

$$p_k=\left(\left(1+\frac{6}{100}\right)^4-1\right)\cdot 100=26.25,$$

a to je veće od $p\cdot s=6\cdot 4=24$. ■

Primer 2.6.3 Zajam od 100000 dinara treba vratiti u jednakim tromesečnim ratama za 2 godine uz godišnju kamatnu stopu od 16%. Napraviti plan otplate kredita. Koristiti tromesečnu konformnu kamatnu stopu i zaokružiti na jednu decimalu.

Rešenje. Ovde je $D = 100000$ dinara. U jednoj godini ima $s = 4$ tromesečja, pa je konformna kamatna stopa za jedan kvartal

$$p_k = \left(\sqrt[4]{1 + \frac{16}{100}} - 1\right) \cdot 100 = 3.8.$$

Dalje je $n = s \cdot 2 = 8$ tromesečja i $q = 1 + p_k/100 = 1.038$. Veličina rate je

$$R = 100000 \cdot 1.038^8 \cdot \frac{1.038 - 1}{1.038^8 - 1} = 14730.37 \text{ dinara.}$$

Tabela 2.5: Plan otplate duga $D = 100000$ za kamatnu stopu 3.8%, ako je broj rata $n = 8$ i rata $R = 14730.37$. Ukupno je vraćeno $n \cdot R = 27552.89$ dinara.

Redni broj otplate	Iznos osnovnog duga	Kamata	Ukupan dug	Isplaćeni deo od glavnice
1	100000	3800	103800	$14730.37 - 3800 = 10930.37$
2	89069.63	3384.65	92454.28	$14730.37 - 3384.65 = 11345.72$
3	77723.91	2953.51	80677.42	$14730.37 - 2953.51 = 11776.86$
4	65947.05	2505.99	68453.04	$14730.37 - 2505.99 = 12224.38$
5	53722.67	2041.46	55764.13	$14730.37 - 2041.46 = 12688.91$
6	41033.76	1559.28	42593.04	$14730.37 - 1559.28 = 13171.09$
7	27862.67	1058.78	28921.45	$14730.37 - 1058.78 = 13671.59$
8	14191.08	539.26	14730.34=R	$14730.37 - 539.26 = 14191.11$
provera	469550.77	$17842.93 = \frac{469550.77 \cdot 3.8}{100}$		$8 \cdot 14730.37 - 17842.93 = 100000$

■

Primer 2.6.4 Ako je godišnja kamatna stopa od 36%, kolika je četvoromesečna konformna kamatna stopa, a koliko nedeljna?

Rešenje. Odredimo prvo četvoromesečnu konformnu kamatnu stopu. Imamo da je $s = 3$, pa je

$$p_k = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{36}{100}} - 1\right) \cdot 100 = 10.793.$$

Ako je u pitanju nedeljna konformna kamatna stopa, tada je $s = 52$ pa je

$$p_k = \left(\sqrt[52]{1 + \frac{36}{100}} - 1\right) \cdot 100 = 0.593.$$

■

Primer 2.6.5 Odobren je kredit od 28000 evra uz 10% godišnje kamatne stope na 2 godine. Kolika je mesečna rata? Koristiti konformnu kamatnu stopu zaokruženu na tri decimale.

Rešenje. Odredimo prvo mesečnu konformnu kamatnu stopu. Sada je $s = 12$, jer ima dvanaest meseci u jednoj godini.

$$p_k = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{10}{100}} - 1 \right) \cdot 100 = 0.797.$$

Kako je $D = 28000$ evra, $n = 24$ meseca i $q = 1.00797$, dobijamo da je mesečna rata

$$R = 28000 \cdot 1.00797^{24} \cdot \frac{1.00797 - 1}{1.00797^{24} - 1} = 1286.43 \text{ evra}.$$

■

2.7 Zadaci za vežbu

1. Plata radnika iznosi 400 evra. Koliko iznosi njegova plata nakon povećanja od 6%?

2. Polovina nabavljene robe prodata je sa zaradom od 10%, a trećina sa zaradom od 6%. Preostali deo robe je prodat sa gubitkom od 5% i na taj način je ostvarena zarada od 3000 evra. Odrediti vrednost nabavljene robe.

3. Cena robe je povećana za 25%, a zatim još jednom za 20%. Za koliko procenata je ukupno povećanje?

4. Polovina nabavljene robe je prodata sa gubitkom od 15%, a četvrtina sa gubitkom od 20%. Sa koliko procenata zarade treba prodati ostatak robe da se ne bi završilo sa gubitkom?

5. U fabrici se izrađuju dve vrste televizora. Fabrička cena jeftinijeg manja je za šestinu od cene skupljeg. Za koliko procenata se poveća fabrička cena jeftinijeg televizora u trgovačkoj mreži ako se tamo prodaje jeftiniji televizor po ceni koja je jednaka 9/8 fabričke cene skupljeg proizvoda?

6. Godišnji plan je da se zaradi 400000 dinara. Za 6 meseci, zarada je bila 240000 dinara. Izračunati za koliko procenata je ostvaren godišnji plan i koliko je još procenata ostalo da se izvrši godišnji plan u narednih šest meseci.

7. Jedna zemlja je izvozila kamilicu. U odnosu na 2000. godinu, izvoz u 2020. godini se povećao za 45 miliona evra. Za koliko procenata je povećan izvoz u 2020. godini, ako je ukupan izvoz u 2000. godini bio 1415 miliona evra?

8. Izračunati za koliko će godina kapital od 16000 evra, uz godišnju kamatnu stopu od 9% doneti 80000 evra.

9. Ako je za kapital od 6400 evra za četiri meseca dobijena kamata od 230 evra, izračunati mesečnu kamatnu stopu.

10. Zbir dva kapitala je 24000 evra. Prvi je uložen uz godišnju kamatnu stopu od 6%, a drugi uz 9%. Nakon jedne godine, zbir kamata je 1500 evra. Odrediti kapitale.

11. Istog dana uložena je suma od 25000 evra uz godišnju kamatnu stopu od 6% i suma od 16000 evra uz godišnju kamatnu stopu od 8%. Nakon koliko godina će uvećani kapitali biti jednaki?

12. Neka se količina virusa V neprestano naizmenično u periodu od 5 minuta uvećava za 2% u toku svakog minuta, a zatim u narednih 10 minuta se smanjuje za 1% u svakoj minuti, tada će količina virusa V u toku vremena nestati. Da li je ovo tačna tvrdnja?

13. Na koju sumu naraste kapital od 10000 evra za 15 godina uz 9% godišnje kamatne stope i kvartalno kapitalisanje?

14. Uloženo je u banku 60000 dinara, a osam godina kasnije podignuto je 80000. Kojom sumom se raspolaže 25 godina od dana ulaganja ako banka računa 24% godišnju kamatnu stopu i kapitališe polugodišnje?

15. Zoran je uložio 3000 evra u banku uz 12% godišnje kamatne stope i četvoromesečno kapitalisanje. Kolikom sumom će Zoran raspolagati nakon 3 godine?

16. Kolika je sadašnja vrednost kapitala ako je 36 puta, na početku svakog meseca, ulagano po 400 evra uz mesečnu kamatnu stopu od 4%?

17. Ulagano je u banku na početku svake godine po 2000 evra i tako pet godina. Drugih pet godina je ulagano po 2500 evra na početku svake godine, a sledećih pet godina po 3000 evra. Godišnja kamatna stopa je bila 4%. Kolika je suma na raspolaganju nakon 15 godina?

18. Šta se više isplati: uložiti 12000 dinara na 7 godina uz 4% mesečne kamatne stope ili ulagati tokom 9 godina svake godine po 21000 dinara uz 11% godišnje kamatne stope?

19. Ako u naredne dve godine, svaki mesec ulažemo po 100 evra u banku sa mesečnom kamatnom stopom 6%, koliko ćemo imati na računu nakon isteka te dve godine?

20. Šta se više isplati: uložiti 1000 evra na 1 godinu uz 12% godišnje kamate ili ulagati tokom 5 meseci svakog meseca po 200 evra uz 2% mesečne kamate?

21. Ako svakog meseca ulažemo po 35 evra u banku sa mesečnom kamatnom stopom 5%, za koliko vremena ćemo sakupiti najmanje 2000 evra?

22. U banku se svakog meseca ulaže po 10000 dinara. Nakon koliko vremena će na računu biti 100000 dinara, ako je mesečna kamatna stopa 1%?

23. Svakog meseca otac prima platu u iznosu od 75000 dinara i 5% od tog iznosa uplati na poseban tekući račun. Kolika je suma na računu nakon 7 godina od otvaranja pomenutog tekućeg računa ako je mesečna kamatna stopa 2%?

24. Dug se isplaćuje 20 godina u jednakim ratama od po 1000 evra uz godišnju kamatnu stopu od 7%. Međutim, dužnik nije plaćao rate prvih 8 godina, ali želi da u narednih 12 sve otplati. Kolika bi nova rata trebalo da bude?

25. Poljoprivredna zadruga podigla je kredit u vrednosti od 10000 evra sa mesečnom kamatnom stopom od 2%. Ako je mesečna rata 400 evra za koliko meseci će dug biti otplaćen?

26. Banka nudi kredit za kupovinu novog stana pod sledećim uslovima: kredit se vraća 20 godina, u jednakim mesečnim ratama, sa mesečnom kamatnom stopom od $0,6\%$. Koliko iznosi rata otplate, ako je kredit podignut u iznosu od 47000 evra? Koliko će ukupno novca biti vraćeno banci? Koliko je to izraženo u procentima više od pozajmljene sume?

27. Podignut je kredit u banci za kupovinu automoblia Peugeot 306. Njegova cena je 10500 evra, i pri kupovini odmah se uplaćuje 20% od cene na ime učešća, a ostatak treba da se uplaćuje svakog meseca u naredne 3 godine sa mesečnom kamatom stopom od 2%. Kolika je veličina rate?

28. Koji će kapital za 100 dana sa 12% godišnje kamatne stope narasti na 1000 evra? (Koristiti konformnu kamatnu stopu i računati da jedna godina ima 360 dana.)

29. Uloženo je danas u banku 12000 evra, pa je na osnovu imovine, posle 4 godine i 4 meseca podizano početkom svake godine, 8 godina uzastopno, po 800 evra. Izračunati stanje imovine nakon 12 godina i 4 meseca. Kamatna stopa je godišnja i iznosi 10%. Pretvoriti je u konformnu mesečnu.

30. Uloženo je 24000 evra, a posle pet godina još 20000 evra. Na osnovu tih uloga nakon 10 godina od danas, podizano je tri godine, krajem svake godine po 4000 evra. Odrediti stanje imovine kada prođe 20 godina. Kamatna stopa je mesečna i izosi 3%. Koristiti konformnu kamatnu stopu.

GLAVA 3

Privredna matematika

U ovoj glavi biće prikazane sledeće oblasti: pravilo trojno, verižni račun, račun podele i račun mešanja. Dati su i primeri koji bliže objašnjavaju pomenute oblasti.

3.1 Pravilo trojno

Pravilo trojno se koristi pri rešavanju problema kod kojih između datih veličina i nepoznate veličine postoji proporcionalnost. Veličine su u direktnoj srazmeri ako **povećanje** (smanjenje) jedne veličine prouzrokuje **povećanje** (smanjenje) druge veličine. Veličine su u obrnutoj srazmeri ako **povećanje** (smanjenje) jedne veličine prouzrokuje **smanjenje** (povećanje) druge veličine.

Postoji prosto i složeno pravilo trojno. Pravilo trojno je prosto ako su date tri poznate veličine, pa se na osnovu njih traži četvrta nepoznata veličina. Pravilo trojno je složeno ako je dato pet, odnosno sedam ili devet itd. poznatih veličina, pa se na osnovu njih traži šesta, odnosno osma ili deseta itd. nepoznata veličina.

Prosto pravilo trojno

Uradićemo prvo dva jednostavna primera gde se koriste osobine direktne i obrnute proporcije.

Primer 3.1.1 Za tri kilograma neke robe plaćeno je 240 dinara. Koliko dinara staje 18 kilograma?

Rešenje. Prvo ćemo postaviti zadatak kao što sledi:

$$\begin{array}{cc} 3 \text{ kg} & 240 \text{ din.} \\ 18 \text{ kg} & x \text{ din.} \\ \hline \end{array}$$

Sada treba utvrditi da li je broj kg i broj dinara u direktnoj proporciji ili obrnutoj. Recimo, ako kupimo *više* kilograma neke robe, *više* ćemo platiti. Dakle, u pitanju je direktna proporcija.

Postavljamo strelice u istom smeru. Ako kod veličine kod koje je x stavimo strelicu *na gore*, tada je i uz drugu veličinu strelica *na gore*.

$$\begin{array}{cccc} & 3\text{ kg} & & 240\text{ din.} \\ \uparrow & & \uparrow & \\ & 18\text{ kg} & & x\text{ din.} \\ \hline \end{array}$$

Napišimo proporciju u smeru strelica:

$$x : 240 = 18 : 3 \Rightarrow x = \frac{240 \cdot 18}{3} = 1440.$$

Zaključujemo da 18 kg neke robe koštaju 1440 dinara. ■

Primer 3.1.2 12 radnika završe posao za 108 dana. Koliko će radnika završiti posao za 36 dana?

Rešenje. Postavka zadatka bi bila:

$$\begin{array}{cc} 12\text{ radnika} & 108\text{ dana} \\ x\text{ radnika} & 36\text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Ako radi, recimo, *više* radnika, trebalo bi im *manje* dana da bi uradili isti posao. Dakle, broj radnika i broj dana su u obrnutoj proporciji. Strelice postavljamo u suprotnom smeru. Ako kod veličine uz x stavimo strelicu *na gore*, kod druge veličine strelica ide *na dole*:

$$\begin{array}{cccc} & 12\text{ radnika} & & 108\text{ dana} \\ \uparrow & & \downarrow & \\ & x\text{ radnika} & & 36\text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Pišemo proporciju u smeru strelica:

$$x : 12 = 108 : 36 \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 108}{36} = 36.$$

Znači da bi 36 radnika radilo 36 dana. ■

Sada ćemo uraditi malo složenije zadatke iz prostog pravila trojnog.

Primer 3.1.3 Jedan posao mogu da završe 18 radnika za 34 dana. Pošto je 18 radnika radilo 8 dana, sa posla je otišlo 6 radnika. Izračunati za koliko će dana završiti preostali posao ostatak radnika?

Rešenje. 18 radnika je radilo 8 dana, tako da ćemo smanjiti samo broj dana u prvom koraku

$$\begin{array}{ccc} 18\text{ radnika} & 34\text{ dana} & \\ & & -8\text{ dana} \\ \hline 18\text{ radnika} & 26\text{ dana} & \end{array}$$

Sada je otišlo 6 radnika i zanima nas kada će posao biti završen.

$$\begin{array}{cc} 18\text{ radnika} & 26\text{ dana} \\ 12\text{ radnika} & x\text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Nakon postavljanja strelica, imaćemo

$$\begin{array}{ccc} & \text{18 radnika} & \text{26 dana} \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \text{12 radnika} & x \text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

odnosno

$$x : 26 = 18 : 12 \Rightarrow x = \frac{26 \cdot 18}{12} = 39.$$

Sa 12 radnika, posao bi bio gotov za 39 dana. ■

Primer 3.1.4 Jedan posao mogu da završe 9 radnika za 50 dana. Posle 14 dana na posao je došlo još 3 radnika. Za koliko dana će biti gotov ostatak posla?

Rešenje. Slično kao u prethodnom zadatku, prvo ćemo smanjiti broj dana potrebnih za završetak posla.

$$\begin{array}{ccc} \text{9 radnika} & \text{50 dana} & \\ & & -14 \text{ dana} \\ \hline \text{9 radnika} & \text{36 dana} & \end{array}$$

Sada je došlo 3 radnika i pitamo se kada će biti završen posao.

$$\begin{array}{cc} \text{9 radnika} & \text{36 dana} \\ \text{12 radnika} & x \text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Nakon postavljanja strelica, dobijamo

$$\begin{array}{ccc} & \text{9 radnika} & \text{36 dana} \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \text{12 radnika} & x \text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Lako se izračunava x:

$$x : 36 = 9 : 12 \Rightarrow x = \frac{36 \cdot 9}{12} = 27.$$

Dakle, 12 radnika moralo bi da radi 27 dana. ■

Primer 3.1.5 Jedan posao mogu da završe 40 radnika za 80 dana. Prvih 10 dana radila su 32 radnika, pa je onda broj radnika povećan za 18. Za koliko dana će biti gotov preostali posao?

Rešenje. Pošto je prvih 10 dana radilo 32 radnika, moramo da izračunamo koliko bi vremena trebalo da oni odrade ceo posao.

$$\begin{array}{ccc} & \text{40 radnika} & \text{80 dana} \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \text{32 radnika} & x \text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Dalje je

$$x : 80 = 40 : 32 \Rightarrow x = \frac{80 \cdot 40}{32} = 100.$$

Znači da bi 32 radnika radilo 100 dana. Oni su radili samo 10 dana.

$$\begin{array}{ccc} \text{32 radnika} & \text{100 dana} & \\ & & -10 \text{ dana} \\ \hline \text{32 radnika} & \text{90 dana} & \end{array}$$

Sada je došlo 18 radnika i pitanje je kada će biti završen posao.

$$\begin{array}{ccccc} & \text{32 radnika} & & \text{90 dana} \\ \downarrow & & \uparrow & \\ & \text{50 radnika} & & x \text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Imamo da je

$$x : 90 = 32 : 50 \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 32}{50} = 57.6.$$

Dakle, 50 radnika će raditi još 57.6 dana. ■

Složeno pravilo trojno

Kod složenog pravila trojnog, kada se postavi strelica kod veličine kod koje se nalazi tražena nepoznata vrednost, recimo x, preostale veličine se upoređuju samo sa veličinom uz x i strelice se postavljaju u odnosu na onu koja stoji uz x.

Primer 3.1.6 Za izradu jednog druma dužine 500 m, širine 6 m i debljine nasipa 40 cm plaćeno je 150000 dinara. Koliko će se dinara platiti za drum dužine 800 m, širine 5 m i debljine nasipa 20 cm, kada se za kubik nasipa u oba slučaja plaća ista cena?

Rešenje. Ispišimo tekst zadatka onako kako nam odgovara:

$$\begin{array}{cccc} \text{500 m duž.} & \text{6 m šir.} & \text{40 cm deb.} & \text{150000 din.} \\ \text{800 m duž.} & \text{5 m šir.} & \text{20 cm deb.} & x \text{ din.} \\ \hline \end{array}$$

Sada ćemo porediti samo količinu dinara i dužinu druma. Ako je drum veće dužine, biće veća i cena njegove izrade, tako da je u pitanju direktna proporcija i postavljamo strelicu kod dužine kao i kod dinara. Nakon toga poredimo količinu dinara i širinu druma (debljinu druma). Jasno je da je u oba slučaju u pitanju direktna proporcija, te da se i kod tih veličina postavlja strelica u istom smeru u odnosu na strelicu koja stoji uz dinare.

$$\begin{array}{cccccccc} & \text{500 m duž.} & & \text{6 m šir.} & & \text{40 cm deb.} & & \text{150000 din.} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{800 m duž.} & & \text{5 m šir.} & & \text{20 cm deb.} & & x \text{ din.} \\ \hline \end{array}$$

Veličinu x možemo i ovako izračunati:

$$\frac{x}{150000} = \frac{20}{40} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{800}{500} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{5} \cdot 150000 = 100000 \text{ dinara.}$$

■

Primer 3.1.7 Jedan posao završi 4 radnika, radeći dnevno po 10 časova, za 10 dana. Koliko je radnika potrebno da rade ovaj isti posao 5 dana po 8 časova dnevno?

Rešenje. Postavka zadatka bi bila

$$\begin{array}{ccc} 4 \text{ radnika} & 10 \text{ h dnevno} & 10 \text{ dana} \\ x \text{ radnika} & 8 \text{ h dnevno} & 5 \text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Ako radi više radnika, biće potrebno manje dana da bi se uradio isti posao. Dakle, obrnuta proporcija je između broja radnika i broja dana. Ako se radi više sati dnevno, biće potrebno manje radnika da bi se uradio posao. Broj radnika i broj radnih sati su u obrnutoj proporciji, takođe. Ako kod x stavimo strelicu *na gore*, kod preostalih veličina postavljamo je *na dole*.

$$\begin{array}{cccccc} & 4 \text{ radnika} & & 10 \text{ h dnevno} & & 10 \text{ dana} \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & x \text{ radnika} & & 8 \text{ h dnevno} & & 5 \text{ dana} \\ \hline \end{array}$$

Računamo sada x:

$$\frac{x}{4} = \frac{10}{8} \cdot \frac{10}{5} \Rightarrow x = 10.$$

■

Sada ćemo uraditi zadatak gde se pojavljuje i direktna i obrnuta proporcija.

Primer 3.1.8 Drum od 400m dužine i širine 4 m, završi 10 radnika za 18 dana radeći dnevno po 8 časova. Koliko je radnika potrebno za drum od 1200 m dužine i 5 m širine, a da posao bude gotov za 36 dana i da radnici rade 6 časova dnevno?

Rešenje. Nakon postavljanja zadatka

$$\begin{array}{ccccc} 400 \text{ m duž.} & 4 \text{ m šir.} & 10 \text{ radnika} & 18 \text{ dana} & 8 \text{ h dnevno} \\ 1200 \text{ m duž.} & 5 \text{ m šir.} & x \text{ radnika} & 36 \text{ dana} & 6 \text{ h dnevno} \\ \hline \end{array}$$

odredimo oblik zavisnosti svih veličina sa veličinom uz x, tj. brojem radnika. Ako radi više radnika, može se napraviti duži i širi drum (direktna proporcija i isti smer strelice kao kod strelice uz x). U prethodnom zadatka smo našli zavisnost broja radnika sa brojem dana i radnim satima (obrnuta proprocija). Imaćemo

$$\begin{array}{cccccccccc} & 400 \text{ m duž.} & & 4 \text{ m šir.} & & 10 \text{ radnika} & & 18 \text{ dana} & & 8 \text{ h dnevno} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 1200 \text{ m duž.} & & 5 \text{ m šir.} & & x \text{ radnika} & & 36 \text{ dana} & & 6 \text{ h dnevno} \\ \hline \end{array}$$

Odredimo sada još x.

$$\frac{x}{10} = \frac{1200}{400} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{18}{36} \cdot \frac{8}{6} \Rightarrow x = 25.$$

■

Primer 3.1.9 Jedan posao može da završi 30 radnika za 60 dana ako rade 8 časova dnevno, a radilo je na ovom poslu 40 radnika 15 dana po 6 časova dnevno, pa je sa posla otišlo 20 radnika, a radno vreme je produženo na 9 časova dnevno. Za koliko će dana biti gotov ostatak posla?

Rešenje. Prvo moramo da izračunamo koliko bi dana radilo 40 radnika kada se smanji broj radnih sati na dnevnom nivou.

$$\begin{array}{cccccc} & 30 \text{ radnika} & & 60 \text{ dana} & & 8 \text{ h dnevno} \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\ & 40 \text{ radnika} & & x \text{ dana} & & 6 \text{ h dnevno} \\ \hline \end{array}$$

Sada je

$$\frac{x}{60} = \frac{30}{40} \cdot \frac{8}{6} \Rightarrow x = 60.$$

Dakle, nakon 15 dana rada pod takvim uslovima, biće

$$\begin{array}{cccc} 40 \text{ radnika} & 60 \text{ dana} & 6 \text{ h dnevno} & \\ & & & -15 \text{ dana} \\ \hline 40 \text{ radnika} & 45 \text{ dana} & 6 \text{ h dnevno} & \end{array}$$

Sa posla je otišlo 20 radnika, pa ćemo umanjiti broj radnika za taj broj, dok ćemo povećati broj radnih sati na 9 i tražiti broj dana do kraja posla.

$$\begin{array}{cccccc} & 40 \text{ radnika} & & 45 \text{ dana} & & 6 \text{ h dnevno} \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\ & 20 \text{ radnika} & & x \text{ dana} & & 9 \text{ h dnevno} \\ \hline \end{array}$$

Broj dana je

$$\frac{x}{45} = \frac{40}{20} \cdot \frac{6}{9} \Rightarrow x = 60.$$

■

Primer 3.1.10 Planirano vreme za izgradnju vodovoda je 45 dana. U izgradnji učestvuje 25 radnika sa 10 radnih časova dnevno. Posao otpočnu svi radnici i rade po planu 5 dana. Tada posao napusti 15 radnika i radno vreme se smanji na 8 časova dnevno. Ostatak radnika je radio pod novim uslovima 23 dana. Tada se gradnji pridružilo još 20 radnika. Za koliko dana će izgradnja biti završena?

Rešenje. Ovaj zadatak treba rešavati oprezno, korak po korak.

$$\begin{array}{cccc} 45 \text{ dana} & 25 \text{ radnika} & 10 \text{ h dnevno} & \\ & & & -5 \text{ dana} \\ \hline 40 \text{ dana} & 25 \text{ radnika} & 10 \text{ h dnevno} & \end{array}$$

Sada sa posla ode 15 radnika i radno vreme se smanji na 8 časova dnevno. Odredimo potreban broj radnika.

$$\begin{array}{cccccc} & 40 \text{ dana} & & 25 \text{ radnika} & & 10 \text{ h dnevno} \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & x \text{ dana} & & 10 \text{ radnika} & & 8 \text{ h dnevno} \\ \hline \end{array}$$

Dobijamo da je $x = 125$. Pod novim uslovima radilo se 23 dana.

$$\begin{array}{cccc} 125 \text{ dana} & 10 \text{ radnika} & 8 \text{ h dnevno} & \\ & & & -23 \text{ dana} \\ \hline 102 \text{ dana} & 10 \text{ radnika} & 8 \text{ h dnevno} & \end{array}$$

Sada se poslu pridruži 20 radnika, radno vreme se ne menja.

$$\begin{array}{lcccc} & 102 \text{ dana} & & 10 \text{ radnika} & 8 \text{ h dnevno} \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ & x \text{ dana} & & 30 \text{ radnika} & 8 \text{ h dnevno} \\ \hline \end{array}$$

Odavde je

$$\frac{x}{102} = \frac{10}{30} \Rightarrow x = 34.$$

Kod radnih sati nismo morali da postavljamo strelicu jer se radno vreme nije promenilo. ■

3.2 Verižni račun

Verižni račun se može koristiti samo ako su veličine koje se porede u direktnoj proporciji. Kada je dat niz odnosa između količina u vidu jednakosti, pa se traži da se iz tih odnosa nađe odnos između jedne poznate količine i njoj odgovarajuće nepoznate druge veličine, onda se taj odnos može izračunati preko verižnog računa.

Verižni račun je dobio ime po tome što se pojedini njegovi članovi, vežu kao karike ili verige. Verižni stav (prva jednakost u verigi) uvek počinje sa količinom koja se traži i ona se piše sa leve strane prve jednakosti. U drugoj jednakosti, koja se piše odmah posle prve jednakosti, sa leve strane, mora biti ista jedinica člana verige koji se nalazi u prvoj jednakosti sa desne strane i tako dok se ne ispišu sve jednakosti iz zadatka. Veriga je završena kada se u poslednjoj jednakosti, sa desne strane, nalazi ista jedinica člana verige kao jedinica koja stoji uz nepoznatu količinu koja se traži i koja se nalazi u prvoj jednakosti sa leve strane.

Verižni račun može biti prost i složen. Prost je onda kada su poznate tri veličine, a traži se četvrta, a složen kada se znaju pet, sedam, devet i više veličina, a traže se šesta, osma, deseta itd.

3.2.1 Prost verižni račun

Primer 3.2.1 24 kg neke robe košta 3600 dinara. Koliko kg se može kupiti za 9000 dinara?

Rešenje. Obeležićemo sa x broj nepoznatih kilograma. Napravimo prvo *pomoćnu* verigu:

$$\begin{array}{rcl} 24 \text{ kg} & = & 3600 \text{ din.} \\ x \text{ kg} & = & 9000 \text{ din.} \end{array}$$

Sada ćemo drugu jednakost postaviti da bude prva jednakost i da se x nalazi sa leve strane u prvoj jednakosti:

$$\begin{array}{rcl} x \text{ kg} & = & 9000 \text{ din.} \\ & \swarrow & \\ 3600 \text{ din.} & = & 24 \text{ kg} \end{array}$$

Jedinica din. koja se nalazi sa desne strane prve jednakosti, u sledećoj jednakosti se mora nalaziti sa leve strane. Pošto je u drugoj jednakosti jedinica kg, kao i kod nepoznate x, veriga je završena. Sada množimo leve strane obe jednakosti i izjednačavamo sa proizvodom dobijenim množenjem elemenata sa desne strane obe jednakosti.

$$x \cdot 3600 = 9000 \cdot 24 \Rightarrow x = \frac{9000 \cdot 24}{3600} = 60\,.$$

Ovaj problem se može rešiti i ovako. Ako se 3600 dinara plaća za 24 kilograma neke robe, to znači da se za 1 dinar dobija $\frac{24}{3600} = \frac{1}{150}$ kilograma neke robe. Tada se za 9000 dinara dobija

$$9000 \cdot \frac{1}{150} = 60 \text{ kg}$$

neke robe. ■

Primer 3.2.2 60 metara platna koštaju 4200 dinara. Koliko koštaju 40 metara istog platna?

Rešenje. Obeležićemo sa x nepoznatu cenu. Napravimo, opet, prvo *pomoćnu* verigu:

$$\begin{array}{rcl} 60 \text{ m} & = & 4200 \text{ din.} \\ x \text{ din} & = & 40 \text{ m} \end{array}$$

Sada ćemo drugu jednakost postaviti da bude prva jednakost i da se x nalazi sa leve strane u prvoj jednakosti:

$$\begin{array}{rcl} x \text{ din} & = & 40 \text{ m} \\ & \swarrow & \\ 60 \text{ m} & = & 4200 \text{ din.} \end{array}$$

Jedinica metar koja se nalazi sa desne strane prve jednakosti, u sledećoj jednakosti se mora nalaziti sa leve strane. Pošto je u drugoj jednakosti, sa desne strane, jedinica dinari, kao i kod nepoznate x, veriga je završena. Sledi

$$x \cdot 60 = 40 \cdot 4200 \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 4200}{60} = 2800\,.$$

■

3.2.2 Složeni verižni račun

Navedimo sada nekoliko primera iz složenog verižnog računa.

Primer 3.2.3 Ako 5 banana (b) ima masu kao 8 jabuka (j), 20 limuna (l) kao 12 pomorandži (p), 4 kruške (k) kao 10 šljiva (š), 5 limuna kao 2 banane te 6 jabuka kao 9 krušaka, koliko šljiva ima masu kao 1 pomorandža?

Rešenje. Obeležićemo sa x nepoznati broj šljiva i ispišimo date jednakosti:

$$\begin{array}{rcl} 5 \text{ b} & = & 8 \text{ j} \\ 20 \text{ l} & = & 12 \text{ p} \\ 4 \text{ k} & = & 10 \text{ š} \\ 5 \text{ l} & = & 2 \text{ b} \\ 6 \text{ j} & = & 9 \text{ k} \\ x \text{ š} & = & 1 \text{ p} \end{array}$$

A sada ćemo formirati verigu:

$$\begin{array}{rcl} x\text{ š} & = & 1\text{ p} \\ & \swarrow & \\ 12\text{ p} & = & 20\text{ l} \\ & \swarrow & \\ 5\text{ l} & = & 2\text{ b} \\ & \swarrow & \\ 5\text{ b} & = & 8\text{ j} \\ & \swarrow & \\ 6\text{ j} & = & 9\text{ k} \\ & \swarrow & \\ 4\text{ k} & = & 10\text{ š} \end{array}$$

Veriga je završena jer je nepoznat broj šljiva, a u poslednjoj jednakosti sa desne strane takođe stoji broj šljiva. Izračunajmo x:

$$x \cdot 12 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 1 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \Rightarrow x = \frac{1 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{12 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4} = 4.$$

Duži postipak bi bio: x š $= 1$ p,

$$1\text{ p} = \frac{20}{12}\text{ l} = \frac{20}{12} \cdot \frac{2}{5}\text{ b} = \frac{20}{12} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{5}\text{ j} = \frac{20}{12} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{9}{6}\text{ k} = \frac{20}{12} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{10}{4}\text{ š} = 4\text{ š}.$$

Dakle, x š $= 1$ p, 1 p $= 4$ š, pa je $x = 4$. ■

Primer 3.2.4 48 jardi platna plaćeno je 91.4 australijskih dolara. Koliko dinara koštaju 96 metara, ako je 1 jard je 0.914 metara i jedan australijski dolar je 75 dinara.

Rešenje. Neka je nepoznato x dinara. Ispišimo tekst zadatka korišćenjem jednakosti:

$$\begin{array}{rcl} 48\text{ jardi} & = & 91.4\ \$ \\ x\text{ din.} & = & 96\text{ m} \\ 1\text{ jard} & = & 0.914\text{ m} \\ 1\ \$ & = & 75\text{ din.} \end{array}$$

Potrebna veriga je oblika:

$$\begin{array}{rcl} x\text{ din.} & = & 96\text{ m} \\ & \swarrow & \\ 0.914\text{ m} & = & 1\text{ jard} \\ & \swarrow & \\ 48\text{ jardi} & = & 91.4\ \$ \\ & \swarrow & \\ 1\ \$ & = & 75\text{ din.} \end{array}$$

Sada dobijamo da je

$$x = \frac{96 \cdot 1 \cdot 91.4 \cdot 75}{0.914 \cdot 48 \cdot 1} = 15000.$$

■

Primer 3.2.5 Prilikom geološkog ispitivanja novog nalazišta rude aluminijuma dobijeni su sledeći podaci. Iz 40 kg rude u prvoj fazi prerade dobije se 2.15 kg boksita. Hemijskim postupkom u drugoj fazi prerade iz 1.4 kg boksita dobije se 425 g aluminijevog oksida. Elektrolizom u trećoj fazi prerade iz 350 g aluminijevog oksida dobije se 155 g aluminijuma. Da li je ovo nalazište isplativo za korišćenje ako znamo da je isplativa prerada one rude koja sadrži bar 1% aluminijuma?

Rešenje. Na osnovu teksta zadatka imamo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
40 \text{ kg rude} &= 2.15 \text{ kg boksita}\\
1.4 \text{ kg boksita} &= 425 \text{ g al. oks.}\\
350 \text{ g al. oks.} &= 155 \text{ g al.}
\end{aligned}$$

Još treba da postavimo jednakost koja je opisana pitanjem o isplativosti prerade. Tražićemo koliko ima grama aluminijuma u 100 grama rude, pa će taj broj biti ujedno i procenat aluminijuma u rudi. Biće nam potrebna i jednakost 1 kg=1000 g. Sastavićemo verigu.

$$\begin{aligned}
x \text{ g al.} &= 100 \text{ g rude}\\
&\swarrow\\
1000 \text{ g rude} &= 1 \text{ kg rude}\\
&\swarrow\\
40 \text{ kg rude} &= 2.15 \text{ kg boksita}\\
&\swarrow\\
1.4 \text{ kg boksita} &= 425 \text{ g al. oks.}\\
&\swarrow\\
350 \text{ g al. oks.} &= 155 \text{ g al.}
\end{aligned}$$

Odredimo sada x:

$$x = \frac{100 \cdot 1 \cdot 2.15 \cdot 425 \cdot 155}{1000 \cdot 40 \cdot 1.4 \cdot 350} = 0.723.$$

Zaključak je da se u 100 grama rude nalazi 0.723 grama aluminijuma, što je manje od 1% pa ovakvo nalazište nije isplativo. ■

Primer 3.2.6 Jedno novosadsko uvozno-izvozno preduzeće uvozi 2500 litara šampanjca iz Francuske za 15000 evra. Odredite cenu tog šampanjca u Novom Sadu ako preduzeće za 1 EUR plaća 119,5 RSD, transportni troškovi su 8%, a carina 15% nabavne cene, marža je 5% tako dobijene veleprodajne cene, a PDV je 22%.

Rešenje. Nas zanima koliko košta litra šampanjca u dinarima.

$$\begin{aligned}
2500 \text{ l} &= 15000 \text{ evra}\\
x \text{ din.} &= 1 \text{ l}\\
1 \text{ evro} &= 119.5 \text{ din.}
\end{aligned}$$

Veriga će sada biti

$$\begin{aligned}
x \text{ din.} &= 1 \text{ l}\\
&\swarrow\\
2500 \text{ l} &= 15000 \text{ evra}\\
&\swarrow\\
1 \text{ evro} &= 119.5 \text{ din.}
\end{aligned}$$

i

$$x = \frac{1 \cdot 15000 \cdot 119.5}{2500 \cdot 1} = 717.$$

Sada treba na tu cenu dodati transportne troškove 8% i carinu od 15%. Pošto se računa na osnovnu cenu, možemo početnu cenu povećati za 23%.

$$717 \cdot \left(1 + \frac{23}{100}\right) = 717 \cdot 1.23 = 881.91 \text{ dinara.}$$

Na ovako dobijenu cenu dodajemo PDV od 22% i to je cena u dinarima za litru šampanjca.

$$881.91 \left(1 + \frac{22}{100}\right) = 881.91 \cdot 1.22 = 1075.93 \text{ dinara.}$$

■

Primer 3.2.7 Pas, mačka i miš ugledaše komad sira i istovremeno pojuriše prema njemu. Ako je pas udaljen od sira 27 svojih skokova, mačka 23 svoja skoka, a miš 50 svojih skokova, ko će od njih prvi ugrabiti sir? Znamo da 3 skoka psa imaju istu dužinu kao i 5 skokova mačke, a 2 mačja skoka iste su dužine kao i 9 skokova miša. Znamo takođe da je mačka dvostruko brža od miša, a pas dvostruko brži od mačke.

Rešenje. Pretvorimo prvo pseće i mačije skokove u skokove miša.

$$\begin{array}{rcl} x \text{ skokova miša} & = & 27 \text{ skokova psa} \\ & \swarrow & \\ 3 \text{ skoka psa} & = & 5 \text{ skokova mačke} \\ & \swarrow & \\ 2 \text{ skoka mačke} & = & 9 \text{ skokova miša} \end{array}$$

Dakle,

$$x = \frac{27 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 202.5.$$

Znači da bi pas došao do sira, mora da napravi 202.5 skokova miša, a vreme potrošeno za taj put je $t_{\text{psa}} = 202.5/v_{\text{psa}} = 202.5/(4v_{\text{miša}}) = 50.625/v_{\text{miša}}$.

Odredimo sada ove podatke za mačku.

$$\begin{array}{rcl} x \text{ skokova miša} & = & 23 \text{ skoka mačke} \\ & \swarrow & \\ 2 \text{ skoka mačke} & = & 9 \text{ skokova miša} \end{array}$$

Sada je

$$x = \frac{23 \cdot 9}{2} = 103.5.$$

Znači da bi mačka došla do sira, mora da napravi 103.5 skokova miša, a vreme potrošeno za taj put je $t_{\text{mačke}} = 103.5/v_{\text{mačke}} = 103.5/(2v_{\text{miša}}) = 51.75/v_{\text{miša}}$.

Vreme potrebno mišu da dođe do sira je $t_{\text{miša}} = 50/v_{\text{miša}}$. Zaključujemo da prvi do sira stiže miš, pa pas, pa mačka. ■

Primer 3.2.8 U Noriču je cena za libru brašna 8 penija, a u Oklahomi 700 centi za 1 američki cental. Kurs za 1 funtu je 120 dinara, a za 1\$ 96 dinara. (1 lb = 0.454 kg, 100 lb = 1 am. cental)
(i) Izračunati koliko dinara košta 1 kg brašna u Noriču;
(ii) Izračunati koliko dinara košta 1 kg brašna u Oklahomi;
Šta je za nas povoljnije?

Rešenje. (i) Kada formiramo verigu za Norič, koristimo samo podatke koji vrede u Engleskoj.

$$\begin{aligned} 1\text{ lb} &= 8\text{ penija}\\ 1\text{ £} &= 120\text{ din.}\\ 1\text{ lb} &= 0.454\text{ kg}\\ 1\text{ kg} &= x\text{ din.}\\ 100\text{ penija} &= 1\text{ £} \end{aligned}$$

Veriga je

$$\begin{array}{rcl} x\text{ din.} &=& 1\text{ kg}\\ &\swarrow& \\ 0.454\text{ kg} &=& 1\text{ lb}\\ &\swarrow& \\ 1\text{ lb} &=& 8\text{ penija}\\ &\swarrow& \\ 100\text{ penija} &=& 1\text{ £}\\ &\swarrow& \\ 1\text{ £} &=& 120\text{ din.} \end{array}$$

Sada je $x = 21.15$ dinara.

(ii) Sada ćemo formirati verigu za Oklahomu. Prvo *pomoćnu*.

$$\begin{aligned} 700\text{ centi} &= 1\text{ am. cental}\\ 1\text{ \$} &= 96\text{ din.}\\ 1\text{ lb} &= 0.454\text{ kg}\\ 1\text{ kg} &= x\text{ din.}\\ 100\text{ lb} &= 1\text{ am. cental}\\ 100\text{ centi} &= 1\text{ \$} \end{aligned}$$

Veriga je oblika

$$\begin{array}{rcl} x\text{ din.} &=& 1\text{ kg}\\ &\swarrow& \\ 0.454\text{ kg} &=& 1\text{ lb}\\ &\swarrow& \\ 100\text{ lb} &=& 1\text{ am. cental}\\ &\swarrow& \\ 1\text{ am. cental} &=& 700\text{ centi}\\ &\swarrow& \\ 100\text{ centi} &=& 1\text{ \$}\\ &\swarrow& \\ 1\text{ \$} &=& 96\text{ din.} \end{array}$$

Sada je $x = 14.8$ dinara. Dakle, povoljnija cena je u Oklahomi. ■

3.3 Račun podele

Ako neku sumu novca, ili neke druge vrednosti, treba razdeliti na više grupa prema unapred utvrđenim uslovima, onda je to zadatak podele. Razlikujemo dva slučaja: deoba zavisi od samo jedne vrste uslova (prost račun deobe) ili od dve ili više vrste uslova (složeni račun deobe).

Uslovi podele mogu biri formulisani tako da se iz njih odmah vidi kakvi su odnosi svih lica na koje se deli izvesna suma, odnosno neka količina dobara, ili mogu biti formulisani tako da se iz njih ne vidi odmah razmera u kojoj lica trebaju deliti pripadajuću sumu. Taj deo podele ćemo zvati *Račun podele i proporcija.*

Uslovi mogu biti i povezani sa osobinama aritmetičkih i geometrijskih nizova, pa taj deo podele nazivamo *Račun podele i nizovi.*

3.3.1 Račun podele i proporcija

Odnos koliko je puta neki broj veći ili manji od drugog nazivamo razmerom. Na primer, $3:2$, $1:4$, itd. Brojevi koji čine razmeru nazivamo članovima razmere. Dve jednake razmere obrazuju propociju. Recimo $3:2=6:4$, $1:4=3:12$ su primeri proporcije. U proporciji $a:b=c:d$, a i d su spoljašnji, dok su b i c unutrašnji članovi proporcije. Proporciju koja ima više od četiri člana nazivamo produžena proporcija.

Ako je

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n,$$

tada postoji realan broj K-koeficijent proporcionalnosti tako da važi

$$x_1 = K \cdot b_1, \;\; x_2 = K \cdot b_2, \;\; \ldots, \;\; x_n = K \cdot b_n.$$

Neka je sada S suma (ili neka druga vrednost) koja se deli na n lica. Neka je x_i - suma (ili neka druga vrednost) koju je dobilo i-to lice, $1 \leq i \leq n$. Tada je

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Ako je poznata proporcija

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n,$$

tada je suma (ili neka druga vrednost) koju je dobilo i-to lice

$$x_i = b_i \cdot \frac{S}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Prost račun podele

Primer 3.3.1 Podeliti 100000 dinara na 5 lica tako da svako lice dobije istu sumu.

Rešenje. Naravno, dovoljno je podeliti 100000 sa 5 i dobiti da svako lice dobije 20000 dinara. Preko proporcije, to bi izgledalo ovako. Neka je x_i suma koju dobije i-to lice, $1 \leq i \leq 5$. Tada je $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ i $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1:1:1:1:1$. Saberemo brojeve sa desne strane proporcije, $1+1+1+1+1 = 5$ i onda je

$$x_i = b_i \cdot \frac{S}{1+1+1+1+1} = 1 \cdot \frac{100000}{5} = 20000, \; 1 \leq i \leq 5.$$

■

Primer 3.3.2 Podeliti 32500 dinara na tri lica tako da se njihovi delovi odnose kao 3 : 2 : 5.

Rešenje. Neka je x_i suma koju je dobilo i-to lice. Imamo da je $S = 32500 = x_1 + x_2 + x_3$ i $x_1 : x_2 : x_3 = 3 : 2 : 5$. Pošto je $3 + 2 + 5 = 10$, tada je

$$x_1 = 3 \cdot \tfrac{32500}{10} = 9750 \text{ dinara},$$

$$x_2 = 2 \cdot \tfrac{32500}{10} = 6500 \text{ dinara},$$

$$x_3 = 5 \cdot \tfrac{32500}{10} = 16250 \text{ dinara}.$$

■

Primer 3.3.3 Podeliti 9360 evra u razmeri $\frac{3}{2} : \frac{5}{6} : \frac{4}{15}$.

Rešenje. Neka je $9360 = x_1 + x_2 + x_3$ i $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{3}{2} : \frac{5}{6} : \frac{4}{15}$. Prvo ćemo datu razmeru pretvoriti u celobrojnu razmeru množenjem svakog člana razmere sa najmanjim zajedničkim sadržaocem (NZS) za brojeve 2, 6 i 15. Upotrebićemo Euklidov algoritam da pronađemo NZS:

$$\begin{array}{ccc|c} 2, & 6, & 15 & 2 \\ 1, & 3, & 15 & 3 \\ 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}.$$

Zaključujemo da je NZS(2,6,15)$=2\cdot3\cdot5 = 30$. Sada ćemo sve brojeve u razmeri da pomnožimo sa 30.

$$\frac{3}{2} : \frac{5}{6} : \frac{4}{15} = \left(\frac{3}{2} \cdot 30\right) : \left(\frac{5}{6} \cdot 30\right) : \left(\frac{4}{15} \cdot 30\right) = 45 : 25 : 8.$$

Sada, kada smo dobili celobrojnu razmeru, tj. $x_1 : x_2 : x_3 = 45 : 25 : 8$, sabraćemo brojeve u razmeri $45 + 25 + 8 = 78$ i onda je

$$x_1 = 45 \cdot \frac{9360}{78} = 5400 \text{ evra}, \;\; x_2 = 25 \cdot \frac{9360}{78} = 3000 \text{ evra}, \;\; x_3 = 8 \cdot \frac{9360}{78} = 960 \text{ evra}.$$

■

Primer 3.3.4 Dve zadruge uložile su u zajednički posao 100000 evra. Zadruga A je uložila 40000, a zadruga B 60000 evra. Koliko je dobila svaka zadruga od viška u iznosu od 15000 evra, ako je višak podeljen srazmerno uloženom kapitalu? Koliki je taj višak u procentima?

Rešenje. Neka je x_1 višak koji je dobila zadruga A, a x_2 višak koji je dobila zadruga B. Tada je $x_1 + x_2 = 15000$ i $x_1 : x_2 = 40000 : 60000$, odnosno $x_1 : x_2 = 2 : 3$. Kako je $2 + 3 = 5$, imaćemo da je

$$x_1 = 2 \cdot \frac{15000}{5} = 6000 \text{ evra}, \;\; x_2 = 3 \cdot \frac{15000}{5} = 9000 \text{ evra}.$$

Prva zadruga je dobila $100\% \cdot 6000/15000 = 40\%$, a druga $100\% \cdot 9000/15000 = 60\%$. ■

Primer 3.3.5 Nasledstvo od 380000 evra podeliti na tri naslednika obrnuto srazmerno godinama starosti. Starost naslednika je 20, 16 i 8 godina.

Rešenje. Neka je x_i suma koju će dobiti i-ti naslednik. Tada je $x_1 + x_2 + x_3 = 380000$ i

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{20} : \frac{1}{16} : \frac{1}{8}.$$

Odredimo NZS za 20, 16 i 8.

$$\begin{array}{rrr|l} 20, & 16, & 8 & 2 \\ 10, & 8, & 4 & 2 \\ 5, & 4, & 2 & 2 \\ 5, & 2, & 1 & 2 \\ 5, & 1, & 1 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

Dakle, NZS(20,16,8)$= 2^4 \cdot 5 = 80$, te će važiti

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1 \cdot 80}{20} : \frac{1 \cdot 80}{16} : \frac{1 \cdot 80}{8} \Rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 5 : 10.$$

Znači

$$x_1 = 4 \cdot \frac{380000}{19} = 80000 \text{ evra}, \ x_2 = 5 \cdot \frac{380000}{19} = 100000 \text{ evra}, \ x_3 = 10 \cdot \frac{380000}{19} = 200000 \text{ evra}.$$

■

Primer 3.3.6 Za četiri porodice čija je imovina oštećena u požaru, prikupljena je pomoć od 44100 evra. Koliko će svaka porodica dobiti od prikupljene pomoći, ako se pomoć deli srazmerno delu imovine koji je nastradao u požaru. Imovina prve porodice je bila 40000 evra, a šteta je iznosila 20000 evra. Imovina druge porodice je vredela 50000 evra, dok je šteta iznosila 30000 evra. Treća porodica je posedovala imovinu vrednu 60000 evra, a šteta je bila 10000 evra i, konačno, imovina četvrte porodice bila je 30000 evra, a šteta 25000 evra.

Rešenje. Ako podelimo iznos štete nastale požarom sa vrednošću imovine pre izbijanja požara, dobićemo koji je deo imovine izgubljen u požaru. Neka je x_i pomoć koju će dobiti i-ta porodica. Tada je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 44100$ i

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{20000}{40000} : \frac{30000}{50000} : \frac{10000}{60000} : \frac{25000}{30000}.$$

Nakon skraćivanja imaćemo

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{2} : \frac{3}{5} : \frac{1}{6} : \frac{5}{6}.$$

Nakon množenja svakog člana razmere sa desne strane proporcije sa 30, imaćemo

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 15 : 18 : 5 : 25,$$

pa je

$$x_1 = 15 \cdot \tfrac{44100}{63} = 10500 \text{ evra}, \ x_2 = 18 \cdot \tfrac{44100}{63} = 12600 \text{ evra},$$

$$x_3 = 5 \cdot \tfrac{44100}{63} = 3500 \text{ evra}, \ x_4 = 25 \cdot \tfrac{44100}{63} = 17500 \text{ evra}.$$

■

Primer 3.3.7 Podeliti 48300 dinara na pet lica, tako da lica A i B dobiju 40% od onog što dobiju ukupna V, G i D, a da A dobije 2 puta više od B, a delovi lica V, G i D da se odnose kao $\frac{1}{4} : \frac{3}{5} : \frac{7}{8}$.

Rešenje. Ispišimo podatke iz teksta zadatka u obliku (sistema) jednačina:

$$\begin{array}{l} A+B+V+G+D=48300 \\ A+B=0.4(V+G+D) \\ A=2B \\ V:G:D=\frac{1}{4}:\frac{3}{5}:\frac{7}{8} \end{array}.$$

Kako je NZS(4,5,8)=40, množenjem svakog broja u razmeri sa 40, dobijamo sistem

$$\begin{array}{l} A+B+V+G+D=48300 \\ \frac{1}{0.4}(A+B)=V+G+D \\ A=2B \\ V:G:D=10:24:35 \end{array}$$

Ako $V+G+D$ iz druge jednačine uvrstimo u prvu, slediće

$$\begin{array}{l} A+B+\frac{1}{0.4}(A+B)=48300 \\ \frac{1}{0.4}(A+B)=V+G+D \\ A=2B \\ V:G:D=10:24:35 \end{array}$$

Ako A iz treće jednačine uvrstimo u prvu, ona postaje

$$2B+B+\frac{1}{0.4}(2B+B)=48300 \Rightarrow 3B+\frac{10}{4}\cdot 3B=48300 \Rightarrow B=48300\cdot\frac{2}{21}=4600 \text{ dinara.}$$

Sada je $A=2B=9200$ dinara. Dalje, iz poslednje jednačine sistema sledi da postoji realan broj K tako da je $V=10K$, $G=24K$ i $D=35K$. Uvrštavanjem u drugu jednačinu, dobijamo

$$\frac{1}{0.4}(9200+4600)=69K \Rightarrow K=500,$$

pa je $V=5000$ dinara, $G=12000$ dinara i $D=17500$ dinara. ■

Složeni račun podele

Primer 3.3.8 Nagradu od 34000 evra treba da podele tri preduzeća srazmerno obrtu i vremenu rada. Obrt prvog preduzeća je bio 100000 evra, preduzeća drugog 150000 evra, a trećeg 250000 evra. Prvo preduzeće je radilo 6, drugo 10, a treće 12 meseci.

Rešenje. Neka je x_i deo nagrade koje je dobilo i-to preduzeće, $i=1,2,3$. Tada je $x_1+x_2+x_3=34000$ evra, a važi i

$$\begin{array}{rcl} x_1:x_2:x_3 &=& 100000:150000:250000 \\ &=& 6:10:12 \end{array}$$

tj.

$$\begin{array}{rcl} x_1:x_2:x_3 &=& 2:3:5 \\ &=& 3:5:6 \\ \hline x_1:x_2:x_3 &=& (2\cdot 3):(3\cdot 5):(5\cdot 6) \end{array}$$

nakon skraćivanja. Pošto je $x_1 : x_2 : x_3 = 6 : 15 : 30$, dobijamo da je

$$x_1 = 6 \cdot \frac{34000}{51} = 4000 \text{ evra}, \;\; x_2 = 15 \cdot \frac{34000}{51} = 10000 \text{ evra}, \;\; x_3 = 30 \cdot \frac{34000}{51} = 20000 \text{ evra}.$$

■

Primer 3.3.9 Tri sela podignu o zajedničkom trošku most preko obližnje reke. Most je koštao 38000000 dinara. Po sporazumu, sela treba da snose troškove srazmerno broju stanovnika i obrnuto srazmerno udaljenosti sela od mosta. Koliko treba da plati najveće, a koliko najudaljenije selo ako prvo ima 800 stanovnika, a udaljeno je 4 km, drugo ima 1100 stanovnika, a udaljeno je 22 km, i treće ima 1200 stanovnika, a udaljeno je 18 km od mosta?

Rešenje. Neka sa x_i obeležimo troškove i-tog sela, $i = 1, 2, 3$. Tada je $x_1 + x_2 + x_3 = 38000000$ dinara. Pošto se troškovi dele srazmerno broju stanovnika, a obrnuto srazmerno udaljenosti sela od mosta, tada će važiti

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= 800 : 1100 : 1200 \\ &= \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{22} : \tfrac{1}{18} \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= 8 : 11 : 12 \\ &= \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{11} : \tfrac{1}{9} \\ \hline x_1 : x_2 : x_3 &= (8 \cdot \tfrac{1}{2}) : (11 \cdot \tfrac{1}{11}) : (12 \cdot \tfrac{1}{9}) \end{aligned}$$

Dobili smo da je $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 1 : \frac{4}{3}$, odnosno $x_1 : x_2 : x_3 = 12 : 3 : 4$. Kako je $12 + 3 + 4 = 19$, sledi

$$x_1 = 12 \cdot \frac{38 \cdot 10^6}{19} = 24 \cdot 10^6 \text{ dinara}, \;\; x_2 = 3 \cdot \frac{38 \cdot 10^6}{19} = 6 \cdot 10^6 \text{ dinara}, \;\; x_3 = 4 \cdot \frac{38 \cdot 10^6}{19} = 8 \cdot 10^6 \text{ din.}$$

■

Primer 3.3.10 Na jednom poslu tri grupe radnika zaradile su 28160 evra. Izračunati koliko pripada svakoj grupi ako se radni čas druge grupe plaća 1 evro više nego prve, a treće 2 evra više nego druge. Prva grupa je imala 23 radnika, koji su radili 8 dana po 5 časova, druga grupa je imala 15 radnika, koji su radili 12 dana po 7 časova i treća grupa je imala 25 radnika koji su radili 8 dana po 10 časova dnevno.

Rešenje. Sa x_i, $i = 1, 2, 3$ obeležićemo koliko evra pripada i-toj grupi radnika. Tada je $x_1 + x_2 + x_3 = 28160$. Neka je x cena za radni čas prve grupe radika. Ukupan broj radnih sati prve grupe radnika je $23 \cdot 8 \cdot 5 = 920$, druge $15 \cdot 12 \cdot 7 = 1260$ i treće $25 \cdot 8 \cdot 10 = 2000$ časova. Sada je $x_1 = 920x$, $x_2 = 1260(x + 1)$ i $x_3 = 2000(x + 3)$. Odavde dobijamo

$$28160 = x_1 + x_2 + x_3 = 920x + 1260(x + 1) + 2000(x + 3) \Rightarrow x = 5.$$

Prva grupa radnika dobija $x_1 = 4600$ evra, druga $x_2 = 7560$ evra i treća $x_3 = 16000$ evra. ■

Primer 3.3.11 Potrebno je da se samelju 634 hektolitra žita. Koliko će se hektolitara dati svakom od sledeća tri mlina pa da za isto vreme bude samleveno žito? Prvi mlin melje 10 hektolitara za 1.5 čas, drugi 15 hektolitara za 3 časa, a treći 12 hektolitara za 3.5 časa.

Rešenje. Neka je x_i broj hektolitara (hl) koji će se dati i-tom mlinu, $i = 1, 2, 3$. Tada je $x_1 + x_2 + x_3 = 634$ hl. Neka je t vreme u časovima koje potroši svaki mlin. Tada je

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left(\frac{10}{1.5} \cdot t\right) : \left(\frac{15}{3} \cdot t\right) : \left(\frac{12}{3.5} \cdot t\right)$$

što posle sređivanja daje $x_1 : x_2 : x_3 = 140 : 105 : 72$. Jasno je da je

$$x_1 = 140 \cdot \frac{634}{317} = 280 \text{ hl}, \;\; x_2 = 105 \cdot \frac{634}{317} = 210 \text{ hl}, \;\; x_3 = 72 \cdot \frac{634}{317} = 144 \text{ hl}.$$

■

Primer 3.3.12 Tri mlina iz prethodnog primera treba da samelju 689 hektolitara žita ali da prvi mlin počinje raditi tri časa pre drugog, a drugi tri časa pre trećeg i da budu istovremeno gotovi sa radom.

Rešenje. Neka je x_i broj hektolitara (hl) koji će se dati i-tom mlinu, $i = 1, 2, 3$. Sada je $x_1 + x_2 + x_3 = 689$ hl. Neka je t vreme u časovima koje potroši treći mlin. Tada je

$$x_1 = \frac{10}{1.5} \cdot (t + 6), \;\; x_2 = \frac{15}{3} \cdot (t + 3), \;\; x_3 = \frac{12}{3.5} \cdot t.$$

Iz jednačine

$$689 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{1.5} \cdot (t + 6) + \frac{15}{3} \cdot (t + 3) + \frac{12}{3.5} \cdot t \Rightarrow t = 42,$$

pa je $x_1 = 320$ hl, $x_2 = 225$ hl i $x_3 = 144$ hl.

■

Primer 3.3.13 Na jednom poslu radile su dve grupe radnika i zaradile 90000 evra. Koliko svakoj grupi pripada kada se radni čas druge grupe plaća skuplje za $\frac{1}{3}$ nego što se plaća radni čas prve grupe? Prva grupa je radila 50 dana sa 15 radnika i 5 kamiona po 8 časova dnevno, a druga 40 dana sa 20 radnika i 10 kamiona po 10 časova dnevno. Rad jednog kamiona plaća se kao rad 10 radnika.

Rešenje. Neka je x_i suma koju je zaradila i-ta grupa radnika, $i = 1, 2$. Tada je $x_1 + x_2 = 90000$. Prva grupa je ostvarila $50 \cdot (15 + 5 \cdot 10) \cdot 8 = 26000$ radnih časova, dok je druga grupa ostvarila $40 \cdot (20 + 10 \cdot 10) \cdot 10 = 48000$ radnih časova. Ako je cena radnog časa prve grupe x evra/h, razmerni broj za prvu grupu bi bio $26000x$, a druge $48000(x + x/3) = 64000x$. Znači $x_1 : x_2 = (26000x) : (64000x)$, tj. $x_1 : x_2 = 13 : 32$ nakon skraćivanja. Pošto je $13 + 32 = 45$, dobijamo

$$x_1 = 13 \cdot \frac{90000}{45} = 26000 \text{ evra}, \;\; x_2 = 32 \cdot \frac{90000}{45} = 64000 \text{ evra}.$$

■

3.3.2 Račun podele i nizovi

Ovu grupu zadataka ćemo prepoznati tako što:

- ako piše da se novac deli tako da svaka osoba dobije x novčanih jedinica više ili manje od sledeće - koristićemo osobine aritmetičkog niza,
- ako piše da svaka osoba dobija x puta više ili manje novčanih jedinica od sledeće - koristićemo osobine geometrijskog niza,
- ako piše da svaka osoba dobija $x\%$ više ili manje novčanih jedinica od sledeće - koristićemo osobine geometrijskog niza.

Pre izrade ovih zadataka pogledati primere 8.1.4 i 8.1.5 gde su definisani aritmetički i geometrijski nizovi, redom. Koristićemo oznake iz navedenih primera.

Primer 3.3.14 Podeliti 66000 dinara na 8 lica tako da svako lice dobije 2000 dinara više od prethodnog. Koliko je dobilo četvrto lice?

Rešenje. Ako prvo lice dobije x dinara, sledeće je dobilo $x + 2000$, pa sledeće $x + 4000$ i tako dalje. Primećujemo da će raspoređeni novac formirati jedan aritmetički niz gde je $d = 2000$, $n = 8$ i $S_n = 66000$. Sada ćemo sa a_i označiti sumu koju je dobilo i-to lice, $i = 1, 2, \dots, 8$ i iz formule

$$S_n = \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)d)$$

izraziti i izračunati a_1:

$$a_1 = \frac{S_n}{n} - \frac{(n-1)d}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{66000}{8} - \frac{(8-1)\cdot 2000}{2} = 1250 \text{ dinara.}$$

Sada je $a_2 = a_1 + 2000 = 3250$ dinara, $a_3 = a_2 + 2000 = 5250$ dinara, $a_4 = 7250$ dinara, $a_5 = 9250$ dinara, $a_6 = 11250$ dinara, $a_7 = 13250$ dinara, $a_8 = 15250$ dinara. ■

Primer 3.3.15 Podeliti 45000 dinara na 5 lica tako da svako sledeće dobije 4000 dinara manje od prethodnog.

Rešenje. Ako je prvo lice dobilo x dinara, sledeće dobija $x - 4000$, naredno $x - 8000$ i tako dalje, pa raspoređeni novac obrazuje jedan aritmetički niz gde je $d = -4000$, $S_n = 45000$, $n = 5$. Odredimo prvo koliko je dobilo prvo lice. Tu sumu, kao i u prethodnom zadatku, obeležićemo sa a_1.

$$a_1 = \frac{S_n}{n} - \frac{(n-1)d}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{45000}{5} - \frac{(5-1)\cdot(-4000)}{2} = 17000 \text{ dinara.}$$

Drugo lice dobija $a_2 = a_1 + d = 17000 - 4000 = 13000$ dinara, treće $a_3 = 9000$ dinara, četvrto $a_4 = 5000$ dinara i peto $a_5 = 1000$ dinara. ■

Primer 3.3.16 Koliko je lica učestvovalo u deobi iznosa od 69000 dinara ako je prvo lice dobilo 3000, a svako sledeće po 500 dinara više?

Rešenje. I ovde je u pitanju aritmetički niz. Koristeći već objašnjene oznake, $S_n = 69000$, $a_1 = 3000$ i $d = 500$. Iz formule za S_n dobijamo

$$dn^2 + (2a_1 - d)n - 2S_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

odakle ćemo izračunati n rešavanjem kvadratne jednačine.

$$500n^2 + (2 \cdot 3000 - 500)n - 2 \cdot 69000 = 0 \Rightarrow 500n^2 + 5500n - 138000 = 0.$$

Nakon deljenja sa 500, rešićemo jednačinu za $n \geq 0$.

$$n^2+11n-276 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-276)}}{2} = \frac{-11 \pm 35}{2} \Rightarrow n = \frac{-11 + 35}{2} = 12.$$

Učestvovalo je 12 lica. ■

Primer 3.3.17 Podeliti 16250 evra na četiri lica tako da svako sledeće dobije jedan i po puta više od prethodnog.

Rešenje. Raspoređeni novac formiraće geometrijski niz gde je količnik $q = 1.5$ i $S_n = 16250$ i $n = 4$. Prvo moramo da odredimo koliko će dobiti prvo lice, tj. koliko je b_1. Iz formule za S_n izražavamo b_1.

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow b_1 = \frac{S_n(q - 1)}{q^n - 1} = \frac{16250 \cdot (1.5 - 1)}{1.5^4 - 1} = 2000 \text{ evra.}$$

Onda drugo lice dobija $b_2 = b_1 q = 2000 \cdot 1.5 = 3000$ evra, treće lice $b_3 = b_2 q = 3000 \cdot 1.5 = 4500$ evra i četvrto lice $b_4 = b_3 q = 4500 \cdot 1.5 = 6750$ evra. ■

Primer 3.3.18 Izvesna suma podeljena je na 16 lica od kojih je prvo dobilo 196608 dinara, a svako naredno polovinu dela prethodnog. Koliko novca je podeljeno i koliko je dobilo 11. lice?

Rešenje. Opet se raspoređuje novac korišćenjem osobina geometrijskog niza. Znamo da je $n = 16$, $b_1 = 196608$, $q = 1/2$, a tražimo S_n i b_{11}.

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 196608 \cdot \frac{0.5^{16} - 1}{0.5 - 1} = 393210 \text{ dinara}$$

i

$$b_{11} = b_1 q^{10} = 196608 \cdot (0.5)^{10} = 192 \text{ dinara.}$$

■

Primer 3.3.19 Podeliti 7441.6 evra na 5 lica tako da svako sledeće dobije 20% više od prethodnog.

Rešenje. Ako prvo lice dobije x evra, drugo dobija $x \cdot 1.20$ evra, treće $x \cdot 1.20^2$ evra i tako dalje. Raspodeljeni novac će formirati geometrijski niz gde je $q = 1.20 = 1 + 20/100$, $S_n = 7441.6$ evra i $n = 5$. Odredimo koliko će dobiti prvo lice.

$$b_1 = \frac{S_n(q - 1)}{q^n - 1} = \frac{7441.6 \cdot (1.20 - 1)}{1.20^5 - 1} = 1000 \text{ evra.}$$

Sada je $b_2 = 1000 \cdot 1.2 = 1200$ evra, $b_3 = 1200 \cdot 1.2 = 1440$ evra, $b_4 = 1440 \cdot 1.2 = 1728$ evra i $b_5 = 1728 \cdot 1.2 = 2073.6$ evra. ■

Primer 3.3.20 Podeliti 70901.76 evra na četiri lica tako da svako sledeće dobije 8% manje od prethodnog.

Rešenje. Sada je $q = 1 - \frac{8}{100} = 0.92$ i

$$b_1 = \frac{70901.76 \cdot (0.92 - 1)}{0.92^4 - 1} = 20000 \text{ evra},$$

$b_2 = 20000 \cdot 0.92 = 18400$ evra, $b_3 = 20000 \cdot 0.92^2 = 16928$ evra i $b_4 = 20000 \cdot 0.92^3 = 15573.76$ evra. Ovde je, naravno, sa b_i obeleženo koliko će evra dobiti i-to lice, $i = 1, 2, 3, 4$. ■

Primer 3.3.21 Na koliko lica je podeljen iznos od 411771 dinara ako je prvo lice dobilo 117649, a svako naredno sedminu dela prethodnog?

Rešenje. Sada je $q = 1/7$, $S_n = 411771$ i $b_1 = 352947$ jer je u pitanju geometrijski niz. Tražimo n.

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{S_n(q-1)}{b_1}\right)}{\ln q} = \frac{\ln\left(1 + \frac{411771 \cdot \left(\frac{1}{7} - 1\right)}{352947}\right)}{\ln \frac{1}{7}} = 7.$$

■

3.4 Račun mešanja

Račun mešanja rešava zadatke koji se mogu svrstati u sledeće dve kategorije: 1) poznate su cene i količine robe koje se mešaju, pa se traži cena koštanja ovako pomešane robe, i 2) poznate su cene robe, koje se mešaju, i cena robe koja se želi postići mešanjem, pa se traži u kojoj razmeri treba mešati robu.

Prvi slučaj nije ništa drugo do izračunavanja srednje vrednosti robe. U drugom slučaju, prilikom mešanja važi pravilo: za pomešanu robu trebalo bi da se dobije isto toliko koliko bi se dobilo da je nepomešana roba prodavana po odgovarajućim cenama. Takođe, uvek se bira jedna vrednost veća i jedna vrednost manja u odnosu na vrednost mešavine, kada se vrši mešanje.

Sada ćemo uraditi nekoliko primera iz *prostog računa mešanja* (kada se mešaju dve vrste robe).

Primer 3.4.1 Kafu od 200 i 250 dinara za kilogram, treba pomešati tako da se dobije kafa od 215 dinara za kilogram. U kojoj razmeri treba izvršiti to mešanje?

Rešenje. Neka su x i y razmerni brojevi (broj kg) za kafu od 200 i 250 din/kg, redom. Tada je $200x$ suma koja se mora izdvojiti za x kg kafe od 200 din/kg, a $250y$ suma koja se mora izdvojiti za y kg kafe od 250 din/kg. Dakle, ukupno je uzeto $x + y$ kilograma, a želimo da cena mešavine bude 215 din/kg. Znači, mora važiti naredna jednakost:

$$200x + 250y = 215(x + y) \Rightarrow (250 - 215)y = (215 - 200)x \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{250 - 215}{215 - 200} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{3}$$

Zaključujemo da kafe treba mešati u razmeri $x : y = 7 : 3$.

Do razmernih brojeva možemo doći i na drugi način:

$$\begin{array}{ccc|c|c} 200 & & & 250-215=35 & 7 \\ & & 215 & & \\ 250 & & & 215-200=15 & 3 \end{array}.$$

Razmerni broj za manju cenu dobija se kao razlika veće cene i cene mešavine. Razmerni broj za veću cenu dobija se kao razlika cene mešavine i manje cene. Ako je moguće, razmerni brojevi se mogu skratiti. ■

Primer 3.4.2 Imamo dve vrste pirinča. Jednu vrstu prodajemo po 140 din/kg, a drugu po 180 din/kg. Ako pirinča od 140 din/kg imamo 125 kg, koliko kg moramo uzeti po ceni od 180 din/kg da bismo dobili mešavinu od 155 din/kg?

Rešenje. Odredimo prvo razmerne brojeve.

$$\begin{array}{ccc|c|c} 140 & & & 180-155=25 & 5 \\ & & 155 & & \\ 180 & & & 155-140=15 & 3 \end{array}.$$

Ako je x nepoznata količina pirinča od 180 din/kg, tada mora važiti

$$125 : x = 5 : 3 \Rightarrow x = \frac{125 \cdot 3}{5} \Rightarrow x = 75 \text{ kg}.$$

Primetimo da važi

$$125 \cdot 140 + 75 \cdot 180 = (125 + 75) \cdot 155.$$

■

Primer 3.4.3 Od 40-procentnog i 65-procentnog rastvora sirćetne kiseline treba da se pripremi 55-procentni rastvor, ako znamo da posedujemo 32 litre 40-procentnog rastvora. Koliko litara treba da se uzme od 65-procentnog rastvora?

Rešenje.

$$\begin{array}{ccc|c|c} 40 & & & 65-55=10 & 2 \\ & & 55 & & \\ 65 & & & 55-40=15 & 3 \end{array}.$$

Razmerni broj za 40-procentni rastvor je 2. Treba odrediti K tako da je $2 \cdot K = 32$, pa je $K = 16$. Sledi da se treba uzeti $3 \cdot K = 3 \cdot 16 = 48$ litara 65-procentnog rastvora. ■

Sada ćemo uraditi i nekoliko primera iz *složenog računa mešanja* (kada se mešaju tri i više vrste roba).

Primer 3.4.4 Zadruga ima pasulj od 110, 120 i 130 din/kg pa hoće mešanjem da dobije pasulj od 115 din/kg. U kojoj razmeri treba mešati postojeće vrste?

Rešenje. Neka su x, y i z razmerni brojevi za pasulj od 110, 120 i 130 din/kg, redom. Tada mora važiti

$$110x + 120y + 130z = 115(x + y + z) \Rightarrow 5x = 5y + 15z \Rightarrow x = y + 3z.$$

Za proizvoljno y i z, dobijamo x. Na primer, za $y = z = 1$, $x = 4$, pa je razmera $4 : 1 : 1$. Ili, za $y = 1$ i $z = 2$, sledi da je $x = 7$, pa je razmera $7 : 1 : 2$. Do ovih razmernih brojeva se može doći i na sledeći način:

$$\begin{array}{cc|l|l} 110 & & (130-115)+(120-115)=20 & 4 \\ & 115 & & \\ 120 & & 115-110=5 & 1 \\ 130 & & 115-110=5 & 1 \end{array}.$$

Ako još jednom pomešamo 110 i 130 din/kg, imaćemo

$$\begin{array}{cc|l|l} 110 & & (130-115)+(120-115)+(130-115)=35 & 7 \\ & 115 & & \\ 120 & & 115-110=5 & 1 \\ 130 & & (115-110)+(115-110)=10 & 2 \end{array}.$$

■

Primer 3.4.5 Preduzeće ima 4 vrste brašna po ceni od 36, 38, 45 i 49 dinara po kilogramu. Koliko treba uzeti od svake vrste da cena bude 40 dinara po kilogramu? Navesti bar tri vrste mešanja.

Rešenje. Prvi način je da mešamo prvu i četvrtu, drugu i treću vrstu brašna:

$$\begin{array}{cc|l|l} 36 & & 49-40=9 & 9 \\ 38 & & 45-40=5 & 5 \\ & 40 & & \\ 45 & & 40-38=2 & 2 \\ 49 & & 40-36=4 & 4 \end{array}.$$

Razmera je $9 : 5 : 2 : 4$. Možemo da mešamo prvu i treću, drugu i četvrtu vrstu brašna:

$$\begin{array}{cc|l|l} 36 & & 45-40=5 & 5 \\ 38 & & 49-40=9 & 9 \\ & 40 & & \\ 45 & & 40-36=4 & 4 \\ 49 & & 40-38=2 & 2 \end{array}.$$

Razmera je sada $5 : 9 : 4 : 2$. Treći način mešanja možemo dobiti tako što ćemo, na primer, kod drugog načina mešanja dodati još jedno dozvoljeno mešanje. Recimo, prvu i četvrtu vrstu brašna da pomešamo:

$$\begin{array}{cc|l|r} 36 & & (45-40)+(49-40)=14 & 14 \\ 38 & & 49-40=9 & 9 \\ & 40 & & \\ 45 & & 40-36=4 & 4 \\ 49 & & (40-38)+(40-36)=6 & 6 \end{array}.$$

Razmera je $14 : 9 : 4 : 6$. ■

Primer 3.4.6 U kojoj razmeri treba mešati robu od 30, 32, 35 i 40 din/kg ako želimo da dobijemo 230 kg po ceni od 38 din/kg?

Rešenje. 38 din/kg stavićemo između 35 i 40 din/kg, tako da ćemo sve tri manje cene od cene mešavine spajati sa jedinom cenom većom od cene mešavine:

30		$40-38=2$	2
32		$40-38=2$	2
35		$40-38=2$	2
	38		
40		$(38-35)+(38-32)+(38-30)=17$	17
			23

Pošto nam treba 230 kg, potrebno je naći K za koje važi $23K = 230$, tj. $K = 10$. Rešenje zadatka je da po ceni 30, 32 i 35 din/kg treba uzeti po $2 \cdot 10 = 20$ kg, a po ceni 40 din/kg treba uzeti $10 \cdot 17 = 170$ kg. ■

Primer 3.4.7 Treba pomešati sok od jabuke čija je cena 48 din/l, sok od narandže čija je cena 58 din/l, sok od grožđa po ceni 63 din/l i sok od maline po ceni 72 din/l da bi se dobio koktel čija je cena 60 din/l. Po koliko litara od svakog soka treba uzeti za 348 litara koktela?

Rešenje. Cenu mešavine 60 din/l stavljamo između 58 din/l i 63 din/l. Biramo jednu cenu veću i jednu cenu manju od 60 din/l:

48		$72-60=12$	12
58		$63-60=3$	3
	60		
63		$60-58=2$	2
72		$60-48=12$	12
			29

Prilikom biranja prostih mešanja, mešali smo jabuku i malinu, narandžu i grožđe. Ako uzmemo 12 l po ceni od 48 din/l, 3 l po ceni od 58 din/l, 2 l po ceni od 63 din/l i 12 l po ceni od 72 din/l, dobijamo $12 + 3 + 2 + 12 = 29$ l po ceni od 60 din/l. Pošto nam treba 348 l koktela, potrebno je naći K za koje važi $29K = 348$. Kako je $K = 12$, rešenje zadatka je da po ceni 48 din/l treba uzeti $12 \cdot 12 = 144$ l, po ceni 58 din/l treba uzeti $3 \cdot 12 = 36$ l, po ceni 63 din/l treba uzeti $2 \cdot 12 = 24$ l i po ceni 72 din/l treba uzeti $12 \cdot 12 = 144$ l. ■

3.5 Zadaci za vežbu

1. Ako 15 kg grožđa staje 900 dinara, koliko dinara staje 25 kg grožđa?

2. Za 36 metara platna plaćeno je 7200 dinara. Koliko metara istog platna se može dobiti za 14400 dinara?

3. Za 7 dana 45 ljudi potroši za hranu 315000 dinara. Koliko će dinara potrošiti za isto vreme 180 ljudi, kada se za svakog čoveka računa ista cena i ista količina hrane?

4. Neki posao obavi 25 ljudi za 60 dana. Koliko je ljudi potrebno da se isti posao završi 150 dana?

5. Jedna količina hrane traje 10 dana za 120 vojnika. Koliko se dana mogu hraniti istom količinom hrane 30 vojnika?

6. 5 radnika *Gradskog zelenila* zasadi 5000 lala za 12 dana radeći 6 časova dnevno. Koliko časova dnevno treba da radi 6 radnika da bi zasadili 8000 lala za 16 dana?

7. Za jednu gredu dužine 3.5 metra, širine 40 cm i debljine 30 cm plaćeno je 400 dinara. Koliko će se dinara platiti za gredu dužine 4.25 metara, širine 0.5 metara i debljine 40 cm kada je cena po kubiku ista kao i za prvu gredu?

8. 40 radnika za 40 dana radeći po 9 h dnevno iskopa kanal dužine 200 m, dubine 2 m i širine 3 m. Koliko dana je potrebno da 50 radnika radeći po 8 h dnevno iskopa kanal dužine 150 m, dubine 1 m i širine 2 m?

9. 7 lekara za 6 sati pregleda 210 pacijenata. Koliko pacijenata će biti pregledano za 4 sata ako radi 9 lekara?

10. Kopanje rupe za bazen dužine 50 metara, širine 25 metara, dubine 3 metra staje 80000 dinara. Koliko bi koštalo kopanje rupe za bazen dužine 25 metara, širine 20 metara i dubine 2.5 metra?

11. Planirano je da izvestan posao obavi 40 radnika za 100 dana. Posao otpočnu svi radnici i rade po planu 32 dana. Tada posao napusti 6 radnika. Za koliko dana će preostali radnici završiti posao?

12. Za 10 američkih bušela žita plaćeno je 3 dolara. Koliko bi se dinara platilo za 20 engleskih bušela ako je 1 dolar 61 dinar, a 12 američkih bušela je 14 engleskih?

13. Koliko centi ćemo platiti 100 američkih galona vina ako kod nas 8 litara košta 1600 dinara i ako je kurs za amarički dolar 61 dinar? (1 am. galon = 3.785 litara)

14. 5050 galona ulja košta 1000\$. Koliko dinara treba platiti 855 litara ulja ako su poznati sledeći odnosi: 1 litar = 0.264 galona; 1\$ = 63 dinara?

15. Koliko dolara u SAD košta jedna tona čelika ako se u Srbiji 200 kg čelika može kupiti za 8 kilograma srebra, ako 20 grama srebra košta 80 evra i ako je 100 evra 80 dolara?

16. Koliko dolara u SAD košta jedna tona pamuka, ako se u Srbiji 200 kilograma pamuka može kupiti za 5 kilograma svile, i ako 0.4 kilograma svile košta 5 evra, gde je 100 evra 80 dolara?

17. Koliko evra treba platiti za 100 kilograma šećera ako jedan kilogram košta 50 dinara i ako je 1 evro 88 dinara?

18. U Liverpulu je cena za libru brašna 8 penija, a u Čiakgu 550 centi za 1 američki cental. Koja je cena za nas povoljnija ako je kurs za 1 funtu 103 dinara, a za 1\$ 71 dinar? (1 lb = 0.454 kg, 100 lb = 1 am. cental)

19. Članove razmere $3\frac{2}{5} : \frac{4}{7}$ pretvoriti u uzajamno proste cele brojeve.

20. Iznos od 153720 dinara treba podeliti na 4 osobe, tako da se njihovi delovi odnose kao 5 : 2 : 1 : 6. Koliko će dobiti treća, a koliko četvrta osoba?

21. Iznos od 3900 dinara treba raspodeliti na 4 osobe tako da prva osoba dobije 600 dinara više, treća 200 dinara manje, a četvrta četiri puta više od druge osobe. Koliko će dobiti treća osoba?

22. Četiri lica starosti 12, 15, 18 i 24 godine treba da podele sumu od 97900 dinara obrnuto srazmerno njihovim godinama starosti. Koliku sumu će dobiti najmlađe lice?

23. Tri grupe radnika obave zajednički posao na kome zarade 4956000 dinara. Zaradu treba deliti srazmerno uloženom radu. Koliko će dobiti svaka grupa radnika ako je prva radila 12 dana sa 8 ljudi po 8 časova dnevno, druga 18 dana sa 10 ljudi po 7 časova, a treća 15 dana sa 5 ljudi po 6 časova dnevno?

24. Za četiri domaćinstva oštećena požarom sakupljena je pomoć od 2450000. Koliko treba dati svakom domaćinstvu ako je odlučeno da se pomoć podeli srazmerno delu imovine koje je svako domaćinstvo izgubilo u požaru i ako je imovina prvog iznosila 150000, a šteta 30000, imovina drugog 120000, a šteta 40000, imovina trećeg 110000, a šteta 55000 i imovina četvrtog domaćinstva 100000, a šteta 60000?

25. 105000 dinara treba podeliti na 6 lica tako da svako naredno lice dobije po 3000 dinara više od prethodnog. Koliko će dobiti četvrto lice?

26. Izvesna suma podeljena je na 16 lica od kojih je prvo dobilo 196608 dinara, a svako naredno polovinu dela prethodnog. Koliko novca je podeljeno i koliko je dobilo 11. lice?

27. Koja je suma podeljena na 20 lica ako je prvo dobilo 35000 dinara, a svako naredno po 1000 dinara manje?

28. Podeliti na 4 lica 29679 dinara tako da svako naredno dobije po 5% manje od prethodnog. Koliko dinara je dobilo treće lice?

29. 10 drugova je za 10 dana rada na pumpi (svako je radio po jedan dan) zaradilo 35805 dinara. Koliko je zaradio svako od njih ako se zna da je svaki naredni dan zarada bila za dva puta veća nego prethodnog dana? Koliko je dinara dobio deseti drug?

30. Podeliti 12000 dinara na tri lica tako da svako lice dobije po 2000 dinara više od prethodnog. Koliko će dobiti drugo lice?

31. Kolika je suma podeljena na 15 lica, ako je prvo lice dobilo 30000 dinara, a svako naredno po 1500 dinara više?

32. Koja je suma podeljena na 20 lica ako je prvo dobilo 35000 dinara, a svako naredno po 1000 dinara manje?

33. Podeliti na 6 lica $276679,404$ dinara tako da svako naredno dobije po 10% manje od prethodnog. Koliko je dobilo četvrto lice?

34. Podeliti na 6 lica 771561 dinar tako da svako naredno lice dobije po 10% više od prethodnog. Koliko je dobilo četvrto lice?

35. Podeliti 1023000 dinara na 10 lica tako da svako lice dobije dva puta više od prethodnog. Koliko će dobiti osmo lice?

36. Koliko vode temperature 40 stepeni i vode temperature 25 stepeni treba pomešati da se dobije 90 litara vode temperature 30 stepeni?

37. Vinar hoće da pomeša sa vodom 450 litara vina koje prodaje po 1100 dinara po litri. Koliko litara vode mora sipati da bi litar mešavine prodavao po 900 dinara?

38. U kojoj razmeri treba mešati alkohol od 70% i 80% ako se želi dobiti alkohol od 74%?

39. Na skladištu imamo 4 kvalitete iste vrste robe sa cenama 16, 18, 19.6 i 20 evra. Napraviti smesu od 3200 kg po ceni od 19 evra.

40. Treba pomešati jabuke po ceni 10, 16, 20 i 25 din/kg pa da se za 16150 dinara može kupiti ukupno 950 kg jabuka. Koliko kg jabuka svake vrste treba uzeti?

41. U kojoj razmeri treba pomešati 4 vrste kafe po ceni od 16, 20, 22 i 25 novčanih jedinica da bi se dobila kafa po ceni od 21 dinar po kilogramu?

42. Koliko treba nabaviti jabuka od 100, 160, 200 i 250 dinara po kilogramu , da bi se kupilo 950 kg mešavine za 161500 dinara?

43. Zadruga ima 4 vrste žita. U kojoj razmeri treba da se vrši mešanje da bi se dobila mešavina od 2500 za 100 kg, ako su cene žita 2200, 2400, 2700, 2800 dinara za 100 kg?

GLAVA 4

Matrice i determinante

4.1 Matrice - definicija i osnovne osobine

Definicija 4.1.1 *Matrica reda $m \times n$ je pravougaona shema (ili tablica) brojeva koja ima m vrsta i n kolona i zapisuje se u obliku*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ili kraće $[a_{ij}]_{m\times n}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Indeks i obeležava broj vrste (horizontalne linije), a indeks j broj kolone (vertikalne linije).

Matrice se obeležavaju velikim slovima A, B, C, ...

Primer 4.1.2 Primeri matrica su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \text{ reda } 2\times 3, \qquad B = \begin{bmatrix} \pi & -2 \\ \frac{1}{3} & 10 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ reda } 2,$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ \ln 3 & 1 \\ e & -4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \text{ reda } 3\times 2, \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4} \text{ reda } 3\times 4,$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 4} \text{ reda } 4, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \text{ reda } 3,$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 4} \text{ reda } 4, \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \text{ reda } 3.$$

■

Primer 4.1.3 Za matricu
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$
važi $a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -4$. ∎

Kvadratna matrica je matrica koja ima isti broj vrsta i kolona, tj. $m = n$. Za matricu reda $n \times n$ kaže se da je kvadratna matrica **reda** n. Matrica B iz primera 4.1.2 je jedna kvadratna matrica reda 2. *Glavnu dijagonalu* kvadratne matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ čine elementi a_{11}, a_{22},..., a_{nn}, dok *sporednu dijagonalu* čine elementi a_{1n}, $a_{2,n-1}$,..., a_{n1}. Kod matrice B iz primera 4.1.2, elementi na glavnoj dijagonali su $b_{11} = \pi$ i $b_{22} = 10$, a na sporednoj $b_{12} = -2$ i $b_{21} = \frac{1}{3}$.

Nula matrica je matrica čiji su svi elementi 0 i obeležavaćemo je sa O. Matrica O iz primera 4.1.2 je jedna nula matrica.

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica čiji su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli. Matrica D iz primera 4.1.2 je jedna dijagonalna matrica.

Jedinična matrica je dijagonalna matrica čiji su elementi na glavnoj dijagonali 1, a svi ostali elementi su 0. Označava se sa I. Matrica I iz primera 4.1.2 je jedna jedinična matrica.

Definicija 4.1.4 *Dve matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ su jednake ako su istog reda ($m = p$ i $n = q$) i ako su elementi jedne matrice jednaki odgovarajućim elementima druge matrice. Drugim rečima $a_{ij} = b_{ij}$ za svako $i = 1, 2, \ldots, m$ i za svako $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Primer 4.1.5 Sledeće dve matrice su jednake
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sqrt{4} & \sqrt{(-3)^2} \\ 2\ln e & \sin\pi & \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$
∎

Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ je **gornja trougaona** matrica ako su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $a_{ij} = 0$ za $i > j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Matrica E iz primera 4.1.2 je jedna gornja trougaona matrica.

Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ je **donja trougaona** matrica ako su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $a_{ij} = 0$ za $i < j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Matrica F iz primera 4.1.2 je jedna donja trougaona matrica.

Transponovana matrica matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$. Matrica A^T se dobija tako što i-ta vrsta matrice A postaje i-ta kolona matrice A^T, $i = 1, 2, \ldots, m$, i j-ta kolona matrice A postaje j-ta vrsta matrice A^T, $j = 1, 2, \ldots, n$. Ako su A i B matrice istog reda, tada važi:
$$(A^T)^T = A, \;\; (A + B)^T = A^T + B^T, \;\; (\alpha A)^T = \alpha A^T, \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Primer 4.1.6 Odrediti transponovanu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Rešenje. Transponovana matrica matrice A je oblika

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

■

4.1.1 Operacije sa matricama

Definisaćemo sabiranje (oduzimanje) matrica, množenje matrice skalarom (brojem) i množenje matrica.

Sabiranje i oduzimanje matrica

Dve matrice A i B se mogu sabrati (oduzeti) samo ako su istog reda. Sada sledi definicija na koji način se sabiraju (oduzimaju) dve matrice.

Definicija 4.1.7 *Zbir (razlika) matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ čiji se elementi dobijaju tako što se saberu (oduzmu) odgovarajući elementi matrica A i B (saberu (oduzmu) se elementi koji se nalaze u istoj vrsti i koloni). Dakle,*

$$A \pm B = [a_{ij}]_{m\times n} \pm [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n} = C\,.$$

Primer 4.1.8 Utvrditi koje se matrice mogu sabrati (oduzeti) i izvršiti te operacije

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Matrica A je kvadratna reda 3 kao i matrica F. Tada je

$$\begin{aligned} A+F &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & -2+(-2) & 3+4 \\ 2+4 & 0+(-1) & -4+(-2) \\ -3+1 & 1+(-3) & 4+(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -4 & 7 \\ 6 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i

$$A - F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-7 & -2-(-2) & 3-4 \\ 2-4 & 0-(-1) & -4-(-2) \\ -3-1 & 1-(-3) & 4-(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matrica B je jedina kvadratna matrica reda 2 tako da se ona ne može sabrati ni sa jednom drugom matricom u ovom zadatku. Matrica C je reda 2×3, kao i matrica E. Znači

$$C + E = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+(-2) & -2+1 & 0+0 \\ -1+(-3) & 1+2 & 2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

i

$$C - E = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-(-2) & -2-1 & 0-0 \\ -1-(-3) & 1-2 & 2-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica D je jedina matrica reda 3×2 tako da se ona, takođe, ne može sabrati ni sa jednom drugom matricom iz ovog zadatka. ■

Kako se sabiranje, odnosno oduzimanje matrica svodi na sabiranje (oduzimanje) realnih brojeva, zaključujemo sledeće:

- $A + B = B + A$ (važi zakon komutativnosti)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (važi zakon asocijativnosti)
- $A + O = O + A = A$ (matrica O je neutralni element u odnosu na sabiranje matrica)

Skup matrica istog tipa u odnosu na operaciju sabiranja matrica čini *komutativnu grupu.*

Množenje matrice skalarom

Definicija 4.1.9 *Matricu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ množimo skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ tako što svaki element te matrice pomnožimo skalarom α. Dakle,*

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}.$$

Primer 4.1.10

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 5 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -9 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

Primer 4.1.11 Izračunati $2C - 3E$ gde su C i E matrice iz primera 4.1.8.

Rešenje.

$$\begin{aligned} 2C - 3E &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & -7 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Za proizvoljne brojeve α i β i za proizvoljnu matricu A važi:

- $(\alpha\,\beta)\,A = \alpha\,(\beta\,A) = \beta\,(\alpha\,A)$,
- $(\alpha + \beta)\,A = \alpha\,A + \beta\,A$,
- $-1 \cdot A = -A$,
- $A + (-A) = (-A) + A = O$ (matrica $-A$ je inverzni element matrice A u odnosu na operaciju sabiranja matrica).

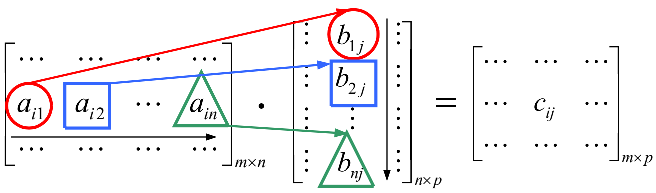
Množenje matrica

Da bi se dve matice pomnožile, postoji jedan uslov koji mora biti ispunjen.

Definicija 4.1.12 *Dve matrice A i B se mogu pomnožiti redosledom $A \cdot B$ samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B. Ako je matrica $A = [a_{ij}]$ reda $m \times n$, matrica $B = [b_{ij}]$ mora biti reda $n \times p$ (broj kolona matrice A jednak je broju vrsta matrice B, a taj broj je n). Ako je $A \cdot B = C$, matrica $C = [c_{ij}]$ je reda $m \times p$, gde je*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

za $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, n$. Dakle, $A \cdot B = C \Rightarrow$



Primer 4.1.13 Neka su date matrice A reda 4×3 i matrica B reda 3×2. Matrica $C = A \cdot B$ biće reda 4×2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} \\ a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} + a_{33}\cdot b_{31} & a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} + a_{33}\cdot b_{32} \\ a_{41}\cdot b_{11} + a_{42}\cdot b_{21} + a_{43}\cdot b_{31} & a_{41}\cdot b_{12} + a_{42}\cdot b_{22} + a_{43}\cdot b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

■

Primetimo da se kvadratne matrice istog reda uvek mogu pomnožiti. Navedimo sada jedan primer množenja dve matrice.

Primer 4.1.14 Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \text{ i } D = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odrediti proizvode $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot D$ i $D \cdot C$.

Rešenje. Odredimo prvo proizvod $A \cdot B$. Koristeći šemu iz primera 4.1.13 dobijamo

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 6\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 6\cdot(-5) \\ 9\cdot 0 + 8\cdot(-1) + 7\cdot 2 & 9\cdot 3 + 8\cdot 4 + 7\cdot(-5) \\ 3\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 5\cdot 2 & 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 5\cdot(-5) \\ 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 & 0\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot(-5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -19 \\ 6 & 24 \\ 6 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Izračunajmo $B \cdot C$:

$$\begin{aligned} B \cdot C &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0\cdot 10 + 3\cdot 20 & 0\cdot 30 + 3\cdot 40 \\ -1\cdot 10 + 4\cdot 20 & -1\cdot 30 + 4\cdot 40 \\ 2\cdot 10 - 5\cdot 20 & 2\cdot 30 - 5\cdot 40 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 60 & 120 \\ 70 & 130 \\ -80 & -140 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dalje je $C \cdot D$ jednako:

$$\begin{aligned} C \cdot D &= \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \cdot 2 + 30 \cdot (-1) & 10 \cdot (-4) + 30 \cdot 3 \\ 20 \cdot 2 + 40 \cdot (-1) & 20 \cdot (-4) + 40 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & 50 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dok je

$$\begin{aligned} D \cdot C &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 10 - 4 \cdot 20 & 2 \cdot 30 - 4 \cdot 40 \\ -1 \cdot 10 + 3 \cdot 20 & -1 \cdot 30 + 3 \cdot 40 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -60 & -100 \\ 50 & 90 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da $C \cdot D \neq D \cdot C$, tako da **množenje matrica nije komutativna operacija**, u opštem slučaju. ■

Za proizvoljan broj $\alpha \in \mathbb{R}$ i za matrice A, B i C, ako su definisane navedene operacije, važi i:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (**asocijativnost**),
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (**leva distributivnost** množenja matrica u odnosu na sabiranje matrica),
- $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ (**desna distributivnost** množenja matrica u odnosu na sabiranje matrica),
- $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$.

Skup kvadratnih matrica reda n u odnosu na operacije sabiranja i množenja matrica čini *prsten*.

Primer 4.1.15 Za $\alpha = 2$ i za date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ i } C = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

proveriti osobine asocijativnosti, distributivnosti i množenja skalarom.

Rešenje. Proverimo prvo $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

$$\begin{aligned} B \cdot C &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \\ 7 \cdot 9 + 8 \cdot 11 & 7 \cdot 10 + 8 \cdot 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 111 & 122 \\ 151 & 166 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 111 & 122 \\ 151 & 166 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 111 + 2 \cdot 151 & 1 \cdot 122 + 2 \cdot 166 \\ 3 \cdot 111 + 4 \cdot 151 & 3 \cdot 122 + 4 \cdot 166 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 413 & 454 \\ 937 & 1030 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nastavljamo dalje,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

te je

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 \cdot 9 + 22 \cdot 11 & 19 \cdot 10 + 22 \cdot 12 \\ 43 \cdot 9 + 50 \cdot 11 & 43 \cdot 10 + 50 \cdot 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 413 & 454 \\ 937 & 1030 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Proverimo prvo $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.

$$\begin{aligned} B+C &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 18 & 20 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} A \cdot (B+C) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 18 & 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 14 + 2 \cdot 18 & 1 \cdot 16 + 2 \cdot 20 \\ 3 \cdot 14 + 4 \cdot 18 & 3 \cdot 16 + 4 \cdot 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 50 & 56 \\ 114 & 128 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nastavljamo dalje,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}, \\ A \cdot C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 34 \\ 71 & 78 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

te je

$$\begin{aligned} A \cdot B + A \cdot C &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 31 & 34 \\ 71 & 78 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 50 & 56 \\ 114 & 128 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Slično se može proveriti da važi $(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$. Preostalo je još da proverimo $2(A \cdot B) = (2A) \cdot B = A \cdot (2B)$. Videli smo ranije da je

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

pa je

$$2(A \cdot B) = \begin{bmatrix} 38 & 44 \\ 86 & 100 \end{bmatrix}.$$

Dalje je

$$(2A) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+28 & 12+32 \\ 30+56 & 36+64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 44 \\ 86 & 100 \end{bmatrix}.$$

Konačno

$$A \cdot (2B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 44 \\ 86 & 100 \end{bmatrix}.$$

■

4.2 Determinante

Vrednost determinante je broj i ona se definiše samo za kvadratne matrice. Determinanta matrice A se označava $\det A$ ili $|A|$. Red determinante jednak je broju njenih vrsta ili kolona.

- Neka je $A = [a_{11}]$.

  Determinanta matrice A jednaka je $\det A = a_{11}$.

Primer 4.2.1 Ako je $A = [-3]$. Njena determinanta je $\det A = -3$. ■

- Ako je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, tada je njena determinanta

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Primer 4.2.2 Izračunati vrednost determinante matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Vrednost determinante je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 4 + 6 = 10\,.$$

■

- Neka je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

  Za izračunavanje $\det A$ možemo primenitni Sarusovo pravilo koje važi samo za izračunavanje determinante matrice trećeg reda.

$$\begin{aligned} \det A &= \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \end{aligned}$$

Primer 4.2.3 Izračunati vrednost determinante matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Vrednost determinante je

$$\begin{aligned}
\det A &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right| \\
&= 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - (3\cdot 5\cdot 7 + 1\cdot 6\cdot 8 + 2\cdot 4\cdot 9) \\
&= 225 - 225 = 0\,.
\end{aligned}$$

■

Za izračunavanje determinante trećeg i višeg reda, možemo koristiti i razvijanje determi-nante po vrsti ili po koloni. Ovde ćemo dati samo uvodni primer, a opšta definicija sledi kasnije. Ako želimo da razvijemo determinantu trećeg reda po prvoj vrsti, tada važi:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\cdot \overbrace{(-1)^{1+1}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}}}^{A_{11}} + a_{12}\cdot \overbrace{(-1)^{1+2}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}}}^{A_{12}} + a_{13}\cdot \overbrace{(-1)^{1+3}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}}^{A_{13}} \\
&= a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\,.$$

Uveli smo sledeće oznake:

- M_{11} je *glavni minor* za element a_{11}, a $A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11}$ *kofaktor* elementa a_{11},
- M_{12} je *glavni minor* za element a_{12}, a $A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot M_{12}$ *kofaktor* elementa a_{12},
- M_{13} je *glavni minor* za element a_{13}, a $A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot M_{13}$ *kofaktor* elementa a_{13}.

Ako želimo da razvijemo po, recimo, drugoj koloni, tada je

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{12} \cdot \overbrace{(-1)^{1+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}}}^{A_{12}} + a_{22} \cdot \overbrace{(-1)^{2+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{22}}}^{A_{22}} + a_{32} \cdot \overbrace{(-1)^{3+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}_{M_{32}}}^{A_{32}} \\
&= -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Znači,

$$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}\,.$$

Sada smo uveli oznake:

- M_{12} je *glavni minor* za element a_{12}, a $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12}$ *kofaktor* elementa a_{12},
- M_{22} je *glavni minor* za element a_{22}, a $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22}$ *kofaktor* elementa a_{22},
- M_{32} je *glavni minor* za element a_{32}, a $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32}$ *kofaktor* elementa a_{32}.

Primer 4.2.4 Izračunati vrednost determinante matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

razvijanjem po prvoj vrsti i razvijanjem po drugoj koloni.

Rešenje. Razvijanjem po prvoj vrsti dobijamo

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \overbrace{(-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}_{M_{11}}}^{A_{11}} + 2 \cdot \overbrace{(-1)^{1+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{M_{12}}}^{A_{12}} + 3 \cdot \overbrace{(-1)^{1+3} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{M_{13}}}^{A_{13}} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) + 2 \cdot (-1) \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot 1 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\
&= (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = 0\,.
\end{aligned}$$

Razvijanjem po drugoj koloni dobijamo

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot \overbrace{(-1)^{1+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{M_{12}}}^{A_{12}} + 5 \cdot \overbrace{(-1)^{2+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{M_{22}}}^{A_{22}} + 8 \cdot \overbrace{(-1)^{3+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}_{M_{32}}}^{A_{32}} \\
&= 2 \cdot (-1) \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 5 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) + 8 \cdot (-1) \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) \\
&= -2 \cdot (36 - 42) + 5 \cdot (9 - 21) - 8 \cdot (6 - 12) = 0\,.
\end{aligned}
$$

■

- Ako treba izračunati vrednost determinante

$$
\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

razvijanjem po i-toj vrsti, tada je

$$
\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\,.
$$

U slučaju da treba izračunati vrednost determinante

$$
\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

razvijanjem po j-toj koloni, tada je

$$
\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\,.
$$

Ovde smo uveli sledeće oznake: ako iz determinante matrice A izbacimo i-tu vrstu i j-tu kolonu, dobijamo *glavni minor* M_{ij} za element a_{ij}. Ako M_{ij} pomnožimo sa $(-1)^{i+j}$ dobijamo *kofaktor* elementa a_{ij} u oznaci A_{ij}. Dakle,

$$
A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}\,,
$$

za $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Primer 4.2.5 Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1998 & 23820 \\ 1 & 9 & 1997 & 23821 \\ 1 & 10 & 0 & -3 \\ 1 & 10 & 1998 & 23819 \end{vmatrix}$$

razvijanjem po trećoj koloni.

Rešenje. Razvijanjem po trećoj koloni, dobićemo tri determinante trećeg reda koje ćemo izračunati korišćenjem Sarusovog pravila:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1998 & 23820 \\ 1 & 9 & 1997 & 23821 \\ 1 & 10 & 0 & -3 \\ 1 & 10 & 1998 & 23819 \end{vmatrix} &= 1998 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 23821 \\ 1 & 10 & -3 \\ 1 & 10 & 23819 \end{vmatrix} \\ &+1997 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 23820 \\ 1 & 10 & -3 \\ 1 & 10 & 23819 \end{vmatrix} \\ &+ 0 \\ &+1998 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 23820 \\ 1 & 9 & 23821 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 9 & 23821 \\ 1 & 10 & -3 \\ 1 & 10 & 23819 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 9 & 23821 \\ 1 & 10 & -3 \\ 1 & 10 & 23819 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{matrix} \\ &= 238190 - 27 + 238210 - (238210 - 30 + 214371) \\ &= 23822\,.\end{aligned}$$

Vrednost druge determinante trećeg reda je

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 10 & 23820 \\ 1 & 10 & -3 \\ 1 & 10 & 23819 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 10 & 23820 \\ 1 & 10 & -3 \\ 1 & 10 & 23819 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{matrix} \\ &= 238190 - 30 + 238200 - (238200 - 30 + 238190) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Na kraju

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 23820 \\ 1 & 9 & 23821 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 23820 \\ 1 & 9 & 23821 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 10 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \end{matrix}$$

$$= -27 + 238210 + 238200 - (214380 + 238210 - 30)$$

$$= 23823\,.$$

Vraćamo se sada na izračunavanje početne determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1998 & 23820 \\ 1 & 9 & 1997 & 23821 \\ 1 & 10 & 0 & -3 \\ 1 & 10 & 1998 & 23819 \end{vmatrix} = 1998 \cdot 1 \cdot 23822 + 1997 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 + 1998 \cdot (-1) \cdot 23823$$

$$= -1998\,.$$

■

Kao što smo videli u poslednjem primeru, razvijanje determinante višeg reda po vrsti ili po koloni može da iziskuje dosta vremena. Korišćenjem osobina determinanti, izračunavanje vrednosti determinanti višeg reda može biti olakšano.

4.2.1 Osobine determinanti

1. **osobina:** *Vrednost determinante se ne menja ako se vrste zamene kolonama bez promene poretka, tj.*

$$\det A^T = \det A\,.$$

Primer 4.2.6 Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunati $\det A$ i $\det A^T$.

Rešenje. Izračunajmo prvo vrednost determinante matrice A. Razvijmo je po drugoj vrsti.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 - (-2)) = 10\,.$$

Pošto je

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

sada je (razvijanjem po drugoj koloni)

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 - (-2)) = 10\,.$$

■

2. osobina: *Ako dve vrste (kolone) determinante zamene mesta, determinanta menja znak.*

Primer 4.2.7 Lako se može proveriti da važi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ovde smo u prvom koraku zamenili mesta prvoj i drugoj koloni, a u drugom koraku prvoj i drugoj vrsti. ■

3. osobina: *Determinantu množimo brojem tako što samo elemente jedne vrste (kolone) pomnožimo tim brojem.*

Primer 4.2.8

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ovde smo u prvom koraku pomnožili elemente prve vrste sa 3, zatim smo iz prve kolone izvukli 2 kao najveći zajednički delilac i na kraju izvukli broj 3 iz druge kolone. ■

4. osobina: *Dve determinante se mogu sabrati samo ako su istog reda i ako se razlikuju najviše u jednoj vrsti (koloni). Ako su svi elelmenti matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ isti, osim možda u k-toj koloni, tada se elementi u k-toj koloni matrice $A+B$ dobijaju kao $a_{ik}+b_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Slično, ako su svi elelmenti matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ isti, osim možda u k-toj vrsti, tada se elementi u k-toj vrsti matrice $A + B$ dobijaju kao $a_{kj} + b_{kj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Primer 4.2.9

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2+4 & 3+5 & 2+3 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

U ovom primeru, dve dertminante imaju različite druge vrste. ■

Primer 4.2.10

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+2 \\ 2 & 3 & 2+3 \\ 5 & 4 & 5+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

Sada su različite treće kolone. ■

5. osobina: *Vrednost determinante je jednaka nuli ako su svi elementi neke vrste (kolone) jednaki nuli.*

Primer 4.2.11

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

jer su svi elementi druge vrste jednaki nuli. ■

6. osobina: *Vrednost determinante je jednaka nuli ako sadrži dve iste vrste (kolone) ili ako su svi elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni elementima druge vrste (kolone).*

Primer 4.2.12

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

jer su prva i treća kolona jednake. ■

Primer 4.2.13

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

jer su prva i treća vrsta proporcionalne (množenjem elemenata prve vrste sa -2 dobijamo elemente treće vrste). ■

7. osobina: *Vrednost determinante je jednaka nuli ako sadrži linearno zavisne vrste (kolone).*

Primer 4.2.14

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

jer je treća vrsta jednaka zbiru prve dve vrste. ■

Primer 4.2.15

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \\ 3 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

jer se druga kolona dobije kao zbir prve kolone i treće koja je prethodno pomnožena sa 2, tj.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

■

8. osobina: *Ako su svi elementi ispod (iznad) glavne dijagonale determinante jednaki nuli, determinanta je jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.*

Primer 4.2.16
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-5) = -30 \, .$$
■

9. osobina: *Vrednost determinante se ne menja ako sve elemente jedne vrste (kolone) pomnožimo brojem koji je različiti od nule i tako pomnožene dodamo elementima neke druge vrste (kolone).*

Primer 4.2.17 Izračunati vrednost determinante
$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1998 & 23820 \\ 1 & 9 & 1997 & 23821 \\ 1 & 10 & 0 & -3 \\ 1 & 10 & 1998 & 23819 \end{vmatrix} .$$

Rešenje. Vrednost determinante je -1998, kao što smo videli u primeru 4.2.5. Sada ćemo pokazati kako se, pomoću osobina determinanti, brže i elegantnije dolazi do rešenja. Ako sve elemente prve vrste pomnožimo sa -1 i tako pomnožene dodamo elementima druge, treće i četvrte vrste (osobina 9), dobijamo
$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1998 & 23820 \\ 1 & 9 & 1997 & 23821 \\ 1 & 10 & 0 & -3 \\ 1 & 10 & 1998 & 23819 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1998 & 23820 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1998 & -23823 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1998) \cdot (-1) = -1998 \, .$$
Koristili smo i osobinu 8 jer smo dobili nule ispod glavne dijagonale determinante. ■

10. osobina: *Ako je matrica A reda n, tada važi:* $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primer 4.2.18 Neka je $\alpha = 3$ i $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Tada je
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \ \ 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}, \ \ \det(3A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 36 - 54 = -18.$$
Sada je $-18 = 9 \cdot (-2) = 3^2 \cdot \det A$. ■

11. osobina: *Ako su matrice A i B reda n, tada važi:* $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$.

Primer 4.2.19 Neka je $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$. Tada je

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\7&8\end{bmatrix}\Rightarrow\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix}3&4\\7&8\end{vmatrix}=24-28=-4.$$

Lako se računa da je $\det A=-2$ i $\det B=2$, pa je $\det A\cdot\det B=-4=\det(A\cdot B)$. ■

Primer 4.2.20 Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}$$

Rešenje. Ako prva i peta vrsta zamene mesta, a nakon toga druga i četvrta vrsta (dva puta se množi determinanta sa -1 - osobina 2), imaćemo

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&6\\1&1&1&5&1\\1&1&4&1&1\\1&3&1&1&1\\2&1&1&1&1\end{vmatrix}$$

Sada ćemo prvu vrstu pomnožiti sa -1 i dodati u drugu, treću i četvrtu vrstu. Nakon toga prvu vrstu pomnožiti sa -2 i dodati u petu vrstu (osobina 9). Tada je

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&6\\1&1&1&5&1\\1&1&4&1&1\\1&3&1&1&1\\2&1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&6\\0&0&0&4&-5\\0&0&3&0&-5\\0&2&0&0&-5\\0&-1&-1&-1&-11\end{vmatrix}$$

Sada će druga i peta vrsta da zamene mesta, a nakon toga, treća i četvrta (osobina 2). Sledi

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&6\\0&0&0&4&-5\\0&0&3&0&-5\\0&2&0&0&-5\\0&-1&-1&-1&-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&6\\0&-1&-1&-1&-11\\0&2&0&0&-5\\0&0&3&0&-5\\0&0&0&4&-5\end{vmatrix}$$

Sada ćemo drugu vrstu pomnožiti sa 2 i dodati u treću vrstu (osobina 9).

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&6\\0&-1&-1&-1&-11\\0&2&0&0&-5\\0&0&3&0&-5\\0&0&0&4&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&6\\0&-1&-1&-1&-11\\0&0&-2&-2&-27\\0&0&3&0&-5\\0&0&0&4&-5\end{vmatrix}$$

Ako treća i četvrta kolona zamene mesta (osobina 2), dobijamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Sada ćemo treću vrstu pomnožiti sa 2 i dodati u petu vrstu (osobina 9).

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -59 \end{vmatrix}$$

Ako petu vrstu dodamo u četvrtu (osobina 9), dobijamo

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -59 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -59 \end{vmatrix}$$

Sada ćemo četvrtu vrstu pomnožiti sa -4 i dodati u petu vrstu (osobina 9).

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -59 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 197 \end{vmatrix}$$

Pošto su svi elementi ispod glavne dijagonale determinante jednaki nuli, determinanta je jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali (osobina 8).

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 197 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 197) = 394\,.$$

■

Primer 4.2.21 Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Ako drugu, treću i četvrtu kolonu pomnožimo sa 1 i dodamo prvoj koloni, imaćemo

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix},$$

a nakon množenja prve vrste sa -1 i dodavanja u drugu, treću i četvrtu vrstu, dobijamo

$$(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3.$$

■

Primer 4.2.22 Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Pomnožimo prvu vrstu sa -1 i dodajmo je u drugu i treću vrstu.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & (b-a)(b^2+ba+a^2) \\ 0 & c-a & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix}$$

Sada ćemo iz druge vrste da izvučemo $(b-a)$, a iz treće $(c-a)$ ispred determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & (b-a)(b^2+ba+a^2) \\ 0 & c-a & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}.$$

Sada ćemo drugu vrstu pomnožiti sa -1 i dodati u treću vrstu.

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 0 & c^2-b^2+ca-ba \end{vmatrix}.$$

Zaključujemo da je vrednost početne determinante

$$(b-a)(c-a)(c^2-b^2+ca-ba) = (b-a)(c-a)((c-b)(c+b)+a(c-b)),$$

odnosno

$$(b-a)(c-a)((c-b)(c+b)+a(c-b)) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

■

Primer 4.2.23 Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 339 & 337 & 342 \\ 341 & 344 & 342 \\ 320 & 319 & 316 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Ako se krene sa primenom Sarusovog pravila, dobijaćemo osmocifrene brojeve uz veliku mogućnost da se pojavi greška. Možemo primetiti da je zbir brojeva u svakoj koloni jednak 1000. Zbog toga ćemo drugu i treću vrstu pomnožiti sa 1 i dodati u prvu vrstu.

$$\begin{vmatrix} 339 & 337 & 342 \\ 341 & 344 & 342 \\ 320 & 319 & 316 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \\ 341 & 344 & 342 \\ 320 & 319 & 316 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 341 & 344 & 342 \\ 320 & 319 & 316 \end{vmatrix}.$$

Sada ćemo prvu kolonu pomnožiti sa -1 i dodati u drugu i treću kolonu.

$$1000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 341 & 344 & 342 \\ 320 & 319 & 316 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 341 & 3 & 1 \\ 320 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Pomnožimo drugu kolonu sa -4 i dodajmo je u treću kolonu.

$$1000 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 341 & 3 & 1 \\ 320 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 341 & 3 & -11 \\ 320 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1000 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 320 & -1 & 0 \\ 341 & 3 & -11 \end{vmatrix}.$$

Ovde smo zamenili mesta drugoj i trećoj vrsti. Vrednost determinante je: $-1000 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-11) = -11000$. ■

4.3 Inverzna matrica i matrične jednačine

4.3.1 Inverzna matrica

Definicija 4.3.1 *Kvadratna matrica je regularna ako je njena determinanta različita od nule. U suprotnom, matrica je singularna.*

Inverznu matricu definišemo samo za regularne matrice. Inverzna matrica regularne matrice A je matrica A^{-1} za koju važi:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I\,.$$

Algoritam za izračunavanje inverzne matrice matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ je sledeći:

1. Izračunati determinantu matrice A (mora važiti da je $\det A \neq 0$).
2. Odrediti matricu kofaktora $[A_{ij}]_{n\times n}$.
3. Odrediti adjungovanu matricu $A^\star$ matrice A po formuli $A^\star = [A_{ij}]^T_{n\times n}$.
4. Inverzna matrica matrice A se računa po formuli

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^\star\,. \tag{4.1}$$

Ako su A i B regularne matrice i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tada važi:

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A, \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Ako je regularna matrica A drugog reda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

tada je njena inverzna matrica oblika ($\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$)

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Primer 4.3.2 Odrediti inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Determinanta matrice A je

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = -4 + 6 = 2,$$

te je, na osnovu (4.2),

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Možemo i proveriti da li je, recimo, $A^{-1} \cdot A = I$.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4+6 & -12+12 \\ 2-2 & 6-4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Primer 4.3.3 Koristeći algoritam za određivanje inverzne matrice, odrediti A^{-1} ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje. 1. Izračunajmo prvo determinantu matrice A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot (-3) = 6.$$

Ovde smo zamenili mesta prvoj i trećoj vrsti (osobina 2) i iskorisitili smo osobinu 8.

2. Odredimo sada kofaktore.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 20, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dakle, matrica kofaktora je

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & -2 \\ 15 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Adjungovana matrica je

$$A^\star = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Na osnovu (4.1), inverzna matrica je

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 15 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 & 5/2 & 1 \\ 2/3 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Može se proveriti da važi

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10/3 & 5/2 & 1 \\ 2/3 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Primer 4.3.4 Odrediti A^{-1} ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje. 1. Odredimo prvo determinantu matrice A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ovde smo pomnožili prvu vrstu sa -2 i dodali u treću vrstu. Nastavljamo da pravimo nule ispod glavne dijagonale u drugoj koloni.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Sada smo drugu vrstu pomnožili sa 4 i dodali je u treću i pomnožili drugu vrstu sa 2 i dodali je u četvrtu vrstu. Nakon toga smo zamenili mesta trećoj i četvrtoj koloni (minus ispred determinante se pojavljuje) i dobili nule ispod glavne dijagonale determinante. Množenjem elemenata sa glavne dijagonale determinante sa -1 koji je ispred determinante, dobijamo koliko iznosi determinanta.

2. Odredimo sada 16 kofaktora (možemo koristiti Sarusovo pravilo, na primer).

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{14} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

Sada je matrica kofaktora

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & -6 & -6 \\ -5 & 0 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

3. Adjungovana matrica je

$$A^{\star} = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 10 & -6 & -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

4. Na osnovu (4.1), inverzna matrica je

$$A^{-1} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 10 & -6 & -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

■

4.3.2 Matrične jednačine

Imamo tri osnovna tipa matričnih jednačina.

- I tip: $A \cdot X = B$.

  Pošto je matrica A sa leve strane matrice X, celu jednačinu ćemo pomnožiti sa A^{-1} sa leve strane. Tada ćemo imati

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

- II tip: $X \cdot A = B$.

  Sada je matrica A sa desne strane matrice X, te celu jednačinu ćemo pomnožiti sa A^{-1} sa desne strane. Tada ćemo imati

$$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

- III tip: $A \cdot X \cdot B = C$.

  Sa leve strane moramo pomnožiti sa A^{-1}, a sa desne sa B^{-1}. Dakle,

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Primer 4.3.5 Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Jasno je da je $X = A^{-1} \cdot B$. Pošto je $\det A = 6 + 1 = 7$, tada je

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

■

Primer 4.3.6 Rešiti matričnu jednačinu $X \cdot A = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Sada je $X = B \cdot A^{-1}$. Determinanta matrice A je -2, pa sledi

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 11 \end{bmatrix}.$$

■

Primer 4.3.7 Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X \cdot B = C$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Videli smo da je $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Odredimo prvo A^{-1}.

$$\det A = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomnožimo sada $A^{-1} \cdot C$.

$$A^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Postupkom objašnjenim ranije, dobijamo i B^{-1}:

$$B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Konačno, dobijamo koliko je X:

$$X = (A^{-1} \cdot C) \cdot B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 15 & -16 & 3 \\ -9 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Primer 4.3.8 Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X + 2B = 4X + 3C$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Iz date jednačine prvo ćemo da izrazimo nepoznatu matricu X.

$$A \cdot X - 4X = 3C - 2B \Rightarrow \underbrace{(A - 4I)}_{P} X = \underbrace{3C - 2B}_{Q} \Rightarrow P \cdot X = Q \Rightarrow X = P^{-1} \cdot Q,$$

gde je $P = A - 4I$, a $Q = 3C - 2B$. Odredimo sada matrice P i Q.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

dok je

$$Q = 3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Inverzna matrica matrice P je

$$\det P = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Preostalo je da nađemo X.

$$X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 21 & -5 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}.$$

■

Primer 4.3.9 Rešiti matričnu jednačinu $4X \cdot A - 2B = -3X - 2C$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Izrazićemo prvo X:

$$\begin{aligned} 4X \cdot A - 2B = -3X - 2C \;&\Rightarrow\; 4X \cdot A + 3X = 2B - 2C \\ &\Rightarrow\; X\,\underbrace{(4A + 3I)}_{P} = \underbrace{2B - 2C}_{Q} \\ &\Rightarrow\; X \cdot P = Q \\ &\Rightarrow\; X = Q \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

Sada je

$$P = 4A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Q = 2B - 2C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -6 \\ -4 & -6 & -6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

i

$$P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 36 \\ 0 & -7 & 56 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 & 6 & -6 \\ -4 & -6 & -6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 36 \\ 0 & -7 & 56 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\; X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 & -26 & 234 \\ -4 & 58 & -438 \\ 4 & -16 & 116 \end{bmatrix}.$$

■

4.4 Karakteristični koreni i vektori matrice

Uvedimo pojmove karakterističnih korena i vektora radi kasnije primene matrica u biologiji i fitomedicini.

Definicija 4.4.1 *Pretpostavimo da je matrica A reda n. Neka je v nenula matrica (vektor) reda $n \times 1$ koja zadovoljava*

$$A\,v = \lambda\,v \tag{4.3}$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je v karakteristični vektor matrice A, a λ odgovarajući karakteristični koren.

Pokažimo sada kako se određuju karakteristični koreni i vektori na nekoliko primera i to samo kod matrica koje nemaju višestruke karakteristične korene.

Primer 4.4.2 Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Odrediti karakteristične korene i vektore date matrice.

Rešenje. Iz (4.3) sledi

$$\lambda v - A v = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)v = 0.$$

Da bi jednačina $(\lambda I - A)v = 0$ imala rešenje nenula vektor v, potrebno je da determinanta matrice $\lambda I - A$ bude jednaka nuli (više o ovoj temi kasnije, pogledati poglavlje *Kramerovo pravilo*). Odredimo sada $\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A|$ i izjednačimo je sa nulom. Prvo,

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \lambda - \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

pa je

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \lambda - \frac{3}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1\,.$$

Rešimo sada jednačinu $|\lambda I - A| = 0$:

$$\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Dobili smo karakteristične korene. Za svaki karakteristični koren, određujemo karakteristični vektor:

- $\lambda = \lambda_1 = 2$ i $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ uvrstimo u $(\lambda I - A)v = 0$. Imaćemo

  $$\begin{bmatrix} 2 - 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 - \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  odakle dobijam sistem

  $$\begin{array}{rcrcl} v_1 & - & \frac{1}{2}v_2 & = & 0 \\ -v_1 & + & \frac{1}{2}v_2 & = & 0 \end{array}.$$

  Dodavanjem prve jednačine drugoj (detaljnije o rešavanju sistema jednačina u narednoj glavi), dobijamo

  $$\begin{array}{rcrcl} v_1 & - & \frac{1}{2}v_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}.$$

  Iz prve jednačine se dobija $v_2 = 2v_1$, za $v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, karakterističnih vektora za $\lambda = 2$ je beskonačan broj

  $$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \ v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

  a jedan karakteristični koren se dobija za, recimo, $v_1 = 1$, odnosno $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- Sada $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ i $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ uvrstimo u $(\lambda I - A)v = 0$. Imaćemo

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2}-\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i opet se dobija sistem

$$\begin{array}{rcrcl} -\frac{1}{2}v_1 & - & \frac{1}{2}v_2 & = & 0 \\ -v_1 & - & v_2 & = & 0 \end{array}.$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -2, dobijamo

$$\begin{array}{rcrcl} v_1 & + & v_2 & = & 0 \\ -v_1 & - & v_2 & = & 0 \end{array}.$$

I sada prvu jednačinu dodajemo u drugu i imaćemo

$$\begin{array}{rcrcl} v_1 & + & v_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array},$$

odnosno $v_2 = -v_1$, za $v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, karakterističnih vektora za $\lambda = \frac{1}{2}$ je beskonačan broj

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a jedan karakteristični koren se dobija za, recimo, $v_1 = 1$, odnosno $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Ovim je zadatak urađen. ■

Primer 4.4.3 Odrediti karakteristične korene i vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Matrica $\lambda I - A$ je oblika

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

i njena determinanta je

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2).$$

Rešavanjem jednačine $\lambda(\lambda - 2) = 0$, dobijamo karakteristične korene $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. Opet, za svaki karakteristični koren, određujemo karakteristični vektor:

- $\lambda = \lambda_1 = 0$ i $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ uvrstimo u $(\lambda I - A)v = 0$. Imaćemo

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

odakle dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccc} 0 & - & v_2 & = & 0 \\ 0 & - & 2v_2 & = & 0 \end{array}.$$

Iz obe jednačine se dobija $v_2 = 0$, za $v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, karakteristični vektor za $\lambda = 0$ je

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a jedan karakteristični koren se dobija za, recimo, $v_1 = 1$, odnosno $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Sada $\lambda = \lambda_2 = 2$ i $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ uvrstimo u $(\lambda I - A)v = 0$. Imaćemo

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i opet se dobija sistem

$$\begin{array}{ccccc} 2v_1 & - & v_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}.$$

Iz prve jednačine sledi $v_2 = 2v_1$, za $v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, karakteristični vektor za $\lambda = 2$ je

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a jedan karakteristični koren se dobija za, recimo, $v_1 = 1$, odnosno $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Ovim je urađen zadatak. ∎

Uradimo sada i jedan primer sa matricom trećeg reda.

Primer 4.4.4 Odrediti karakteristične korene i vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Sada je, razvijanjem po drugoj koloni,

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ -4 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)((\lambda-1)^2-4) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-1-2)(\lambda-1+2) = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1). \end{aligned}$$

Rešenje jednačine $(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$ je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = -1$. Odredimo sada karakteristične vektore:

- Neka je $\lambda = \lambda_1 = 1$ i $v = [v_1\ v_2\ v_3]^T$. Iz $(\lambda I - A)v = 0$ dobijamo
$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ -2 & 1-1 & 0 \\ -4 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
odnosno sistem
$$\begin{array}{rcrcl} & & -\ v_3 & = & 0 \\ -2v_1 & & & = & 0\ . \\ -4v_1 & & & = & 0 \end{array}$$
Dobijamo da je $v_1 = v_3 = 0$, a $v_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Karakteristični vektori za $\lambda = 1$ su oblika
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Jedan je oblika $v = [0\ \ 1\ \ 0]^T$ koji se dobija za $v_2 = 1$.
- Za $\lambda = \lambda_2 = 3$ i $v = [v_1\ v_2\ v_3]^T$ dobijamo
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
odnosno sistem
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2v_1 & & & - & v_3 & = & 0 \\ -2v_1 & + & 2v_2 & & & = & 0\ , \\ -4v_1 & & & + & 2v_3 & = & 0 \end{array}$$
čije je rešenje $v_2 = v_1$, $v_3 = 2v_1$, a $v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Karakteristični vektori za $\lambda = 3$ su oblika
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ 2v_1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Jedan karakteristični vektor je oblika $v = [1\ \ 1\ \ 2]^T$ koji se dobija za $v_1 = 1$.
- Konačno, za $\lambda = \lambda_3 = -1$ i $v = [v_1\ v_2\ v_3]^T$ dobijamo
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
odnosno sistem
$$\begin{array}{rcrcrcl} -2v_1 & & & - & v_3 & = & 0 \\ -2v_1 & - & 2v_2 & & & = & 0\ , \\ -4v_1 & & & - & 2v_3 & = & 0 \end{array}$$
čije je rešenje $v_2 = -v_1$, $v_3 = -2v_1$, a $v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Karakteristični vektori za $\lambda = -1$ su oblika
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ -2v_1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Jedan karakteristični vektor je oblika $v = [1\ \ -1\ \ -2]^T$ koji se dobija za $v_1 = 1$.

Ovim je zadatak urađen. ■

Pokažimo sada jednu od primena određivanja karakterističnih korena i vektora i to kod računanja vrednosti matrice na neki pozitivan stepen. Neka je data matrica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ i neka su λ_1 i λ_2 njeni karakteristični koreni, a $[v_1\ v_2]^T$ i $[v_3\ v_4]^T$ odgovarajući karakteristični vektori, redom. Tada, na osnovu (4.3), važi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}.$$

Prethodna dva izraza se mogu napisati i u obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ v_2 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ v_2 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$AP = PD$$

za

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ v_2 & v_4 \end{bmatrix} \ \text{i} \ D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Isto važi i kada je matrica A n-tog reda i ako je D dijagonalna matrica na čijoj glavnoj dijagonali su njeni karakteristični koreni λ_1, λ_2,…,λ_n, a matricu P čine odgovarajući karakteristični vektori. Iz $AP = PD$ sledi

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.4}$$

Sada, ako je potrebno izračunati A^2 dobijamo

$$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Ako želimo da izračunamo A^3 tada je

$$A^3 = A^2A = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2IDP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

Jasno je da će važiti

$$A^n = PD^nP^{-1}, \tag{4.5}$$

za $n \in \mathbb{N}$.

Primer 4.4.5 Odrediti A^n ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Odredimo prvo karakteristične korene i vektore date matrice.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda - \frac{5}{2}\right)$$

te se rešavanjem jednačine $|\lambda I - A| = 0$ dobija $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Odgovarajući karakteristični vektori su $v^1 = [1\ \ -2]^T$ i $v^2 = [2\ \ 1]^T$. Sada se A može zapisati kao

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

odakle sledi da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{5}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n & \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n \\ \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n & \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n \end{bmatrix}.$$

■

Ovde smo koristili da za $m \in \mathbb{N}$ i za dijagonalnu matricu D važi

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow D^m = \begin{bmatrix} d_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^m & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^m \end{bmatrix}.$$

Primer 4.4.6 Odrediti A^n ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Izračunajmo prvo determinantu

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Rešenja jdenačine $|\lambda I - A| = 0$ su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_2 = 2$. Odgovarajući karakteristični vektori su $v^1 = [1\ \ 0\ \ 0]^T$, $v^2 = [0\ \ 1\ \ 0]^T$ i $v^3 = [1\ \ 0\ \ 2]^T$, redom. Zaključujemo da važi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1},$$

odnosno

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Pošto je

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

dobijamo da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

■

Primer 4.4.7 Antigenska evolucija virusa u jednoj sezoni opisana je matricom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{9}{10} \end{bmatrix}.$$

Odrediti karakteristične korene i vektore date matrice.

Rešenje. Karakteristični koreni se dobijaju rešavanjem jednačine $|\lambda I - A| = 0$. Dakle,

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ 0 & \lambda - \frac{9}{10} \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\left(\lambda - \frac{9}{10}\right) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \;\; \lambda_2 = \frac{9}{10}.$$

Da bismo dobili karakteristični vektor za $\lambda = 2$, potrebno je odrediti v_1 i v_2 iz

$$\begin{bmatrix} 2-2 & -3 \\ 0 & 2 - \frac{9}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & \frac{11}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dobijamo da je $-3v_2 = 0$ i $\frac{11}{10}v_2 = 0$, odakle je $v_2 = 0$, a $v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Karakteristični vektor je oblika $v = [v_1 \;\; 0]^T = v_1[1 \;\; 0]^T$, te je jedan takav vektor $v = [1 \;\; 0]^T$. Za $\lambda = \frac{9}{10}$, dobijamo

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{10} - 2 & -3 \\ 0 & \frac{9}{10} - \frac{9}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{11}{10} & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sada je $-\frac{11}{10}v_1 - 3v_2 = 0$ i $0 = 0$, odakle sledi $v_2 = -\frac{11}{30}v_1$. Karakteristični koren je tada $v = [v_1 \;\; -\frac{11}{30}v_1]^T = v_1[1 \;\; -\frac{11}{30}]^T$, pa je jedan karakteristiňi koren $v = [1 \;\; -\frac{11}{30}]^T$. ■

Primer 4.4.8 Data je Leslijeva matrica za starosno strukturisanu populaciju

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Odrediti karakteristične korene i vektore date matrice.

Rešenje. Izračunajmo prvo

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -6 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -6 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda(\lambda - 1) - 6) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Rešenje jednačine $(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$ je $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ i $\lambda_3 = 3$. Odredimo sada karakteristične vektore:

- Neka je $\lambda = \lambda_1 = 2$ i $v = [v_1 \; v_2 \; v_3]^T$. Iz $(\lambda I - A)v = 0$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno sistem

$$\begin{array}{rcrcl} v_1 & - & 6v_2 & = & 0 \\ -v_1 & + & 2v_2 & = & 0 \\ & - & \frac{1}{2}v_2 & = & 0 \end{array}.$$

Dobijamo da je $v_1 = v_2 = 0$, a $v_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Karakteristični vektori za $\lambda = 2$ su oblika

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Jedan je oblika $v = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$ koji se dobija za $v_3 = 1$.

- Za $\lambda = \lambda_2 = -2$ i $v = [v_1 \; v_2 \; v_3]^T$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -3v_1 & - & 6v_2 & & & = & 0 \\ -v_1 & - & 2v_2 & & & = & 0 \\ & - & \frac{1}{2}v_2 & - & 4v_3 & = & 0 \end{array},$$

čije je rešenje $v_2 = -\frac{1}{2}v_1$, $v3 = \frac{1}{16}v_1$, a $v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Karakteristični vektori za $\lambda = -2$ su oblika

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -\frac{1}{2}v_1 \\ \frac{1}{16}v_1 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \quad v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Jedan karakteristični vektor je oblika $v = [16 \;\; -8 \;\; 1]^T$ koji se dobija za $v_1 = 16$.

- Konačno, za $\lambda = \lambda_3 = 3$ i $v = [v_1 \; v_2 \; v_3]^T$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2v_1 & - & 6v_2 & & & = & 0 \\ -v_1 & + & 3v_2 & & & = & 0 \\ & - & \frac{1}{2}v_2 & + & v_3 & = & 0 \end{array},$$

čije je rešenje $v_1 = 3v_2$, $v3 = \frac{1}{2}v_2$, a $v_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Karakteristični vektori za $\lambda = 3$ su oblika

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_2 \\ v_2 \\ \frac{1}{2}v_2 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Jedan karakteristični vektor je oblika $v = [6 \;\; 2 \;\; 1]^T$ koji se dobija za $v_2 = 2$.

Ovim je zadatak urađen. ■

4.5 Zadaci za vežbu

1. Transponovati matricu A ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunati $A+B$, $A-B$, $3A$ i $-2B$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ako je moguće, pomnožiti date matrice: a) AB, b) BA, c) AC, d) CA.

4. Za date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} x & 5 & 3 \\ 0 & 9 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} y & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

izračunati: a) $A-2BC$, b) EG, c) $FK-2K$, d) HEA, e) $3BC-HK$, f) $7K-H$, g) $AHKB$, h) $BKHA$.

5. Neka su A i B dve matrice drugog reda. Čemu je, od ponuđenih odgovora, jednak proizvod $(A+B)^2$? a) $A^2+2AB+B^2$, b) $(B+A)^2$, c) $A(A+B)+B(A+B)$, d) $A^2+AB+BA+B^2$.

6. Odrediti A^{-1} ako je:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 3 \\ 13 & 5 & 8 \\ 6 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Rešiti matričnu jednačinu $AX=B$ ako je

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Rešiti matričnu jednačinu $XA=B$ ako je

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Rešiti matričnu jednačinu $AX + 2B = 3X - 4C$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Rešiti matričnu jednačinu $2XA - 3B = 4X + 2C$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Odrediti karakteristične korene i vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

12. Odrediti karakteristične korene i vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

13. Odrediti karakteristične korene i vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Promena veličine populacije vrste sa mladim i odraslim jedinkama opisana je matricom

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Odrediti karakteristične korene i vektore date matrice.

15. Model za genetiku inbridinga se može opisati matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Odrediti karakteristične korene i vektore date matrice.

GLAVA 5

Sistemi linearnih jednačina

Prvo ćemo dati jedan primer radi motivacije zbog gradiva u ovoj glavi.

Primer 5.0.1 Soja sadrži 34.1% belančevina i 33.5% ugljenih hidrata, kukuruz 12% belančevina i 65% ugljenih hidrata, a pšenica 10.2% belančevina i 70.7% ugljenih hidrata. Po koliko kilograma soje, kukuruza i pšenice treba pomešati da bi se dobilo 500 kg stočne hrane, a da smeša sadrži 79.4 kg belančevina i 302.05 kg ugljenih hidrata? Napisati matematički model.

Rešenje. Sa s ćemo obeležiti broj kilograma soje, sa k broj kilograma kukuruza i sa p broj kilograma pšenice. Kako ukupno mora biti 500 kg stočne hrane, tada važi

$$s + k + p = 500\,.$$

Odredimo sada jednačinu koja određuje količinu belančevina

$$\frac{34.1}{100}\,s + \frac{12}{100}\,k + \frac{10.2}{100}\,p = 79.4\,.$$

i jednačinu koja određuje količinu ugljenih hidrata:

$$\frac{33.5}{100}\,s + \frac{65}{100}\,k + \frac{70.7}{100}\,p = 302.05\,.$$

Dobili smo sistem tri linearne jednačine sa tri nepoznate:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
s & + & k & + & p & = & 500 \\
\frac{34.1}{100}s & + & \frac{12}{100}k & + & \frac{10.2}{100}p & = & 79.40 \\
\frac{33.5}{100}s & + & \frac{65}{100}k & + & \frac{70.7}{100}p & = & 302.05
\end{array}\,.$$

Napomenimo da mora važiti da je $s, k, p \geq 0$. ■

Treba obratiti pažnju da, na primer, jednačine

$$2x - y^2 + z = 9, \quad 5^x - 2y = 2, \quad 3\sin x + y + x\,z = 0$$

nisu linearne po svim promenljivima. Naime, prva nije linearna zbog promenljive y i izraza y^2, druga zbog promenljive x i izraza 5^x, a treća zbog izraza $\sin x$ i $x\,z$.

Definicija 5.0.2 *Opšti oblik sistema m linearnih jednačina sa n nepoznatih je:*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{5.1}$$

Realni brojevi a_{ij} nazivaju se koeficijenti sistema, realni brojevi b_i su slobodni koeficijenti, a x_j nepoznate promenljive za $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, n$. Rešenje sistema (5.1) je svaka uređena n-torka realnih brojeva $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koja zadovoljava svaku jednačinu sistema.

Primer 5.0.3 Sistemi

$$(i)\ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 3 \end{array} \qquad (ii)\ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 4x & + & y & + & z & = & 5 \end{array}$$

$$(iii)\ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 4x & + & y & + & z & = & 9 \end{array} \qquad (iv)\ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & & & = & 10 \\ & & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 12x & & & - & 2z & = & 48 \end{array}$$

su primeri sistema tri jednačine sa tri nepoznate. ■

Primer 5.0.4 Sistem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 5 \\ 2x & - & y & = & 1 \\ x & - & 3y & = & -7 \\ 4x & - & y & = & 5 \end{array}$$

je primer sistema od četiri jednačine sa dve nepoznate ■

Primer 5.0.5 Sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & z & - & t & = & 2 \\ 2x & - & 4y & + & 6z & + & 2t & = & 6 \end{array}$$

je primer sistema od tri jednačine sa četiri nepoznate. ■

Definicija 5.0.6 *Sistem (5.1) je homogen ako su za svako $i = 1, 2, \ldots, m$ svi slobodni koeficijenti b_i jedanaki nuli, odnosno $b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Primer 5.0.7 Naredni sistem je homogen sistem jednačina od četiri jednačine sa četiri nepoznate

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}.$$

■

Primer 5.0.8 Ovo je homogen sistem od tri jednačine sa dve nepoznate:

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 0 \\ -3x & + & 6y & = & 0 \\ 4x & - & 10y & = & 0 \end{array}.$$

■

Definicija 5.0.9 *Sistem (5.1) je:*

1. *moguć (saglasan, rešiv) ako ima bar jedno rešenje, i to:*
   a) *određen, ako ima jedinstveno rešenje,*
   b) *neodređen, ako ima beskonačno mnogo rešenja,*
2. *nemoguć (nesaglasan, nerešiv, kontradiktoran, protivrečan) ako nema rešenja.*

Definicija 5.0.10 *Dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna ako imaju isti skup rešenja.*

Teorema 5.0.11 *Elementarne transformacije nad jednačinama koje očuvavaju ekvivalentnost sistema su:*

- *zamena mesta jednačina,*
- *množenje jednačine brojem različitim od* 0,
- *dodavanje jedne jednačine drugoj, prethodno pomnožene brojem različitim od* 0.

Za rešavanje sistema linearnih jednačina koristimo:

(i) Gausovu metodu eliminacije i

(ii) Kramerovo pravilo.

5.1 Gausova metoda eliminacije

Gausova metoda eliminacije sastoji se u tome da se pomoću gore navedenih transformacija koje očuvavaju ekvivalentnost sistema eliminišu nepoznate iz sistema. Posmatrajmo sistem (5.1). Pretpostavićemo da je $a_{11} \neq 0$. U slučaju da je $a_{11} = 0$ tada ćemo za prvu jednačinu uzeti onu jednačinu kod koje je koeficijent uz x_1 promenljivu različit od nule.

- Podelimo sada prvu jednačinu sistema (5.1) sa a_{11}. Dobijamo

$$\begin{array}{rcrcccrcr} x_1 & + & \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & + & \dots & + & \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{5.2}$$

- Pomnožimo sada prvu jednačinu sistema (5.2) sa $-a_{i1}$ i tako pomnoženu je dodajmo u i tu jednačinu sistema (5.2), $i = 2, 3, \dots, m$. Dobijamo

$$\begin{array}{rcrcccrcr} x_1 & + & \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & + & \dots & + & \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ & & \left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 & + & \dots & + & \left(a_{2n} - a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n & = & b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \left(a_{m2} - a_{m1}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 & + & \dots & + & \left(a_{mn} - a_{m1}\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n & = & b_m - a_{m1}\frac{b_1}{a_{11}} \end{array} \tag{5.3}$$

Ako sa c_{ij} obeležimo $a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}$, $i = 2, 3, \dots, m$, $j = 2, 3, \dots n$ i ako je $d_i = b_i - a_{i1}\frac{b_1}{a_{11}}$, $i = 2, 3, \dots, m$, sistem (5.3) postaje

$$\begin{array}{rcrcccrcr} x_1 & + & \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & + & \dots & + & \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ & & c_{22}x_2 & + & \dots & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & c_{m2}x_2 & + & \dots & + & c_{mn}x_n & = & d_m \end{array} \tag{5.4}$$

U sistemu (5.4) može postojati jednačina kod koje su svi koeficijenti sa leve strane jednakosti jednaki nuli, a slobodan član da nije nula. Tada je takav sistem nemoguć, odnosno nema rešenja. Ako je u takvoj jednačini i slobodan koeficijent jednak nuli, tada se takva jednačina odbacuje i postupak se nastavlja ako imamo bar tri jednačine u sistemu.

- Pretpostavimo sada da je $c_{22} \neq 0$ u sistemu (5.4). Ako sada drugu jednačinu u sistemu (5.4) podelimo sa c_{22}, imaćemo

$$\begin{array}{rcrcrcccrcr} x_1 & + & \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & + & \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 & + & \dots & + & \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ & & x_2 & + & \frac{c_{23}}{c_{22}}x_3 & + & \dots & + & \frac{c_{2n}}{c_{22}}x_n & = & \frac{d_2}{c_{22}} \\ & & c_{32}x_2 & + & c_{33}x_3 & + & \dots & + & c_{3n}x_n & = & d_3 \\ & & \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & c_{m2}x_2 & + & c_{m3}x_3 & + & \dots & + & c_{mn}x_n & = & d_m \end{array} \tag{5.5}$$

- Pomnožimo sada drugu jednačinu sistema (5.5) sa $-c_{i2}$ i tako pomnoženu je dodajmo u i tu jednačinu sistema (5.5), $i = 3, 4, \ldots, m$. Dobijamo

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 & + & \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 & + \ldots + & \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\
 & & x_2 & + & \frac{c_{23}}{c_{22}} x_3 & + \ldots + & \frac{c_{2n}}{c_{22}} x_n & = & \frac{d_2}{c_{22}} \\
 & & & & \left(c_{33} - c_{32}\frac{c_{23}}{c_{22}}\right) x_3 & + \ldots + & \left(c_{3n} - c_{32}\frac{c_{2n}}{c_{22}}\right) x_n & = & d_3 - c_{32}\frac{d_2}{c_{22}} \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \left(c_{m3} - c_{m2}\frac{c_{23}}{c_{22}}\right) x_3 & + \ldots + & \left(c_{mn} - c_{m2}\frac{c_{2n}}{c_{22}}\right) x_n & = & d_m - c_{m2}\frac{d_2}{c_{22}}
\end{array} \tag{5.6}$$

Ako sa e_{ij} obeležimo $c_{ij} - c_{i2}\frac{c_{2j}}{c_{22}}$, $i = 3, 4, \ldots, m$, $j = 3, 4, \ldots n$ i ako je $f_i = d_i - c_{i2}\frac{d_2}{c_{22}}$, $i = 3, 4, \ldots, m$, sistem (5.6) postaje

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 & + & \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 & + \ldots + & \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\
 & & x_2 & + & \frac{c_{23}}{c_{22}} x_3 & + \ldots + & \frac{c_{2n}}{c_{22}} x_n & = & \frac{d_2}{c_{22}} \\
 & & & & e_{33} x_3 & + \ldots + & e_{3n} x_n & = & f_3 \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & e_{m3} x_3 & + \ldots + & e_{mn} x_n & = & f_m
\end{array} \tag{5.7}$$

- Nastavljajući postupak, dolazimo do jednog od sledeća dva sistema:

$$\begin{array}{cccccccc}
g_{11}x_1 & + & g_{12}x_2 & + & g_{13}x_3 & + \ldots + & g_{1n}x_n & = h_1 \\
 & & g_{22}x_2 & + & g_{23}x_3 & + \ldots + & g_{2n}x_n & = h_2 \\
 & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & g_{nn}x_n & = h_n
\end{array} \tag{5.8}$$

ili

$$\begin{array}{cccccccccc}
p_{11}x_1 & + & p_{12}x_2 & + \ldots + & p_{1k}x_k & + & p_{1,k+1}x_{k+1} & + \ldots + & p_{1n}x_n & = q_1 \\
 & & p_{22}x_2 & + \ldots + & p_{2k}x_k & + & p_{2,k+1}x_{k+1} & + \ldots + & p_{2n}x_n & = q_2 \\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & p_{kk}x_k & + & p_{k,k+1}x_{k+1} & + \ldots + & p_{kn}x_n & = q_k
\end{array} \tag{5.9}$$

Ako smo došli do sistema (5.8), uz pretpostavku da su koeficijenti $g_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, iz poslednje (n-te) jednačine izrazi se x_n i ta vrednost se uvrsti pretposlednju jednačinu iz koje se izrazi x_{n-1} i tako do prve jednačine. Dobijeni sistem će biti saglasan (rešiv) i određen (tačno jedno rešenje).

Ako smo došli do sistema (5.9), uz pretpostavku da ne sadrži jednačinu u kojoj su svi koeficijenti sa leve strane jednaki nuli, a slobodni koeficijent različit od nule (tada bi sistem bio nemoguć), sistem (5.9) možemo zapisati u obliku

$$\begin{array}{cccccc}
p_{11}x_1 & + & p_{12}x_2 & + \ldots + & p_{1k}x_k & = q_1 - p_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - p_{1n}x_n \\
 & & p_{22}x_2 & + \ldots + & p_{2k}x_k & = q_2 - p_{2,k+1}x_{k+1} - \ldots - p_{2n}x_n \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & p_{kk}x_k & = q_k - p_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - p_{kn}x_n
\end{array} \tag{5.10}$$

Ako promenljive $x_{k+1}, \ldots, x_n$ zamenimo sa proizvoljnim realnim brojevima, dobijamo sistem oblika (5.9) koji rešavamo na opisan način. Sada je sistem (5.10) saglasan i neodređen (ima beskonačno mnogo rešenja).

Rešimo sada sistem iz primera 5.0.1. Pomnožimo drugu i treću jednačinu sa 1000. Tada dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & + & k & + & p & = & 500 \\ 341s & + & 120k & + & 102p & = & 79400 \\ 335s & + & 650k & + & 707p & = & 302050 \end{array}.$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -341 i tako pomnoženu saberemo sa drugom jednačinom, dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & + & k & + & p & = & 500 \\ & - & 221k & - & 239p & = & -91100 \\ 335s & + & 650k & + & 707p & = & 302050 \end{array}.$$

Ako sada prvu jednačinu pomnožimo sa -335 i dodamo u treću jednačinu, imaćemo:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & + & k & + & p & = & 500 \\ & - & 221k & - & 239p & = & -91100 \\ & & 315k & + & 372p & = & 134550 \end{array}.$$

Sada ćemo, za neko vreme, zanemariti prvu jednačinu i posmatrati samo drugu i treću jednačinu. Te dve jednačine čine sistem dve jednačine sa dve nepoznate. Treću jednačinu ćemo podeliti sa 3 i dobiti:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & + & k & + & p & = & 500 \\ & - & 221k & - & 239p & = & -91100 \\ & & 105k & + & 124p & = & 44850 \end{array}.$$

Pošto u drugoj i trećoj jednačini ne stoji jedinica uz nepoznatu k, drugu jednačinu ćemo pomnožiti sa 105, a treću sa 221 jer je za 221 i 105 najmanji zajednički sadržalac broj $221 \cdot 105$. Dakle, sistem postaje:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & + & k & + & p & = & 500 \\ & - & 23205k & - & 25095p & = & -9565500 \\ & & 23205k & + & 27404p & = & 9911850 \end{array}.$$

Sada ćemo drugu jednačinu dodati u treću (druga se množi sa 1 i dodaje u treću) i time eliminisati promenljivu k iz treće jednačine:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & + & k & + & p & = & 500 \\ & - & 23205k & - & 25095p & = & -9565500 \\ & & & & 2309p & = & 346350 \end{array}.$$

Sada se treća jednačina deli sa 2309 i dobijamo vrednost za promenljivu p:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & + & k & + & p & = & 500 \\ & - & 23205k & - & 25095p & = & -9565500 \\ & & & & p & = & 150 \end{array}.$$

Ako u prve dve jednačine uvrstimo $p = 150$ dobijamo sistem dve jednačine sa dve nepoznate:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s & + & k & + & 150 & = & 500 \\ & - & 23205k & - & 25095 \cdot 150 & = & -9565500 \end{array},$$

odnosno

$$\begin{array}{rcrcr} s & + & k & = & 350 \\ & - & 23205k & = & -5801250 \end{array}.$$

Druga jednačina se deli sa -23205 i dobija se vrednost promenljive k:

$$\begin{array}{rcrcr} s & + & k & = & 350 \\ & & k & = & 250 \end{array}.$$

Konačno, $k = 250$ se uvrsti u prvu jednačinu i određujemo vrednost promenljive s

$$s + 250 = 350 \Rightarrow s = 100\,.$$

Dakle, rešenje sistema je $(s, k, p) = (100, 250, 150)$. Stočna hrana se sastoji od 100 kg soje, 250 kg kukuruza i 150 kg pšenice.

Rešimo sada preostale sisteme navedene u prikazanim primerima.

Primer 5.1.1 Rešiti sisteme

$$(i)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 3 \end{array} \qquad (ii)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 4x & + & y & + & z & = & 5 \end{array}$$

$$(iii)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 4x & + & y & + & z & = & 9 \end{array} \qquad (iv)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & & & = & 10 \\ & & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 12x & & & - & 2z & = & 48 \end{array}$$

pomoću Gausove metode eliminacije.

Rešenje. Rešimo prvo sistem pod (i). Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -3 i tako pomnoženu je dodamo drugoj jednačini, dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

Ako sada prvu jednačinu pomnožimo sa 1 i tako pomnoženu je dodamo trećoj jednačini, imaćemo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 5 \end{array}$$

Sada možemo da zamenimo mesta drugoj i trećoj jednačini

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \end{array}$$

i da drugu jednačinu pomnožimo sa 7 i dodamo u treću jednačinu. Posmatrani sistem postaje

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & & & & 12z & = & 36 \end{array}.$$

Sada iz poslednje jednačine sledi da je $z = 3$ i nakon uvrštavanja u prve dve jednačine, dobijamo

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ & & y & = & 2 \end{array}.$$

Sada je $y = 2$ iz druge jednačine, a $x = 5 - 4 = 1$ iz prve. Dakle, sistem je određen, a rešenje je $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Rešimo sada sistem pod (ii). Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -3 i tako pomnoženu je dodamo drugoj jednačini i ako prvu jednačinu pomnožimo sa -4 i dodamo trećoj, dobićemo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \\ & - & 7y & + & 5z & = & -3 \end{array}.$$

Sada ćemo drugu jednačinu da pomnožimo sa -1 i dodati je u treću. Imamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -4 \end{array}.$$

Kako je poslednja jednačina postala netačna jednakost, sistem je nemoguć.

Rešimo sada i sistem pod (iii). Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -3 i tako pomnoženu je dodamo drugoj jednačini i ako prvu jednačinu pomnožimo sa -4 i dodamo trećoj, dobićemo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \end{array}.$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo u treću, sistem postaje

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

odnosno

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & 7y & + & 5z & = & 1 \end{array},$$

ili

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 2 + z \\ & - & 7y & = & 1 - 5z \end{array}.$$

Neka je sada $z = t \in \mathbb{R}$. Tada je iz druge jednačine $y = (5t - 1)/7$. Iz prve jednačine sledi

$$x + \frac{2}{7}(5t - 1) = 2 + t \Rightarrow x = \frac{16}{7} - \frac{3}{7}t.$$

Sistem je neodređen i rešenje zapisujemo kao

$$(x, y, z) = \left(\frac{16}{7} - \frac{3}{7}t, -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}t, t\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

Preostalo je još da rešimo sistem pod (iv). Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -12 i dodamo u treću jednačinu, imaćemo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & & & = & 10 \\ & & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & - & 36y & - & 2z & = & -72 \end{array}.$$

Nakon množenja druge jednačine sa 18 i dodavanja u treću jednačinu, dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & & & = & 10 \\ & & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & & & 56z & = & 0 \end{array}.$$

te je jasno da je $z = 0$. Iz druge jednačine sledi da je $y = 2$, a iz prve da je $x = 4$. Sistem je određen i rešenje je $(x, y, z) = (4, 2, 0)$.

■

Primer 5.1.2 Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \\ 2x & - & y & = & 1 \\ x & - & 3y & = & -7 \\ 4x & - & y & = & 5 \end{array}$$

Gausovom metodom eliminacije.

Rešenje. Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo u drugu, zatim prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo u treću i, na kraju, prvu jednačinu pomnožimo sa -4 i dodamo u četvrtu, dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \\ & - & 3y & = & -9 \\ & - & 4y & = & -12 \\ & - & 5y & = & -15 \end{array}.$$

Iz druge, treće i četvrte jednačine dobijamo da je $y = 3$ i nakon uvrštavanja u prvu jednačinu, dobijamo da je $x = 2$. Sistem je određen i rešenje je $(x, y) = (2, 3)$. ■

Primer 5.1.3 Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & z & - & t & = & 2 \\ 2x & - & 4y & + & 6z & + & 2t & = & 6 \end{array}$$

Gausovom metodom eliminacije.

Rešenje. Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo je u drugu i treću jednačinu, imaćemo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ & & y & - & 5z & - & 3t & = & -4 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array},$$

odnosno

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 3-3z-t \\ & & y & = & -4+5z+3t \end{array}.$$

Ako sada stavimo da je $z = a \in \mathbb{R}$ i $t = b \in \mathbb{R}$, dobijamo da je $y = -4 + 5a + 3b$. Nakon uvrštavanja u prvi jednačinu, dobijamo

$$x - 2(-4 + 5a + 3b) = 3 - 3a - b \Rightarrow x = -5 + 7a + 5b\,.$$

Dakle, sistem je neodređen i rešenje je $(x, y, z, t) = (-5 + 7a + 5b, -4 + 5a + 3b, a, b)$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$. ■

Primer 5.1.4 Rešiti homogen sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}.$$

pomoću Gausove metode eliminacije.

Rešenje. Kada prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo u drugu, a zatim i sa -1 i dodamo u treću i četvrtu jednačinu, dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ & - & 3y & - & z & & & = & 0 \\ & & & & z & & & = & 0 \\ & - & y & & & & & = & 0 \end{array}.$$

Iz treće jednačine sledi da je $z = 0$, a iz četvrte da je $y = 0$. Nakon uvrštavanja u prve dve jednačine, imaćemo

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & t & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}.$$

Iz prve jednačine dobijamo da je, recimo, $x = -t$, a da je t proizvoljan realan broj. Ako stavimo da je $t = a \in \mathbb{R}$, tada je rešenje sistema $(x, y, z, t) = (-a, 0, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Sistem je neodređen. ■

Primer 5.1.5 Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 0 \\ -3x & + & 6y & = & 0 \\ 4x & - & 10y & = & 0 \end{array}.$$

pomoću Gausove metode eliminacije.

Rešenje. Kada prvu jednačinu pomnožimo sa 3 i dodamo u drugu, a nakon toga, kada prvu jednačinu pomnožimo sa -4 i dodamo u treću, dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & - & 2y & = & 0 \end{array}.$$

Iz treće jednačine sledi da je $y = 0$, a iz prve da je $x = 0$. Sistem je određen i rešenje je $(x, y) = (0, 0)$. ■

5.2 Kramerovo pravilo

Kramerovo pravilo može da se primeni samo na kvadratne sisteme (5.1) kada je $m = n$ i sastoji se u tome da se izračunaju determinanta sistema

$$D_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i determinante promenljivih

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

- Ako je $D_S \neq 0$ tada je sistem određen i rešenje je
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{D_{x_1}}{D_S}, \frac{D_{x_2}}{D_S}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D_S} \right).$$
- Ako je $D_S = 0$ i bar jedna od determinanti $D_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ različita od 0 sistem je nemoguć.
- Ako je $D_S = D_{x_1} = D_{x_2} = \dots = D_{x_n} = 0$ sistem je ili neodređen ili nemoguć što proveravamo Gausovom metodom eliminacije.

Primer 5.2.1 Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

pomoću Kramerovog pravila.

Rešenje. Izračunajmo prvo determinantu sistema:

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Koristićemo elementarne transformacije. Prvu vrstu množimo sa -3 i dodajemu u drugu, a zatim, prvu vrstu množimo sa 1 i dodajemo u treću. Dobijamo

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sada ćemo zameniti mesta drugoj i trećoj vrsti (determinanta menja znak)

$$D_s = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

i drugu vrstu pomnožiti sa 7 i dodati u treću. Dobijamo

$$D_s = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 12 = -12,$$

jer su ispod glavne dijagonale svi elementi jednaki nuli, pa je determinanta jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali. Kako je $D_s \neq 0$, sledi da je sistem određen. Odredimo sada determinante promenljivih, odnosno D_x, D_y i D_z.

$$D_x = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right. = -4 + 12 + 7 - (3 - 4 + 28) = -12\,,$$

$$D_y = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right. = 14 - 4 - 9 - (7 + 6 + 12) = -24\,,$$

$$D_z = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 7 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right. = -3 - 14 - 6 - (2 - 7 + 18) = -36\,.$$

Sada je

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{-12}{-12} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{-24}{-12} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D_s} = \frac{-36}{-12} = 3.$$

Rešenje sistema je $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. ■

Primer 5.2.2 Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 4x & + & y & + & z & = & 5 \end{array}$$

pomoću Kramerovog pravila.

Rešenje. Izračunajmo prvo determinantu sistema:

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Koristićemo elementarne transformacije. Prvu vrstu množimo sa -3 i dodajemo u drugu, a zatim, prvu vrstu množimo sa -4 i dodajemo u treću. Dobijamo

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

jer su druga i treća vrsta jednake. Kako je $D_s = 0$, sledi da je sistem ili neodređen ili nemoguć. Odredimo sada D_x prvo.

$$D_x = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & 7 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right. = -2 + 20 - 7 - (5 + 4 + 14) = -12 \neq 0\,.$$

Dakle, pošto je $D_s = 0$, a $D_x \neq 0$, sledi da je sistem nemoguć (nema rešenja). ■

Primer 5.2.3 Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 4x & + & y & + & z & = & 9 \end{array}$$

pomoću Kramerovog pravila.

Rešenje. U primeru 5.2.2 izračunali smo da je $D_s = 0$. Odredimo sada D_x, D_y i D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

i

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Kako je $D_s = D_x = D_y = D_z = 0$ sistem se mora rešiti Gausovom metodom eliminacije kao što je uređeno u primeru 5.1.1 pod (*iii*). ■

Primer 5.2.4 Diskutovati sistem jednačina u odnosu na parametar a.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2ax & - & 23y & + & 29z & = & 4 \\ 7x & + & ay & + & 4z & = & 7 \\ 5x & + & 2y & + & az & = & 5 \end{array}$$

Rešenje. Izračunajmo prvo determinantu sistema.

$$D_s = \begin{vmatrix} 2a & -23 & 29 \\ 7 & a & 4 \\ 5 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^3 - 54.$$

Oredimo sada kada je $D_s = 0$. Rešavamo jednačinu $2a^3 - 54 = 0$, čije je rešenje $a = 3$.

- Zaključujemo da je za $a \neq 3$, $D_s \neq 0$ i tada sistem ima jedinstveno rešenje. Da bismo dobili to rešenje, moramo naći D_x, D_y i D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -23 & 29 \\ 7 & a & 4 \\ 5 & 2 & a \end{vmatrix} = 4a^2 + 16a - 86 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{4a^2 + 16a - 86}{2a^3 - 54} = \frac{2a^2 + 8a - 43}{a^3 - 27}.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2a & 4 & 29 \\ 7 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & a \end{vmatrix} = 14a^2 - 68a + 80 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{14a^2 - 68a + 80}{2a^3 - 54} = \frac{7a^2 - 34a + 40}{a^3 - 27}.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2a & -23 & 4 \\ 7 & a & 7 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10a^2 - 48a + 56 \Rightarrow z = \frac{D_z}{D_s} = \frac{10a^2 - 48a + 56}{2a^3 - 54} = \frac{5a^2 - 24a + 28}{a^3 - 27}.$$

- Za $a = 3$ je $D_s = 0$ pa je sistem ili neodređen ili nemoguć. Pošto je za $a = 3$, $D_x = 4 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 - 86 = -2 \neq 0$, pa je sistem nemoguć.

■

Primer 5.2.5 Diskutovati sistem jednačina u odnosu na parametar a.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & (1+a)y & + & z & = & 2a \\ x & + & y & + & (1+a)z & = & 0 \end{array}$$

Rešenje. Determinanta sistema je

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

nakon množenja prve vrste sa -1 i dodavanja drugoj i trećoj vrsti. Jasno je da je za $a = 0$, $D_s = 0$.

- Za $a \neq 0$, $D_s \neq 0$ pa je tada sistem određen, tj. ima jedinstveno rešenje. Odredimo sada to rešenje.

$$D_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & 1+a & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1+a & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1+a & -1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -a & 1+a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3.$$

Ovde smo prvo izvukli a iz prve kolone ispred determinante, a nakon toga, prvu vrstu smo pomnožili sa -2 i dodali drugoj. U drugom redu smo prvo treću kolonu pomnožili sa -1 i dodali u drugu kolonu, a nako toga, drugu vrstu dodali trećoj. Izračunajmo sada x.

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{a^3}{a^2} = a.$$

Izračunajmo sada i D_y. Ako zamenimo mesta prvoj i drugoj koloni, a zatim prvu vrstu pomnožimo sa -2 i dodamo u drugu, dobijamo

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 0 & 1+a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2.$$

Na kraju smo drugu vrstu dodali trećoj i izračunali determinantu. Sada je

$$y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Konačno, potražimo i D_z. Ako prvu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj i trećoj, dobijamo

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 2a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 \Rightarrow z = \frac{D_z}{D_s} = \frac{-a^2}{a^2} = -1.$$

Rešenje sistema je $(x, y, z) = (a, 1, -1)$, za svako $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Neka je sada $a = 0$. Tada je $D_x = D_y = D_z = 0$ pa sistem moramo rešiti Gausovom metodom eliminacije. Kada uvrstimo $a = 0$ u sistem, dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \Rightarrow x + y + z = 0. \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Zaključujemo da je $x = -y - z$, a da su $y, z \in \mathbb{R}$. Sistem je neodređen sa rešenjem $(x, y, z) = (-y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

■

Primer 5.2.6 Diskutovati sistem jednačina u odnosu na parametar a.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ ax & + & 4y & + & z & = & 5 \\ 6x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 13 \end{array}$$

Rešenje. Sada je determinanta sistema

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 6 & a+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 3 & 0 \\ 4 & a & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a^2 - a - 12.$$

Ovde smo prvu vrstu pomnožili sa -1 i dodali u drugu, a zatim prvu vrstu pomnožili sa -2 i dodali u treću vrstu. Nakon toga smo razvili determinantu po trećoj koloni. Rešenja jednačine $D_s = 0$ su $a_1 = 4$ i $a_2 = -3$, pa je $D_s = (a - 4)(a + 3)$.

- Za $a \neq 4$ i $a \neq -3$, determinanta sistema je različita od nule i zbog toga sistem ima jedinstveno rešenje. Odredimo sada D_x, D_y i D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 13 & a+2 & 2 \end{vmatrix} = -(a+3) \Rightarrow x = \frac{-(a+3)}{(a-4)(a+3)} = \frac{-1}{a-4},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ a & 5 & 1 \\ 6 & 13 & 2 \end{vmatrix} = a+3 \Rightarrow y = \frac{a+3}{(a-4)(a+3)} = \frac{1}{a-4},$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ a & 4 & 5 \\ 6 & a+2 & 13 \end{vmatrix} = 6(a-4)(a+3) \Rightarrow z = \frac{6(a-4)(a+3)}{(a-4)(a+3)} = 6.$$

Rešenje je $(x, y, z) = \left(\frac{-1}{a-4}, \frac{1}{a-4}, 6\right)$.

- Za $a = 4$, $D_s = 0$ i $D_x = -7 \neq 0$ i odmah zaključujemo da je tada sistem nemoguć.
- Za $a = -3$ važi $D_s = D_x = D_y = D_z = 0$ te je potrebno rešiti sistem Gausovom metodom eliminacije. Uvrstimo $a = -3$ u sistem.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ -3x & + & 4y & + & z & = & 5 \\ 6x & - & y & + & 2z & = & 13 \end{array}$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa 3 i dodamo u drugu, a zatim opet prvu jednačinu pomnožimo sa -6 i dodamo u treću, tada ćemo dobiti

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & 7y & + & 4z & = & 23 \\ & - & 7y & - & 4z & = & -23 \end{array}$$

Ako sada drugu jednačinu pomnožimo sa 1 i dodamo u treću, dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & 7y & + & 4z & = & 23 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 6-z \\ & & 7y & = & 23-4z \end{array}$$

Za $z = t \in \mathbb{R}$, sledi da je

$$y = \frac{23}{7} - \frac{4}{7}t \Rightarrow x = \frac{19}{7} - \frac{3}{7}t$$

nakon uvrštavanja y i z u prvu jednačinu. Sistem je neodređen i ima beskonačno mnogo rešenja

$$(x, y, z) = \left(\frac{19}{7} - \frac{3}{7}t, \frac{23}{7} - \frac{4}{7}t, t\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

■

5.3 Matematički modeli i primena

Primer 5.3.1 Soja sadrži 34.1% belančevina i 33.5% ugljenih hidrata, kukuruz 12% belančevina i 65% ugljenih hidrata, a pšenica 10.2% belančevina i 70.7% ugljenih hidrata. Po koliko kilograma soje, kukuruza i pšenice treba pomešati da bi se dobilo 500 kg stočne hrane, a da smeša sadrži 80 kg belančevina i 300 kg ugljenih hidrata? Napisati matematički model i rešiti problem.

Rešenje. Neka je x količina soje u kg, y količina kukuruza u kg i z količina pšenice u kg. Tada je $x + y + z = 500$. Pošto stočna hrana mora sadržati 80 kg soje, dolazimo do jednačine $0.341x + 0.12y + 0.102z = 80$. Preostalo je da napišemo jednačinu za ugljene hidrate koja glasi: $0.335x + 0.65y + 0.707z = 300$. Moramo staviti i uslov $x, y, z \geq 0$ jer količine hrane ne mogu biti negativne. Dakle, rešavamo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 500 \\ 0.341x & + & 0.12y & + & 0.102z & = & 80 \\ 0.335x & + & 0.65y & + & 0.707z & = & 300 \end{array}.$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -0.341 i dodamo drugoj, a nakon toga, opet prvu jednačinu pomnožimo sa -0.335 i dodamo u treću, dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 500 \\ & - & 0.221y & - & 0.239z & = & -90.5 \\ & & 0.315y & + & 0.372z & = & 132.5 \end{array}.$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa $\frac{0.315}{0.221}$ i dodamo u treću, imaćemo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 500 \\ & - & 0.221y & - & 0.239z & = & -90.5 \\ & & & & \left(0.372 - \frac{0.239\cdot 0.315}{0.221}\right) z & = & 132.5 - \frac{90.5\cdot 0.315}{0.221} \end{array}$$

odakle dobijamo da je $z = 111.88$ kg. Nakon uvrštavanja z u drugu jednačinu dobijamo $y = 288.51$ kg. Iz prve jednačine je $x = 99.61$ kg. ■

Primer 5.3.2 Za izradu dva tipa stolova S_1 i S_2 potrebno je upotrebiti dve vrste dasaka D_1 i D_2. Utrošak dasaka u m^3 i raspoloživi kapacitet dati su u sledećoj tabeli:

Stolovi	Daske	
	D_1	D_2
S_1	0.075	0.2
S_2	0.2	0.05
Raspoloživi kapaciteti u m^3	46	26

Odrediti takav program proizvodnje koji obezbeđuje potpuno iskorišćavanje raspoloživih kapaciteta.

Rešenje. Neka je x broj stolova tipa S_1, a y broj stolova tipa S_2. Jednačina koja povezuje daske tipa D_1 i broj stolova napravljenih sa datim udelom tih dasaka je $0.075x + 0.2y = 46$. Za daske tipa D_2 dobijamo jednačinu $0.2x + 0.05y = 26$ i $x, y \geq 0$. Moramo rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcr} 0.075x & + & 0.2y & = & 46 \\ 0.2x & + & 0.05y & = & 26 \end{array}$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa -4 i dodamo u drugu jednačinu, a nakon toga zamenimo mesta jednačinama, dobijamo

$$\begin{array}{rcrcr} 0.2x & + & 0.05y & = & 26 \\ -0.725x & & & = & -58 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} 0.2x & + & 0.05y & = & 26 \\ x & & & = & 80 \end{array}.$$

Ako uvrstimo $x = 80$ u prvu jednačinu dobijamo $y = 200$. Od raspoloživog kapaciteta dasaka, može se napraviti 80 stolova tipa S_1 i 200 stolova tipa S_2. ■

Primer 5.3.3 Ališa je potrošila 35 dolara da kupi 12 pilića. Kupila je dve različite vrste pilića. Američka vrsta košta 3.75 dolara za jedno pile, a kanadska 2.50 dolara za jedno pile. Svaka američka koka izleže 2 jaja na dan, a kanadska 1 jaje na dan. Ališa prodaje jaja u pakovanju od 12 komada za 2.50 dolara. Koliko će novca imati prodajući jaja nakon jedne nedelje? A nakon druge? Da li će na kraju treće nedelje rasprodati sva jaja?

Rešenje. Neka je x broj kupljenih pilića prve vrste, a y broj kupljenih pilića druge vrste. Uz uslov $x, y \geq 0$ dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 12 \\ 3.75x & + & 2.5y & = & 35 \end{array}.$$

Rešenje sistema je $(x, y) = (4, 8)$. Pošto imamo 4 američke koke, a svaka snese 2 jaja na dan, nakon sedam dana imaćemo $4 \cdot 2 \cdot 7 = 56$ jaja. Ukupan broj jaja od kanadskih koka biće $8 \cdot 1 \cdot 7 = 56$. Ukupan broj jaja je 112, a pakuju se po 12 komada. Kada podelimo 112 sa 12 dobijamo 9 pakovanja od 12 jaja i 4 jaja viška. Ako pomožimo broj pakovanja jaja sa 2.5 dolara dolazimo do $9 \cdot 2.5 = 22.5$ dolara na kraju prve nedelje. Nakon druge nedelja ukupan broj jaja će biti $4 + 112 = 116$. To je 9 pakovanja po 12 jaja i 8 viška. Na kraju druge nedelje imaće $22.5 + 22.5 = 45$ dolara. Na kraju treće nedelje broj jaja je $8 + 112 = 120$, a to je tačno 12 pakovanja uz prihod od još 25 dolara. ■

Primer 5.3.4 Posedujemo dva rastvora. Jedan je 2%, a drugi 10%. Kako treba pomešati ova dva rastvora pa da dobijemo 2 litre 3% rastvora?

Rešenje. Neka je x broj litara 2%, a y 10% rastvora. Tada važi da je $0.02x + 0.10y = 0.03(x+y)$ i $x + y = 2$. Kada iz druge jednačine izrazimo $x = 2 - y$ i uvrstimo u prvu, dobijamo $0.02(2 - y) + 0.10y = 0.03 \cdot 2$ pa je $y = 0.25$ litara, a $x = 1.75$ litara. ■

Primer 5.3.5 Fabrika elektronskih aparata izgrađuje tri vrste džepnog elektonskog računara R_1, R_2 i R_3 u tri pogona. Tehničko-tehnološki uslovi proizvodnje kao i dobit po jednici proizvoda dati su u sledećoj tabeli:

Pogoni	Angažovanje kapaciteta pogona u % po jedinici proizvedenih računara			Raspoloživi kapaciteti u %
	R_1	R_2	R_3	
I	4	7	8	100
II	3	11	6	100
III	5	5	4	100
Novčanih jedinica dobiti po jedinici proizvoda	0.2	1.1	0.7	

Odrediti onaj program proizvodnje koji obezbeđuje iskorišćenje kapaciteta redom 97%, 90% i 98%. Za dobijeni program odredite ukupnu dobit fabrike.

Rešenje. Neka je x_i broj džepnih računara R_i, $i = 1, 2, 3$. Na osnovu podataka u tabeli dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 97 \\ 3x_1 & + & 11x_2 & + & 6x_3 & = & 90 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 98 \end{array}$$

uz uslov $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Kada prvu jednačinu pomnožimo sa 3, drugu sa -4 i treću sa -6 dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & 21x_2 & + & 24x_3 & = & 291 \\ -12x_1 & - & 44x_2 & - & 24x_3 & = & -360 \\ -30x_1 & - & 30x_2 & - & 24x_3 & = & -588 \end{array}.$$

Sada ćemo prvu jednačinu dodati u drugu i treću:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & 21x_2 & + & 24x_3 & = & 291 \\ & - & 23x_2 & & & = & -69 \\ -18x_1 & - & 9x_2 & & & = & -297 \end{array}.$$

Iz druge jednačine je $x_2 = 3$, iz treće $x_1 = 15$ i prve $x_3 = 2$. Ukupna dobit je $15 \cdot 0.2 + 3 \cdot 1.1 + 2 \cdot 0.7 = 7.7$ novčanih jedinica. ■

Primer 5.3.6 Dnevni kapacitet dve mašine jednog pogona iznose redom 12 i 16 časova. Proizvodi P_1 i P_2 moraju se obraditi na obe mašine. Kada bi se proizvodio samo proizvod P_1 za puno radno vreme na prvoj mašini je moguće obraditi 100 komada P_1, a na drugoj 200 komada P_1. U slučaju da se proizvodi samo P_2, za puno radno vreme na prvoj mašini može se obraditi 80 komada P_2, a na drugoj 50 komada P_2. Odrediti koliko komada P_1 i P_2 treba proizvoditi dnevno u datom pogonu ako je raspoložive kapacitete moguće iskoristiti sa 87.5% prve i 85% druge mašine.

Rešenje. Neka je x_1 broj komada proizvoda P_1, a x_2 broj komada proizvoda P_2 koji treba da se obrade na dve mašine, M_1 i M_2. Ako se na mašini M_1 za $12h$ napravi 100 komada proizvoda P_1, to znači da će se 1 komad proizvoda P_1 napraviti za 12/100 sati, odnosno za 3/25 sati. x_1 proizvod na M_1 će se napraviti za $3x_1/25$ časova. Sličnim postupkom dobijamo da će se x_1 proizvod tipa P_1 na mašini M_2 napraviti za $0.08x_1 = 2x_1/25$ časova. Ako posmatramo proizvod P_2 na mašini M_1, za jedna proizvod tog tipa, na toj mašini je potrebno 3/20 sati, pa je za x_2 proizvoda tipa P_2 na mašini M_2 potrebno $3x_2/20$ časova. Konačno, za x_2 komada proizvoda tipa p_2 na M_2 potrebno je $8x_2/25$ časova. Raspoloživa satnica mašine M_1 biće $12 \cdot 0.875 = 10.5$ sati, a M_2 mašine $16 \cdot 0.85 = 13.6$ časova. Dolazimo do sistema jednačina:

$$\begin{array}{rrcrcr} M_1: & \dfrac{3}{25}x_1 & + & \dfrac{3}{20}x_2 & = & 10.5 \\[2ex] M_2: & \dfrac{2}{25}x_1 & + & \dfrac{8}{25}x_2 & = & 13.6 \end{array}.$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa 50, a drugu sa -75 dobijamo

$$\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & + & \frac{15}{2}x_2 & = & 525 \\ -6x_1 & - & 24x_2 & = & -1020 \end{array}.$$

Sada ćemo prvu jednačinu da dodamo u drugu:

$$\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & + & \frac{15}{2}x_2 & = & 525 \\ & - & \frac{33}{2}x_2 & = & -495 \end{array}.$$

Iz druge jednačine je $x_2 = 30$ komada proizvoda tipa P_2, a iz prve $x_1 = 50$ komada proizvoda tipa P_1. ■

Primer 5.3.7 Dva radnika, radeći zajedno, mogu da završe radni zadatak za 12 dana. Prvi radnik je na izvršenju zadatka radio 2 dana, a drugi 3 dana i tada je konstantovano da su izvršili 20% zadatka. Za koliko dana bi mogao uraditi ceo posao svaki od radnika, radeći sam?

Rešenje. Neka je x_1 broj dana prvog radnika za koje bi ceo posao obavio sam, a neka je x_2 broj dana drugog radnika za koje bi ceo posao obavio sam. To znači da bi prvi radnik za jedan dan uradio $\frac{1}{x_1}$ deo posla, a drugi radnik $\frac{1}{x_2}$ deo posla. Ako rade zajedno, ceo posao će biti gotov za 12 dana, odnosno

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\cdot 12 = 1.$$

Ako je prvi radnik radio 2 dana, a drugi 3 dana i ako je izvršeno 20% zadataka, tada je

$$\left(\frac{2}{x_1}+\frac{3}{x_2}\right) = 1\cdot\frac{20}{100}.$$

Zaključujemo da treba rešiti sistem

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{x_1} & + & \frac{1}{x_2} & = & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{x_1} & + & \frac{3}{x_2} & = & \frac{1}{5} \end{array}.$$

Ako uvedemo smenu $s = 1/x_1$ i $t = 1/x_2$, tada sistem postaje

$$\begin{array}{ccccc} s & + & t & = & \frac{1}{12} \\ 2s & + & 3t & = & \frac{1}{5} \end{array}$$

čije je rešenje $s = 1/30$ i $t = 1/20$, pa je $x_1 = 1/s = 30$ i $x_2 = 1/t = 20$. ■

Primer 5.3.8 Tri grupe radnika mogu da završe neki posao na sledeći način: prva i druga radeći zajedno za 7.5 dana, grupe prva i treća za 6 dana i grupe druga i treća za 10 dana. Za koliko bi dana mogla završiti ceo posao svaka grupa radnika pojedinačno? Za koliko dana bi posao bio završen u slučaju da sve tri grupe radnika rade istovremeno?

Rešenje. Neka je x_i broj dana i-te grupe radnika za koje bi samostalno završili posao, $i = 1, 2, 3$. Tada bi i-ta grupa radnika za 1 dan uradila $1/x_i$ deo posla samostalno. Na osnovu uslova zadatka, dobijamo

$$\begin{array}{rcl} \text{I i II grupa}: \left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\cdot 7.5 & = & 1 \\ \text{I i III grupa}: \left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}\right)\cdot 6 & = & 1 \\ \text{II i III grupa}: \left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)\cdot 10 & = & 1 \end{array}.$$

Ako uvedemo smenu $s = 1/x_1$, $t = 1/x_2$ i $q = 1/x_3$ i rešavanjem tako dobijenog sistema, slediće $s = 1/10$, $t = 1/30$ i $q = 1/15$, a odatle $x_1 = 10$, $x_2 = 30$ i $x_3 = 15$. Toliko bi sati trebalo svakoj grupi ako bi radila samostalno. Ako bi radili zajedno tada će im trebati y sati, a y se dobija iz jednačine

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \cdot y = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15}\right) \cdot y = 1 \Rightarrow y = 5.$$

■

Primer 5.3.9 U lokalnoj baštenskoj radnji, u cenu biljaka uključen je porez na promet. Cena za 4 palme i 8 filadendrona je 48 evra. Cena za 5 palmi i 2 filadendrona je 28 evra. Ako je p cena jedne palme, a f cena jednog filadendrona, napisati sistem jednačina za date podatke i rešiti ga.

Rešenje. Sistem jednačina je

$$\begin{array}{rcrcr} 4p & + & 8f & = & 48 \\ 5p & + & 2f & = & 28 \end{array}.$$

Rešenje je $(p, f) = (4, 4)$. ■

Primer 5.3.10 Pansion za životinje naplaćuje 4.7 evra po danu za čuvanje jedne mačke i 11 evra po danu za čuvanje jednog psa. Vlasnik pansiona je primetio da je u sredu zaradio 179 evra. Koliko je pasa i mačaka bilo toga dana u pansionu? Vlasnik misli da je bilo 8 mačaka i 14 pasa. Da li je u pravu? Kasnije je našao podatak da je ukupno bilo 22 životinje u pansionu. Koliko ih je zapravo bilo?

Rešenje. Neka je m broj mačaka, a p broj pasa koji je bio u sredu u pansionu. Tada je $m + p = 22$. Sada ćemo napraviti jednačinu za zaradu, tj. $4.7m + 11p = 179$. Rešavajući sistem dobijamo da je $m = 10$ i $p = 12$. Vlasnik nije bio u pravu. ■

Primer 5.3.11 Izjednačiti hemijsku jednačinu

$$CH_4 + O_2 \to CO_2 + H_2O.$$

Rešenje. Neka su x_1, x_2, x_3 i x_4 brojevi takvi da važi

$$x_1 CH_4 + x_2 O_2 \to x_3 CO_2 + x_4 H_2O$$

i koje treba da odredimo. Posmatrajmo sada koeficijente uz određene elemente:

$$C : x_1 = x_3,\ H : 4x_1 = 2x_4,\ O : 2x_2 = 2x_3 + x_4,$$

odakle sledi

$$x_3 = x_1,\ x_4 = 2x_1,\ 2x_2 = 2x_1 + 2x_1 = 4x_1 \Rightarrow x_2 = 2x_1.$$

Za $x_1 = 1$, sledi $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ i $x_4 = 2$ pa hemijska jednačina postaje

$$CH_4 + 2O_2 \to CO_2 + 2H_2O.$$

■

Primer 5.3.12 Izjednačiti hemijsku jednačinu

$$HCl + Na_3PO_4 \rightarrow H_3PO_4 + NaCl.$$

Rešenje. Odredimo x_1, x_2, x_3 i x_4 tako da važi

$$x_1HCl + x_2Na_3PO_4 \rightarrow x_3H_3PO_4 + x_4NaCl.$$

Dakle,

$$H : x_1 = 3x_3,\ Cl : x_1 = x_4,\ Na : 3x_2 = x_4,\ P : x_2 = x_3,\ O : 4x_2 = 4x_3.$$

Odavde dobijamo da je $x_3 = \frac{1}{3}x_1$, $x_4 = x_1$ i $x_2 = \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3}x_1$. Za, na primer, $x_1 = 3$, dobijamo $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ i $x_4 = 3$ pa je jednačina

$$3HCl + Na_3PO_4 \rightarrow H_3PO_4 + 3NaCl.$$

■

Primer 5.3.13 Dva automobila kreću sa iste pozicije i u isto vreme, ali je jedan auto brži za 10 km/h. Nakon 3 sata, krećući se suprotnim smerovima, oni su 300 km udaljeni jedan od drugoga. Kojom brzinom se kreću ova dva auta?

Rešenje. Neka je v_1 brzina prvog, a v_2 drugog auta u km/h. Tada je $v_2 = v_1 + 10$. Nakon $t = 3$ časa, za pređene puteve oba auta važiće $v_1 \cdot 3 + v_2 \cdot 3 = 300$, odnosno $v_1 \cdot 3 + (v_1 + 10) \cdot 3 = 300$ ili $6v_1 = 270$. Dobijamo da je $v_1 = 45\, km/h$, a $v_2 = 55\, km/h$. ■

Primer 5.3.14 Bilijev restoran poručio je 200 cvetova za osmi mart. Jedan karanfil (k) koštao je 1.5, jedna orhideja (o) 5.75 i jedna ruža (r) 2.60 dolara. Najviše su naručili karanfila i 20 orhideja manje nego ruža. Ukupno je plaćeno 589.50 dolara. Koliko je karanfila, orhideja i ruža poručeno?

Rešenje. Sada dobijamo jednačine $k + o + r = 200$, $1.5k + 5.75o + 2.60r = 589.50$ i $o = r - 20$, gde smo sa k, o i r obeležili broj poručenih karanfila, orhideja i ruža, redom. Uvrštavanjem treće jednačine u prvu dobijamo $k = 220 - 2r$. Ako sada jednačina za k i o uvrstimo u $1.5k + 5.75o + 2.60r = 589.50$, dobijamo $5.35r = 374.5 \Rightarrow r = 70$. Sledi da je $o = 50$ i $k = 80$. ■

Primer 5.3.15 Posao dijetetičara u bolnici je da napravi specijalne vrste dijeta koje se sastoje od tri osnovne namirnice (A, B, C). Dijetalni obrok treba da sadrži sledeće sastojke: tačno 3400 jedinica kalcijuma, 1800 jedinica gvožđa i 2200 jedinica vitamina A. Broj jedinica sastojaka u jednom gramu svake namirnice je sledeći: namirnica A (kalcijum 30, gvožđe 10 i vitamina A 10), namirnica B (kalcijum 10, gvožđe 10 i vitamina A 30) i namirnica C (kalcijum 20, gvožđe 20 i vitamina A 20). Po koliko grama svake namirnice mora biti iskorišćeno da bi se zadovoljili uslovi dijete?

Rešenje. Neka je x količina namirnice A u gramima, y količina namirnice B u gramima i z količina namirnice C u gramima. Dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} Ca: & 30x & + & 10y & + & 20z & = & 3400 \\ Fe: & 10x & + & 10y & + & 20z & = & 1800 \\ vitA: & 10x & + & 30y & + & 20z & = & 2200. \end{array}$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i tako pomnoženu je dodamo u drugu i treću jednačinu, dobijamo sistem

$$\begin{array}{rrcrcrcr} Ca: & 30x & + & 10y & + & 20z & = & 3400 \\ Fe: & -20x & & & & & = & -1600 \\ vitA: & -20x & + & 20y & & & = & -1200. \end{array}$$

Iz druge jednačine sledi da je $x = 80$ grama, iz treće je $y = 20$ grama, a zatim iz prve dobijamo $z = 40$ grama. ■

Primer 5.3.16 Poljoprivrednik može kupiti četiri vrste biljne hrane. Svako bure sa mešavinom A sadrži 30 kilograma fosforne kiseline, 50 kilograma azota i 30 kilograma potaše; svako bure sa mešavinom B sadrži 30 kilograma fosforne kiseline, 75 kilograma azota i 20 kilograma potaše; svako bure mešavinom C sadrži 30 kilograma fosforne kiseline, 25 kilograma azota, i 20 kilograma potaše; a svako bure sa mešavinom D sadrži 60 kilograma fosforne kiseline, 25 kilograma azota i 50 kilograma potaše. Ispitivanja tla ukazuju na to da je za određeno polje potrebno 900 kilograma fosforne kiseline, 750 kilograma azota i 700 kilograma potaše. Koliko buradi svake vrste hrane farmer treba da pomeša da bi obezbedio neophodne hranljive materije za polje? Rešenje tražiti u skupu $\mathbb{N}_0$.

Rešenje. Neka je x broj buradi hrane A, y broj buradi hrane B, z broj buradi hrane C i t broj buradi hrane D. Model glasi:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \text{Fos. kis.}: & 30x & + & 30y & + & 30z & + & 60t & = & 900 \\ \text{Azot}: & 50x & + & 75y & + & 25z & + & 25t & = & 750 \\ \text{Potaš}: & 30x & + & 20y & + & 20z & + & 50t & = & 700 \end{array}.$$

Ako prvu jednačinu podelimo sa 30, drugu sa 25 i treću sa 10, dobijamo sistem

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \text{Fos. kis.}: & x & + & y & + & z & + & 2t & = & 30 \\ \text{Azot}: & 2x & + & 3y & + & z & + & t & = & 30 \\ \text{Potaš}: & 3x & + & 2y & + & 2z & + & 5t & = & 70 \end{array}.$$

Nakon množenja prve jednačine sa -2 i dodavanja u drugu jednačinu, odnosno nakon množenja prve jednačine sa -3 i dodavanja u treću jednačinu, dobijamo

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \text{Fos. kis.}: & x & + & y & + & z & + & 2t & = & 30 \\ \text{Azot}: & & & y & - & z & - & 3t & = & -30 \\ \text{Potaš}: & & - & y & - & z & - & t & = & -20 \end{array}.$$

Ovim smo eliminisali promenljivu x iz druge i treće jednačine. Dodajmo drugu jednačinu u treću. Tada je

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \text{Fos. kis.}: & x & + & y & + & z & + & 2t & = & 30 \\ \text{Azot}: & & & y & - & z & - & 3t & = & -30 \\ \text{Potaš}: & & & & - & 2z & - & 4t & = & -50 \end{array}.$$

Iz treće jednačine sledi da je $z = 25 - 2t \geq 0$, iz druge $y = t - 5 \geq 0$ i iz prve $x = 10 - t \geq 0$ za $t \in \mathbb{N}_0$. Iz uslova za nenegativnost promenljivih x, y i z, dobijamo da mora važiti $t \leq 25/2$,

$t \geq 5$ i $t \leq 10$, tj. $5 \leq t \leq 10$. Rešenje je

$$\begin{array}{ll} t=5, & (x,y,z,t)=(5,0,15,5) \\ t=6, & (x,y,z,t)=(4,1,13,6) \\ t=7, & (x,y,z,t)=(3,2,11,7) \\ t=8, & (x,y,z,t)=(2,3,9,8) \\ t=9, & (x,y,z,t)=(1,4,7,9) \\ t=10, & (x,y,z,t)=(0,5,5,10). \end{array}$$

Dakle, ima 6 različitih načina da ispuni uslove u zadatku. ■

Primer 5.3.17 U laboratorijskom eksperimentu, pacove treba hraniti sa 5 paketa hrane koji sadrže ukupno 80 jedinica vitamina E. Postoje četiri različite marke paketa hrane koji mogu biti korišćeni. Paket marke A sadrži 5 jedinica vitamina E, a paket marke B sadrži 10 jedinica vitamina E, paket marke C sadrži 15 jedinica vitamina E i paket marke D sadrži 20 jedinica vitamina E. Koliko paketa svake marke treba uzeti za ishranu pacova? Rešenje tražiti u skupu $\mathbb{N}_0$.

Rešenje. Neka je x broj paketa marke A, y broj paketa marke B, z broj paketa marke C i t broj paketa marke D. Tada je $x+y+z+t=5$, dok se druga jednačina dobija iz uslova o ukupnom broju jedinica vitamina E, tj. $5x+10y+15z+20t=80$. Rešavamo sistem (prvu jednačinu smo pomnožili sa -1 i dodali u drugu)

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 16 \\ \hline x & + & y & + & z & + & t & = & 5 \\ & & y & + & 2z & + & 3t & = & 11 \end{array}$$

Iz druge jednačine poslednjeg sistema dobijamo $y=11-2z-3t \geq 0$, a iz prve $x=z+2t-6 \geq 0$. Zaključujemo da mora važiti $z+2t \geq 6$ i $2z+3t \leq 11$.

$$\begin{array}{ll} z=0, t=3, & (x,y,z,t)=(0,2,0,3) \\ z=1, t=3, & (x,y,z,t)=(1,0,1,3) \\ z=2, t=2, & (x,y,z,t)=(0,1,2,2) \\ z=4, t=1, & (x,y,z,t)=(0,0,4,1). \end{array}$$

Dakle, postoji 4 različita načina da se ispune uslovi u zadatku. ■

5.4 Zadaci za vežbu

1. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 14 \\ & & y & - & 3z & = & -7 \end{array}.$$

2. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & 12 \\ 5x & - & 2y & + & 3z & = & 13 \\ x & + & 9y & - & z & = & 15 \end{array}.$$

3. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & 11 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 8 \end{array} .$$

4. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 11 \\ 2x & + & y & + & 5z & + & t & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ x & + & y & + & 5z & + & t & = & 5 \end{array} .$$

5. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 5z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & - & 10z & = & 0 \end{array} .$$

6. Rešiti homogen sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 8y & + & z & = & 0 \end{array} .$$

7. Rešiti homogen sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & - & 2z & - & 4t & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 3z & - & 2t & = & 0 \\ 6x & + & 3y & - & 7z & & & = & 0 \end{array} .$$

8. Diskutovati sistem jednačina u odnosu na parametar a.

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & - & 2y & - & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 12. \end{array}$$

9. Diskutovati sistem jednačina u odnosu na parametar a.

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2. \end{array}$$

10. Diskutovati sistem jednačina u odnosu na parametar a.

$$\begin{array}{rcrcrcr} (2a+3)x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & (4a+3)y & + & 4z & = & 0 \\ 6x & + & 8y & + & 7z & = & 0. \end{array}$$

11. Diskutovati sistem jednačina u odnosu na parametar a.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ ax & + & 4y & + & z & = & 0 \\ 6x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

12. U magacinu se nalazi 47 džakova šargarepe i 112 džakova krompira. Prva kasarna nedeljno troši 3 džaka šargarepe i 6 džakova krompira, a druga 2 džaka šargarepe i 7 džakova krompira. Koliko nedelja svaka kasarna može da sprema obroke od šargarepe i krompira, ako koriste zalihe iz pomenutog magacina? Napisati matematički model.

13. U jednoj prodavnici ima 3 kg šargarepe (Š) i 2 kg peršuna (P). Prva porodica želi da napravi supu od 100 g (Š) i 50 g (P), a druga porodica od 150 g (Š) i 75 g (P). Koliko svaka porodica može da napravi supa ako idu da kupuju u pomenutoj prodavnici? Napisati matematički model.

14. U magacinu se nalazi 37 jelki i 1856 ukrasa za jelku kojima treba ukrasiti prodavnice. Veću prodavnicu treba ukrasiti sa tri jelke i 162 ukrasa, a manju sa jednom jelkom i 58 ukrasa. Koliko većih, a koliko manjih prodavnica može da se ukrasi jelkama i ukrasima iz pomenutog magacina? Napisati matematički model.

15. Kruzer na reci plovio je 4 sata nizvodno prešavši 60 kilometara. Krećući se uzvodno, trebalo mu je 5 sati da dođe do luke iz koje je isplovio. Odrediti brzinu broda kada je voda stojeća i kada postoji vodena struja.

16. Marina je imala 24500 evra koje je želela da investira. Novac je podelila na tri dela i stavila ga na tri posebna računa. Na kraju godine je imala priliv od kamate 1300 evra. Godišnje kamatne stope na računima su bile: prvi račun - 4%, drugi račun - 5.5% i treći račun - 6%. Ako je količina uloženog novca na prvom računu 4 puta veća od količine novca uloženog na drugom računu, koliko je uloženo bilo na svakom od računa?

17. U jednoj piceriji, 2 male pice, litra Pepsija i salata koštaju 1400 dinara. Ako se izaberu 1 mala pica, litra Pepsija i 3 salate, tada treba izdvojiti 1500 dinara. Na kraju, 3 male pice i litra Pepsija koštaju 1600 dinara. Koja je cena za jednu malu picu, litru Pepsija i jednu salatu?

18. Prošlog utorka u Areni je bilo prodato 8500 karata za filmske projekcije. Ukupno je prihodovano 3.230.000 dinara. Karte su se mogle kupiti na tri različita načina: matine koštaju 250 dinara, studenti plaćaju 300 dinara, dok je regularna cena 425 dinara. Koliko od svake vrste karata je prodato?

GLAVA 6

Linearno programiranje

Uvod u problematiku linearnog programiranja biće dat preko dva uvodna primera.

Primer 6.0.1 Jedna firma proizvodi stolove i stolice. Neka je broj stolova proizveden u nekom vremenskom intervalu x_1, a broj stolica proizveden u istom vremenu x_2. Prodajne cene i proizvodni troškovi po jedinici proizvoda (u novčanim jedinicama po jedinici proizvoda) dati su u sledećoj tabeli.

	sto	stolica
prodajna cena	20	18
troškovi proizvodnje	17	14

Firma želi da u posmatranom vremenskom intervalu i uz postojeća ograničenja u pogledu kapaciteta proizvodnje ostvari što veću dobit. Ako dobit označimo sa D, tada će važiti $D(x_1, x_2) = (20 - 17)\, x_1 + (18 - 14)\, x_2$, odnosno

$$D(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2\,. \tag{6.1}$$

Funkciju (6.1) zovemo *funkcija cilja*. Pitanje ostvarivanja maksimalne dobiti svodi se na pitanje koliko treba proizvesti stolova (x_1), a koliko stolica (x_2), tako da funkcija (6.1) bude što je moguće veća (maksimalna).

Uvedimo sada neka ograničenja. Neka oba proizvoda u toku proizvodnje prolaze kroz tri faze: sklapanje, bojenje i pakovanje. Trajanje pojedine faze po jedinici proizvoda, iskazano u satima, dato je u narednoj tabeli.

	sto	stolica
sklapanje	1.5	1
bojenje	3	3
pakovanje	1	2

Neka se u posmatranom vremenskom intervalu za proizvodnju stolova i stolica može uložiti najviše 14 sati za sklapanje, 30 sati za bojenje i 16 sati za pakovanje. To bi značilo da je za sklapanje x_1 stolova i x_2 stolica potrebno $1.5x_1 + x_2$ sati, a pošto se sme potrošiti najviše 14 sati, mora važiti

$$1.5x_1 + x_2 \leq 14\,.$$

Dalje, za bojenje x_1 stolova i x_2 stolica potrebno je $3x_1 + 3x_2$ sati, a kako se sme potrošiti najviše 30 sati, sledi

$$3x_1 + 3x_2 \leq 30\,.$$

Analogno, dobijamo da je

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

ograničenje koje se odnosi na fazu pakovanja.

Ovim smo dobili tri ograničenja koja ćemo zvati *netrivijalna ograničenja*:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I} & 1.5x_1 & + & x_2 & \leq & 14, \\ \text{II} & 3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30, \\ \text{III} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16. \end{array} \tag{6.2}$$

Jasno je da mora važiti da broj stolova i stolica ne može biti negativan i zbog toga uvodimo i ograničenje nenegativnosti

$$\text{IV} \quad x_1 \;\geq\; 0, \quad x_2 \;\geq\; 0. \tag{6.3}$$

Ograničenja (6.3) nazivamo *trivijalna ograničenja.* Firma želi da dobije maksimalnu dobit, odnosno da nađe maksimum funkcije cilja (6.1) pod uslovima I, II i III u (6.2) i IV u (6.3). ■

Primer 6.0.2 Za proizvodnju određenog proizvoda potrebne su dve sirovine S_1 i S_2 i to najmanje 20 jedinica mere sirovine S_1 i 10 jedinica mere sirovine S_2. Ove sirovine se mogu dobiti iz dva različita minerala M_1 i M_2 koji sadrže i sirovinu S_3 koje ne sme biti u konačnom proizvodu više od 40 jedinica mere. Cena po jedinici mere minerala M_1 je 20 novčanih jedinica, a minerala M_2 18 novčanih jedinica. Potrebno je kupiti dovoljnu količinu minerala M_1 i M_2 da bi se mogao napraviti željeni proizvod imajući u vidu da jedna jedinica mere minerala M_1 sadrži 2 jedinice mere sirovine S_1, 5 jedinica mere sirovine S_2 i 3 jedinice mere sirovine S_3. Jedna jedinica mere minerala M_2 sadrži 4 jedinice mere sirovine S_1, 1 jedinicu mere sirovine S_2 i 2 jedinice mere sirovine S_3. Želja kupca je da kupi dovoljnu količinu minerala, ali tako da plati što manje.

Sa x_i označićemo količinu minerala M_i koja je kupljena, $i = 1, 2$. Pošto je cena po jedinici mere minerala M_1 20 novčanih jedinica, a minerala M_2 18 novčanih jedinica, tada bi funkcija cilja (vrednost troškova), za koju tražimo minimum, bila

$$T(x_1, x_2) = 20x_1 + 18x_2\,.$$

Uvedimo sada ograničenja u vezi sa sirovinama:

$$\begin{array}{lrcrcl} S_1: & 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 20 \\ S_2: & 5x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ S_3: & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 40 \end{array}$$

uz uslove $x_1, x_2 \geq 0$. ■

Opšti oblik problema linearnog programiranja (LP) od m linearnih jednačina ili nejednačina sa n nepoznatih:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\,, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,\ i = k+1, k+2, \ldots, s, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = s+1, s+2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \tag{6.6}$$

gde su:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ koeficijenti sistema,
- $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$ slobodni koeficijenti,
- $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ koeficijenti funkcije cilja,
- f *funkcija cilja*,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ trivijalna ograničenja.

Za slobodne koeficijente b_i se traži da budu nenegativni. Ukoliko ima negativnih, ta (ne)jednačina se pomnoži sa -1. *Domen* (ili *dopustiv skup*) linearnog programiranja $D \subset \mathbb{R}^n$ je skup svih tačaka $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ koje zadovoljavaju sve ograničavajuće uslove u (6.5), tj. jednačine i nejednačine sistema, kao i trivijalna ograničenja. *Optimalno rešenje* je svaka tačka $z^{opt} = (x_1^{opt}, x_2^{opt}, \ldots, x_n^{opt}) \in D$ u kojoj funkcija cilja f dostiže zahtevani ekstrem (*minimum* ili *maksimum*).

Primer 6.0.3 Odrediti dopustiv skup za problem iz primera 6.0.1.

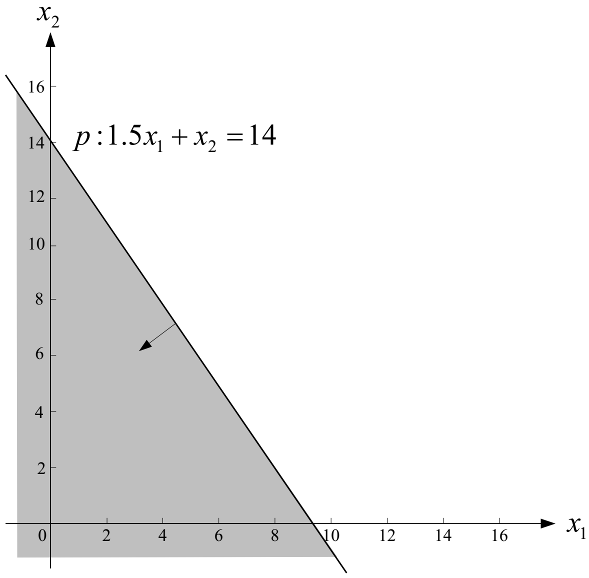
Rešenje. Posmatrajmo nejednačine (poluravni)

$$\begin{array}{rcrcl} 1.5x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

i nacrtajmo prvo sva ograničenja posebno i, nakon toga, potražimo presek dobijenih poluravni. Prvo se nacrta prava $p : 1.5x_1 + x_2 = 14$, a zatim se odredi koju poluravan određuje nejednačina $1.5x_1 + x_2 \leq 14$ i to na sledeći način. Izabere se bilo koja tačka van prave p i uvrsti se u datu nejednakost. Ako je nejednakost zadovoljena, biramo poluravan koja sadrži izabranu tačku. U suprotnom, biramo poluravan koja ne sadrži tu tačku. Izaberimo, recimo, tačku $(x_1, x_2) = (0, 0)$ i uvrstimo je u $1.5x_1 + x_2 \leq 14$. Tada ispitujemo da li je tačno

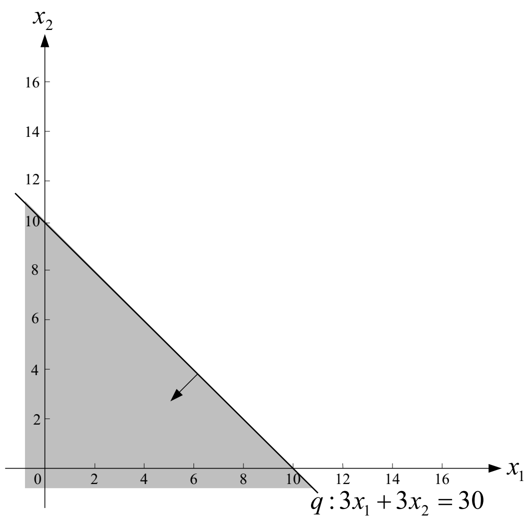
$$1.5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 14 \Rightarrow 0 \leq 14$$

i zaključujemo da jeste. Dakle, obeležićemo poluravan koja sadrži tačku $(0, 0)$ kao na slici 6.1.



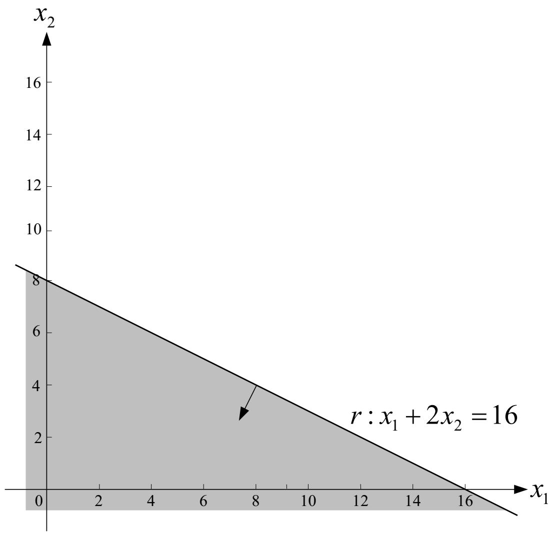
Slika 6.1: Primer 6.0.3, prva nejednačina.

Posmatrajmo sada drugo ograničenje $3x_1 + 3x_2 \leq 30$. Prvo ćemo nacrtati pravu $q: 3x_1 + 3x_2 = 30$ i odrediti koju poluravan data nejednačina predstavlja. Ako opet izaberemo $(x_1, x_2) = (0, 0)$ i uvrstimo u $3x_1 + 3x_2 \leq 30$, dobijamo da je $0 \leq 30$ što je tačno i poluravan koju označavamo mora sadržati tačku $(0, 0)$ kao na slici 6.2.



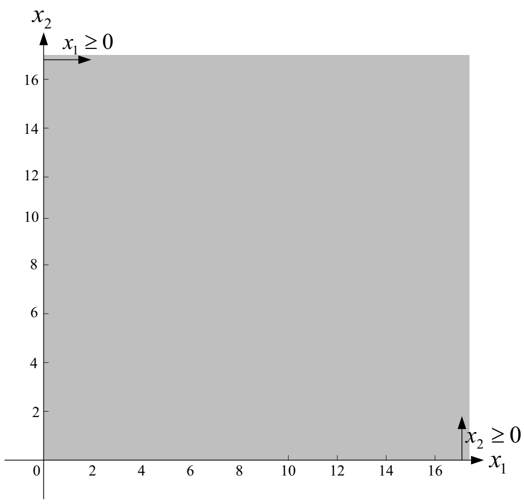
Slika 6.2: Primer 6.0.3, druga nejednačina.

Sada ćemo označiti poluravan $x_1 + 2x_2 \leq 16$ analognim postupkom kao kod prethodne dve nejednačine (slika 6.3).



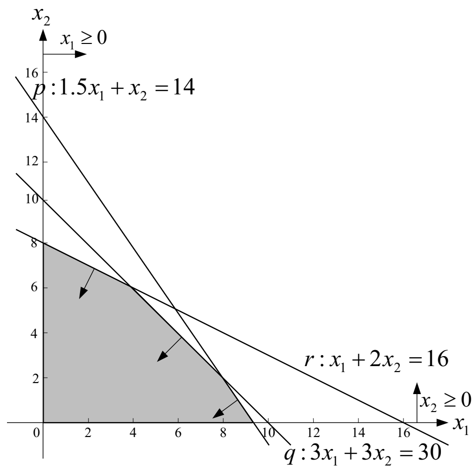
Slika 6.3: Primer 6.0.3, treća nejednačina.

Preostalo je da još označimo poluravni $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$. Kao što se vidi na slici 6.4, tražena oblast je prvi kvadrant.



Slika 6.4: Primer 6.0.3, trivijalna ograničenja.

Ako sada zatražimo presek ovih pet poluravni, dobićemo zatvorenu konveksnu oblast kao na slici 6.5.

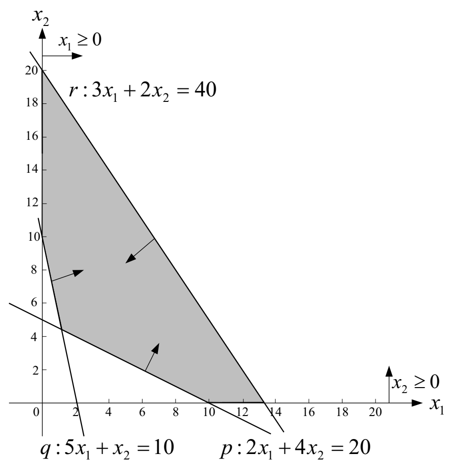


Slika 6.5: Primer 6.0.3, dopustiv skup.

Tako da smo ovim odredili dopustiv skup, koji je osenčeni petougao. ■

Primer 6.0.4 Odrediti dopustiv skup za problem iz primera 6.0.2.

Rešenje. Prvo treba odrediti dopustiv skup koji se nalazi u prvom kvadrantu zbog trivijalnih ograničenja $x_1, x_2 \geq 0$. Nakon što smo nacrtali pravu $p : 2x_1 + 4x_2 = 20$ (slika 6.6) treba da odredimo koja je poluravan definisana nejednačinom $2x_1 + 4x_2 \geq 20$. Nakon biranja $(x_1, x_2) = (0, 0)$ i uvrštavanja u posmatranu nejednačinu, dobijamo $0 \geq 20$ što nije tačno. Dakle, biramo poluravan koja ne sadrži tačku $(0, 0)$. Slično važi i za ograničenje $5x_1 + x_2 \geq 10$. Tačka $(0, 0)$ neće pripadati traženoj poluravni. Kod poslednjeg ograničenja $3x_1 + 2x_2 \leq 40$, tačka $(0, 0)$ pripada poluravni koju treba obeležiti, jer je $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 40$.



Slika 6.6: Dopustiva oblast iz primera 6.0.4.

Kao što se vidi na slici 6.6, dopustiva oblast je zatvoreni konveksni petougao. ■

Konvertovanje LP problema u standardni oblik

LP problem u standardnom obliku podrazumeva da su svi slobodni koeficijenti nenegativni, da se umesto nejednačina formiraju jednačine, da se traži minimum funkcije cilja i da važe trivijalna ograničenja za sve nepoznate. Formula koja povezuje maksimum i minimum funkcije je

$$\max f = -\min(-f)\,.$$

Konvertovanje nejednačina iz (6.5) u jednačine se vrši na sledeći način:

- svaka nejednačina $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, se zamenjuje jednačinom
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$
gde važi $x_{n+i} \geq 0$ za $i = 1, 2, \ldots, k$ i te se promenljive nazivaju *izravnavajuće promenljive*,
- svaka nejednačina $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$, $i = k+1, k+2, \ldots, s$, se zamenjuje jednačinom
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i,\ i = k+1, k+2, \ldots, s,$$
gde važi $x_{n+i} \geq 0$ za $i = k+1, k+2, \ldots, s$ i te se promenljive, takođe, nazivaju *izravnavajuće promenljive*,
- funkcija cilja postaje
$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+s} c_j\, x_j,$$
gde je $c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = c_{n+s} = 0$.

Ilustrovaćemo proceduru u naredna dva primera.

Primer 6.0.5 Svesti na standardan oblik problem iz primera 6.0.1.

Rešenje. Posmatrani problem je $\max(3x_1 + 4x_2)$ uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} 1.5x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \end{array}$$

uz $x_1, x_2 \geq 0$. Prvo ćemo maksimum funkcije cilja pretvoriti u minimum:

$$\max(3x_1 + 4x_2) = -\min(-3x_1 - 4x_2)\,.$$

Sada ćemo u svaku od tri nejednačine dodati po jednu novu nenegativnu *izravnavajuću promenljivu*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 1.5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 14 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 16 \end{array}$$

uz $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Ideja je da pošto su leve strane tih nejednačina manje od desne, njih treba povećati sa nenegativnom promenljivom da bi leva strana bila jednaka desnoj strani. Funkcija cilja postaje $f = -3x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$. ■

Primer 6.0.6 Svesti na standardni oblik problem iz primera 6.0.2.

Rešenje. Pošto se traži $\min(20x_1 + 18x_2)$, pređimo na izravnavanje nejednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & & & & & = & 20 \\ 5x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & = & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 40 \end{array}$$

uz uslove $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Funkcija cilja postaje $f = 20x_1 + 18x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$. ■

Bazične i nebazične promenljive, dopustiva rešenja

Posmatraćemo standardni oblik LP problema od m linearnih nezavisnih jednačina sa n nepoznatih:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered} \tag{6.7}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

Pretpostavićemo da je $n \geq m$. *Bazično rešenje* za problem (6.7) je ono rešenje koje ima $(n - m)$ *nebazičnih promenljivih* (NBP) i one su jednake nuli. Preostalih m promenljivih su *bazične* (BP). Dakle, vrednost nebazičnih promenljivih se uvrsti u sistem gde su nejednačine pretvorene u jednačine i određujemo bazične promenljive. *Ba-zično dopustivo rešenje* (BDR) je ono bazično rešenje koje zadovoljava nenegativnost svih promenljivih (trivijalna ograničenja). Navešćemo sada neke važne osobine:

1. Dopustiva oblast LP problema je konveksan skup.
2. Temena tog konveksnog skupa nazivamo *ekstremne tačke*.
3. Prilikom traženja optimalnog rešenja LP problema, treba samo pronaći BDR, odnosno ekstremne tačke, u kojima funkcija cilja dostiže svoj minimum ili maksimum.

Primer 6.0.7 Odrediti sva bazična rešenja za

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 1.5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 14 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 16 \end{array}$$

uz $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$.

Rešenje. Posmatrani sistem ima $n = 5$ nepoznatih i $m = 3$ jednačine. Broj nebazičnih promenljivih je $n - m = 5 - 3 = 2$. Ako uzmemo da su x_1 i x_2 nebazične promenljive, tada je $x_1 = x_2 = 0$, a uvrštavanjem ovih vrednosti u dati sistem, dobijamo $x_3 = 14$, $x_4 = 30$ i $x_5 = 16$. Dobijeno je jedno BDR. Ostala BDR su data u tabeli 6.1.

Tabela 6.1: BDR za sistem iz primera 6.0.7.

Bazične promenljive	Nebazične promenljive	Bazično rešenje	Odgovarajuće teme BDR
x_3, x_4, x_5	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 14, x_4 = 30, x_5 = 16$	$(x_1, x_2) = (0, 0)$
x_2, x_4, x_5	x_1, x_3	$x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 14, x_4 = -12, x_5 = -12$	nije BDR
x_2, x_3, x_5	x_1, x_4	$x_1 = x_4 = 0,\ x_2 = 10, x_3 = 4, x_5 = -4$	nije BDR
x_2, x_3, x_4	x_1, x_5	$x_1 = x_5 = 0,\ x_2 = 8, x_3 = 6, x_4 = 6$	$(x_1, x_2) = (0, 8)$
x_1, x_4, x_5	x_2, x_3	$x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = \frac{28}{3}, x_4 = 2, x_5 = \frac{20}{3}$	$(x_1, x_2) = (\frac{28}{3}, 0)$
x_1, x_3, x_5	x_2, x_4	$x_2 = x_4 = 0,\ x_1 = 10, x_3 = -1, x_5 = 6$	nije BDR
x_1, x_3, x_4	x_2, x_5	$x_2 = x_5 = 0,\ x_1 = 16, x_3 = -10, x_4 = -18$	nije BDR
x_1, x_2, x_5	x_3, x_4	$x_3 = x_4 = 0,\ x_1 = 8, x_2 = 2, x_5 = 3$	$(x_1, x_2) = (8, 2)$
x_1, x_2, x_4	x_3, x_5	$x_3 = x_5 = 0,\ x_1 = 6, x_2 = 5, x_4 = -3$	nije BDR
x_1, x_2, x_3	x_4, x_5	$x_4 = x_5 = 0,\ x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 2$	$(x_1, x_2) = (4, 6)$

Ovim su određena BDR. ■

Primer 6.0.8 Odrediti sva bazična rešenja za

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & & & & & = & 20 \\ 5x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & = & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 40 \end{array}$$

uz uslove $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$.

Rešenje. Kao i u prethodnom primeru, posmatrani sistem ima $n = 5$ nepoznatih i $m = 3$ jednačine, te je broj nebazičnih promenljivih je 2. Ako uzmemo, na primer, da su x_3 i x_4 nebazične promenljive, tada je $x_3 = x_4 = 0$, a uvrštavanjem ovih vrednosti u dati sistem, dobijamo $x_1 = 10/9$, $x_2 = 40/9$ i $x_4 = 250/9$. Dobijeno je jedno BDR (videti tabelu 6.2).

Tabela 6.2: BDR za sistem iz primera 6.0.8.

Bazične promenljive	Nebazične promenljive	Bazično rešenje	Odgovarajuće teme BDR
x_3, x_4, x_5	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0, x_3 = -20, x_4 = -10, x_5 = -40$	nije BDR
x_2, x_4, x_5	x_1, x_3	$x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 5, x_4 = -5, x_5 = 30$	nije BDR
x_2, x_3, x_5	x_1, x_4	$x_1 = x_4 = 0,\ x_2 = 10, x_3 = 20, x_5 = 20$	$(x_1, x_2) = (0, 10)$
x_2, x_3, x_4	x_1, x_5	$x_1 = x_5 = 0,\ x_2 = 20, x_3 = 60, x_4 = 10$	$(x_1, x_2) = (0, 20)$
x_1, x_4, x_5	x_2, x_3	$x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = 10, x_4 = 40, x_5 = 10$	$(x_1, x_2) = (10, 0)$
x_1, x_3, x_5	x_2, x_4	$x_2 = x_4 = 0,\ x_1 = 2, x_3 = -16, x_5 = 34$	nije BDR
x_1, x_3, x_4	x_2, x_5	$x_2 = x_5 = 0,\ x_1 = \frac{40}{3}, x_3 = \frac{20}{3}, x_4 = \frac{170}{3}$	$(x_1, x_2) = (\frac{40}{3}, 0)$
x_1, x_2, x_5	x_3, x_4	$x_3 = x_4 = 0,\ x_1 = \frac{10}{9}, x_2 = \frac{40}{9}, x_5 = \frac{250}{9}$	$(x_1, x_2) = (\frac{10}{9}, \frac{40}{9})$
x_1, x_2, x_4	x_3, x_5	$x_3 = x_5 = 0,\ x_1 = 15, x_2 = -\frac{5}{2}, x_4 = \frac{125}{2}$	nije BDR
x_1, x_2, x_3	x_4, x_5	$x_4 = x_5 = 0,\ x_1 = -\frac{20}{7}, x_2 = \frac{170}{7}, x_3 = \frac{500}{7}$	nije BDR

Ovim smo odredili BDR. ■

Za rešavanje problema iz LP koristimo:

1. Geometrijsku metodu (kada u problemu LP figurišu dve promenljive) i

2. Simpleks metodu (kada u problemu LP figurišu dve, tri i više promenljivih).

6.1 Geometrijski metod

Algoritam geometrijske metode je sledeći:

1. Prvo se nacrtaju ograničenja, odnosno sve poluravni određene tim ograničenjima i nađe njihov presek. Time se dobija dopustiv skup.

2. Nacrta se prava $f = a$, gde je f funkcija cilja, a a neka konstanta, i paralelno se pomera dok ne prođe kroz neko teme dopustive oblasti.

3. Izračuna se vrednost funkcije cilja u tom temenu i, ako je ona manja (veća) od a, to znači da će minimum (maksimum) funkcije cilja biti u poslednjoj tački dopustive oblasti kroz koju ta prava prođe ako nastavimo pomeranje u istom smeru. Ako pomeranje nastavimo u suprotnom smeru, u poslednjoj tački dopustive oblasti kroz koju prođe prava, funkcija cilja će imati maksimum (minimum).

4. Ako je dopustiva oblast neograničena, tada funkcija cilja može imati ili samo maksimum ili samo minimum ili ni maksimum ni minimum.

Ako je dopustiv skup ograničen, možemo koristiti i naredni algoritam:

1. Nacrtaju se ograničenja, odnosno sve poluravni određene tim ograničenjima i nađe njihov presek. Time se dobija dopustiv skup.

2. Odrede se sva temena dopustive oblasti.

3. Izračunaju se vrednosti funkcije cilja u tim temenima i nakon toga se odredi njena najmanja (najveća) vrednost od svih vrednosti u temenima.

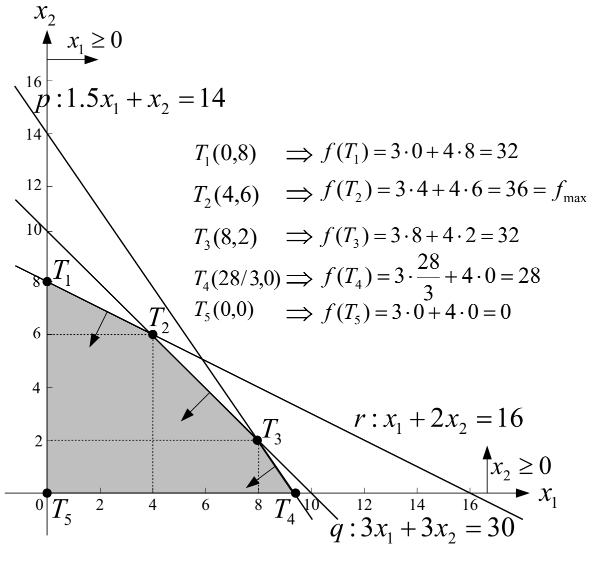
Primer 6.1.1 Rešiti problem iz primera 6.0.1, odnosno odrediti

$$\max(3x_1 + 4x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} 1.5x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}.$$

Rešenje. Pošto se maksimum funkcije cilja nalazi u temenima dopustive oblasti, potrebno je odrediti njena temena kao što je prikazano na slici 6.7.



Slika 6.7: Dopustiva oblast i temena za sistem iz primera 6.1.1.

Koordinate temena T_1 se dobijaju ako se u jednačinu prave $r : x_1 + 2x_2 = 16$ uvrsti da je $x_1 = 0$. Tada je $x_2 = 8$, pa je $T_1(0, 8)$. Koordinate temena T_4 se dobijaju ako se u jednačinu prave $p : 1.5x_1 + x_2 = 14$ uvrsti $x_2 = 0$. Dobijamo $x_1 = 28/3$ pa je $T_4(28/3, 0)$. Jasno je da je tačka $T_5(0, 0)$. Teme T_2 nastaje u preseku pravih q i r pa je, zbog toga, potrebno rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 &= 16 \end{aligned}$$

čije je rešenje $(x_1, x_2) = (4, 6)$. Teme T_3 nastaje u preseku pravih p i q te je sada potrebno rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + x_2 &= 14 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 30 \end{aligned}$$

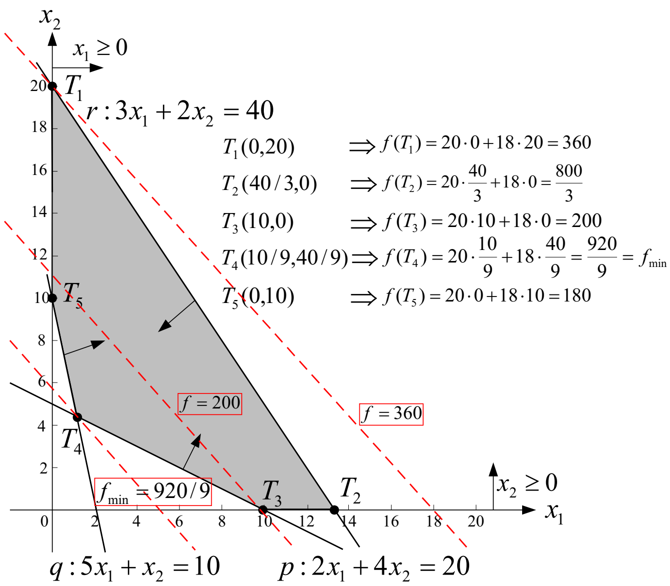
čije je rešenje $(x_1, x_2) = (8, 2)$. Sada, kada znamo koordinate svih pet temena, potrebno je izračunati vrednost funkcije cilja $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ u tim temenima i odrediti najveću vrednost. Dakle,

$$\begin{aligned} f(T_1) &= f(0, 8) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 8 = 32, \\ f(T_2) &= f(4, 6) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 36, \\ f(T_3) &= f(8, 2) = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 32, \\ f(T_4) &= f(28/3, 0) = 3 \cdot \tfrac{28}{3} + 4 \cdot 0 = 28, \\ f(T_5) &= f(0, 0) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da funkcija cilja dostiže svoj maksimum $f_{\max} = 36$ u temenu $T_2(4, 6)$. ■

Primer 6.1.2 Geometrijskom metodom naći minimum funkcije $f(x_1, x_2) = 20x_1 + 18x_2$ uz ograničenja: $2x_1 + 4x_2 \geq 20$, $5x_1 + x_2 \geq 10$, $3x_1 + 2x_2 \leq 40$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Rešenje. Nakon određivanja koordinata temena i vrednosti funkcije cilja u tim temenima, dolazimo do zaključka da je minimum u tački T_4 i da je $f_{\min} = \frac{920}{9}$ (slika 6.8).



Slika 6.8: Dopustiv skup i temena iz primera 6.1.2.

Navedimo sada i drugi način određivanja minimuma date funkcije cilja. Nacrtajmo pravu $f(x_1, x_2) = a$, recimo $20x_1 + 18x_2 = 360$ (slika 6.8, prava $f = 360$). Data prava prolazi kroz teme T_1 i vrednost funkcije cilja je 360. Ako pomeramo tu pravu paralelno ka dopustivoj oblasti i izračunamo vrednost funkcije cilja u temenu T_3, dolazimo do toga da je vrednost funkcije cilja u temenu T_3 sada 200. Znači da se ovakvim pomeranjem vrednost funkcije cilja smanjuje, što dovodi do zaključka da će u poslednjoj tački dopustivog skupa kroz koju prođe prava paralelna sa pravom $f = 360$, funkcija cilja imati minimum. Poslednja tačka je teme T_4 i nakon određivanja koordinata tog temena, dolazimo i do vrednosti funkcije cilja u toj tački $f(T_4) = 920/9 = f_{\min}$. Ovaj drugi način određivanja minimuma ili maksimuma funkcije cilja je pogodan kada dopustiv skup ima mnogo temena koja se moraju odrediti rešavanjem odgovarajućih sistema jednačina. ■

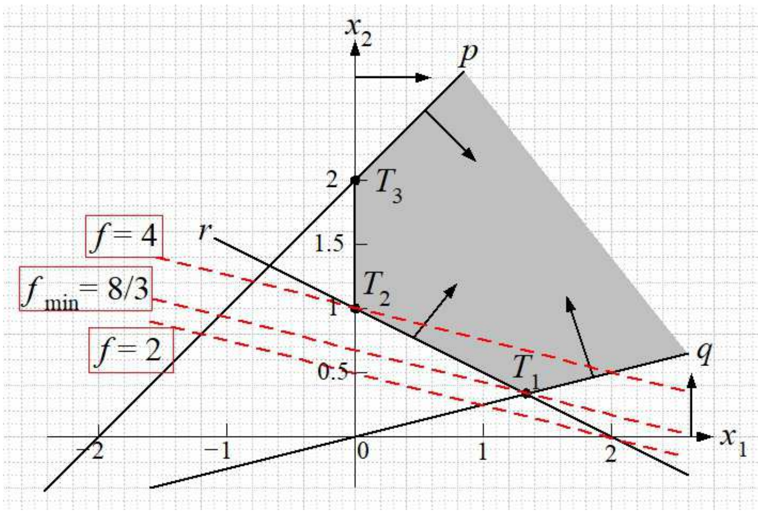
Sada ćemo navesti primer kod kojeg je dopustiva oblast neograničena.

Primer 6.1.3 Geometrijskom metodom naći minimum i maksimum funkcije

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2$$

(ako postoje) uz ograničenja: $-x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 - 4x_2 \leq 0$, $x_1 + 2x_2 \geq 2$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Rešenje. Kao što je prikazano na slici 6.9, prava p će biti $-x_1 + x_2 = 2$, prava q je $x_1 - 4x_2 = 0$ i prava r je definisana sa $x_1 + 2x_2 = 2$. Nakon određivanja odgovarajućih poluravni, dobijamo da je tražena dopustiva oblast neograničena. Ako nacrtamo funkciju cilja $f(x_1, x_2) = 2$ i izračunamo njenu vrednost u temenu $T_2(0, 1)$ dobijamo da je $f = 4$, što znači da vrednost funkcije cilja raste paralelnim pomeranjem na gore. Minimum će biti u prvoj tački dopustive oblasti na koju ova prava naiđe paralelenim pomeranjem na gore prave $f(x_1, x_2) = 2$. U ovom slučaju to je tačka T_1, koja nastaje u preseku pravih q i r. Koordinate temena T_1 su $x_1 = 4/3$ i $x_2 = 1/3$, dok je $f(x_1, x_2) = 4/3 + 4 \cdot 1/3 = 8/3$ i to je minimum funkcije cilja. Maksimum ne postoji jer neograničenim paralelnim pomeranjem na gore prave $f(x_1, x_2) = 2$



Slika 6.9: Dopustiv skup i temena iz primera 6.1.3.

uvek imamo presek sa dopustivim skupom, odnosno vrednost funkcije cilja neograničeno raste na dopustivom skupu. ■

6.2 Simpleks metoda

Simpleks metoda je najrašireniji način za rešavanje problema linearnog programiranja. Ideja simpleks metode je u pretraživanju mogućih rešenja. Polazi se od jednog takvog rešenja i formira se niz sve boljih bazično mogućih rešenja. Simpleks metoda ima više verzija, ovde ćemo koristiti tablični zapis simpleks metode. Pretpostavka je da nema međusobno zavisnih netrivijalnih ograničenja. Na primer, za LP problem $\min(3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4)$ uz uslove

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ -x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

gde je $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, pridružena simpleks tablica je

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad . \tag{6.8}$$

Bazična kolona je kolona koja ima jednu jedinicu (*bazična jedinica*), koja nije u poslednjoj vrsti, i 0 na preostalim mestima (treća i četvrta kolona prethodne tablice su bazične kolone). Dve različite bazične kolone nemaju jedinicu na istoj poziciji. *Bazična promenljiva* je ona promenljiva kojoj je pridružena bazična kolona (x_3 i x_4 su bazične promenljive), preostale promenljive su *nebazične*.

6.2.1 Algoritam formiranja simpleks tablice

Posmatrajmo sada problem (6.7). Pod pretpostavkom da u (6.7) ima m bazičnih promenljivih (bazičnih kolona) i da je $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, možemo formirati početnu simpleks tablicu.

- Prvih m vrsta simpleks tablice čine koeficijenti sistema u (6.7), dok su u poslednjoj koloni slobodni koeficijenti iz m jednačina posmatranog sistema.

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \vdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
 & & & & & &
\end{array} .$$

- U poslednjoj vrsti su koeficijenti funkcije cilja iz (6.7).

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \vdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n &
\end{array} .$$

  Možemo reći da je j-ta kolona dodeljena promenljivoj x_j, $j = 1, 2, \dots, n$.

- Neka su bazične kolone $j_1, j_2, \dots, j_m$, a $j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n$ neka su nebazične kolone. Tada i promenljive $x_{j_{m+1}}, x_{j_{m+2}}, \dots, x_{j_n}$ nisu bazične promenljive (nisu im dodeljene bazične kolone) i važiće $x_{j_k} = 0$, $k = m + 1, \dots, n$.

- Vrednost bazične promenljive jednaka je slobodnom koeficijentu iz vrste u kojoj se nalazi bazična 1. Neka se bazične jedinice nalaze u vrstama $i_1, i_2, \dots, i_m$, tj. $a_{i_k, j_k} = 1$ za $k = 1, 2, \dots, m$. Tada važi da su vrednosti za bazične promenljive date sa $x_{j_k} = b_{i_k}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

- Koeficijenti iz funkcije cilja koje odgovaraju bazičnim kolonama moraju biti jednaki nuli, tj. $c_{j_k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$. Ako je, recimo, za neko $s \in \{1, 2, \dots, m\}$, $c_{j_s} \neq 0$, a u bazičnoj koloni j_s se broj 1 nalazi u vrsti $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, tada je potrebno vrstu i pomnožiti sa $-c_{j_s}$ i tako pomnoženu i-tu vrstu dodati poslednjoj vrsti. Ovaj postupak zovemo *popravak bazičnih kolona*.

- Pošto smo svakoj promenljivoj x_j, $j = 1, 2, \dots, n$, dodelili ili 0 ili vrednost slobodnog koeficijenta, što ćemo obeležiti sa $x_j^0 = x_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, trenutno bazično rešenje pridruženo tablici zvaćemo *bazično produženo rešenje* i ono je oblika

$$z_{bp}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) ,$$

  a vrednost funkcije cilja u (6.7) u tački z_{bp}^0 je

$$f(z_{bp}^0) = c_1 \cdot x_1^0 + c_2 \cdot x_2^0 + \dots + c_n \cdot x_n^0 .$$

  Sa z_b^0 obeležićemo *bazično rešenje* pridruženo tablici koje ne sadrži izravnavajuće i veštačke promenljive (z_b^0 sadrži samo promenljive koje su date u početnoj funkciji cilja).

- Konačno, odgovarajuća simpleks tablica je

$$\begin{array}{cccccc|l} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \vdots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n & -f(z^0_{bp}) \end{array} . \tag{6.9}$$

Primer 6.2.1 Napraviti početnu simpleks tablicu za problem

$$\max(3x_1 + 4x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} 1.5x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} .$$

Rešenje. Potrebno je problem konvertovati u standardni oblik.

I korak: Prvo ćemo maksimum funkcije cilja da pretvorimo u minimum. Dakle,

$$\max(3x_1 + 4x_2) = -\min(-3x_1 - 4x_2) .$$

i

$$f = -3x_1 - 4x_2$$

je funkcija cilja.

II korak: Nema negativnih slobodnih koeficijenata, tako da ovaj korak preskačemo.

III korak: Od nejednačina treba napraviti jednačine. Kod svakog netrivijalnog ograničenja imamo nejednakost $\leq$, što znači da moramo da dodamo po jednu novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu kao što sledi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 1.5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 14 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 16 \end{array} \tag{6.10}$$

uz $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Funkcija cilja mora sadržati i nove izravnavajuće promenljive koje ne smeju da utiču na njenu vrednost. Zbog toga su izravnavajuće promenljive u funkciji cilja pomnožene nulom. Dakle, tražićemo minimum od

$$f = -3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5. \tag{6.11}$$

IV korak: Sada treba formirati simpleks tablicu pomoću (6.10) i (6.11). Od koeficijenata iz sistema (6.10), slobodnih koeficijenata i koeficijenata iz funkcije cilja napišimo tablicu (6.12)

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & -f(z^0_{bp}) \end{array} \tag{6.12}$$

odnosno

$$\begin{array}{rrrrr|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 3/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ \hline -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & -f(z_{bp}^0) \end{array} \quad . \tag{6.13}$$

Bazične promenljive u (6.13) su x_3, x_4 i x_5, jer se u kolonama koje odgovaraju tim promenljivima nalazi jedna jedinica (*bazična jedinica*) i na ostalim mestima nule. Svaka jedinica se nalazi u različitoj vrsti. Bazične promenljive dobijaju vrednost slobodnog koeficijenta iz vrste u kojoj se nalazi bazična jedinica. Dakle, $x_3 = 40$, $x_4 = 30$ i $x_5 = 16$. Nebazične promenljive su x_1 i x_2. Kao što je prethodno rečeno, nebazične promenljive dobijaju vrednost nula, odnosno $x_1 = x_2 = 0$. Sada je

$$z_{bp}^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 40, 30, 16).$$

Ako ove vrednosti uvrstimo u (6.11) dobijamo

$$f(z_{bp}^0) = -3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 16 = 0$$

što znači da je trenutna vrednost funkcije cilja 0 i ona se, takođe upisuje u tabelu (6.13). Znači da početna simpleks tablica mora biti kao u (6.14)

$$\begin{array}{rrrrr|c} 3/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ \hline -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad . \tag{6.14}$$

Napomenimo da je $z_b^0 = (x_1, x_2)$, gde su x_1 i x_2 promenljive koje se javljaju pre konvertovanja u standardni oblik. Dakle, $z_b^0 = (0, 0)$. ■

Primer 6.2.2 Napraviti početnu simpleks tablicu za problem

$$\min(20x_1 + 18x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & - & 4x_2 & \leq & -20 \\ 5x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 40 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \quad .$$

Rešenje. Ponovićemo postupak iz prethodnog zadatka uz neophodne modifikacije.

I korak: Pošto se traži minimum funkcije cilja, nema potrebe da se maksimum pretvara u minimum. Ovaj korak preskačemo.

II korak: Slobodni koeficijent u prvoj nejednačini je negativan, tako da tu nejednačinu treba pomnožiti sa -1. Posmatrane nejednačine postaju

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 20 \\ 5x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 40 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array} .$$

III korak: Od nejednačina treba napraviti jednačine. U prve dve nejednačine imamo nejednakost $\geq$, što znači da levim stranama moramo da oduzmemo po jednu novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu ali da odmah i dodamo po jednu novu *veštačku nenegativnu promenljivu* zbog formiranja baziičnih promenljivih. Poslednja nejednačina ima $\leq$ pa se levoj strani dodaje nova izravnavajuća promenljiva kao što sledi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & & & & & = & 20 \\ 5x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & + & x_6 & & & = & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & = & 40 \end{array} . \tag{6.15}$$

Trivijalna ograničenja su $x_1, x_2, \ldots, x_7 \geq 0$. Funkcija cilja je oblika

$$f = 20 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 . \tag{6.16}$$

IV korak: Sada treba formirati simpleks tablicu pomoću (6.15) i (6.16). Od koeficijenata iz sistema (6.15), slobodnih koeficijenata i koeficijenata iz funkcije cilja napišimo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ \hline 20 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f \end{array} . \tag{6.17}$$

Bazične promenljive u (6.17) su x_4, x_6 i x_7 i sada se vidi razlog uvođenja veštačkih promenljivih x_4 i x_6. Bez njih ne bismo imali tri bazične promenljive, već samo jednu x_7, a to onda ne bi bila simpleks tablica. Sada je $x_4 = 20$, $x_6 = 10$ i $x_7 = 40$. Nebazične promenljive su x_1, x_2, x_3 i x_5, te je $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$. Ako ove vrednosti uvrstimo u (6.16) dobijamo

$$f = 20 \cdot 0 + 18 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 0 = 0$$

što znači da je trenutna vrednost funkcije cilja 0 i ona se upisuje na mestu $-f$ u tabeli (6.17). Početna simpleks tablica mora biti kao u (6.18)

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ \hline 20 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} . \tag{6.18}$$

Sada je $z_{bp}^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 20, 0, 10, 40)$, a $z_b^0 = (x_1, x_2) = (0, 0)$. ■

Primer 6.2.3 Datom problemu pridružiti simpleks tablicu

$$\min(-x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & & & & & - & x_4 & & & + & x_6 & = & 1 \\ -2x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0\,.$$

Rešenje. Funkcija cilja, od koje se traži minimum, biće oblika

$$f = -x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

dok će odgovarajuća tablica biti

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\,.$$

Vidimo da su peta i šesta kolona bazične i da je potrebna još jedna kolona da bude bazična pošto je broj bazičnih promenljivih jednak broju jednačina u sistemu. Druga kolona će biti bazična ako se treća vrsta pomnoži sa -2 i doda u poslednju vrstu. Ovim smo popravili tablicu da postane početna simpleks tablica. Znači, početna simpleks tablica biće

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \hline -3 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & -8 \end{array}\,.$$

Početno bazično (produženo) rešenje pridruženo ovoj tablici biće

$$z_b^0 = z_{bp}^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 4, 0, 0, 2, 1)$$

a vrednost funkcije cilja

$$f(z_{bp}^0) = -0 + 2 \cdot 4 + 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8$$

što je jednako broju u donjem desnom uglu tabele nakon množenja sa -1. ■

Primer 6.2.4 Odrediti početnu simpleks tablicu za problem

$$\max(x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} & & & & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & = & 6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & & & & & = & 10 \\ x_1 & & & & & & & & & - & x_6 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & & & + & x_6 & + & x_7 & = & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0\,.$$

Rešenje. Pošto se zahteva maksimum funkcije cilja, moramo ga konvertovati u minimum. Dakle

$$\max(x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7) = -\min(-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7)$$

i funkcija cilja će biti

$$f = -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7\,.$$

Odgovarajuća tablica je

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\,.$$

Sada je još potrebno da se koriguje tablica da bismo imali četiri bazične kolone, odnosno promenljive x_1, x_2, x_5 i x_7 treba da postanu bazične. Prvu i treću vrstu dodajemo u poslednju, drugu vrstu množimo sa -1 i dodajemo u poslednju, četvrtu vrstu množimo sa -3 i dodajemo u poslednju. Dobijamo početnu simpleks tablicu

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -2 & 0 & -22 \end{array}\,.$$

Početno bazično (produženo) rešenje pridruženo tablici je

$$z_b^0 = z_{bp}^0 = (0, 10, 0, 0, 6, 0, 6)\,,$$

a vrednost funkcije cilja u toj tački je

$$f(z_{bp}^0) = -0 + 10 - 0 + 3 \cdot 0 - 6 + 0 + 3 \cdot 6 = 22\,.$$

Primetimo da je maksimum zapravo jednak $-f(z_{bp}^0) = -22$. ∎

U narednom primeru biće prikazano kako se formira simpleks tablica ako za neku promenljivu nedostaje trivijalno ograničenje.

Primer 6.2.5 Odrediti početnu simpleks tablicu za problem

$$\min(3x_1 + x_2 - 2x_3)$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_3 \geq 0\,.$$

Rešenje. Promenljivu x_2 napisaćemo kao $x_2 = x_2' - x_2''$, gde su x_2' i x_2'' nenegativne promenljive, tj. $x_2' \geq 0$, $x_2'' \geq 0$. Sada posmatramo novi problem

$$\min(3x_1 + x_2' - x_2'' - 2x_3)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & - & x_3 & \geq & 1 \\ & - & x_2' & + & x_2'' & + & 2x_3 & \leq & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2', x_2'', x_3 \geq 0\,.$$

Sada ćemo od nejednačina napraviti jednačine tako što ćemo oduzeti i dodati nove nenegativne izravnavajuće promenljive x_4 i x_5 kao što sledi:

$$\min(3x_1 + x_2' - x_2'' - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ & - & x_2' & + & x_2'' & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0\,.$$

Odgovarajuća tablica je

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

koja mora biti popravljena do bi postala simpleks tablica. Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa -3 i dodati u poslednju vrstu. Tada će prva kolona postati bazična i to je razlog zbog čega u prvoj jednačini nismo uveli i veštačku promenljivu. Dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 7 & -7 & 1 & 3 & 0 & -3 \end{array}\,.$$

Početno bazično produženo rešenje pridruženo tablici je

$$z_{bp}^0 = (1, 0, 0, 0, 0, 4)\,,$$

a vrednost funkcije cilja $f(x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5) = 3x_1 + x_2' - x_2'' - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5$ u toj tački je

$$f(z_{bp}^0) = 3 \cdot 1 + 0 - 0 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 3,$$

a to je broj u donjem desnom uglu simpleks tablice pomnožen sa -1. Na kraju, sada je $z_b^0 = (x_1, x_2' - x_2'', x_3) = (1, 0, 0)$. ∎

6.2.2 Algoritam simpleks metode

Korak 0: Formirati početnu simpleks tablicu za zadati problem (6.7) gde se traži minimum funkcije cilja. Elementi te tablice imaće oznaku $k = 0$ u eksponentu (6.19).

$$\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1r}^0 & \dots & a_{1n}^0 & b_1^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \dots & a_{2r}^0 & \dots & a_{2n}^0 & b_2^0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{s1}^0 & a_{s2}^0 & \dots & a_{sr}^0 & \dots & a_{sn}^0 & b_s^0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}^0 & a_{m2}^0 & \dots & a_{mr}^0 & \dots & a_{mn}^0 & b_m^0 \\ \hline c_1^0 & c_2^0 & \dots & c_r^0 & \dots & c_n^0 & -f(z_{bp}^0) \end{array} \quad . \tag{6.19}$$

Ako z_b^0 pripada dopustivoj oblasti problema, preći na Korak 1 uz $k = 0$. U suprotnom, otići na Korak 9.

Korak 1: Simpleks tablica je oblika

$$\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^k & a_{12}^k & \dots & a_{1r}^k & \dots & a_{1n}^k & b_1^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & \dots & a_{2r}^k & \dots & a_{2n}^k & b_2^k \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{s1}^k & a_{s2}^k & \dots & a_{sr}^k & \dots & a_{sn}^k & b_s^k \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}^k & a_{m2}^k & \dots & a_{mr}^k & \dots & a_{mn}^k & b_m^k \\ \hline c_1^k & c_2^k & \dots & c_r^k & \dots & c_n^k & -f(z_{bp}^k) \end{array} \tag{6.20}$$

i proveravamo da li je $c_j^k \geq 0$, za svako $j = 1, 2, \dots, n$. Ako jeste, preći na Korak 7, u suprotnom nastaviti do Koraka 2.

Korak 2: Za svako j, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, za koje je $c_j^k < 0$, ispitati da li je $a_{ij}^k \leq 0$ za sve $i = 1, 2, \dots, m$. Ako postoji takvo j, otići na Korak 8. U suprotnom, preći na Korak 3.

Korak 3: Neka se najmanje $c_j^k < 0$ nalazi u r-toj koloni, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$. To znači da će promenljiva x_r ući u bazu. Preći na Korak 4.

Korak 4: Biramo najmanji količnik $\frac{b_i^k}{a_{ir}^k}$ za koje je $a_{ir}^k > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Neka se tako izabrani količnik nalazi u vrsti s. Promenljiva kod koje se bazična jedinica nalazi u vrsti s izlazi iz baze. Preći na Korak 5.

Korak 5: Ako je broj a_{sr}^k različit od 1, celu s-tu vrstu treba podeliti sa a_{sr}^k i time na poziciji (sr) dobiti baziċnu jedinicu. To znači da je $a_{sr}^{k+1} = 1$. Ostalim vrstama dodati s-tu vrstu pomnoženu odgovarajućim koeficijentima, tako da preostali elementi u r-toj koloni budu jednaki nuli, tj. $a_{ir}^{k+1} = 0$, $i \neq s$, $c_r^{k+1} = 0$. Konkretno, i-toj vrsti $(1 \leq i \leq m,\ i \neq s)$ treba dodati s-tu vrstu pomnoženu sa $-\frac{a_{ir}^k}{a_{sr}^k}$, a poslednjoj vrsti treba dodati s-tu vrstu pomnoženu sa $-\frac{c_r^k}{a_{sr}^k}$. Preći na Korak 6.

Korak 6: Sada je $k = k + 1$ i vratiti se na Korak 1.

Korak 7: Bazično prošireno rešenje z_{bp}^k pridruženo dobijenoj simpleks tablici je optimalno. Minimum funkcije cilja je broj u donjem desnom uglu tabele pomnožen sa -1. Kraj algoritma.

Korak 8: Problem nema rešenje. Kraj algoritma.

Korak 9: Potrebna je dvofazna modifikacija simpleks metode.

Primer 6.2.6 Odrediti optimalno rešenje problema

$$\max(3x_1 + 4x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} 1.5x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{6.21}$$

pomoću simpleks metode.

Rešenje.
Korak 0: Kao što je i urađeno u primeru 6.2.1, početna simpleks tablica je

$$\begin{array}{rrrrr|r} 3/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ \hline -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \;. \tag{6.22}$$

Podsetimo se, bazične promenljive su $x_3 = 14$, $x_4 = 30$ i $x_5 = 16$, nebazične su $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$. Sada je tačka

$$z_{bp}^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 14, 30, 16)$$

BDR pridruženo tablici. Trenutna vrednost funkcije cilja data je u donjem desnom uglu tablice u (6.22) i ona je jednaka nuli, tj. za

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \tag{6.23}$$

važiće

$$-f(z_{bp}^0) = -(-3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 16) = 0\,.$$

Uvrstimo još $z_b^0 = (x_1, x_2) = (0, 0)$ u (6.21). Kako su zadovoljene sve nejednačine u (6.21), možemo otići na Korak 1.

Korak 1: Postoje vrednosti u poslednjoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, koje su negativne. Preći na naredni korak.

Korak 2: Ne postoji kolona koja u poslednjoj vrsti ima negativan broj, a da su joj preostali elementi svi negativni ili jednaki nuli. Idemo na Korak 3.

Korak 3: Da bi minimum funkcije cilja bio što manji, potrebno je da x_2 promenljiva postane bazična promenljiva jer je u funkciji cilja pomnožena sa najmanjim negativnim brojem. Dakle, u poslednjoj vrsti simpleks tablice, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, najmanji negativni broj je -4, što potvrđuje da će promenljiva x_2 postati bazična promenljiva jer se -4 nalazi u drugoj koloni tablice

$$\begin{array}{rrrrr|r} 3/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ \hline -3 & \color{red}{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Korak 4: Sada je potrebno podeliti i-ti slobodni koeficijent sa odgovarajućim pozitivnim koeficijentom iz i-te vrste, a koji se nalazi u koloni u kojoj je izabrani broj iz Koraka 3, a to je druga kolona, $i = 1, 2, 3$. Dakle,

$$\frac{14}{1} = 14\,, \quad \frac{30}{3} = 10\,, \quad \frac{16}{2} = 8\,.$$

Sada od tri količnika treba izabrati najmanji, a to je broj 8, i potrebno je u simpleks tablici označiti broj 2 koji se nalazi u trećoj vrsti i drugoj koloni, jer je broj 8 dobijen kao 16 podeljeno sa 2

$$\begin{array}{rrrrr|r} 3/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & \color{blue}{\mathbf{2}} & 0 & 0 & 1 & 16 \\ \hline -3 & \color{red}{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Korak 5: Na mestu koeficijenta $a_{3,2} = 2 = a^0_{3,2}$, mora biti bazična jedinica, tako da je potrebno celu treću vrstu podeliti sa brojem 2. Sledi da promenljiva x_5 više neće biti bazična promenljiva jer će sada umesto 1 u trećoj vrsti i petoj koloni biti $1/2$. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 3/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1/2 & \color{blue}{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline -3 & \color{red}{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Sada ćemo napraviti da promenljiva x_2 bude bazična. Dakle, u svakoj vrsti druge kolone, osim u trećoj gde je bazična jedinica, treba dobiti nulu. Koristićemo transformaciju množenje vrste brojem koji nije nula i dodavanje nekoj drugoj vrsti. Ako treću vrstu pomnožimo sa 4 i dodamo četvrtoj vrsti, a nakon toga treću vrstu pomnožimo sa -3 i dodamo drugoj vrsti i ako treću vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo prvoj vrsti, dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 6 \\ 3/2 & 0 & 0 & 1 & -3/2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}.$$

Korak 6: $k = 1$. Sada su bazične promenljive $x_2 = 8$, $x_3 = 6$ i $x_4 = 6$, a preostale su nebazične $x_1 = x_5 = 0$. Dakle,

$$z^1_{bp} = (0, 8, 6, 6, 0).$$

Trenutna vrednost funkcije cilja je $f(z_{bp}^1) = -32$, odnosno broj u donjem desnom uglu tablice se pomnoži sa minus jedan i to je trenutni minimum funkcije cilja. To se može i proveriti ako se u (6.23) uvrste trenutne vrednosti za promenljive:

$$f(z_{bp}^1) = -3\cdot 0 - 4\cdot 8 + 0\cdot 6 + 0\cdot 6 + 0\cdot 0 = -32\,.$$

Vraćamo se na Korak 1.

Korak 1. Sada je $k = 1$ u algoritmu simpleks metode. U poslednjoj vrsti tablice

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 6 \\ 3/2 & 0 & 0 & 1 & -3/2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}$$

ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, ima negativnih brojeva, prelazimo na Korak 2.

Korak 2: U prvoj koloni gde se nalazi negativan broj iz prethodnog koraka ima pozitivnih koeficijenata sistema i prelazimo na Korak 3.

Korak 3: Biramo -1 iz prve kolone i poslednje vrste

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 6 \\ 3/2 & 0 & 0 & 1 & -3/2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}\,.$$

Korak 4: Proveravamo koji je najmanji količnik od

$$\frac{6}{1} = 6\,,\quad \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4\,,\quad \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16\,.$$

Zaključujemo da 3/2 treba obeležiti u tablici (pošto je 4 najmanji količnik) kao što sledi

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 6 \\ \mathbf{3/2} & 0 & 0 & 1 & -3/2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}\,.$$

Korak 5: Delimo drugu vrstu sa 3/2 i dobijamo

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 6 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 2/3 & -1 & 4 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}\,.$$

Od prve kolone formiramo baznu kolonu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 36 \end{array}\,.$$

Korak 6: $k = 2$. Sada su bazične promenljive $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ i $x_3 = 2$, a preostale su nebazične $x_4 = x_5 = 0$. Dakle,

$$z_{bp}^2 = (4, 6, 2, 0, 0).$$

Trenutna vrednost funkcije cilja je $f(z_{bp}^2) = -36$, odnosno broj u donjem desnom uglu tablice se pomnoži sa minus jedan i to je trenutni minimum funkcije cilja. To se može i proveriti ako se u (6.23) uvrste trenutne vrednosti za promenljive:

$$f(z_{bp}^2) = -3 \cdot 4 - 4 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 0 = -36\,.$$

Vraćamo se na Korak 1.

Korak 1: U poslednjoj vrsti sada nema negativnih koeficijenata tako da idemo na Korak 7.

Korak 7: Dobijena je optimalna tablica. Optimalna tačka je $z_{bp}^{opt} = (4, 6, 2, 0, 0)$ i $f_{\max} = -f(z_{bp}^{opt}) = 36$. Bazično optimalno rešenje je $z_b^{opt} = (x_1, x_2) = (4, 6)$. ■

Primer 6.2.7 Odrediti optimalnu simpleks tablicu za problem

$$\min(-x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & & & & & - & x_4 & & & + & x_6 & = & 1 \\ -2x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 4 \end{array} \tag{6.24}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0\,.$$

Rešenje. Početna simpleks tablica je određena u primeru 6.2.3 i oblika je

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \hline \mathbf{-3} & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & -8 \end{array}\,.$$

Optimalnu tablicu ćemo tražiti po već datim koracima ali ih nećemo numerisati. Tačka $z_b^0 = (0, 4, 0, 0, 2, 1)$ zadovoljava sve jednačine. U poslednjoj vrsti (ne računajući element iz poslednje kolone) imamo dva ista najmanja negativna broja, u prvoj i trećoj koloni. Izaberimo, recimo, -3 iz prve kolone. Tada je potrebno odrediti najmanji količnik od:

$$\frac{1}{1} = 1\,, \quad \frac{4}{1} = 4\,,$$

a to je 1, te u tablici označavamo koeficijent uz x_1 pomoću kog smo dobili taj količnik, tj.

$$\begin{array}{rrrrrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \hline \mathbf{-3} & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & -8 \end{array}\,.$$

Dakle, x_1 ulazi u bazu, a x_6 izlazi iz baze. Množeći prvu vrstu sa 2 i dodajući je u drugu, množeći prvu vrstu sa -1 i dodavajući je u treću vrstu, kao i množeći prvu vrstu sa 3 i dodavajući je u poslednju vrstu, dobijamo novu simpleks tablicu

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{2} & 0 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -3 & \mathbf{-5} & 0 & 3 & -5 \end{array} .$$

Sada je najmanji negativni broj -5 u četvrtoj koloni (x_4 promenljiva ulazi u bazu), a jedini količnik koji se posmatra je $3/2$ te je on i najmanji pozitivni količnik (x_2 izlazi iz baze). Sada u trećoj vrsti i četvrtoj koloni mora biti jedinica, te celu treću vrstu delimo sa 2. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1/2 & 1 & \mathbf{1} & 0 & -1/2 & 3/2 \\ \hline 0 & 0 & -3 & \mathbf{-5} & 0 & 3 & -5 \end{array} .$$

Moramo sada napraviti bazičnu kolonu na mestu četvrte kolone elementarnim transformacijama nad jednačinama (vrstama). Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ \hline 0 & 5/2 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 5/2 \end{array} .$$

Znači, optimalno rešenje je $z_b^{opt} = z_{bp}^{opt} = (5/2, 0, 0, 3/2, 7, 0)$, a minimum je $= -5/2$. ■

Primer 6.2.8 Odrediti optimalnu simpleks tablicu za problem

$$\max(x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7)$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & = & 6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & & & & & = & 10 \\ x_1 & & & & & & & & & - & x_6 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & & & + & x_6 & + & x_7 & = & 6 \end{array} \tag{6.25}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 .$$

Rešenje. Početna simpleks tablica je dobijena u primeru 6.2.4 i oblika je

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & \mathbf{3} & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{-3} & 6 & 0 & -2 & 0 & -22 \end{array} .$$

Tačka $z_b^0 = (0, 10, 0, 0, 6, 0, 6)$ zadovoljava sve jednačine. Najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, je -3 i on se nalazi u trećoj koloni.

Dakle x_3 ulazi u bazu. Ako podelimo slobodne koeficijente sa pozitivnim koeficijentima iz treće kolone, dobijamo

$$\frac{6}{3} = 2\,, \quad \frac{10}{2} = 5\,, \quad \frac{6}{1} = 6\,.$$

Najmanji količnik je 2, tako da obeležavamo broj 3 u trećoj vrsti (promenljiva x_5 izlazi iz baze). Podelimo sada prvu vrstu sa 3 da bismo dobili baziču jedinicu u prvoj vrsti i trećoj koloni. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 0 & \mathbf{1} & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & \mathbf{-3} & 6 & 0 & -2 & 0 & -22
\end{array}\,.$$

Sada ćemo napraviti baziču treću kolonu. Množenjem prve vrste sa -2 i dodavanjem u drugu vrstu, zatim množenjem prve vrste sa -1 i dodavanjem u četvrtu vrstu i množenjem prve vrste sa 3 i dodavanjem u poslednju vrstu, dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -7/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 6 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2/3 & -1/3 & \mathbf{2/3} & 1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 8 & 1 & \mathbf{-1} & 0 & -16
\end{array}\,.$$

Najmanji negativni broj iz poslednje vrste, ne računajući -16, je -1, a najmanji količnik biramo od

$$\frac{2}{\frac{1}{3}} = 6\,, \quad \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6\,.$$

Izabraćemo drugi količnik jer će tada x_7 izaći iz baze, time dobiti vrednost 0 i neće povećati vrednost funkcije cilja što nam je važno jer tražimo minimum funkcije cilja. Pomnožimo četvrtu vrstu sa $3/2$. Dobićemo

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -7/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 6 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & \mathbf{1} & 3/2 & 6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 8 & 1 & \mathbf{-1} & 0 & -16
\end{array}\,.$$

Formirajmo sada baziču šestu kolonu. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 10 \\
1 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 0 & 3/2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & 3/2 & 6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 7 & 1/2 & 0 & 3/2 & -10
\end{array}\,.$$

Ovo je optimalna tablica, bazično rešenje je $z_b^{opt} = z_{bp}^{opt} = (6, 10, 0, 0, 0, 6, 0)$, pa je maksimum jednak -10. ■

Primer 6.2.9 Odrediti optimalnu simpleks tablicu za problem

$$\min(3x_1 + x_2 - 2x_3)$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \end{array} \tag{6.26}$$

$$x_1, x_3 \geq 0\,.$$

Rešenje. Kao što je pokazano u primeru 6.2.5, kako se za x_2 ne zahteva nenegativnost, za $x_2 = x_2' - x_2''$ posmatra se problem

$$\min(3x_1 + x_2' - x_2'' - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ & - & x_2' & + & x_2'' & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0\,,$$

gde je odgovarajuća simpleks tablica

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -2 & \mathbf{2} & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 7 & \mathbf{-7} & 1 & 3 & 0 & -3 \end{array}\,.$$

Početno bazično rešenje pridruženo tablici je

$$z_{bp}^0 = (1, 0, 0, 0, 0, 4)\,.$$

Kako je $x_2 = x_2' - x_2'' = 0$, dobijamo $z_b^0 = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$. Kada z_b^0 uvrstimo u (6.26), vidimo da su zadovoljene obe nejednačine. Najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti je -7, a najmanji količnik je $1/2 = 0.5$. Prvu vrstu delimo sa 2 i dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1/2 & -1 & \mathbf{1} & -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 7 & \mathbf{-7} & 1 & 3 & 0 & -3 \end{array}\,.$$

Sada od treće kolone formiramo baziču množeći prvu vrstu sa -1 i dodajući je u drugu, a zatim opet prvu vrstu množimo sa 7 i dodajemo u poslednju vrstu. Dobija se tablica

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1/2 & -1 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & \mathbf{5/2} & 1/2 & 1 & 7/2 \\ \hline 7/2 & 0 & 0 & \mathbf{-5/2} & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\,.$$

Sada je najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti (ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele) jednak $-5/2$, a najmanji količnik (i jedini koji se posmatra) je $(7/2)/(5/2) = 7/5$. Nakon množenja druge vrste sa $2/5$ dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1/2 & -1 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/5 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/5 & 2/5 & 7/5 \\ \hline 7/2 & 0 & 0 & \mathbf{-5/2} & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}$$

i sada od četvrte kolone pravimo baziČnu. Drugu vrstu množimo sa 1/2 i dodajemo je u prvu, a onda opet drugu vrstu množimo ali sada sa 5/2 i dodajemo u poslednju. Dobija se tablica

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 2/5 & -1 & 1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 6/5 \\ -1/5 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 7/5 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

koja je optimalna sa baziČnim produženim rešenjem

$$z_{bp}^{opt} = (x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 6/5, 7/5, 0, 0),$$

a minimum je -4. Sada je jasno da je $x_2 = x_2' - x_2'' = 0 - 6/5 = -6/5$. Bazično rešenje je $z_b^{opt} = (x_1, x_2, x_3) = (0, -6/5, 7/5)$. ■

6.2.3 Dvofazna modifikacija simpleks metode

Ako z_b^0 ne pripada dopustivoj oblasti problema, moramo pronaći drugu tačku koja će biti početna pri traženju optimalnog rešenja. To se radi u prvoj fazi dvofazne modifikacije simpleks metode. U drugoj fazi se primenjuje već opisani simpleks metod za traženje minimuma funkcije cilja.

I Faza:
1. Posmatramo tablicu u (6.20), tj.

$$\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^k & a_{12}^k & \cdots & a_{1r}^k & \cdots & a_{1n}^k & & b_1^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & \cdots & a_{2r}^k & \cdots & a_{2n}^k & & b_2^k \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ a_{s1}^k & a_{s2}^k & \cdots & a_{sr}^k & \cdots & a_{sn}^k & & b_s^k \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}^k & a_{m2}^k & \cdots & a_{mr}^k & \cdots & a_{mn}^k & & b_m^k \\ \hline c_1^k & c_2^k & \cdots & c_r^k & \cdots & c_n^k & & -f(z_{bp}^k) \end{array}$$

Neka su $j_1, j_2, \ldots, j_k$, $k \leq m$, bazične kolone te tablice koje su pridružene veštačkim promenljivima. Poslednja vrsta se eliminiše i umesto nje se postavljaju koeficijenti nove funkcije cilja oblika

$$w = x_{j_1} + x_{j_2} + \cdots + x_{j_k}\,, k \leq m\,.$$

2. Vrste u kojima se nalaze bazične jedinice koje odgovaraju bazičnim veštačkim promenljivima se saberu, pomnože sa -1 i dodaju u poslednju vrstu. Na taj način smo popravili bazične kolone veštaķih promenljivih tako što smo napravili nulu u poslednjoj vrsti tih kolona. Dobijamo simpleks tablicu sa m bazičnih kolona. Broj veštačkih bazičnih promenljivih je k, a broj preostalih bazičnih kolona je $m - k$, $k \leq m$.

3. Sada primenimo korake simpleks metode za traženje minimuma funkcije cilja w. Nakon toga, neka u poslednjoj vrsti tablice, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, više nema negativnih koeficijenata. Ako je optimalna vrednost za w jednaka nuli, idemo na drugu fazu, u suprotnom problem nema rešenje (domen LP problema je prazan).

II Faza:
Korak 1: Iz tablice iz prve faze se uklone sve kolone koje su pridružene veštačkim promenljivima, a koje nisu bazične. Poslednja vrsta se zamenjuje sa koeficijentima iz početne funkcije cilja i upisuje se 0 u donjem desnom uglu tabele. Potrebno je i eliminisati nenula koeficijente iz poslednje vrste, a koji se nalaze u bazičnim kolonama (popravak LP tablice da bi postala simpleks tablica).

Korak 2: Ukoliko se u tablici nalaze bazične veštačke promenljive, treba ih pretvoriti u nebazične transformacijama nad vrstama i nakon toga ukloniti iz tablice.

Korak 3: Ukoliko u poslednjoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, nema negativnih brojeva, dobijena je optimalna simpleks tablica, u suprotnom primeniti algoritam simpleks metode.

Primer 6.2.10 Odrediti optimalnu simpleks tablicu za problem

$$\min(20x_1 + 18x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & - & 4x_2 & \leq & -20 \\ 5x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 40 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} . \tag{6.27}$$

Rešenje. Početna simpleks tablica je dobijena u primeru 6.2.2 i oblika je

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ \hline 20 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} . \tag{6.28}$$

Kako tačka $z_b^0 = (x_1, x_2) = (0, 0)$ ne zadovoljava prvu i drugu nejednačinu u (6.27), potrebno je doći do početnog BDR. Funkciju cilja ćemo zameniti kao što je dato u narednoj tablici

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} . \tag{6.29}$$

Dakle, tražimo minimum funkcije cilja $w = x_4 + x_6$, jer su jedino promenljive x_4 i x_6 veštačke. Potrebno je LP tablicu u (6.29) popraviti da bi bila simpleks tablica, tj. na mestima u poslednjoj vrsti gde se nalazi jedinica, ne računajući broj u donjem desnom uglu tablice, treba napraviti nulu. Ako prvu i drugu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo u poslednju vrstu, dobićemo simpleks tablicu

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ \mathbf{5} & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ \hline \mathbf{-7} & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -30 \end{array} .$$

Potrebno je od nje dobiti optimalnu tablicu i rešenje pridruženo toj tablici biće novo početno BDR. U poslednjoj vrsti najmanji negativan broj je -7 (ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele), a minimum od $\{20/2{,}10/5{,}40/3\}$ je $10/5 = 2$. Zaključujemo da x_1 ulazi u bazu, a x_6 izlazi iz baze. Dakle, drugu vrstu treba podeliti sa 5 i tu dobiti baznu jedinicu kao što je prikazano u narednoj tablici

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20\\
\mathbf{1} & 1/5 & 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 0 & 2\\
3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40\\
\hline
\mathbf{-7} & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -30
\end{array}.$$

Sada, od prve kolone treba napraviti baznu kolonu korišćenjem elementrnih transformacija na vrstama. Dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & \mathbf{18/5} & -1 & 1 & 2/5 & -2/5 & 0 & 16\\
1 & 1/5 & 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 0 & 2\\
0 & 7/5 & 0 & 0 & 3/5 & -3/5 & 1 & 34\\
\hline
0 & \mathbf{-18/5} & 1 & 0 & -2/5 & 7/5 & 0 & -16
\end{array}.$$

Najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu, $-18/5$ (x_2 ulazi u bazu), a minimum od $\{16/(18/5), 2/(1/5), 34/(7/5)\}$ je $16/(18/5) = 40/9$ (x_4 izlazi iz baze). Nakon množenja prve vrste sa $5/18$ dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & \mathbf{1} & -5/18 & 5/18 & 1/9 & -1/9 & 0 & 40/9\\
1 & 1/5 & 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 0 & 2\\
0 & 7/5 & 0 & 0 & 3/5 & -3/5 & 1 & 34\\
\hline
0 & \mathbf{-18/5} & 1 & 0 & -2/5 & 7/5 & 0 & -16
\end{array},$$

a nakon formiranja bazične druge kolone elementarnim transformacijama nad vrstama, dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 1 & -5/18 & 5/18 & 1/9 & -1/9 & 0 & 40/9\\
1 & 0 & 1/18 & -1/18 & -2/9 & 2/9 & 0 & 10/9\\
0 & 0 & 7/18 & -7/18 & 4/9 & -4/9 & 1 & 250/9\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}.$$

Tačka $(x_1, x_2) = (10/9, 40/9)$ zadovoljava (6.27). Obe veštačke promenljive su sada nebazične i kolone koje su pridružene tim promenljivima uklanjamo iz tablice. Poslednja vrsta se zamenjuje koeficijentima iz polazne funkcije cilja (bez promenljivih x_4 i x_6), tako da LP tablica postaje

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 1 & -5/18 & 1/9 & 0 & 40/9\\
1 & 0 & 1/18 & -2/9 & 0 & 10/9\\
0 & 0 & 7/18 & 4/9 & 1 & 250/9\\
\hline
20 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Da bi ova LP tablica postala simpleks tablica, potrebno je sve elemente prve vrste pomnožiti sa -18 i dodati u poslednju vrstu, a nakon toga, sve elemente druge vrste pomnožiti sa -20 i dodati u poslednju vrstu. Dobićemo simpleks tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 1 & -5/18 & 1/9 & 0 & 40/9\\
1 & 0 & 1/18 & -2/9 & 0 & 10/9\\
0 & 0 & 7/18 & 4/9 & 1 & 250/9\\
\hline
0 & 0 & 35/9 & 22/9 & 0 & -920/9
\end{array}$$

koja je optimalna. Prošireno optimalno BDR pridruženo tablici je (bez veštačkih promenljivih)

$$z_{bp}^{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_7) = (10/9, 40/9, 0, 0, 250/9),$$

a

$$f(z_{bp}^{opt}) = 20 \cdot \frac{10}{9} + 18 \cdot \frac{40}{9} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{250}{9} = 920/9.$$

To je baš broj u donjem desnom uglu tabele pomnožen sa -1. Bazično rešenje je $z_b^{opt} = (x_1, x_2) = (10/9, 40/9)$. ■

Primer 6.2.11 Odrediti optimalno rešenje sledećeg problema

$$\min(9x_1 + x_2 + x_3)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcrcl} -3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 5 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}.$$

Rešenje. Konvertujmo prvo dati problem u standardni oblik. U prvoj nejednačini ćemo levoj strani dodati novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu x_4, a u drugoj prvo oduzeti novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu x_5 i odmah dodati novu nenegativnu veštačku promenljivu x_6 zbog kompletiranja broja bazičnih kolona. Funkcija cilja će sadržati i ove promenljive ali će one biti pomnožene nulom. Dakle, sistem jednačina je

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} -3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & + & x_6 & = & 5 \end{array}$$

uz uslove $x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$, dok je funkcija cilja za $z = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$

$$f(z) = 9x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

od koje se traži minimum. Kod početne simpleks tablice

$$\begin{array}{rrrrrr|r} -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \hline 9 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

vidimo da $z_b^0 = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ ne zadovoljava drugu nejednačinu u sistemu i da se mora izvršiti prva faza dvofazne simpleks metode, odnosno promeniti funkcija cilja u $w = x_6$, da bismo došli do početnog BDR. Tražimo minimum od $w = x_6$ i krećemo od tablice

$$\begin{array}{rrrrrr|r} -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

koju treba korigovati da bismo imali dve bazične kolone. Dakle, drugu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo u poslednju vrstu. Tada simpleks tablica postaje

$$\begin{array}{rrrrrr|r} -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \hline -4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{array}.$$

Najmanji negativni broj, ne računajući broj u donjem desnom uglu tablice, je -4, a najmanji količnik je $5/4$ pa se broj 4 iz druge vrste i prve kolone obeležava u tablici. Nakon toga se druga vrsta deli sa 4 i dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrr|r} -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 & 5/4 \\ \hline \mathbf{-4} & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{array}.$$

Elementarnim transformacijama nad vrstama, dobijamo baziču prvu kolonu, x_1 ulazi u bazu, a x_6 izlazi. Tada nastaje nova tablica

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 5/2 & -11/4 & 1 & -3/4 & 3/4 & 19/4 \\ 1 & 1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 & 5/4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/4 & 0 \end{array}.$$

Pošto nema više negativnih brojeva u poslednjoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, lako se proverava da tačka $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{5}{4}, 0, 0)$ pripada dopustivoj oblasti i da dobijena tablica može biti početna tablica za traženje optimalnog rešenja postavljenog problema. Pošto je funkcija cilja jednaka nuli, možemo preći na drugu fazu, tj. potrebno je eliminisati šestu kolonu jer je x_6 veštačka nebazična promenljiva i uvrstiti koeficijente zadate funkcije cilja. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 5/2 & -11/4 & 1 & -3/4 & 19/4 \\ 1 & 1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 & 5/4 \\ \hline 9 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

koju je potrebno popraviti da bi imala dve bazične kolone. Drugu vrstu množimo sa -9 i tako pomnoženu dodajemo je u treću vrstu. Dobijamo simpleks tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & \mathbf{5/2} & -11/4 & 1 & -3/4 & 19/4 \\ 1 & 1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 & 5/4 \\ \hline 0 & \mathbf{-7/2} & 13/4 & 0 & 9/4 & -45/4 \end{array}.$$

Sada biramo broj $-7/2$ u drugoj koloni što implicira da x_2 ulazi u bazu. Podelimo sada $(19/4)/(5/2) = 19/10$ i $(5/4)/(1/2) = 5/2$. Najmanji pozitivni količnik je $19/10$ tako da promenljiva x_4 izlazi iz baze. Potrebno je obeležiti $5/2$ iz prve vrste i druge kolone. Nakon množenja prve vrste sa $2/5$ dobijamo

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & \mathbf{1} & -11/10 & 2/5 & -3/10 & 19/10 \\ 1 & 1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 & 5/4 \\ \hline 0 & \mathbf{-7/2} & 13/4 & 0 & 9/4 & -45/4 \end{array}.$$

Elementarnim transformacijama od druge kolone ćemo napraviti baziču kolonu kao u narednoj tablici.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & -11/10 & 2/5 & -3/10 & 19/10 \\ 1 & 0 & \mathbf{3/10} & -1/5 & -1/10 & 3/10 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{-3/5} & 7/5 & 6/5 & -23/5 \end{array}.$$

Sada je najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, jednak $-3/5$, a jedini pozitivni količnik $(3/10)/(3/10) = 1$ i obeležavamo $3/10$ u drugoj vrsti i trećoj koloni. Množenjem druge vrste sa 10/3 dobijamo

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & -11/10 & 2/5 & -3/10 & 19/10 \\ 10/3 & 0 & \mathbf{1} & -2/3 & -1/3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{-3/5} & 7/5 & 6/5 & -23/5 \end{array} .$$

Poznatim postupkom treću kolonu napravimo da bude bazična, tako da dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 11/3 & 1 & 0 & -1/3 & -2/3 & 3 \\ 10/3 & 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}$$

kojoj je pridruženo bazično prošireno rešenje $z_{bp}^{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 1, 0, 0)$ i uvrštavanjem ove tačke u početnu funkciju cilja iz koje izuzmemo x_6 promenljivu, dobijamo da je $f_{\min} = 4$, a to je jednako broju u donjem desnom uglu tabele kada ga pomonožimo sa -1. Bazično optimalno rešenje je $z_b^{opt} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 1)$. ■

Primer 6.2.12 Odrediti optimalno rešenje sledećeg problema

$$\min(2x_1 + 3x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & \geq & 4 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} .$$

Rešenje. Da bismo od prve nejednačine formirali jednačinu, potrebno je levoj strani dodati novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu x_3, a u drugoj nejednačini ćemo oduzeti novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu x_4 i dodati novu nenegativnu veštačku promenljivu x_5:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 4 \end{array}$$

uz uslove $x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0$, dok je funkcija cilja za $z = (x_1, x_2, \ldots, x_5)$

$$f(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

od koje se traži minimum. Početna LP tablica je oblika

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

i ona se mora korigovati jer tačka $z_b^0 = (x_1, x_2) = (0, 0)$ ne zadovoljava drugu nejednačinu u sistemu. Krećemo od tablice (x_5 je veštačka promenljiva)

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

koju treba korigovati da bismo imali dve bazične kolone. Drugu vrstu množimo sa -1 i dodajemo u poslednju vrstu. Tada simpleks tablica postaje

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline -1 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array} .$$

Najmanji broj u poslednjoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu tablice, je -2. Delimo slobodne koeficijente sa koeficijentima iz druge kolone i zaključujemo da je $2/1 = 2$ i $4/2 = 2$. Izabraćemo da obeležimo broj 2 iz druge vrste i druge kolone (da bi veštačka promenljiva x_5 postala nebazična). Sada ćemo drugu vrstu podeliti sa 2. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & \mathbf{1} & 0 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ \hline -1 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array} .$$

Nakon množenja druge vrste sa -1 i dodavanja u prvu vrstu, a nakon toga množenjem druge vrste sa 2 i dodavanjem u poslednju vrstu, dobijamo

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} .$$

Sada možemo ukloniti petu kolonu i poslednju vrstu zameniti sa koeficijentima iz početne funkcije cilja.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Napomenimo da $(x_1, x_2) = (0, 2)$ pripada dopustivoj oblasti. Sada je funkcija cilja $f(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$. Da bi druga kolona bila bazična, potrebno je drugu vrstu pomnožiti sa -3 i dodati u poslednju vrstu. Dobijamo simpleks tablicu

$$\begin{array}{rrrr|r} 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 3/2 & -6 \end{array} .$$

Ovo je optimalna simpleks tablica sa rešenjem $z_{bp}^{opt} = (0, 2, 0, 0)$ i $f(z_{bp}^{opt}) = 6$, a to je broj u donjem desnom uglu tabele pomnožen sa -1. Bazično optimalno rešenje je $z_b^{opt} = (x_1, x_2) = (0, 2)$. ∎

Primer 6.2.13 Odrediti optimalno rešenje sledećeg problema

$$\min(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & \geq & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & \leq & 1 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array} .$$

Rešenje. U prvu nejednačinu sistema moramo dodati novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu x_4 i nenegativnu veštačku x_5, dok u drugu i treću nejednačinu dodajemo po jednu novu nenegativnu promenljivu x_6 i x_7. Time dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & & & & & = & 2\\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & & & + & x_6 & & & = & 2\\ 2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & = & 1 \end{array}$$

gde je $x_1, x_2, \ldots, x_7 \geq 0$. Funkcija cilja je, za $z = (x_1, x_2, \ldots, x_7)$, oblika

$$f(z) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7\,.$$

Odgovarajuća simpleks tablica je

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\,.$$

Kako tačka $z_b^0 = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ ne zadovoljava prvu nejednačinu posmatranog problema, potrebno je uraditi dvofaznu simpleks metodu. U prvoj fazi ćemo poslednju vrstu tablice zameniti sa koeficijentima nove funkcije cilja $w = x_5$ jer je samo ta promenljiva veštačka. Dobijamo LP tablicu

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

koja postaje simpleks tablica ako prvu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo u poslednju:

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ \hline -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\,.$$

Sada tražimo najmanji negativan broj u poslednoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele. Neka je to -1 u prvoj koloni. Znači da će x_1 postati bazična promenljiva. Od količnika

$$\frac{1}{2} = 0.5\,,\ \frac{2}{1} = 2$$

tražimo najmanji, a to je 0.5, tako da u simpleks tablici obeležavamo broj 2 u trećoj vrsti i prvoj koloni (x_7 više neće biti bazična promenljiva)

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ \mathbf{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ \hline \mathbf{-1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\,.$$

Da bi sada prva kolona postala bazična, potrebno je treću vrstu podeliti prvo sa 2

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ \mathbf{1} & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ \hline \mathbf{-1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\,.$$

Nakon množenja treće vrste sa -1 i dodavanja prvoj, i nakon dodavanja treće vrste četvrtoj, imaćemo

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 1/2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
\hline
0 & -1/2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2
\end{array}.$$

Sada je u poslednjoj vrsti, ne tačunajući broj u donjem desnom uglu tabele, najmanji negativni broj -1, a najmanji količnik $2/2 = 1$, te je drugu vrstu potrebno podeliti sa 2

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 1/2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\
0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\
1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
\hline
0 & -1/2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2
\end{array}.$$

Ako sada drugu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo prvoj, i drugu vrstu dodamo četvrtoj, dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\
0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\
1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2
\end{array}.$$

Dobijena je optimalna tablica, minimum funkcije cilja w je $w_{\min} = 1/2 > 0$ što znači da ne postoji tačka koja pripada domenu LP problema, pa ovaj zadatak nema rešenja (I faza dvofazne metode, tačka 3). ■

Primer 6.2.14 Odrediti optimalno rešenje sledećeg problema

$$\min(2x_1 + x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\
4x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\
5x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}.$$

Rešenje. Odgovarajuća početna simpleks tablica je oblika

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

a odgovarajuća funkcija cilja je

$$f(z) = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

za $z = (x_1, x_2, \ldots, x_8)$. Tačka $z_0^b = (x_1, x_2) = (0, 0)$ ne pripada domenu LP problema, tako da moramo korigovati početnu simpleks tablicu tako do poslednju vrstu zamenjujemo koeficijentima nove funkcije cilja $w = x_4 + x_6 + x_8$ (promenljive x_4, x_6 i x_8 su veštačke promenljive) od koje tražimo minimum:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\,.$$

Da bi ova tablica bila simpleks tablica moramo prvu, drugu i treću vrstu pomnožiti sa -1 i dodati u četvrtu vrstu da bi četvrta, šesta i osma kolona postale bazične. Dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
\mathbf{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
\mathbf{-10} & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -7
\end{array}\,.$$

Sada računamo količnike $2/1 = 2$, $4/4 = 1$ i $1/5 = 0.2$. Najmanji količnik je 0.2 i u tabeli obeležavamo broj 5 u trećoj vrsti i prvoj koloni. Na mestu broja 5 treba da stoji broj 1 pa treću vrstu delimo sa 5. Tada dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
\mathbf{1} & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \\
\hline
\mathbf{-10} & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -7
\end{array}\,.$$

Sada od prve kolone pravimo baziču. Treću vrstu množimo sa 10 i dodajemo u četvrtu, treću množimo sa -4 i dodajemo u drugu vrstu i, na kraju, treću množimo sa -1 i dodajemo u prvu vrstu

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 4/5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & -1/5 & 9/5 \\
0 & 1/5 & 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{4/5} & -4/5 & 16/5 \\
1 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \\
\hline
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{-1} & 2 & -5
\end{array}\,.$$

Sada biramo najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti, ne računajući broj -5. Pošto imamo u drugoj i sedmoj koloni -1, izabraćemo -1 iz sedme kolone jer, da smo izabrali -1 iz druge kolone, prva kolona ne bi bila više bazična, a u prethodnom koraku je to postala. Najmanji količnik je $(16/5)/(4/5) = 4$ pa smo u tabeli obeležili $4/5$. Još ćemo pomnožiti drugu vrstu sa $5/4$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 4/5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & -1/5 & 9/5 \\
0 & 1/4 & 0 & 0 & -5/4 & 5/4 & \mathbf{1} & -1 & 4 \\
1 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \\
\hline
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{-1} & 2 & -5
\end{array}\,.$$

Sedma kolona postaje bazična

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & \mathbf{3/4} & -1 & 1 & 1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1/4 & 0 & 0 & -5/4 & 5/4 & 1 & -1 & 4 \\
1 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & \mathbf{-3/4} & 1 & 0 & -1/4 & 5/4 & 0 & 1 & -1
\end{array}\,.$$

Sada je $-3/4$ najmanji negativni broj ne računajući -1, a u tabeli obeležavamo $3/4$ u drugoj koloni i prvoj vrsti. Nakon množenja prve vrste sa $4/3$ dobijamo

$$\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \mathbf{1} & -4/3 & 4/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & -5/4 & 5/4 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \mathbf{-3/4} & 1 & 0 & -1/4 & 5/4 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

i nakon što druga kolona postane bazična, imamo

$$\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1 & -4/3 & 4/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -4/3 & 4/3 & 1 & -1 & 11/3 \\ 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} .$$

Dobili smo optimalnu tablicu za traženi minumum. Tačka $(x_1, x_2) = (2/3, 4/3)$ pripada dopustivoj oblasti. Sada uklanjamo četvrtu, šestu i osmu kolonu jer pripadaju veštačkim promenljivima, i poslednju vrstu zamenjujemo sa koeficijentima iz funkcije cilja

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -4/3 & 1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & -4/3 & 1 & 11/3 \\ 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Funkcija cilja je sada $f(z) = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_5 + 0x_7$. Potrebno je prvu vrstu pomnožiti sa -1 i dodati četvrtoj, kao i treću vrstu pomnožiti sa -2 i dodati četvrtoj da bismo dobili dve bazične kolone pored pretposlednje kolone (peta kolona)

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -4/3 & 1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & -4/3 & 1 & 11/3 \\ 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & -8/3 \end{array} .$$

Ovo je optimalna simpleks tablica, $f_{\min} = 8/3$, $z_{bp}^{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_7) = (2/3, 4/3, 0, 0, 11/3)$, $z_b^{opt} = (x_1, x_2) = (2/3, 4/3)$. ■

Primer 6.2.15 Odrediti optimalno rešenje sledećeg problema

$$\min(x_1 + x_2 - x_3)$$

uz uslove

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 3 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array} .$$

Rešenje. U prvu nejednačinu sistema moramo dodati novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu x_4. U drugu nejednačinu je dovoljno dodati novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu

x_5 jer neće biti potrebna i veštačka promenljiva (imaćemo četiri bazične kolone). U treću jednačinu potrebno je dodati novu nenegativnu veštačku promenljivu x_6 zbog dopune bazičnih kolona. U četvrtu nejednakost dodajemo novu nenegativnu izravnavajuću promenljivu x_7 i novu nenegativnu veštačku promenljivu x_8. Time dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
 & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & & & & & = & 2\\
2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & & & & & & & = & 3\\
 & & 4x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & & & & & = & 4\\
 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & & & & & - & x_7 & + & x_8 & = & 2
\end{array}$$

gde je $x_1, x_2, \ldots, x_8 \geq 0$. Funkcija cilja je, za $z = (x_1, x_2, \ldots, x_8)$, oblika

$$f(z) = x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8\,.$$

Odgovarajuća tablica je

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
2 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3\\
0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2\\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

a kada drugu vrstu podelimo sa 2, imaćemo

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
1 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2\\
0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2\\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\,.$$

Drugu vrstu množimo sa -1 i dodajemo je u poslednju vrstu da bi prva kolona postala bazična

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
1 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2\\
0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2\\
\hline
0 & 2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -3/2
\end{array}\,.$$

Tačka z_b^0 je sada $z_b^0 = (x_1, x_2, x_3) = (3/2, 0, 0)$ koja ne pripada dopustivoj oblasti. Menjamo poslednju vrstu sa koeficijentima iz nove funkcije cilja $w = x_6 + x_8$ od koje tražimo minimum

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
1 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2\\
0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\,.$$

Ako treću i četvrtu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo u petu (tj. poslednju), dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
1 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2\\
0 & \mathbf{4} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2\\
\hline
0 & \mathbf{-3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6
\end{array}\,.$$

Ovde smo izabrali -3 iz druge kolone da je najmanji negativni broj, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, a količnik $4/4 = 1$ je najmanji pozitivni količnik. Nakon deljenja treće vrste sa 4, dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & -1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\
0 & \mathbf{1} & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
0 & \mathbf{-3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6
\end{array}.$$

Sada druga kolona postaje bazična, pa elementarnim transformacijama nad vrstama dolazimo do

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 0 & \mathbf{3/4} & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -1/4 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 5/2 \\
0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 1/4 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
0 & 0 & \mathbf{-9/4} & 0 & 0 & 3/4 & 1 & 0 & -3
\end{array}.$$

Sada obeležavamo $-9/4$ u poslednjoj vrsti i $3/4$ u prvoj i prvu vrstu množimo sa $4/3$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 0 & \mathbf{1} & 4/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 4/3 \\
1 & 0 & -1/4 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 5/2 \\
0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 9/4 & 0 & 0 & 1/4 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
0 & 0 & \mathbf{-9/4} & 0 & 0 & 3/4 & 1 & 0 & -3
\end{array}.$$

Treća kolona postaje bazična

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 0 & 1 & 4/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 4/3 \\
1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 17/6 \\
0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}.$$

Dobijena je optimalna tablica, gde je osma kolona, koja odgovara veštačkoj promenljivi, bazična. Napomenimo da sada tačka $(x_1, x_2, x_3) = (17/6, 2/3, 4/3)$ pripada dopustivoj oblasti. Ako četvrtu vrstu pomnožimo sa -1 dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 0 & 1 & 4/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 4/3 \\
1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 17/6 \\
0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

i sada eliminišemo šestu i osmu kolonu koje odgovaraju veštačkim promenljivima

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 0 & 1 & 4/3 & 0 & 0 & 4/3 \\
1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/2 & 0 & 17/6 \\
0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0
\end{array}.$$

Još da četvrtu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo u petu da bi šesta kolona (odgovara x_7 promenljivoj) postala bazična

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 4/3 & 0 & 0 & 4/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/2 & 0 & 17/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Sada menjamo poslednju vrstu sa koeficijentima iz funkcije cilja

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 4/3 & 0 & 0 & 4/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/2 & 0 & 17/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Da bi prve tri kolone postale bazične, prvu vrstu množimo sa 1 i dodajemo u petu, drugu i treću vrstu sa -1 i dodajemo u petu. Dobija se tablica

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 4/3 & 0 & 0 & 4/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/2 & 0 & 17/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4/3 & 1/2 & 0 & -13/6 \end{array} .$$

Ovo je optimalna tablica. Sada je $z_b^{opt} = (x_1, x_2, x_3) = (17/6, 2/3, 4/3)$, a minimum je $17/6 + 2/3 - 4/3 = 13/6$. ■

Primer 6.2.16 Odrediti optimalno rešenje sledećeg problema

$$\min(2x_1 + 3x_3 + x_4)$$

uz uslove

$$\begin{array}{ccccccccc} & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array} . \tag{6.30}$$

Rešenje. Da bismo mogli da formiramo početnu simpleks tablicu, potrebno je uvesti jednu novu nenegativnu veštačku promenljivu x_5. Tada će posmatrani problem biti

$$\min(2x_1 + 0x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5)$$

uz uslove

$$\begin{array}{ccccccccccc} & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 8 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array} .$$

Pridružena tablica je tada oblika

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ \hline 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

koju treba popraviti da bi postala simpleks tablica. Prva kolona će postati bazična ako drugu vrstu pomnožimo sa -2 i dodamo je u poslednju vrstu. Simpleks tablica je

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -16 \end{array}$$

i možemo primetiti da tačka $z_b^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8, 0, 0, 0)$ ne zadovoljava prvu jednačinu u (6.30), tako da tražimo minimum nove funkcije $w = x_5$ te poslednju vrstu moramo zameniti kao što je urađeno u narednoj tablici

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \ .$$

Množenjem prve vrste sa -1 i dodavanjem u poslednju, dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & -1 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 1 & \mathbf{-1} & 0 & -3 \end{array} \ .$$

Najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti, ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, je -1, a najmanji količnik je $3/1 = 3$ i obeležavamo u tablici jedinicu koja se nalazi u prvoj vrsti i četvrtoj koloni. Množimo prvu vrstu sa -2 i dodajemo je u drugu vrstu, i nakon toga, prvu vrstu množimo sa 1 i dodajemo u poslednju vrstu. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \ .$$

Dobijena je optimalna tablica, minimum od w je nula, a nova početna tačka od koje se nastavljaju koraci simpleks metode jednaka $(2, 0, 0, 3)$ i ona zadovoljava obe jednačine u (6.30). Sada se ukloni peta kolona jer odgovara veštačkoj promenljivoj i nije bazična, a poslednja vrsta se zamenjuje sa koeficijentima iz početne funkcije cilja. Tako dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \ .$$

Da bi ova tablica postala simpleks tablica, potrebno je napraviti nule u prvoj i četvrtoj koloni poslednje vrste. Množenjem prve vrste sa -1 i druge sa -2 i dodavanjem tako pomnoženih vrsta u poslednju vrstu, dobićemo tablicu

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & \mathbf{2} & 3 & 0 & 2 \\ \hline 0 & \mathbf{-3} & -2 & 0 & -7 \end{array} \ .$$

Ne računajući broj u donjem desnom uglu, najmanji broj u poslednjoj vrsti je -3, a najmanji količnik (i jedini koji se posmatra) je $2/2 = 1$. Obeležićemo dvojku u drugoj vrsti i drugoj koloni i tu vrstu podeliti sa 2 da bismo dobili na bazičnu jedinicu. Simpleks tablica je tada

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1/2 & \mathbf{1} & 3/2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \mathbf{-3} & -2 & 0 & -7 \end{array} \ .$$

Množenjem druge vrste sa 1 i dodavanjem u prvu vrstu, a zatim i množenjem druge vrste sa 3 i dodavanjem u poslednju, druga kolona postaje bazična, a tablica optimalna

$$\begin{array}{cccc|c} 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ \hline 3/2 & 0 & 5/2 & 0 & -4 \end{array} .$$

Minimum funkcije cilja je 4, a bazično optimalno rešenje je $z_b^{opt} = (0, 1, 0, 4)$.

■

6.3 Matematički modeli i primena

Primer 6.3.1 Nikolina radi dva posla, jedan je u poljoprivrednoj apoteci (posao A) i na jednom imanju (posao B). Nikada nije htela da radi više od 12 sati nedeljno. Za jedan sat rada na poslu A, potroši dva sata na pripremne radnje, a za svaki sat vremena na poslu B, potroši sat vremena na pripremu. Na nedeljnom nivou, ne sme potrošiti više od 16 sati na pripreme. Za jedan sat rada na poslu A, zaradi 40 dolara, a 30 dolara na poslu B. Koliko sati bi trebalo da radi nedeljno na svakom poslu da bi imala maksimalnu zaradu?

Rešenje. Neka je x_1 broj radnih sati u poljoprivrednoj apoteci na nedeljnom nivou, a x_2 broj radnih sati na imanju na nedeljnom nivou. Tada će $2x_1$ sati biti potrošeno na pripremu u apoteci i x_2 sati na pripremu na imanju. Model će biti

$$\max(40x_1 + 30x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} .$$

Da bismo dobili jednačine, u obe nejednačine dodajemo po jednu novu nenegativnu (izravnavajuću) promenljivu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 12 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 16 \end{array}$$

uz uslove $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, dok je funkcija cilja za $z = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$f(z) = 40x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

od koje se traži maksimum. Korišćenjem

$$\max(40x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4) = -\min(-40x_1 - 30x_2 - 0x_3 - 0x_4)$$

dobijamo početnu simpleks tablicu

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 & 1 & 16 \\ \hline \mathbf{-40} & -30 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Tačka $z_b^0 = (x_1, x_2) = (0,0)$ pripada dopustivoj oblasti. Najmanji negativan broj je -40, a najmanji količnik od $16/2 = 8$ i $12/1 = 12$ je 8, pa se obeležava broj dva u drugoj vrsti i prvoj koloni tablice. Pošto na tom mestu ne stoji broj 1, delimo drugu vrstu sa 2 i dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline \mathbf{-40} & -30 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Ako drugu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo prvoj, a nakon toga, drugu vrstu pomnožimo sa 40 i dodamo trećoj, dobijamo

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & \mathbf{1/2} & 1 & -1/2 & 4 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline 0 & \mathbf{-10} & 0 & 20 & 320 \end{array} .$$

Sada je najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti (ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele) -10, a najmanji pozitivni količnik biramo između $4/(1/2) = 8$ i $8/(1/2) = 16$. Jasno je da je to 8, pa u prvoj vrsti i drugoj koloni obeležavamo $1/2$. Na tom mestu mora biti broj 1, pa se prva vrsta množi sa 2 i dobijamo

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 8 \\ \hline 0 & \mathbf{-10} & 0 & 20 & 320 \end{array} .$$

Sada ćemo prvu vrstu pomnožiti sa $-1/2$ i dodati drugoj. Ako još pomnožimo prvu vrstu sa 10 i dodamo trećoj, tablica postaje

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 20 & 10 & 400 \end{array} .$$

U poslednjoj vrsti (ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele) nema negativnih brojeva, stigli smo do optimalne tablice. Bazično produženo rešenje je $z_{bp}^{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 8, 0, 0)$, a $f(z_{bp}^{opt}) = 40 \cdot 4 + 30 \cdot 8 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 400$ i to je maksimum funkcije cilja. Bazično rešenje je $z_b^{opt} = (x_1, x_2) = (4, 8)$. ■

Primer 6.3.2 Na živinarskoj farmi, hrana za koke nosilje priprema se od tri vrste hraniva (H_1, H_2, H_3). Prva vrsta hraniva sadrži u jedinici mere: 2 jedinice belančevina i 4 jedinice skroba, druga 3 jedinice belančevina i 2 jedinice skroba, a treća 5 jedinica belančevina i 1 jedinicu skroba. Dnevne potrebe koka nosilja su 7 jedinica belančevina i 9 jedinica skroba. Pri tome, koncentracija belančevina (količnik utrošenih belančevina i skroba) ne može biti manja od 80%. Cene hraniva su 25, 30 i 35 dinara za jedinicu mere. Optimizovati strukturu dnevnog obroka.

Rešenje. Neka je x_i količina hraniva H_i, $i = 1, 2, 3$. Tada tražimo $\min(25x_1 + 30x_2 + 35x_3)$ uz uslove

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \geq & 7 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 9 \\ & & \dfrac{2x_1+3x_2+5x_3}{4x_1+2x_2+x_3} & & & \geq & 0.8 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \geq & 7 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 9 \\ -12x_1 & + & 14x_2 & + & 42x_3 & \geq & 0 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array} .$$

Nakon uvođenja izravnavajućih (x_4, x_6 i x_8) i veštačkih promenljivih (x_5, x_7 i x_9), sistem postaje

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcl}
2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & + & x_5 & & & & & & & & & = & 7 \\
4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & - & x_6 & + & x_7 & & & & & = & 9 \\
-12x_1 & + & 14x_2 & + & 42x_3 & & & & & & & & & - & x_8 & + & x_9 & = & 0
\end{array}$$

dok tražimo $\min(25x_1+30x_2+35x_3+0x_4+0x_5+0x_6+0x_7+0x_8+0x_9)$, gde je $x_1,\ldots,x_9 \geq 0$. Odgovarajuća simpleks tablica je oblika

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
2 & 3 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
-12 & 14 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
25 & 30 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Kako tačka $z_b^0 = (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ ne pripada domenu LP problema, moramo raditi dvofaznu simpleks metodu. Tražimo minimum funkcije $w = x_5 + x_7 + x_9$, tj. poslednja vrsta tablice se menja

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
2 & 3 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
-12 & 14 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}.$$

Da bismo imali tri bazične promenljive potrebno je prve tri vrste pomnožiti sa -1 i dodati u četvrtu. Tablica postaje

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
2 & 3 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
-12 & 14 & \mathbf{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
6 & -19 & \mathbf{-48} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -16
\end{array}.$$

Sada je potrebno uraditi korake simpleks metode i naći optimalnu tablicu. Najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti je -48 (ne računamo broj u donjem desnom uglu tabele), a najmanji količnik je $0/42 = 0$. Na mestu gde je broj 42 treba da je bazična jedinica, pa delimo treću vrstu sa 42. Dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
2 & 3 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
-2/7 & 1/3 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/42 & 1/42 & 0 \\
\hline
6 & -19 & \mathbf{-48} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -16
\end{array}.$$

Sada, već dobro poznatim transformacijama, pravimo da treća kolona postane bazična

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
\mathbf{24/7} & 4/3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5/42 & -5/42 & 7 \\
30/7 & 5/3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1/42 & -1/42 & 9 \\
-2/7 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/42 & 1/42 & 0 \\
\hline
\mathbf{-54/7} & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/7 & 8/7 & -16
\end{array}.$$

Ovde je najmanji negativni broj u poslednjoj vrsti (ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele) $-54/7$, a najmanji količnik biramo između $7/(24/7) = 49/24$ i $9/(30/7) = 21/10$, a to je $49/24$ pa u tabeli označavamo razlomak $24/7$ u prvoj vrsti i prvoj koloni. Naravno, prvu vrstu moramo pomnožiti sa $7/24$ i dobiti

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
\mathbf{1} & 7/18 & 0 & -7/24 & 7/24 & 0 & 0 & 5/144 & -5/144 & 49/24 \\
30/7 & 5/3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1/42 & -1/42 & 9 \\
-2/7 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/42 & 1/42 & 0 \\ \hline
\mathbf{-54/7} & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/7 & 8/7 & -16
\end{array}.$$

Sada prva kolona postaje bazična

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
1 & 7/18 & 0 & -7/24 & 7/24 & 0 & 0 & 5/144 & -5/144 & 49/24 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{5/4} & -5/4 & -1 & 1 & -1/8 & 1/8 & 1/4 \\
0 & 4/9 & 1 & -1/12 & 1/12 & 0 & 0 & -1/72 & 1/72 & 7/12 \\ \hline
0 & 0 & 0 & \mathbf{-5/4} & 9/4 & 1 & 0 & 1/8 & 7/8 & -1/4
\end{array}.$$

Nastavljamo po ustaljenom algoritmu, biramo $-5/4$ i $5/4$. Drugu vrstu množimo sa $4/5$ i dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
1 & 7/18 & 0 & -7/24 & 7/24 & 0 & 0 & 5/144 & -5/144 & 49/24 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -4/5 & 4/5 & -1/10 & 1/10 & 1/5 \\
0 & 4/9 & 1 & -1/12 & 1/12 & 0 & 0 & -1/72 & 1/72 & 7/12 \\ \hline
0 & 0 & 0 & \mathbf{-5/4} & 9/4 & 1 & 0 & 1/8 & 7/8 & -1/4
\end{array},$$

a nakon što četvrta kolona postane bazična, imaćemo

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r}
1 & 7/18 & 0 & 0 & 0 & -7/30 & 7/30 & 1/180 & -1/180 & 21/10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4/5 & 4/5 & -1/10 & 1/10 & 1/5 \\
0 & 4/9 & 1 & 0 & 0 & -1/15 & 1/15 & -1/45 & 1/45 & 3/5 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}.$$

Ovo je sada optimalna tablica za traženi minimum iz prve faze. Tačka $(x_1, x_2, x_3) = (2.1, 0, 0.6)$ pripada dopustivoj oblasti. Uklanjamo petu, sedmu i devetu kolonu jer su to kolone koje odgovaraju veštačkim promenljivima i nisu bazične. Poslednja vrsta se zamenjuje koeficijentima iz funkcije cilja

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 7/18 & 0 & 0 & -7/30 & 1/180 & 21/10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & -1/10 & 1/5 \\
0 & 4/9 & 1 & 0 & -1/15 & -1/45 & 3/5 \\ \hline
25 & 30 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Nova funkcija cilja je $f = 25x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 0x_4 + 0x_6 + 0x_8$. Sada je potrebno popraviti tablicu da bude simpleks tablica tako što ćemo od prve i treće kolone napraviti da budu bazične kolone (četvrta je već bazična). Prvu vrstu množimo sa -25, treću sa -35 i tako pomnožene ih dodajemo u četvrtu vrstu

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 7/18 & 0 & 0 & -7/30 & 1/180 & 21/10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & -1/10 & 1/5 \\
0 & 4/9 & 1 & 0 & -1/15 & -1/45 & 3/5 \\ \hline
0 & 85/18 & 0 & 0 & 49/6 & 23/36 & -147/2
\end{array}.$$

Dobijena je optimalna tablica. Minimum funkcije cilja je $f_{\min} = 147/2 = 73.5$ za $x_1 = 2.1$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 0.6$ ($z_b^{opt} = (2.1, 0, 0.6)$), dok je $x_4 = 0.2$ i $x_6 = x_8 = 0$. Dakle, H_2 hranivo se neće koristiti, a H_1 i H_3 hoće u datim vrednostima. ■

Primer 6.3.3 U proizvodnom pogonu planira se izrada 4 proizvoda P_1, P_2, P_3 i P_4. Tehnološki postupak predviđa da se ti proizvodi rade u odeljenjima O_1, O_2 i O_3, pri čemu su poznati utrošci jedinica kapaciteta za jedinicu svakog proizvoda u svakom od odeljenja. Takođe su dati i proizvodni troškovi za jedinicu proizvoda svakog proizvoda. Pri izradi proizvoda može se u odeljenju O_1 utrošiti najmanje 64 jedinice kapaciteta, u O_2 najviše 120 jedinica i u O_3 tačno 82 jedinice kapciteta.

		Proizvodi			
		P_1	P_2	P_3	P_4
Proizvodno odeljenje	O_1	4	10	0	8
	O_2	3	5	2	6
	O_3	2	13	5	4
Proizvodni troškovi po jedinici proizvoda		12	8	12	6

Potrebno je odrediti proizvodni program izrade proizvoda P_1, P_2, P_3 i P_4 za koji su troškovi proizvodnje minimalni.

Rešenje. Neka je $x_i \geq 0$ količina proizvoda P_i, $i = 1, 2, 3, 4$ koja se proizvede. Na osnovu teksta zadatka, treba rešiti problem

$$\begin{array}{ccccccccc} 4x_1 & + & 10x_2 & + & 0x_3 & + & 8x_4 & \geq & 64 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & \leq & 120 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 82 \end{array}$$

i naći minimum funkcije cilja $f(z) = 12x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 6x_4$, gde je $z = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Nakon što uvedemo i nove nenegativne izravnavajuće promenljive x_5 i x_7 i nenegativne veštačke promenljive x_6 i x_8, dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 4x_1 & + & 10x_2 & + & 0x_3 & + & 8x_4 & - & x_5 & + & x_6 & & & & & = & 64 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & & & & & + & x_7 & & & = & 120 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & & & & & & & + & x_8 & = & 82 \end{array},$$

a tražimo

$$\min(12x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8).$$

Pridružena simpleks tablica je

$$\begin{array}{cccccccc|c} 4 & 10 & 0 & 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 64 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 82 \\ \hline 12 & 8 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

a pošto tačka $z_b^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ ne pripada dopustivom skupu početnog problema (ne zadovoljava sva ograničenja u početnom sistemu), moramo raditi dvofaznu modifikaciju. Tražimo minimum od $w = x_6 + x_8$, pa se poslednja vrsta tablice mora promenti

$$\begin{array}{cccccccc|c} 4 & 10 & 0 & 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 64 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 82 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Množenjem prve i treće vrste sa -1 i dodavanjem u poslednju vrstu, dobijamo

$$\begin{array}{cccccccc|c}
4 & \mathbf{10} & 0 & 8 & -1 & 1 & 0 & 0 & 64 \\
3 & 5 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\
2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 82 \\
\hline
-6 & \mathbf{-13} & -5 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 & -146
\end{array}.$$

Ne računajući broj u donjem desnom uglu tabele, najmanji negativni broj je -13, a najmanji količnik je $64/10$. Prvu vrstu množimo sa $1/10$ da bismo dobili broj jedan u prvoj vrsti i drugoj koloni

$$\begin{array}{cccccccc|c}
2/5 & \mathbf{1} & 0 & 4/5 & -1/10 & 1/10 & 0 & 0 & 32/5 \\
3 & 5 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\
2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 82 \\
\hline
-6 & \mathbf{-13} & -5 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 & -146
\end{array}.$$

Sada od druge kolone pravimo baziču. Prva vrsta pomnožena sa -5 se dodaje se u drugu, prva vrsta pomnožena sa -3 se dodaje u treću i, konačno, prva vrsta pomnožena sa 13 se dodaje u poslednju vrstu. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{cccccccc|c}
2/5 & 1 & 0 & 4/5 & -1/10 & 1/10 & 0 & 0 & 32/5 \\
1 & 0 & 2 & 2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 88 \\
4/5 & 0 & \mathbf{5} & 8/5 & 3/10 & -3/10 & 0 & 1 & 314/5 \\
\hline
-4/5 & 0 & \mathbf{-5} & -8/5 & -3/10 & 13/10 & 0 & 0 & -314/5
\end{array}.$$

Sada je -5 najmanji negativni broj (ne računamo $-314/5$), a najmanji količnik je $314/25 = 12.56$. Potrebno je još podeliti treću vrstu sa 5

$$\begin{array}{cccccccc|c}
2/5 & 1 & 0 & 4/5 & -1/10 & 1/10 & 0 & 0 & 32/5 \\
1 & 0 & 2 & 2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 88 \\
4/25 & 0 & \mathbf{1} & 8/25 & 3/50 & -3/50 & 0 & 1/5 & 314/25 \\
\hline
-4/5 & 0 & \mathbf{-5} & -8/5 & -3/10 & 13/10 & 0 & 0 & -314/5
\end{array}.$$

Sada treća kolona postaje bazična. Korišćenjem poznatih transformacijama nad vrstama, imamo

$$\begin{array}{cccccccc|c}
2/5 & 1 & 0 & 4/5 & -1/10 & 1/10 & 0 & 0 & 32/5 \\
17/25 & 0 & 0 & 34/25 & 19/50 & -19/50 & 1 & -2/5 & 1572/25 \\
4/25 & 0 & 1 & 8/25 & 3/50 & -3/50 & 0 & 1/5 & 314/25 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}.$$

Tačka koja pripada dopustivom skupu je $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 32/5, 314/25, 0)$. Sad je potrebno ukloniti šestu i osmu kolonu (odgovaraju veštačkim promenljivima) i poslednju vrstu zameniti sa koeficijentima iz funkcije cilja

$$\begin{array}{cccccc|c}
2/5 & 1 & 0 & 4/5 & -1/10 & 0 & 32/5 \\
17/25 & 0 & 0 & 34/25 & 19/50 & 1 & 1572/25 \\
4/25 & 0 & 1 & 8/25 & 3/50 & 0 & 314/25 \\
\hline
12 & 8 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Funkcija cilja postaje $f = 12x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_7$. Druga i treća kolona moraju da se poprave da bi postale bazične. Prva vrsta puta -8, treća puta -12 i dodaju se četvrtoj vrsti. Dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
2/5 & 1 & 0 & \mathbf{4/5} & -1/10 & 0 & 32/5 \\
17/25 & 0 & 0 & 34/25 & 19/50 & 1 & 1572/25 \\
4/25 & 0 & 1 & 8/25 & 3/50 & 0 & 314/25 \\
\hline
172/25 & 0 & 0 & \mathbf{-106/25} & 2/25 & 0 & -5048/25
\end{array}$$

od koje pravimo optimalnu. Najmanji negativan broj u poslednjoj vrsti je $-106/25 = -4.24$ (ne gledamo broj u donjem desnom uglu tabele), a najmanji količnik je $32/4 = 8$. Množenjem prve vrste sa $5/4$, dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1/2 & 5/4 & 0 & \mathbf{1} & -1/8 & 0 & 8 \\
17/25 & 0 & 0 & 34/25 & 19/50 & 1 & 1572/25 \\
4/25 & 0 & 1 & 8/25 & 3/50 & 0 & 314/25 \\
\hline
172/25 & 0 & 0 & \mathbf{-106/25} & 2/25 & 0 & -5048/25
\end{array}.$$

Četvrta kolona postaje bazična

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1/2 & 5/4 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 8 \\
0 & -17/10 & 0 & 0 & \mathbf{11/20} & 1 & 52 \\
0 & -2/5 & 1 & 0 & 1/10 & 0 & 10 \\
\hline
9 & 53/10 & 0 & 0 & \mathbf{-9/20} & 0 & -168
\end{array}.$$

U poslednjoj vrsti je $-9/20$ najmanji negativni broj (-168 se ne gleda), najmanji količnik je $52/(11/20)$. Drugu vrstu množimo sa $20/11$ i dobijamo tablicu

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1/2 & 5/4 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 8 \\
0 & -34/11 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 20/11 & 1040/11 \\
0 & -2/5 & 1 & 0 & 1/10 & 0 & 10 \\
\hline
9 & 53/10 & 0 & 0 & \mathbf{-9/20} & 0 & -168
\end{array}.$$

Sada od pete kolone pravimo bazičnu

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1/2 & 19/22 & 0 & 1 & 0 & 5/22 & 218/11 \\
0 & -34/11 & 0 & 0 & 1 & 20/11 & 1040/11 \\
0 & -1/11 & 1 & 0 & 0 & -2/11 & 6/11 \\
\hline
9 & 43/11 & 0 & 0 & 0 & 9/11 & -1380/11
\end{array}.$$

Ovo je optimalna simpleks tablica, $z_{bp}^{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7) = (0, 0, 6/11, 218/11, 1040/11, 0)$, $z_b^{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 6/11, 218/11)$, dok su minimalni troškovi proizvodnje $1380/11$. ■

Primer 6.3.4 Miladin, otac malog Perice (studenta matematike) bavi se vinogradarstvom. Ove godine sazrelo je 1800 kg belog i 1200 kg crnog grožđa. Vinarija za 1 kg belog grožđa plaća 0.42 eura plus 0.02 eura po stepenu slatkoće, a za 1 kg crnog grožđa 0.40 eura plus 0.02 eura po stepenu slatkoće. Grožđe svaka 4 dana postane slađe za jedan stepen. Perica može brati grožđa 21.9. (najviše 1500 kg), 25.9. (najviše 1100 kg) i 29.9. (najviše 800 kg). Mali

Perica je simpleks metodom našao optimalan plan berbe, za koji je zarada najveća. Koji je to plan, ako je 21.9. slatkoća belog grožđa 17 stepeni, a crnog 18.5 stepeni?

Rešenje. Neka su x_1 i x_2 količine belog i crnog grožđa obranih 21.9. Neka su x_3 i x_4 količine belog i crnog grožđa obranih 25.9. i neka su x_5 i x_6 količine belog i crnog grožđa obranih 29.9. Na osnovu tabele prihoda po danima

Dan	Vrsta grožđa	Prihodi (evro)
21.9.	belo (x_1)	$0.42 + 0.02 \cdot 17 = 0.76$
	crno (x_2)	$0.40 + 0.02 \cdot 18.5 = 0.77$
25.9.	belo (x_3)	$0.42 + 0.02 \cdot 18 = 0.78$
	crno (x_4)	$0.40 + 0.02 \cdot 19.5 = 0.79$
29.9.	belo (x_5)	$0.42 + 0.02 \cdot 19 = 0.80$
	crno (x_6)	$0.40 + 0.02 \cdot 20.5 = 0.81$

tražimo

$$\max(0.76x_1 + 0.77x_2 + 0.78x_3 + 0.79x_4 + 0.80x_5 + 0.81x_6)$$

uz uslove

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & & & \leq & 1800 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & & & + & x_6 & \leq & 1200 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \leq & 1500 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \leq & 1100 \\
 & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & \leq & 800
\end{array}$$

gde je $x_1, \ldots, x_6 \geq 0$. Kada traženi maksimum pretvorimo u minimum

$$-\min(-0.76x_1 - 0.77x_2 - 0.78x_3 - 0.79x_4 - 0.80x_5 - 0.81x_6)$$

i kada uvedemo nenegativne izravnavajuće promenljive $x_7, \ldots x_{11}$, dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & & & + & x_7 & & & & & & & & & = & 1800 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & & & + & x_6 & & & + & x_8 & & & & & & & = & 1200 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & & & & + & x_9 & & & & & = & 1500 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & & & & & & & + & x_{10} & & & = & 1100 \\
 & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & & & & & & & & & + & x_{11} & = & 800
\end{array}$$

i tražimo

$$-\min(-0.76x_1 - 0.77x_2 - 0.78x_3 - 0.79x_4 - 0.80x_5 - 0.81x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11})$$

Početna simpleks tablica je

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1800 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1200 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \color{blue}{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 800 \\
\hline
-0.76 & -0.77 & -0.78 & -0.79 & -0.80 & \color{red}{\mathbf{-0.81}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Tačka $z_b^0 = (0,0,0,0,0,0)$ zadovoljava postavljena ograničenja. Sada krećemo sa koracima simpleks metode dok ne dobijemo optimalnu tablicu. Nova tablica je

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1800 \\
0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 400 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 800 \\
\hline
-0.76 & -0.77 & -0.78 & \mathbf{-0.79} & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.81 & 648
\end{array}
$$

sa trenutnim maksimumom 648 evra prihoda. Sledeća je

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1800 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 400 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\
0 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 700 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 800 \\
\hline
-0.76 & 0.02 & \mathbf{-0.78} & 0 & -0.78 & 0 & 0 & 0.79 & 0 & 0 & 0.02 & 964
\end{array}
.
$$

Ovde je maksimum 964 evra. Naredna je

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
\mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1100 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 400 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 700 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 800 \\
\hline
\mathbf{-0.76} & -0.76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.78 & 0.80 & 1510
\end{array}
$$

sa maksimumom 1510 evra. U narednoj tablici dolazimo do optimalnog rešenja

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1100 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 400 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 700 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 800 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.76 & 0.77 & 0 & 0.02 & 0.04 & 2346
\end{array}
.
$$

Sada je

$$
z_b^{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1100, 0, 700, 400, 0, 800)
$$

a prihodi su 2346 evra. Dakle 21.9. bere se samo belo grožđe i to 1100 kg, 25.9. se bere i belo (700 kg) i crno (400 kg) grožđe, a 29.9. se bere samo crno grožđe (800 kg). ■

Primer 6.3.5 Pogon mašinske obrade jednog preduzeća treba da proizvodi dva proizvoda na tri mašine. Podaci o kapacitetu, vremenima izrade i dohotku po jedinici proizvoda dati su u tabeli:

Proizvod	Vreme obrade (h)			Dohodak po jedinici proizvoda
	M_1	M_2	M_3	
P_1	6	12	9	900
P_2	15	8	12	1200
Kapacitet (h)	135	180	150	

Naći optimalan program proizvodnje koji će dati maksimalan dohodak. Rešenjem obuhvatiti matematičku postavku zadatka, formiranje početne simpleks tabele i rešenja.

Rešenje. Neka je x_1 broj jedinica proizvoda P_1, a x_2 broj jedinica proizvoda P_2. Problem koji treba rešiti postaje

$$\max(900x_1 + 1200x_2) = -\min(-900x_1 - 1200x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & + & 15x_2 & \leq & 135 \\ 12x_1 & + & 8x_2 & \leq & 180 \\ 9x_1 & + & 12x_2 & \leq & 150 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}.$$

Početna simpleks tablica postaje

$$\begin{array}{rrrrr|r} 6 & 15 & 1 & 0 & 0 & 135 \\ 12 & 8 & 0 & 1 & 0 & 180 \\ 9 & 12 & 0 & 0 & 1 & 150 \\ \hline -900 & -1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

dok je optimalna

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 1/7 & 0 & -2/21 & 5 \\ 0 & 0 & 8/7 & 1 & -44/21 & 20 \\ 1 & 0 & -4/21 & 0 & 5/21 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 15000 \end{array}$$

gde je $z_b^{opt} = (x_1, x_2) = (10, 5)$ dok je maksimum funkcije cilja 15000. ■

Primer 6.3.6 Sredstvo za prskanje voća treba da sadrži najmanje 36 g bietila (B), 32 g nitrofenila (N) i 48 g raznih fosfornih jedinjenja (P). U prodaji se nalaze dva rastvora R_1 i R_2 sa tim supstancama. Njihov sadržaj u ta dva rastvora je dat u sledećoj tabeli:

	R_1	R_2
B	12	4
N	4	8
P	4	24

Sastaviti najjeftiniji rastvor koji zadovoljava date uslove, ako se zna da 1 litar rastvora R_1 košta 16 dinara, a 1 litar rastvora R_2 24 dinara (napisati matematički model). Koliko košta najjeftiniji rastvor?

Rešenje. Neka je x_1 količina rastvora R_1, a x_2 količina rastvora R_2 u litrima. Problem koji treba rešiti postaje

$$\min(16x_1 + 24x_2)$$

uz uslove

$$\begin{array}{rcrcr} 12x_1 & + & 4x_2 & \geq & 36 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & \geq & 32 \\ 4x_1 & + & 24x_2 & \geq & 48 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & \geq & 9 \\ x_1 & + & 2x_2 & \geq & 8 \\ x_1 & + & 6x_2 & \geq & 12 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}.$$

Početna simpleks tablica postaje

$$\begin{array}{cccccccc|c}
3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 12 \\ \hline
16 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

uz funkciju cilja

$$f = 16x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

za $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Napomenimo da su x_3, x_5 i x_7 izravnavajuće promenljive, a x_4, x_6 i x_8 veštačke promenljive. Ovde je

$$z_{bp}^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (0, 0, 0, 9, 0, 8, 0, 12),$$

dok je $z_b^0 = (x_1, x_2) = (0, 0)$ i ova tačka ne zadovoljava date početne nejednačine pri definisanju problema. Funkcija cilja postaje $w = x_4 + x_6 + x_8$ i poslednja vrsta prethodne tablice se zamenjuje kao što je dato u narednoj tablici

$$\begin{array}{cccccccc|c}
3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 12 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

jer moramo naći tačku koja pripada dopustivom skupu. Posle množenja prve tri vrste sa -1 i dodavanja u poslednju vrstu, dobijamo simpleks tablicu

$$\begin{array}{cccccccc|c}
3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 12 \\ \hline
-5 & -9 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -29
\end{array}.$$

Nakon tri koraka dobijamo optimalnu tablicu za traženi minimum

$$\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & -2/5 & 2/5 & 1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 4/5 & -4/5 & -17/5 & 17/5 & 1 & -1 & 8 \\
0 & 1 & 1/5 & -1/5 & -3/5 & 3/5 & 0 & 0 & 3 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}.$$

Tačka $(x_1, x_2) = (2, 3)$ pripada dopustivoj oblasti. Sada ćemo eliminisati četvrtu, šestu i osmu kolonu koje odgovaraju veštačkim promenljivima i poslednju vrstu zameniti sa koeficijentima iz početne funkcije cilja.

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 4/5 & -17/5 & 1 & 8 \\
0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 0 & 3 \\ \hline
16 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Nova funkcija cilja je $f = 16x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_5 + 0x_7$. Kada prvu vrstu pomnožimo sa -16 i treću sa -24 i dodamo u četvrtu, dobijamo simpleks tablicu

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 4/5 & -17/5 & 1 & 8 \\
0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 0 & 3 \\ \hline
0 & 0 & 8/5 & 56/5 & 0 & -104
\end{array}$$

koja je optimalna, $z_b^{opt} = (x_1, x_2) = (2, 3)$ i minimalna cena rastvora je 104 dinara. ■

6.4 Zadaci za vežbu

1. Neka je 100 grama jabuka 10 dinara, a 100 grama krušaka 12 dinara. U tabeli je dat sadržaj mineralnih materija u zrelim plodovima jabuke i kruške u miligramima na 100 grama sveže mase.

	Jabuka	Kruška
Azot (N)	1	10
Fosfor (P)	1	5
Kalijum (K)	5	7
Kalcijum (Ca)	5	2
Magnezijum (Mg)	3	6

Po koliko grama jabuka i krušaka treba uzeti tako da uzeta količina sadrži najmanje 100 mg azota, 120 mg kalcijuma i 80 mg magnezijuma, najviše 50 mg fosfora i 140 mg kalijuma, i tako da cena uzete mešavine bude minimalna? Napisati matematički model.

2. U šumi se nalazi 4 vrste jestivih pečuraka. U različitom vremenskom periodu prvi berač B_1 raspolaže sa 80 radnih časova berbe, drugi berač B_2 sa 70 časova berbe, a treći berač B_3 sa 75 časova berbe. Za kilogram prve vrste pečurke P_1 berač B_1 treba da utroši 1/2 časa berbe, B_2 3/4 časa berbe, a B_3 1 čas berbe. Za pečurku P_2 berač B_1 utroši 2 časa berbe, B_2 1 čas berbe, a B_3 1/2 časa berbe. Za P_3 pečurku, berač B_1 utroši 1/4 časa, B_2 3/4 časa, a B_3 1/2 časa berbe. Branje pečurke P_4 zahteva od berača B_1 2 časa berbe, od B_2 3 časa berbe, a od B_3 1 čas berbe. Na pijacama berači prodaju pečurke po sledećim cenama: P_1 za 50 din/kg, P_2 za 60 din/kg, P_3 za 45 din/kg, a P_4 za 90 din/kg. Na pijacama se može prodati najviše 100 kg pečurki P_1, 90 kg P_2, 120 kg P_3 i 70 kg P_4. Odrediti optimalni plan berbe, ako se podrazumeva da sva tri berača rade zajedno, da bi se dobila maksimalna zarada.

3. Potrebno je napraviti smešu od proizvoda P_1, P_2 i P_3 koja će zadovoljiti uslove da sadrži tačno 20 delova sastojka S_1, najviše 40 delova sastojka S_2 i najmanje 60 delova sastojka S_3. Pri izdradi smeše nastojati da troškovi budu minimalni. Koeficijenti sadržaja S_1, S_2 i S_3 u proizvodima P_1, P_2 i P_3, kao i cene za jedinicu proizvoda P_1, P_2 i P_3 dati su u narednoj tabeli:

Sastojci smeše		Proizvodi			Sadržaj sastojka u smeši
		P_1	P_2	P_3	
Vrsta sastojaka	S_1	0	2	1	20
	S_2	2	4	0	40
	S_3	10	4	2	60
Cena za jedinicu proizvoda		5	4	5	

4. Uprava fabrike sokova hoće u ovoj godini da lansira novu grupu proizvoda - sokove od dunja. Za tu svrhu je otkupljeno 2000 litara kaše od dunja. Ova kaša ne može da se iskoristi za neku od već postojećih vrsta sokova i zbog toga mora potpuno da se iskoristi za nove proizvode. Sokovi od dunja će biti u pakovanjima od jednog litra i proizvodiće se u 3 varijante:

– Dunja*** - koja sadrži 50% kaše i 50% vode,

– Dunja** - koja sadrži 40% kaše, 10% šećera i 50% vode i

– Dunja* - koja sadrži 25% kaše, 25% šećera i 50% vode.

Na osnovu analize tržišta, procenjeno je da do kraja godine može da se proda najviše 6000 litara svih sokova od dunje, a da će Dunje***, zbog visoke cene, moći da se proda najviše 1000 litara. Pošto uprava želi da održi imidž proizvođača kvalitetnih sokova, odlučeno je da se sok Dunja* proizvede najviše 2000 litara. Potrebno je odrediti koliko litara soka Dunja***, Dunja** i Dunja* treba proizvesti da bi ukupan profit koji se ostvaruje prodajom ovih sokova bio maksimalan. Profit po jednom pakovanju soka Dunja*** je 15 evra, Dunja** 12 evra i Dunja* 9 evra. Formulisati matematički model i odrediti jedno optimalno rešenje koristeći simpleks tabele.

5. Potrebno je izgraditi određen PVO sistem. Poznato je da protivnik raspolaže sa 100 aviona za dejstvo sa malih visina, 150 aviona za dejstvo sa srednjih visina i 100 aviona za dejstvo sa velikih visina, ali se ne zna sa koje će visine dejstvovati. Možemo obezbediti dva tipa raketa. Prvi tip raketa obara avione sa verovatnoćama 3/4, 1/2 i 1/4 respektivno, a drugi tip sa verovatnoćama 1/4, 1/2, 3/4, zavisno od visine leta. Prvi tip rakete staje 25, a drugi 50 n.j. po komadu. Koliko kojih raketa je nužno obezbediti pa da očekivani broj oborenih aviona ne bude manji od broja aviona koji mogu dejstvovati? Pri tome izdatke za nabavke raketa svesti na najmanju moguću meru. Sastaviti matematčki model problema i rešiti ga.

6. Napisati matematički model za sledeći problem LP. U 100 grama voćnog AB jogurta nalazi se 3.4 g proteina (P), 0.2 g mlečne masti (MM) i 5.2 g ugljenih hidrata (UH). U 100 grama običnog AB jogurta nalazi se 3.3 g P, 1.7 g MM i 4.4 g UH. Kalorijska vrednost 100 grama voćnog AB jogurta je 47 kcal, a običnog AB jogurta je 41 kcal. Po koliko grama oba jogurta treba da popijemo da bismo uneli minimalnu količinu kalorija, a da unesemo najviše 21 gram P, bar 10 grama MM i bar 38 grama UH?

7. Koristeći ponuđene podatke napisati matematički model: Kako treba kombinovati ponuđeno: (S), (P), (T) i (R) u pripremi ručka minimalne kalorijske vrednosti ali tako da ručak sadrži bar 45 g proteina i bar 120 g ugljenih hidrata, a da količina masti ne bude veća od 45 g?

u 100 g	SUPA (S)	PIRINAČ (P)	TESTENINA (T)	RIBA (R)
PROTEINI	11.4	6.7	12	18
UGLJ.HIDRATI	57.7	78.5	72.2	0
MASTI	5	1.5	1.5	16
E.VREDNOST	317 cal	354 cal	350 cal	110 cal

GLAVA 7

Realne funkcije jedne realne promenljive

U ovoj glavi uvešćemo osnovne pojmove u vezi sa realnim funkcijama jedne realne promenljive koje ćemo koristiti kroz ceo udžbenik. Veoma je važno da studenti savladaju skiciranje i da nauče osobine elementarnih funkcija koje ćemo koristiti kod funkcija koje budemo ispitivali.

7.1 Osnovni pojmovi

Realna funkcija jedne realne promenljive preslikava skup A u B, gde su A i B podskupovi skupa realnih brojeva. Pisaćemo $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Skup A nazivamo domen funkcije f (obeležava se i sa D), a skup B kodomen funkcije f. Sa $f(A)$ (ili $f(D)$) obeležavaćemo skup vrednosti funkcije f koji je podskup skupa B na sledeći način:

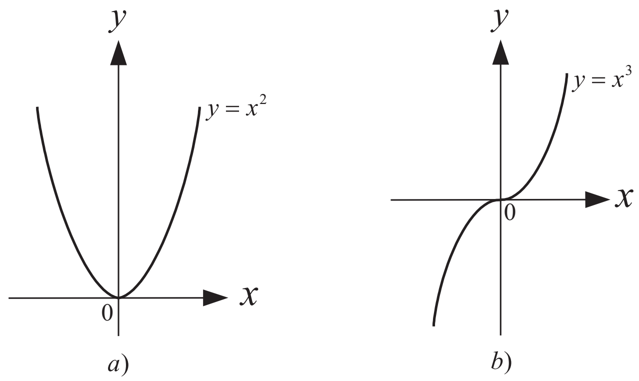
$$f(A) = \{y |\, y \in B,\, \exists\, x \in A,\, y = f(x)\}\,.$$

Definicija 7.1.1 *Grafik funkcije $f : A \to B$ je podskup G_f skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ koji je definisan sa*

$$G_f = \{(x, f(x)) |\, x \in A,\, f(x) \in B\}\,.$$

Primeri grafika funkcija dati su na slici 7.1.

Primer 7.1.2 Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisanu sa $f(x) = x^2$ (slika 7.1 a)), kodomen je skup realnih brojeva, ali je skup vrednosti $f(\mathbb{R}) = \{x |\, x \in \mathbb{R},\, x \geq 0\}$. Ako je $f(x) = x^3$ (slika 7.1 b)) tada je kodomen jednak sa skupom vrednosti $f(\mathbb{R})$. ■



Slika 7.1: Grafici funkcija: *a)* $f(x) = x^2$, *b)* $f(x) = x^3$.

Definicija 7.1.3 *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : A \to B$ je parna ako za svako $x \in A$, gde je A simetričan skup u odnosu na $x = 0$, važi*

$$f(-x) = f(x)$$

i tada je grafik funkcije f osno simetričan u odnosu na y-osu.

Definicija 7.1.4 *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : A \to B$ je neparna ako za svako x iz simetričnog skupa A (u odnosu na $x = 0$) važi*

$$f(-x) = -f(x)$$

i tada je grafik funkcije f centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Primer 7.1.5 Jedna parna funkcija je $f(x) = x^2$ (slika 7.1 *a)*) jer je $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, a jedna neparna funkcija je $f(x) = x^3$ (slika 7.1 *b)*) jer je $f(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f(x)$. ■

Uvedimo sada pojmove ograničenosti i periodičnosti funkcije.

Definicija 7.1.6 *Funkcija $f : A \to B$ je ograničena ako postoji $M > 0$ tako da za svako $x \in A$ važi $|f(x)| \leq M$.*

Primer 7.1.7 Funkcija $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ je ograničena za svako $x \in \mathbb{R}$ jer važi

$$|f(x)| = \left|-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2}.$$

■

Definicija 7.1.8 *Funkcija $f : A \to B$ je periodična ako postoji $\omega \in \mathbb{R}$ tako da za svako $x \in A$ važi $f(x + \omega) = f(x)$. Najmanje takvo $\omega > 0$ označićemo sa ω_0 i zvaćemo ga osnovnim periodom funkcije f.*

Primer 7.1.9 Funkcije $y = a\sin(bx+c)$ i $y = a\cos(bx+c)$ imaju osnovni period $\omega_0 = 2\pi/|b|$, dok funkcije $y = a\,\mathrm{tg}(bx+c)$ i $y = a\,\mathrm{ctg}(bx+c)$ imaju osnovni period $\omega_0 = \pi/|b|$, za $a, b \neq 0$. Detaljnije o ovim funkcijama u poglavlju 7.2.5. ∎

Definišimo sada nulu funkcije.

Definicija 7.1.10 *Neka $f : A \to B$. Tačka $x_0 \in A$ je nula funkcije f ako važi $f(x_0) = 0$.*

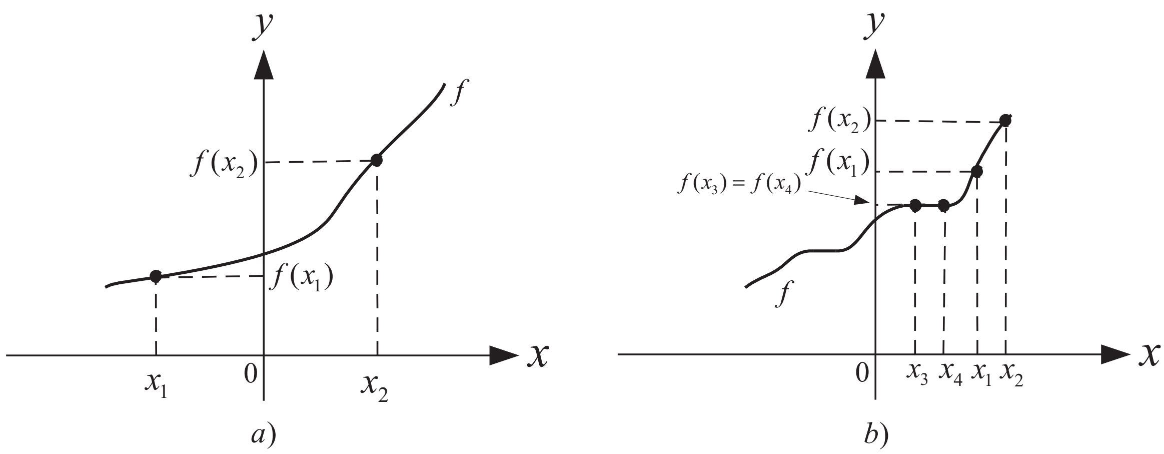
Kada se bude ispitivao znak funkcije, biće određivani intervali na kojima je funkcija negativna ili pozitivna.

Primer 7.1.11 Za funkcije $f(x) = x^2$ (slika 7.1 *a*)) i $f(x) = x^3$ (slika 7.1 *b*)) nula funkcije je $x = 0$. Funkcija $f(x) = x^2$ je negativna za $x \in \emptyset$, a pozitivna za $x < 0$ i $x > 0$. Funkcija $f(x) = x^3$ je negativna za $x < 0$, a pozitivna za $x > 0$. ∎

Monotono rastuće, monotono neopadajuće, monotono opadajuće i monotono nerastuće funkcije se definišu na sledeći način.

Definicija 7.1.12 *Funkcija $f : A \to B$ je monotono rastuća (neopadajuća) na intervalu $(a, b) \subseteq A$ (slika 7.2 a) i b)), ako za svako $x_1, x_2 \in (a, b)$ važi*

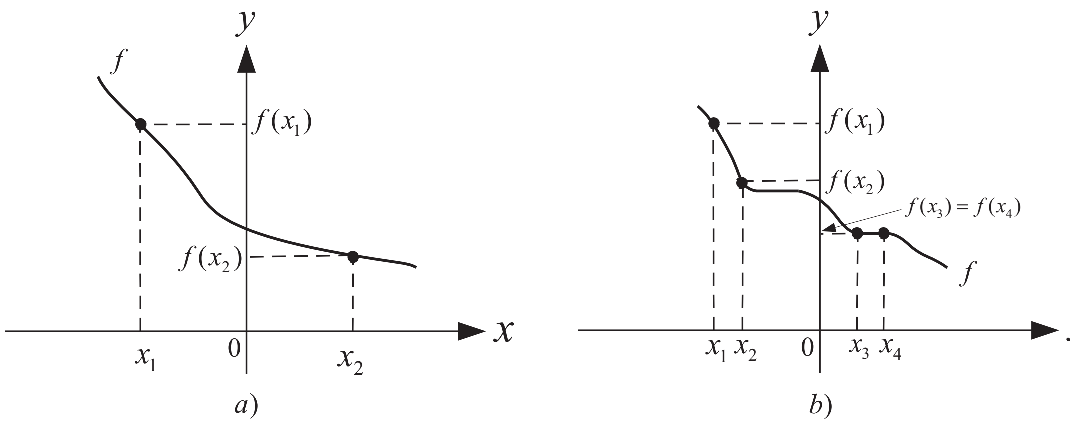
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)) \; .$$



Slika 7.2: Grafici funkcija: *a*) f - monotono rastuća, *b*) f - monotono neopadajuća.

Definicija 7.1.13 *Funkcija $f : A \to B$ je monotono opadajuća (nerastuća) na intervalu $(a, b) \subseteq A$ (slika 7.3 a) i b)), ako za svako $x_1, x_2 \in (a, b)$ važi*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)) \; .$$



Slika 7.3: Grafici funkcija: *a*) f - monotono opadajuća, *b*) f - monotono nerastuća.

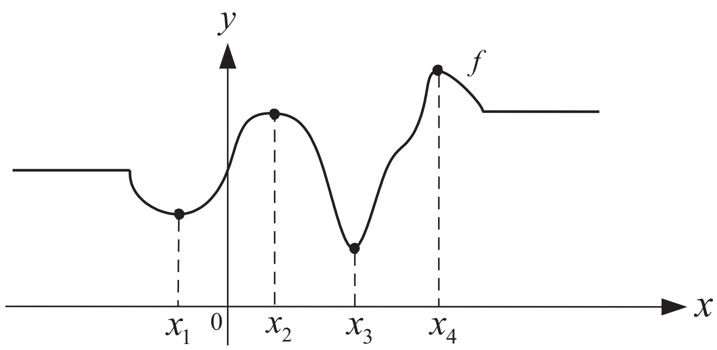
Primer 7.1.14 Funkcija $f(x) = x^2$ (slika 7.1 *a*)) je monotono opadajuća za $x < 0$, dok je za $x > 0$ monotono rastuća. Funkcija $f(x) = x^3$ (slika 7.1 *b*)) je monotono rastuća za svako $x \in \mathbb{R}$. ■

Definišimo još i lokalne (globalne) minimume i maksimume.

Definicija 7.1.15 *Funkcija $f : A \to B$ ima lokalni minimum (maksimum) u tački $x_0 \in A$ ako postoji $\delta > 0$ tako da je za svako $x \in (x - \delta, x + \delta) \cap A$ važi $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$.*

Definicija 7.1.16 *Funkcija $f : A \to B$ ima globalni minimum (maksimum) u tački $x_0 \in A$ ako za svako $x \in A$ važi $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$.*

Na slici 7.4 dat je primer za prethodne dve definicije. Izraze minimum ili maksimum funkcije još nazivamo i ekstremne vrednosti funkcije.



Slika 7.4: Funkcija f u tački x_1 ima lokalni minimum, a u x_3 i lokalni i globalni minimum. U tački x_2 je lokalni maksimum funkcije f, a u x_4 i lokalni i globalni maksimum.

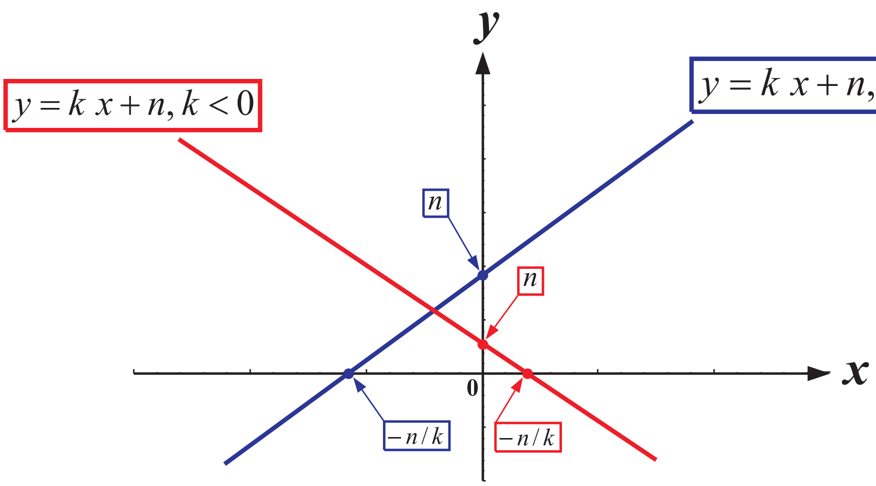
Primer 7.1.17 Funkcija $f(x) = x^2$ ima lokalni i globalni minimum u tački $x = 0$ (slika 7.1 *a*)). Funkcija $f(x) = x^3$ nema ni minimum ni maksimum (slika 7.1 *b*)). ■

7.2 Osnovne elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su: linearna funkcija, stepena funkcija, eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i ciklometrijske funkcije. Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija $(+,-,\cdot,:)$ i konačnog broja kompozicija elementarnih funkcija. Za svaku od tih funkcija odredićemo domen, nule, znak, parnost i neparnost, monotonost i ekstremne vrednosti.

7.2.1 Linearna funkcija

Eksplicitni oblik linearne funkcije (prave) je $y = f(x) = k\,x + n$, gde je k koeficijent pravca prave, a n odsečak na y-osi. Ako je $k \neq 0$, odsečak na x-osi je $-n/k$ (slika 7.5).



Slika 7.5: Linearna funkcija $y = kx + n$ za $k \neq 0$.

Ako je $k \neq 0$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = -kx + n \notin \{f(x), -f(x)\}$, nije ni parna ni neparna za $n \neq 0$,

(4) Nule: $x = -n/k$.

Posebno, ako je $k > 0$, tada je:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-n/k, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -n/k)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća funkcija za $x \in D$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

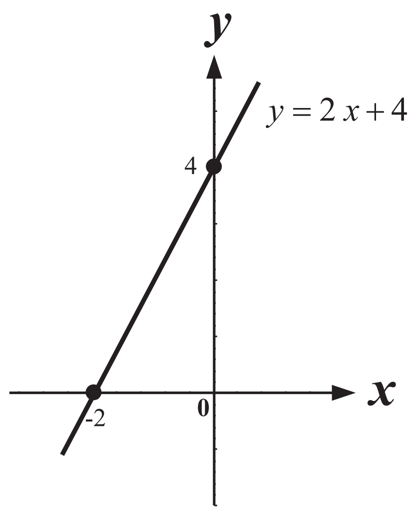
U slučaju da je $k < 0$:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -n/k)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-n/k, +\infty)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća funkcija za $x \in D$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

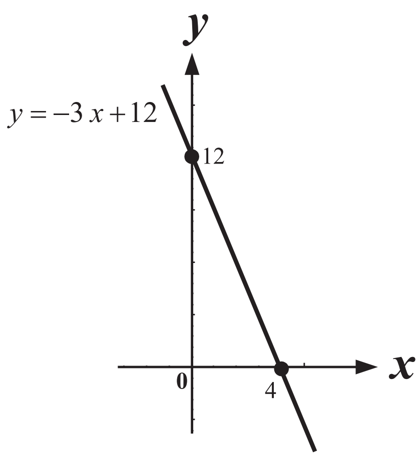
Primer 7.2.1 Na slici 7.6 skicirana je prava $y = 2x + 4$.



Slika 7.6: Linearna funkcija $y = 2x + 4$.

■

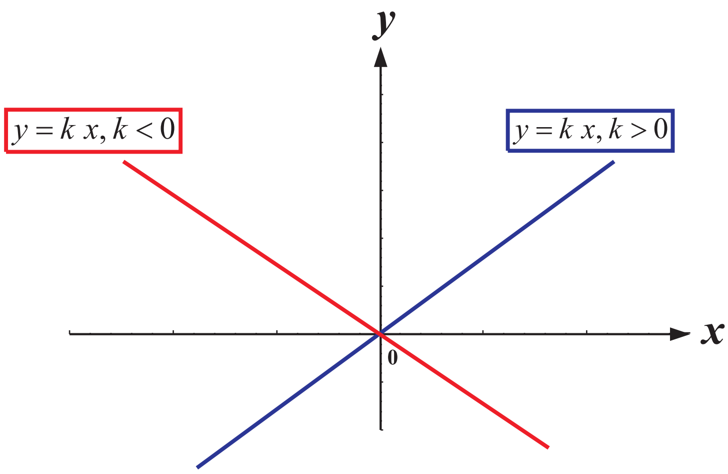
Primer 7.2.2 Na slici 7.7 skicirana je prava $y = -3x + 12$.



Slika 7.7: Linearna funkcija $y = -3x + 12$.

■

Ako je linearna funkcija oblika $y = k\,x$, $k \neq 0$, tada ona prolazi kroz koordinatni početak (slika 7.8).



Slika 7.8: Linearna funkcija $y = kx$ za $k \neq 0$.

Za $k \neq 0$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = k(-x) = -(kx) = -f(x)$, pa je funkcija neparna,

(4) Nule: $x = 0$.

Ako je $k > 0$, tada je:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća funkcija za $x \in D$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

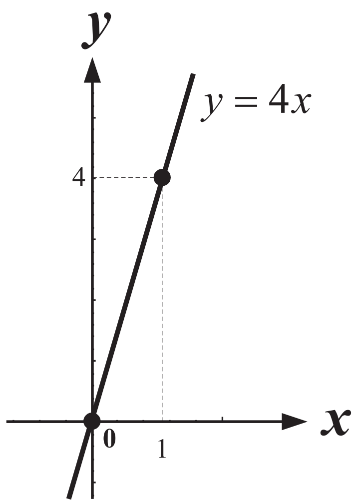
U slučaju da je $k < 0$, tada je:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) < 0$ za $x \in (0, +\infty)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća funkcija za $x \in D$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

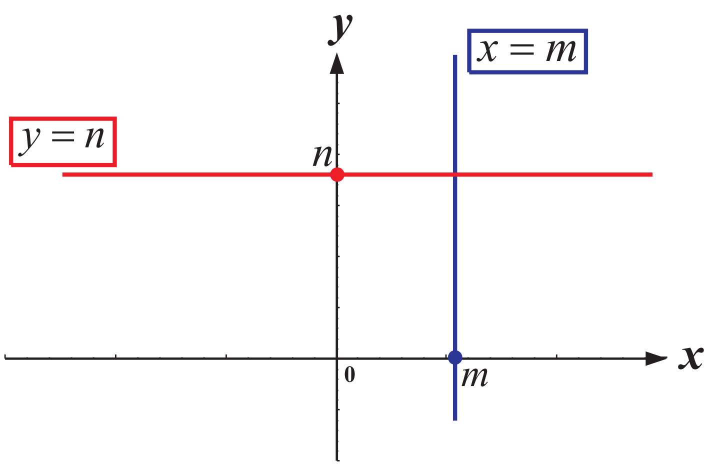
Primer 7.2.3 Na slici 7.9 skicirana je prava $y = 4x$.



Slika 7.9: Linearna funkcija $y = 4x$.

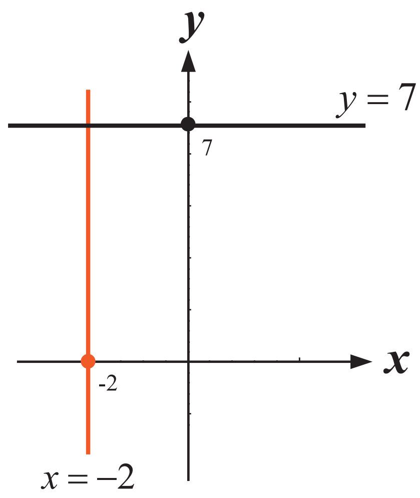
■

Za pravu $y = n$, na y-osi obeleži se tačka n i povuče se prava paralelna sa x-osom. U slučaju prave $x = m$, na x-osi obeleži se tačka m i povuče se prava paralelna sa y-osom (slika 7.10).



Slika 7.10: Prave $y = n$ i $x = m$.

Primer 7.2.4 Na slici 7.11 predstavljene su prave $y = 7$ i $x = -2$.

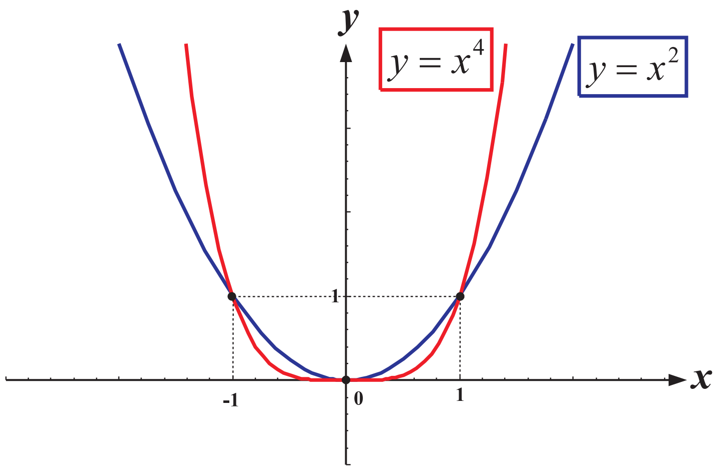


Slika 7.11: Prave $y = 7$ i $x = -2$.

■

7.2.2 Stepena funkcija

Stepena funkcija oblika je $y = x^a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Na slici 7.12 prikazane su stepene funkcije ako je eksponent paran prirodan broj.



Slika 7.12: Funkcije $y = x^a$ za $a = 2$ i $a = 4$.

Dakle, ako je eksponent paran prirodan broj, $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, tada je:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$, pa je funkcija parna,

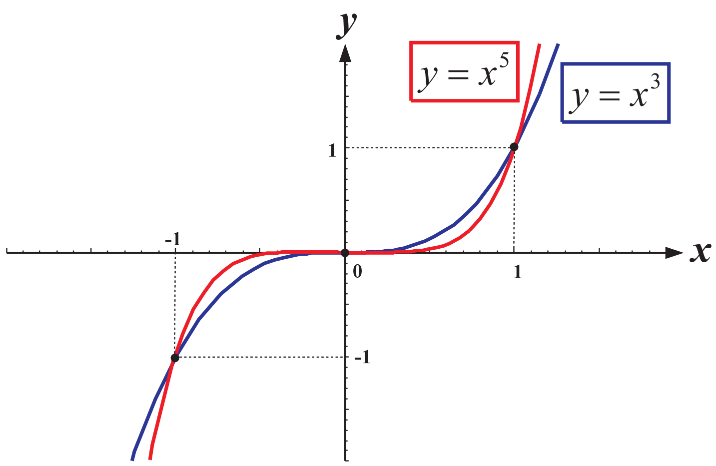
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$, a rastuća za $x \in (0, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = 0$ postoji lokalni i globalni minimum funkcije.

Na slici 7.13 prikazane su stepene funkcije ako je eksponent neparan prirodni broj.



Slika 7.13: Funkcije $y = x^a$ za $a = 3$ i $a = 5$.

Tada, za $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, važi i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x)$, pa je funkcija neparna,

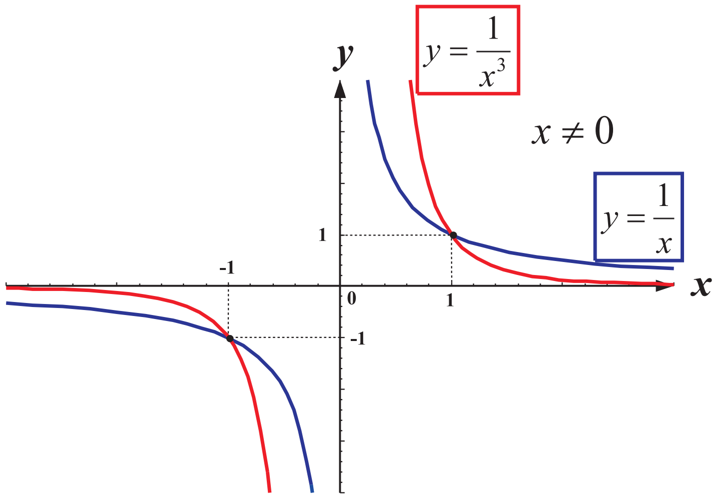
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Ako je eksponent neparan negativan ceo broj, grafici funkcija su predstavljeni na slici 7.14.



Slika 7.14: Funkcije $y = x^a$ za $a = -1$ i $a = -3$.

Tada važi, za $a = -(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{-(2k+1)} = -x^{-(2k+1)} = -f(x)$, pa je funkcija neparna,

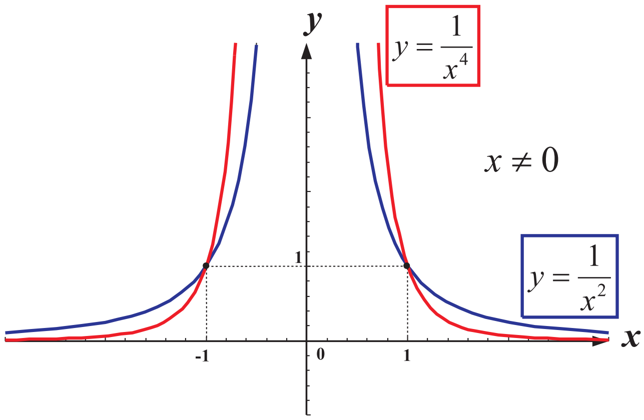
(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Ako je eksponent paran negativan ceo broj, tada je (slika 7.15):



Slika 7.15: Funkcije $y = x^a$ za $a = -2$ i $a = -4$.

A njene osobine su, za $a = -2k$, $k \in \mathbb{N}$:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{-2k} = x^{-2k} = f(x)$, pa je funkcija parna,

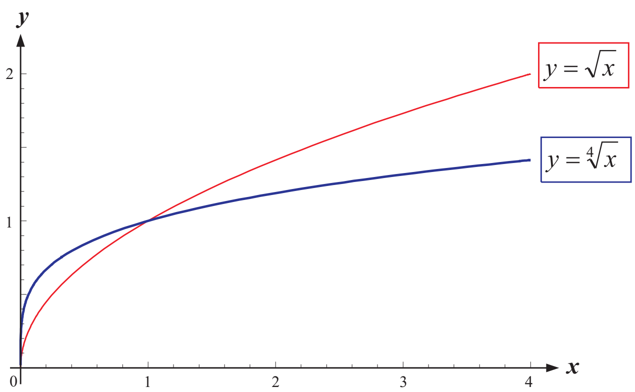
(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća za $x \in (0, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-\infty, 0)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 7.16, skicirana je funkcija $y = a^x$ za $a = 1/2$ i $a = 1/4$.



Slika 7.16: Funkcije $y = x^a$ za $a = 1/2$ i $a = 1/4$.

U slučaju kao na slici 7.16, za $a = 1/(2k)$, $k \in \mathbb{N}$ važi:

(1) Domen: $D = [0, +\infty)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: funkcija nije ni parna ni neparna (domen nije simetričan interval u odnosu na $x = 0$),

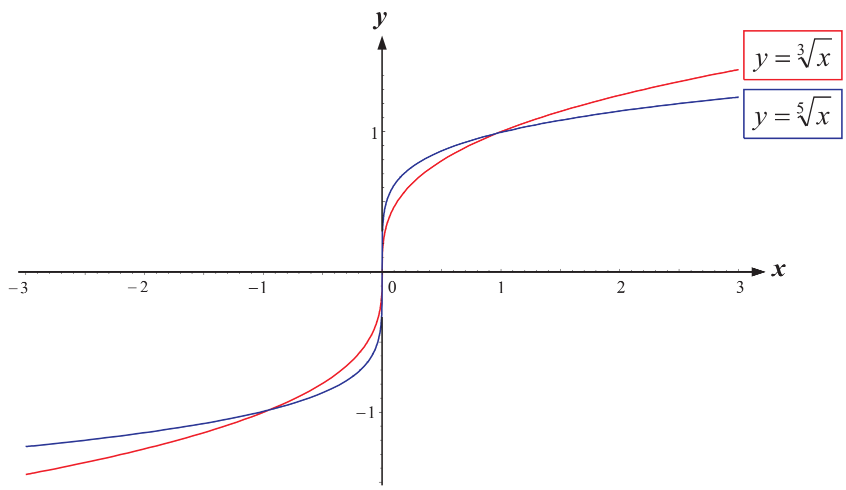
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (0, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = 0$.

Na slici 7.17, skicirana je funkcija $y = a^x$ za $a = 1/3$ i $a = 1/5$. Tada je:



Slika 7.17: Funkcije $y = x^a$ za $a = 1/3$ i $a = 1/5$.

Dakle, za $a = 1/(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = (-x)^{1/(2k+1)} = -x^{1/(2k+1)} = -f(x)$, pa je funkcija neparna,

(4) Nule: $x = 0$,

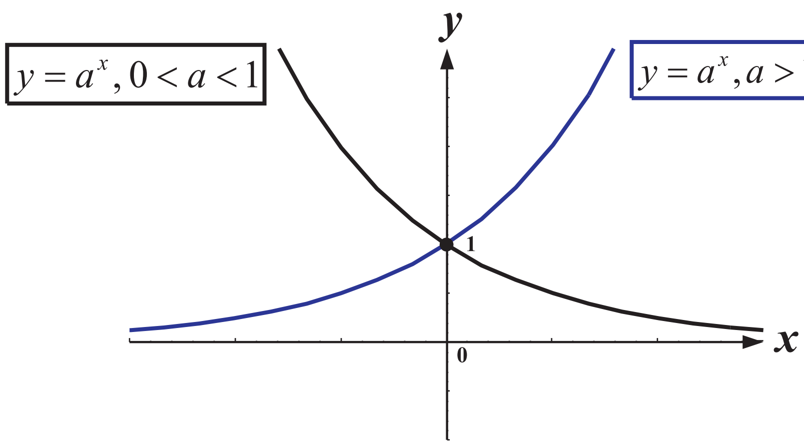
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in D$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

7.2.3 Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, gde je $a > 0$, $a \neq 1$, definisana je za svako $x \in \mathbb{R}$ (slika 7.18).



Slika 7.18: Funkcija $y = a^x$ za $a > 0$ i $a \neq 1$.

Za posmatranu esponencijalnu funkciju važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = a^{-x} \notin \{f(x), -f(x)\}$, pa nije ni parna ni neparna,

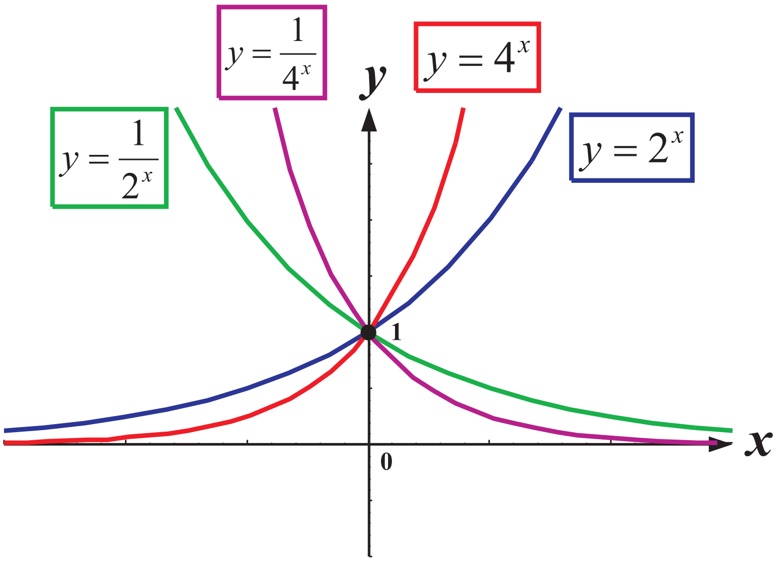
(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: za $a > 1$, $f(x)$ je rastuća za $x \in D$, za $0 < a < 1$, $f(x)$ je opadajuća za $x \in D$,

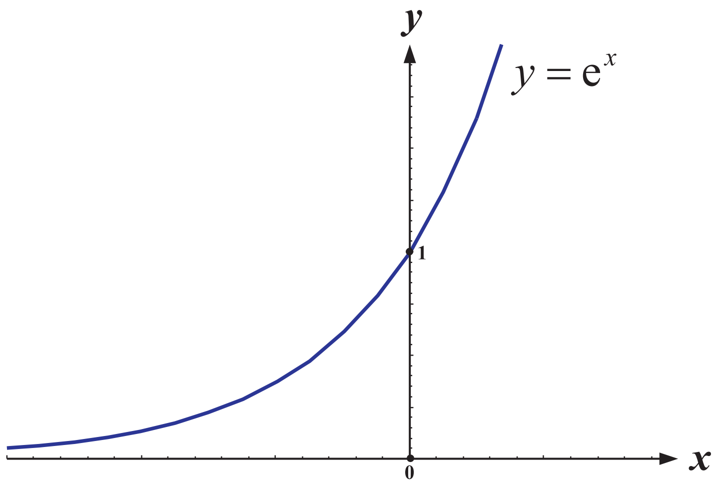
(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 7.19 vidimo kako se ponaša eksponencijalna funkcija za $a \in \{1/4, 1/2, 2, 4\}$,



Slika 7.19: Funkcije $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = (1/2)^x$ i $y = (1/4)^x$.

Na slici 7.20 data je funkcija $y = e^x$.



Slika 7.20: Funkcija $y = e^x$.

Primena eksponencijane funkcije

Primer 7.2.5 Malarija ubije više od milion ljudi svake godine. Da bi se razumeo mehanizam rasta malarije, eksperimenti su vršeni na miševima. Svaka 24 sata se ćelije malarije tipa *Plasmodium chabaudi* samostalno reprodukuju. Paraziti se razvijaju u crvenim krvnim zrncima 24 sata i ona istovremeno pucaju i tako napadaju nova crvena krvna zrnca, čime se proces ponavlja. Svaka inficirana ćelija inficira 8 novih ćelija kada pukne. Dakle, jedan parazit za jedan dan proizvede 8 novih parazita, $8 \cdot 8 = 64$ nakon dva dana, itd.

$$\begin{gathered} P(0) = 1 \\ P(1) = 8 \\ P(2) = 8 \cdot P(1) = 8^2 \\ P(3) = 8 \cdot P(2) = 8^3 \\ \vdots \end{gathered}$$

Jasno da je rast broja malarijskog parazita predstavljen formulom

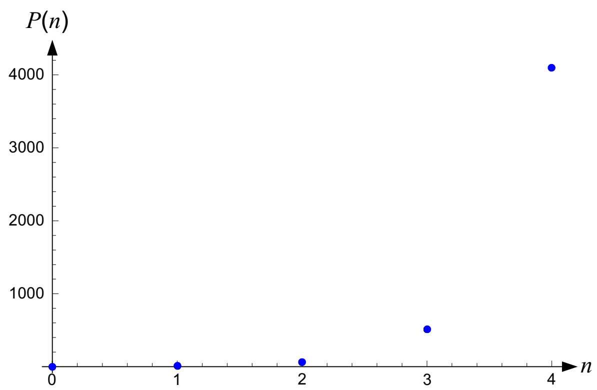
$$P(n) = 8^n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

gde je n broj dana (pogledati tabelu 7.1).

Tabela 7.1: Rast malarijskih parazita.

n	$P(n)$
0	1
1	8
2	64
3	512
4	4096
5	32768

Pošto je n u eksponentu, $P(n) = 8^n$ je jedna eksponencijalna funkcija po n, odnosno $P(n)$ ima eksponencijalni rast (slika 7.21).



Slika 7.21: Funkcija $P(n) = 8^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

■

Primer 7.2.6 U tabeli 7.2 dat je broj ljudi na našoj planeti od 1900. do 2010. godine u milionima. Na osnovu podataka iz tabele 7.2, primenom metode najmanjih kvadrata, dobija

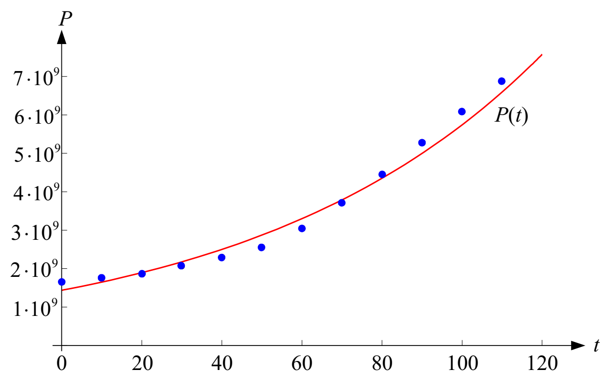
Tabela 7.2: Rast svetske populacije

t nakon 1900. god.	Popul. (u milionima)	t nakon 1900. god.	Popul. (u milionima)
0	1650	60	3040
10	1750	70	3710
20	1860	80	4450
30	2070	90	5280
40	2300	100	6080
50	2560	110	6870

se eksponencijalni model

$$P(t) = 1436.53 \cdot 1.01395^t$$

koji dobro fituje date podatke (slika 7.22). Moglo bi se 2020. godine očekivati



Slika 7.22: Funkcija $P(t) = 1436.53 \cdot 1.01395^t$.

$$P(t) = 1436.53 \cdot 1.01395^{120} = 7573.6$$

miliona stanovnika na planeti Zemlji. ■

Primer 7.2.7 Vreme poluraspada stroncijuma-90 ^{90}Sr je 25 godina. To znači da će se za 25 godina polovina količine tog izotopa raspasti za to vreme. Ako je početna masa 24 mg, odrediti $m(t)$, odnosno formulu za promenu mase u vremenu ili koliko ostaje mase nakon vremena t. Koliko ostaje nakon 40 godina? Koliko godina treba da prođe da bi se masa smanjila na 5 mg?

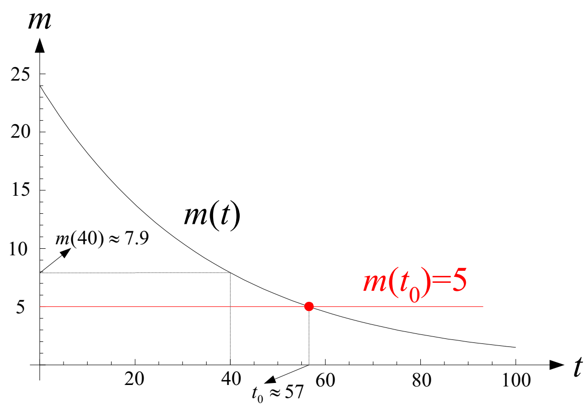
Rešenje. Pošto je početna vrednost 24 mg, tada ćemo imati

$$\begin{aligned}
&m(0) = 24\\
&m(25) = \tfrac{1}{2}m(0) = 12\\
&m(50) = \tfrac{1}{2}m(25) = \tfrac{1}{2^2}m(0) = 6\\
&m(75) = \tfrac{1}{2}m(50) = \tfrac{1}{2^3}m(0) = 3\\
&m(100) = \tfrac{1}{2}m(75) = \tfrac{1}{2^4}m(0) = 1.5
\end{aligned}$$

te zaključujemo da je

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}\, m(0) = \frac{1}{2^{t/25}} \cdot 24 = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/25}.$$

Grafik ove funkcije je prikazan na slici 7.23.



Slika 7.23: Funkcija $m(t) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/25}$.

Nakon 40 godina, preostali deo izotopa će iznositi

$$m(40) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{40/25} \approx 7.9 \text{ mg.}$$

Da bi se masa smanjila na $m = 5$ mg, broj godina t računamo na sledeći način (pogledati prvo poglavlje 7.2.4):

$$\begin{aligned} 5 = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/25} \quad &\Rightarrow \left(\frac{5}{24}\right)^{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t} \\ &\Rightarrow t = \log_{1/2}\left(\frac{5}{24}\right)^{25} \\ &\Rightarrow t = -25\log_2\left(\frac{5}{24}\right) \approx 57 \text{ godina.} \end{aligned}$$

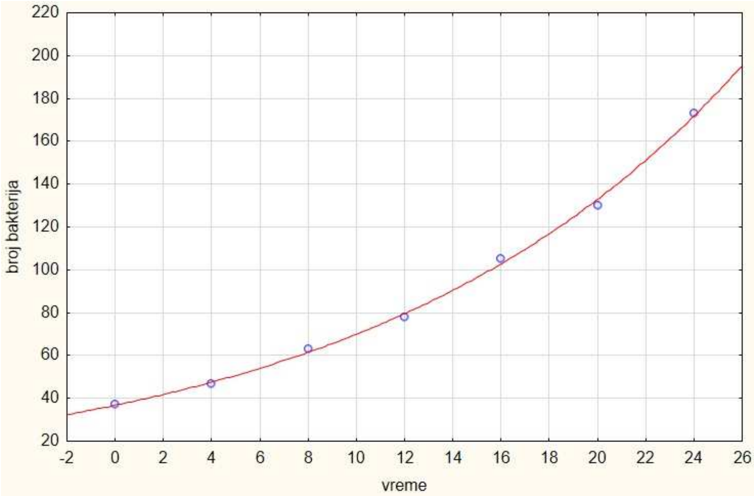
■

Primer 7.2.8 Istraživač pokušava da utvrdi vreme udvostručenja populacije bakterije *Giardia lamblia.* On formira kulturu u hranljivom rastvoru i procenjuje broj bakterija $n(t)$ u vremenu t, odnosno na svaka četiri sata. Njegovi podaci su prikazani u sledećoj tabeli (CFU/ml je broj poraslih bakterijskih kolonija u mililitru urina):

vreme (h)	0	4	8	12	16	20	24
broj bakterija (CFU/ml)	37	47	63	78	105	130	173

Primenom metode najmanjih kvadrata, dobija se eksponencijlni model $n(t) = 36.783 \cdot 1.066^t$. Koliko će biti bakterija u 26 sati nakon početka eksperimenta? U koliko časova će broj bakterija biti 160 CFU/ml?

Rešenje. Eksperimentalni podaci i grafik dobijene funkcije $n(t)$ se nalaze na slici 7.24.



Slika 7.24: Funkcija $n(t) = 36.783 \cdot 1.066^t$.

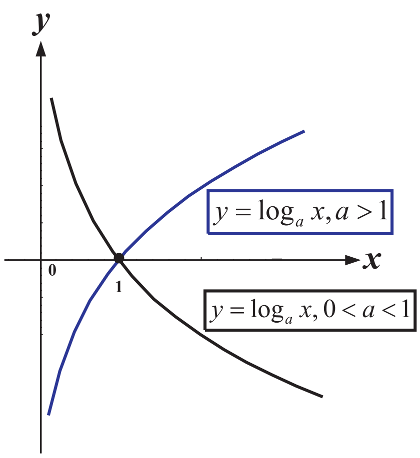
U $t = 24 + 2 = 26$ časova, broj bakterija će biti $n(26) = 36.783 \cdot 1.066^{26} = 193.791 \approx 194\ CFU/ml$. Sada ćemo izračunati za koje t će broj bakterija biti $160\ CFU/ml$.

$$160 = 36.783 \cdot 1.066^t \quad \Rightarrow 1.066^t = 4.350$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln 4.350}{\ln 1.066} \approx 23.$$

Dakle, $160\ CFU/ml$ bakterija se može očekivati oko 23 časa nakon početka eksperimenta. ■

7.2.4 Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija $y = \log_a x$, za $a > 0$ i $a \neq 1$, definisana je samo za $x > 0$ (slika 7.25).



Slika 7.25: Funkcija $y = \log_a x$ za $a > 0$ i $a \neq 1$.

Za posmatranu logaritamsku funkciju, ako je $a > 0$ i $a \neq 1$ važiće:

(1) Domen: $D = (0, +\infty)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: nije ni parna ni neparna (domen nije simetričan interval u odnosu na $x = 0$),

(4) Nule: $x = 1$,

Ako je $a > 1$, važi:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (0, 1)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (0, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

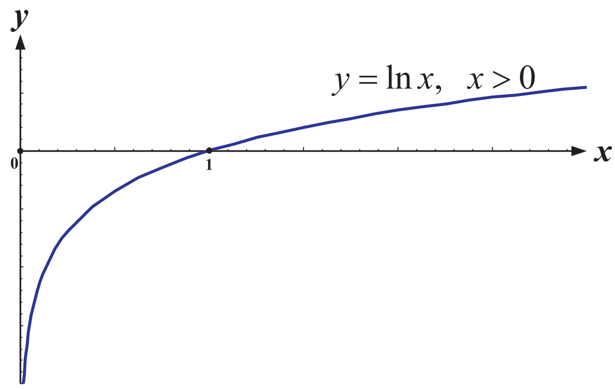
Ako je $0 < a < 1$, tada je:

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$ za $x \in (1, +\infty)$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je opadajuća za $x \in (0, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 7.26 data je logaritamska funkcija za osnovu $a = e$ koja se još naziva prirodni logaritam.

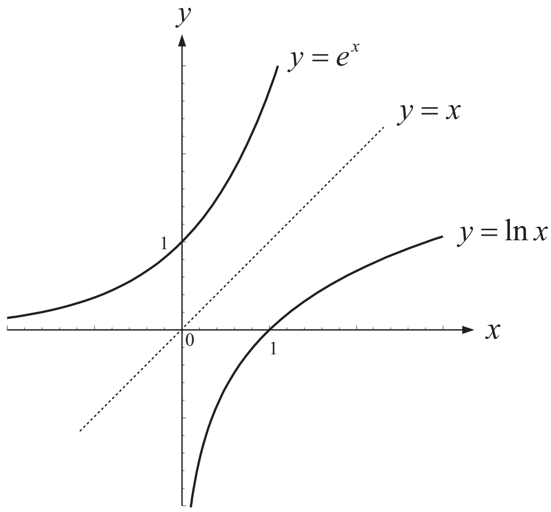


Slika 7.26: Funkcija $y = \log_a x = \log_e x = \ln x$.

Logaritamska i eksponencijalna funkcija su inverzne funkcije, odnosno, njihovi grafici su simetrični u odnosu na pravu $y = x$. Naime, važi $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$ (slika 7.27 za $a = e$, pogledati primer 1.6.16).

Sada ćemo navesti neke od osobina logaritamske funkcije:

- $\log_a x + \log_a y = \log_a(x\,y)$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$
- $\log_a x^b = b \log_a x$
- $\log_{a^b} x = \dfrac{1}{b} \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$



Slika 7.27: Funkcije $y = e^x$, $y = \ln\, x$ i $y = x$.

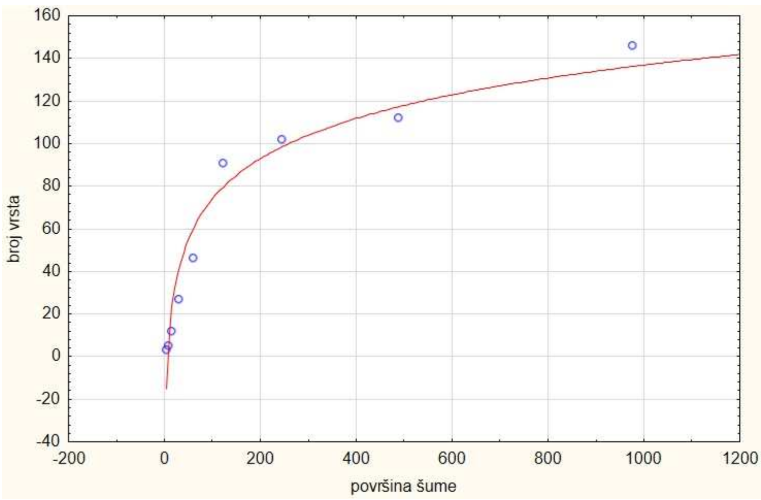
Primena logaritamske funkcije

Primer 7.2.9 Da bi se odredio biodiverzitet drveća u tropskoj prašumi, biolozi su prikupili podatke u šumskom rezervatu Pasoh u Maleziji. U narednoj tabeli su dati podaci koliki je broj vrsta drveća n pronađen na unapred zadatoj površini P prašume.

P (m^2)	3.81	7.63	15.26	30.52	61.04	122.07	244.14	488.28	976.56
n	3	5	12	27	46	91	102	112	146

Primenom metode najmanjih kvadrata, dobija se model $n(P) = -51.9403 + 27.3353 \ln P$. Koliki se broj različitih vrsta drveća očekuje na površini od 1953.12 metara kvadratnih?

Rešenje. Eksperimentalni podaci i grafik dobijene funkcije $n(P)$ nalaze se na slici 7.28.



Slika 7.28: Funkcija $n(P) = -51.9403 + 27.3353 \ln P$.

Za $P = 1953.12$ metara kvadratnih, broj vrsta drveća biće

$$n(1953.12) = -51.9403 + 27.3353 \ln 1953.12 = 155.1843 \approx 155 \text{ vrsta}.$$

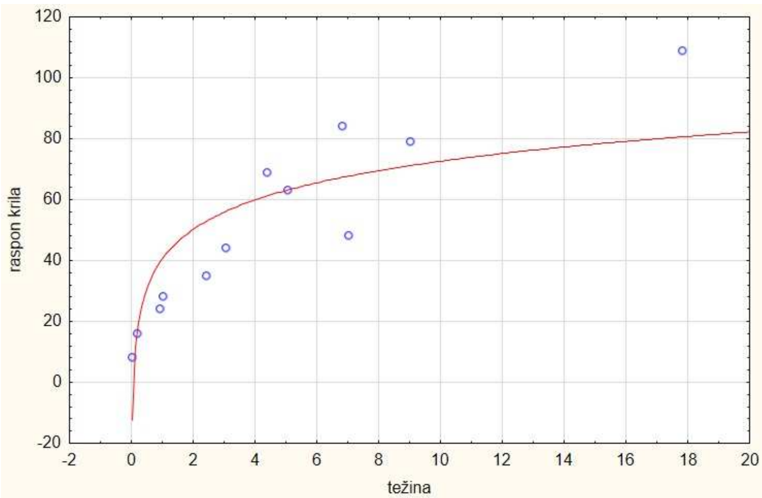
■

Primer 7.2.10 Ornitolozi su izmerili i katalogizirali raspon krila i težine mnogih različitih vrsta ptica koje mogu da lete. U tabeli je prikazan raspon krila L u inčima, za pticu težine W u librama.

Ptica	W (*lb*)	L (*in*)
Turski sup	4.40	69
Ćelavi orao	6.82	84
Velika rogata sova	3.08	44
Kuperov kobac	1.03	28
Kanadski ždral	9.02	79
Arktički morski papagaj	0.95	24
Kalifornijski kondor	17.82	109
Veliki severni gnjurac	7.04	48
Američki zlatni štiglić	0.022	8
Obični gral	0.20	16
Drvena roda	5.06	63
Patka gluvara	2.42	35

Ako je matematički model zavisnosti oblika $L(W) = 40.6007 + 13.9050 \ln W$, izračunati, koliki se raspon krila očekuje za pticu težine 9 libri.

Rešenje. Težine i rasponi krila za ptice iz tabele, zajedno sa funkcijom $L(W)$ date su na slici 7.29.

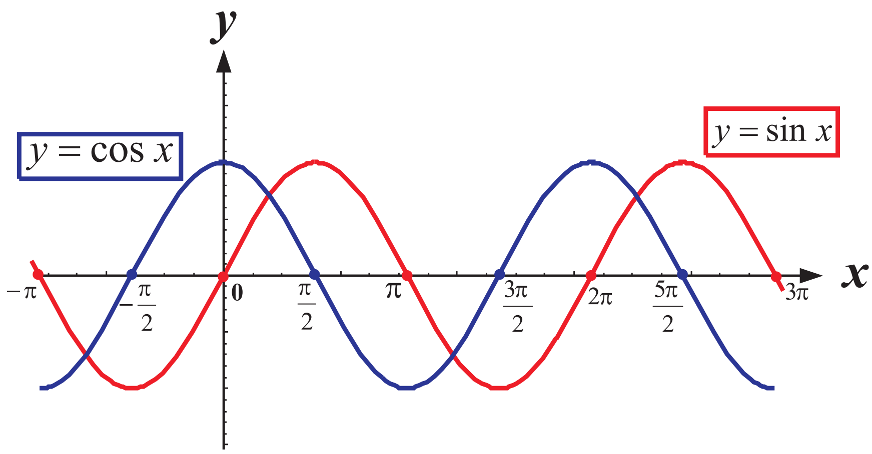


Slika 7.29: Funkcija $L(W) = 40.6007 + 13.9050 \ln W$.

Ako je težina ptice 9 libri, očekivani raspon krila je $L(9) = 40.6007 + 13.9050 \ln 9 = 71.1531 \approx 71$ inč. ■

7.2.5 Trigonometrijske funkcije

U trigonometrijske funkcije spadaju $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$. Sinusna i kosinusna funkcija su definisane za svaki realan broj i njihovi grafici nalaze se na slici 7.30.



Slika 7.30: Funkcije $y = \sin\ x$ i $y = \cos\ x$, $-1 \leq y \leq 1$.

Ako je u pitanju funkcija $f(x) = \sin\ x$, tada je osnovni period $w_0 = 2\pi$ i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [-1, 1]$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$, pa je neparna funkcija,

(4) Nule: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, a opadajuća za $x \in (\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: za $x = \pi/2 + 2k\pi$, $f(x)$ ima maksimum, a za $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $f(x)$ ima minimum, $k \in \mathbb{Z}$.

Za funkciju $f(x) = \cos\ x$, osnovni period je takođe $w_0 = 2\pi$ i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [-1, 1]$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, pa je parna funkcija,

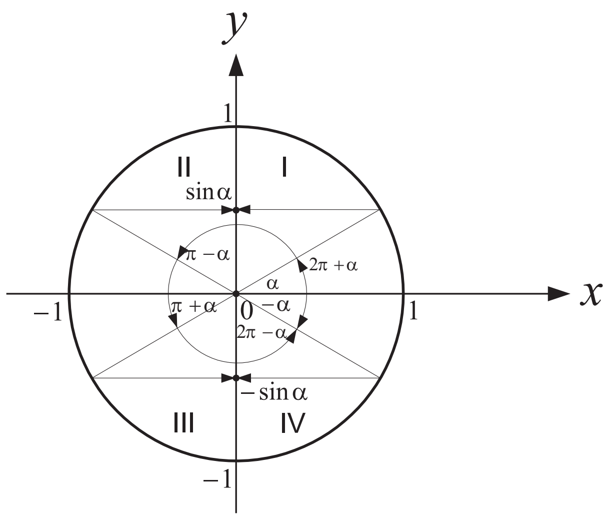
(4) Nule: $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

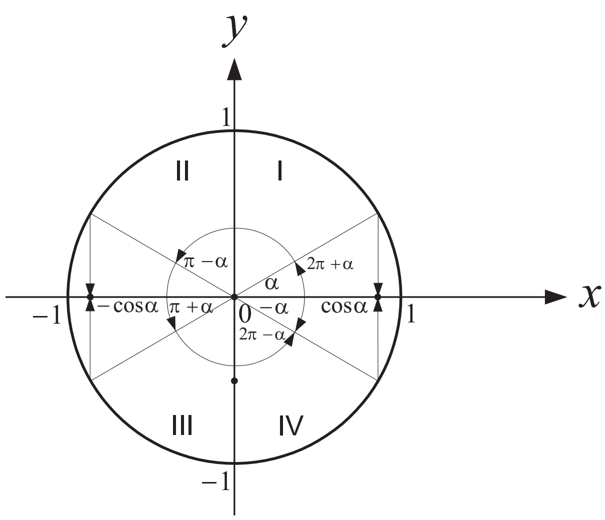
(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi)$, a opadajuća za $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: za $x = 2k\pi$, $f(x)$ ima maksimum, a za $x = \pi + 2k\pi$, $f(x)$ ima minimum, $k \in \mathbb{Z}$.

Na slikama 7.31 i 7.32 dati su trigonometrijski krugovi za sinusnu i kosinusnu funkciju, redom.



Slika 7.31: Trigonometrijski krug za $y = \sin x$ i vrednosti funkcije u sva četiri kvadranta.

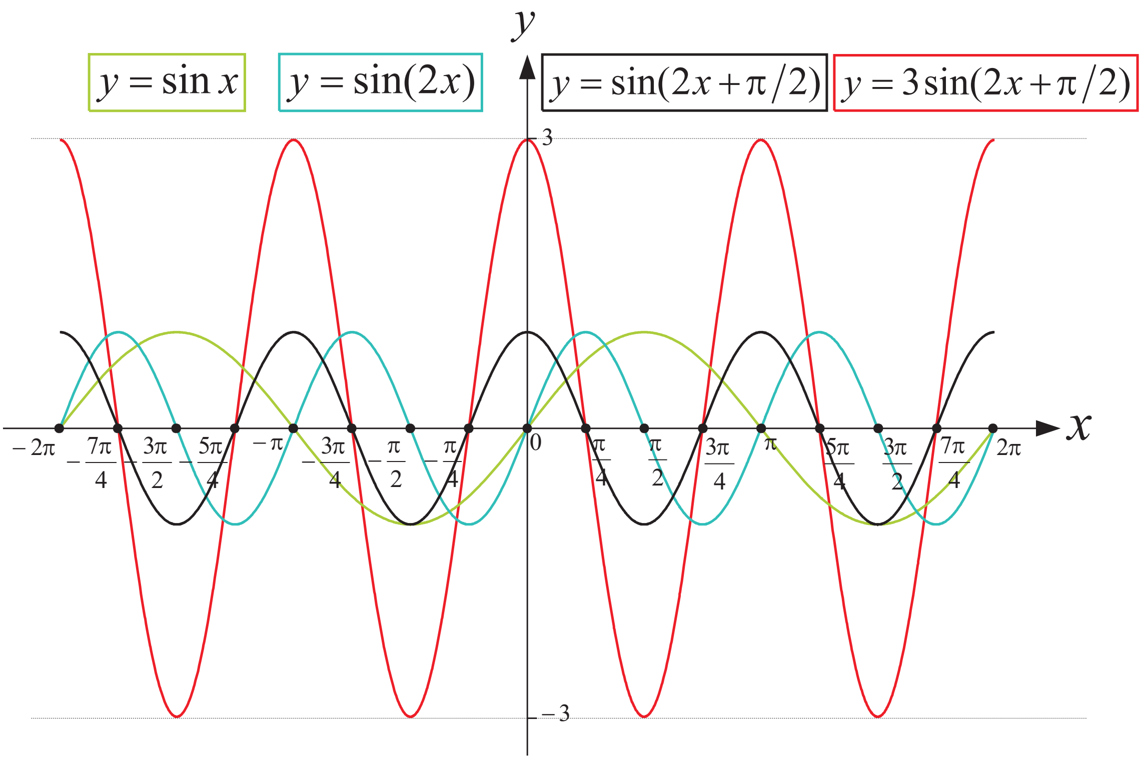


Slika 7.32: Trigonometrijski krug za $y = \cos x$ i vrednosti funkcije u sva četiri kvadranta.

Ako posmatramo funkciju, recimo, $y = a\sin(bx + c)$, $a, b \neq 0$, tada je osnovni period $\omega_0 = 2\pi/|b|$, $-|a| \leq y \leq |a|$, i nule su u $x = (k\pi - c)/b$, $k \in \mathbb{Z}$. Isto važi i za funkciju $y = a\cos(bx + c)$, samo što su nule u $x = (\pi/2 + k\pi - c)/b$, $k \in \mathbb{Z}$.

Primer 7.2.11 Skicirati funkciju $y = 3\sin(2x + \pi/2)$ za $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Rešenje. Na slici 7.33 predstavljena je funkcija $y = 3\sin(2x + \pi/2)$ za $x \in [-2\pi, 2\pi]$.



Slika 7.33: Grafici funkcija $y = \sin x$, $y = \sin(2x)$, $y = \sin(2x + \pi/2)$ i $y = 3\sin(2x + \pi/2)$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

Osnovni period date funkcije je $w_0 = 2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [-3, 3]$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = 3\sin(2(-x) + \pi/2) = 3\sin(\pi/2 - 2x) = 3\cos(2x) = 3\sin(2x + \pi/2) = f(x)$, pa je funkcija parna (pogledati tabelu 7.4),

(4) Nule: $x = (k\pi - c)/b = (k\pi - \pi/2)/2 = -\pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$,

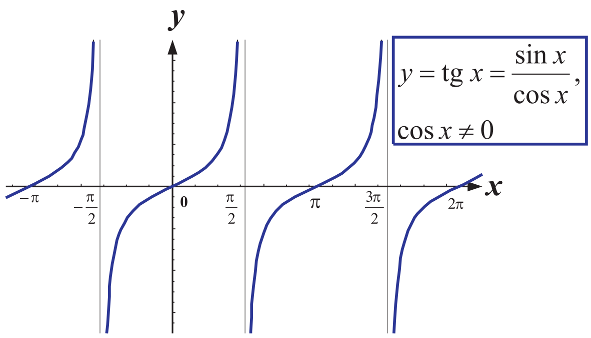
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(6) Monotonost: $f(x)$ je rastuća za $x \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, a opadajuća za $x \in (0 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: za $x = 0 + k\pi$, $f(x)$ ima maksimum, a za $x = \pi/2 + k\pi$, $f(x)$ ima minimum, $k \in \mathbb{Z}$.

■

Funkcija $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, odnosno $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, data je na slici 7.34.



Slika 7.34: Funkcija $y = \operatorname{tg} x$.

Dakle, za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$, osnovni period je $w_0 = \pi$ i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x = -f(x)$, pa je neparna funkcija,

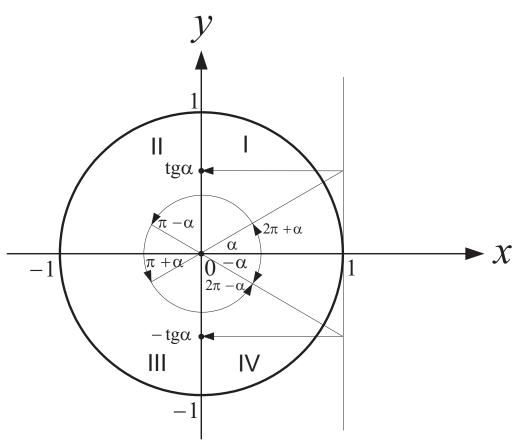
(4) Nule: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(6) Monotonost: funkcija $f(x)$ je samo rastuća i to za $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

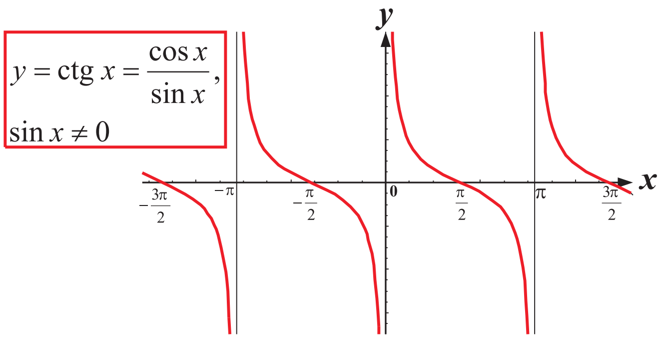
Na slici 7.35 dat je trigonometrijski krug za funkciju $y = \operatorname{tg} x$.



Slika 7.35: Trigonometrijski krug za $y = \operatorname{tg} x$ i vrednosti funkcije u sva četiri kvadranta.

Za funkciju $y = a\,\mathrm{tg}(bx + c)$, $a, b \neq 0$, osnovni period je $\omega_0 = \pi/|b|$. Definisana je za svako x koje zadovoljava $-\pi/2 + k\pi - c < bx < \pi/2 + k\pi - c$, i nule su u $x = (k\pi - c)/b$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija $y = \mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, sin $x \neq 0$, odnosno $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, data je na slici 7.36.



Slika 7.36: Funkcija $y = \mathrm{ctg}\ x$.

Za funkciju $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$, osnovni period je $w_0 = \pi$, nema ekstrema i:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = \mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x = -f(x)$, pa je neparna funkcija,

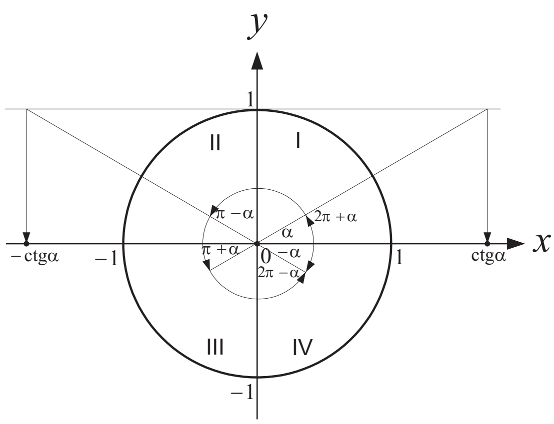
(4) Nule: $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $f(x) < 0$ za $x \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(6) Monotonost: funkcija $f(x)$ je samo opadajuća i to za $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 7.37 dat je trigonometrijski krug za funkciju $y = \mathrm{ctg}\, x$.



Slika 7.37: Trigonometrijski krug za $y = \mathrm{ctg}\, x$ i vrednosti funkciju u sva četiri kvadranta.

Za funkciju $y = a\operatorname{ctg}(bx+c)$, $a, b \neq 0$, osnovni period je $\omega_0 = \pi/|b|$, $k\pi - c < b\,x < \pi + k\pi - c$ i nule su $x = (\pi/2 + k\pi - c)/b$, $k \in \mathbb{Z}$.

U tabeli 7.3 date su vrednosti trigonometrijskih funkcija za neke uglove.

Tabela 7.3: Osnovne vrednosti trigonometrijskih funkcija (π radijana jednako je 180°).

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	–	0	–

Ako je ugao α u prvom kvadrantu, tada su vrednosti trigonometrijskih funkcija u preostalim kvadrantima date u tabeli 7.4.

Tabela 7.4: Vrednosti trigonometrijskih funkcija u svim kvadrantima.

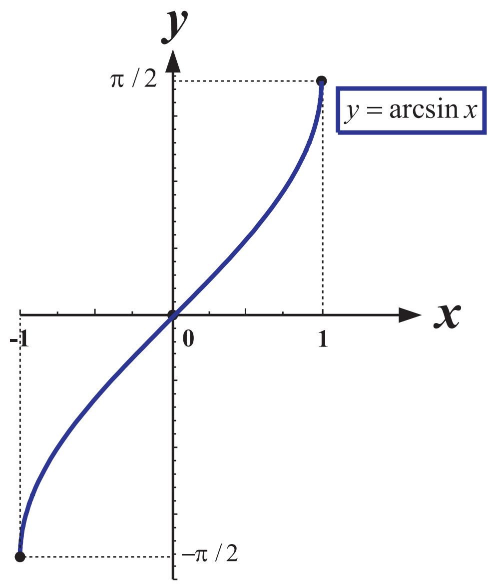
α	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Navešćemo sada neke trigonometrijske formule koje ćemo koristiti u ovom udžbeniku.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$,
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,
- $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$,
- $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$,
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$,
- $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}$.

7.2.6 Ciklometrijske funkcije

Ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija. Na primer, ako je $\sin\alpha = a$, $-1 \leq a \leq 1$, tada je $\arcsin a = \alpha$ (čita se „arkus sinus"). Slično važi i za preostale ciklometrijske funkcije. Na slici 7.38 dat je grafik funkcije $y = \arcsin x$.



Slika 7.38: Funkcija $y = \arcsin\, x$.

Važi:

(1) Domen: $D = [-1, 1]$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [-\pi/2, \pi/2]$,

(3) Parnost i neparnost:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arcsin(-x) = \arcsin(-\sin(\arcsin x)) = \arcsin(\sin(-\arcsin x)) = -\arcsin x \\ &= -f(x)\,, \end{aligned}$$

pa je neparna funkcija,

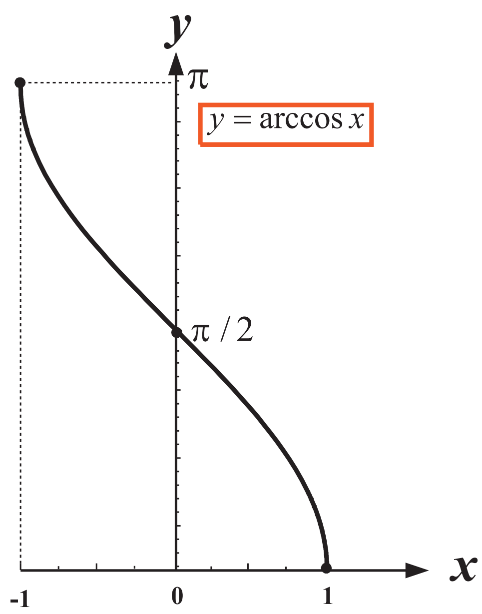
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, 1]$, $f(x) < 0$ za $x \in [-1, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-1, 1)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = -1$, a maksimum u $x = 1$.

Na slici 7.39 dat je grafik funkcije $\arccos x$.



Slika 7.39: Funkcija $y = \arccos\, x$.

Sada je:

(1) Domen: $D = [-1, 1]$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [0, \pi]$,

(3) Parnost i neparnost:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arccos(-x) = \arccos(-\cos(\arccos x)) = \arccos(\cos(\pi - \arccos x)) \\ &= \pi - \arccos x \notin \{f(x), -f(x)\}, \end{aligned}$$

pa nije ni parna ni neneparna,

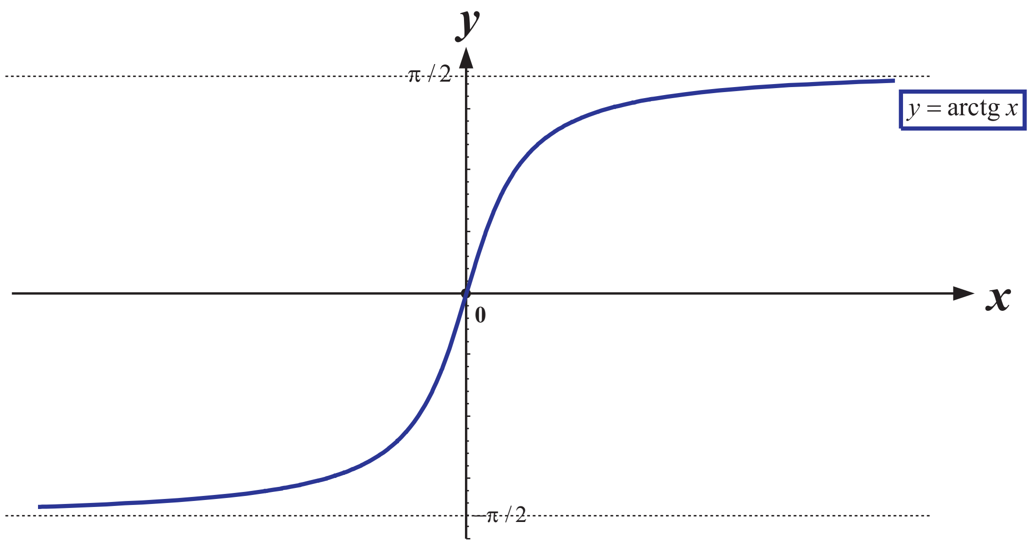
(4) Nule: $x = 1$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, \pi]$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-1, 1)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = 1$, a maksimum u $x = -1$.

Na slici 7.40 dat je grafik funkcije $\operatorname{arctg} x$.



Slika 7.40: Funkcija $y = \operatorname{arctg}\, x$.

Vidimo da je:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-\pi/2, \pi/2)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \operatorname{arctg}(-x) = \operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x)) = -\operatorname{arctg} x = -f(x)\,,$$

pa je neparna funkcija,

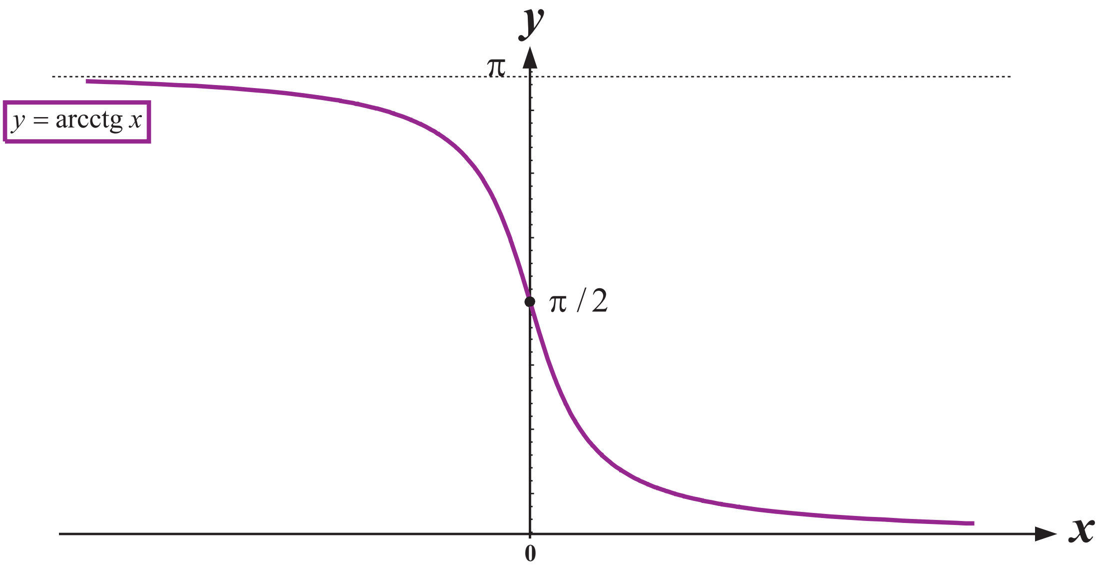
(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Na slici 7.41 dat je grafik funkcije $\mathrm{arcctg}\, x$.



Slika 7.41: Funkcija $y = \mathrm{arcctg}\ x$.

Na kraju:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (0, \pi)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \mathrm{arcctg}(-x) = \mathrm{arcctg}(-\,\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x)) = \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}(\pi - \mathrm{arcctg}\, x)) \\ &= \pi - \mathrm{arcctg}\, x \notin \{f(x), -f(x)\}\,, \end{aligned}$$

pa nije ni parna ni neneparna,

(4) Nule: nema,

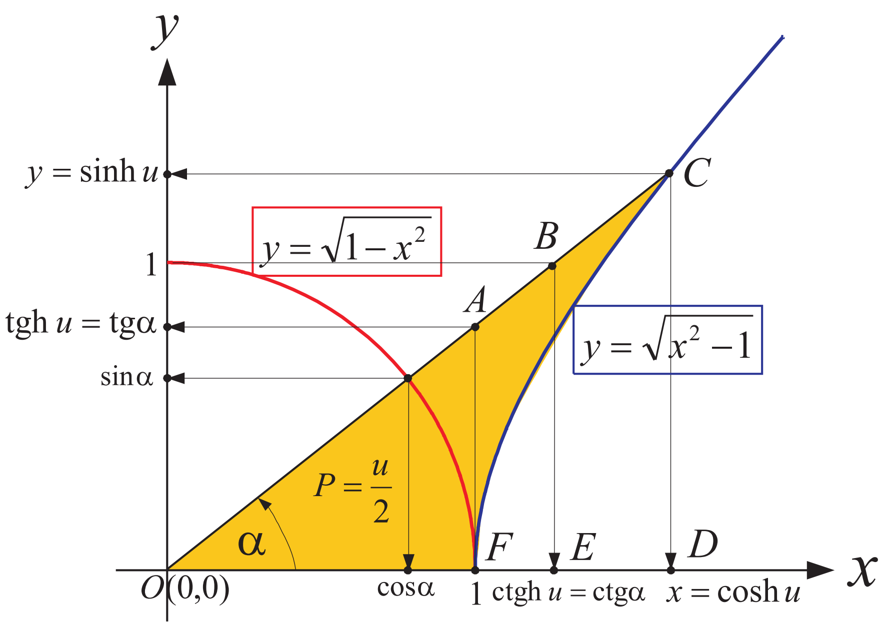
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

7.3 Hiperboličke i area funkcije

Hiperboličke funkcije (slika 7.42) koje ćemo ovde navesti su hiperbolički sinus ($\sinh x$), hiperbolički kosinus ($\cosh x$), hiperbolički tangens ($\operatorname{tgh} x$) i hiperbolički kotangens ($\operatorname{ctgh} x$).



Slika 7.42: Hiperboličke funkcije $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ i $\operatorname{ctgh} x$ u $x-y$ ravni.

Posmatrajmo sliku 7.42. Trigonometrijska kružnica ima jednačinu $x^2+y^2=1$, pa je $y=\sqrt{1-x^2}$ u prvom kvadrantu. Hiperbola ima jednačinu $x^2-y^2=1$, pa je $y=\sqrt{x^2-1}$, za $x\geq 1, y\geq 0$. Obeležićemo površinu krivolinijskog trougla OFC sa $P=u/2$ i ona je jednaka razlici površina trougla ODC ($P_{\triangle ODC}=\frac{1}{2}\,xy=\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}$) i krivolinijskog trougla FDC (primer 12.3.4 za $a=1$). Dobija se da je

$$P=P(x)=\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right),$$

odnosno

$$P(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Rightarrow\frac{u}{2}=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Rightarrow u(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Odavde, ako se izrazi $x=x(u)$, tada se hiperbolički kosinus definiše kao

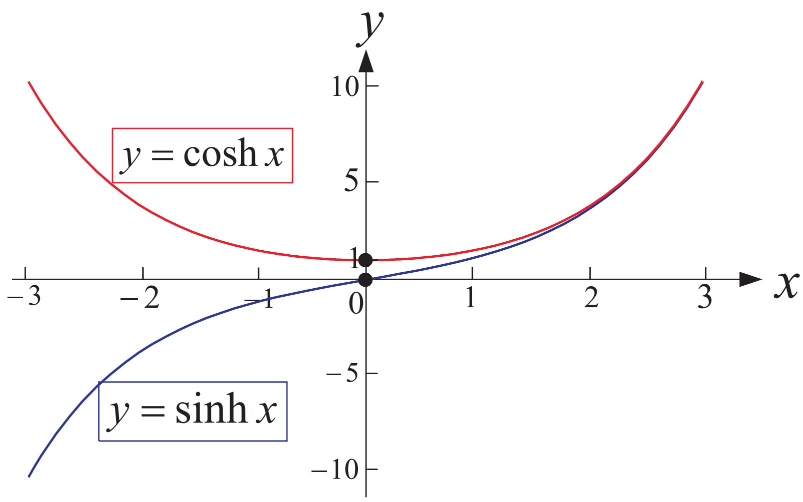
$$x=x(u)=\frac{e^u+e^{-u}}{2}=:\cosh\,u\,.$$

Nakon uvrštavanja $x(u)$ u jednačinu hiperbole, dobija se

$$y=y(u)=\frac{e^u-e^{-u}}{2}=:\sinh\,u\,.$$

Dakle, tako se definišu hiperbolički sinus i kosinus.

Na slici 7.43 dati su grafici funkcija $y = \sinh x$ i $y = \cosh x$.



Slika 7.43: Funkcije $y = \sinh\, x$ i $y = \cosh\, x$.

Za funkciju $y = \sinh x$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh\, x = -f(x)\,,$$

pa je neneparna,

(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Osobine funkcije $y = \cosh x$ su:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [1, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh\, x\,,$$

pa je parna,

(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$,

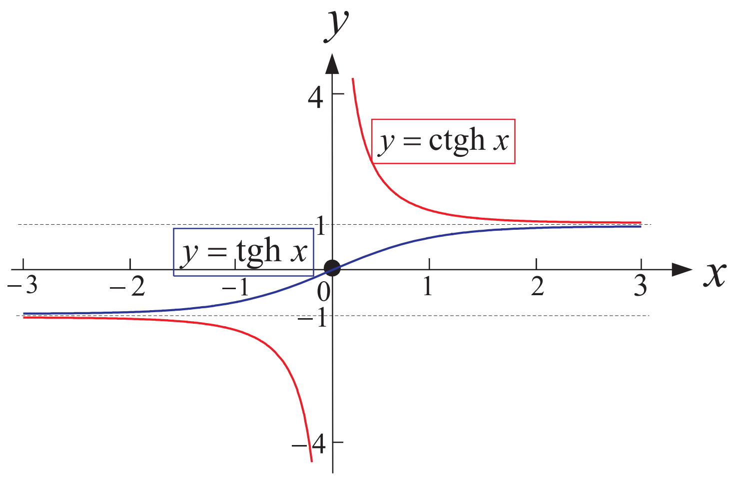
(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (0, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = 0$.

Hiperbolički tangens i kotangens definišu se kao

$$\operatorname{tgh} u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \quad \operatorname{ctgh} u = \frac{\cosh u}{\sinh u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}.$$

Na slici 7.44 dati su grafici funkcija $y = \operatorname{tgh} x$ i $y = \operatorname{ctgh} x$.



Slika 7.44: Funkcije $y = \operatorname{tgh} x$ i $y = \operatorname{ctgh} x$.

Za $y = \operatorname{tgh} x$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-1, 1)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \operatorname{tgh}(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{tgh} x = -f(x),$$

pa je neparna,

(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

I, na kraju, funkcija $y = \operatorname{ctgh} x$ ima osobine:

(1) Domen: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \operatorname{ctgh}(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh x}{-\sinh x} = -\operatorname{ctgh} x = -f(x)\,,$$

pa je neparna,

(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Neke od formula koje važe za hiperbolične funkcije su:

- $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$,
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$,
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$,
- $\operatorname{tgh}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$,
- $\operatorname{ctgh}(x \pm y) = \dfrac{1 \pm \operatorname{ctgh} x \operatorname{ctgh} y}{\operatorname{ctgh} x \pm \operatorname{ctgh} y}$.

Area funkcije su inverzne hiperboličke funkcije:

- area-sinus ($\operatorname{arcsinh} x$),
- area-kosinus ($\operatorname{arccosh} x$),
- area-tangens ($\operatorname{arctgh} x$) i
- area-kotangens ($\operatorname{arcctgh} x$).

One se često javljaju pri integraljenju racionalnih funkcija. Dobile su naziv jer predstavljaju površinu krivolinijskog trougla. Naime, kod $\sinh u$, u je zapravo dvostruka površina (area - površina na latinskom) krivolinijskog trougla OFC (slika 7.42).

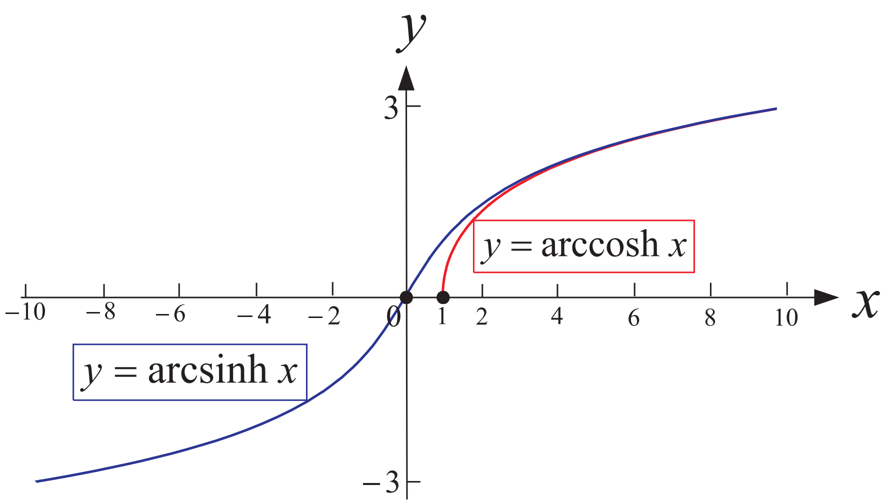
Inverzni hiperbolički sinus definiše se kao

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

a inverzni hiperbolični kosinus kao

$$\operatorname{arccosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Na slici 7.45 dati su grafici funkcija $y = \operatorname{arcsinh} x$ i $y = \operatorname{arccosh} x$.



Slika 7.45: Funkcije $y = \operatorname{arcsinh}\, x$ i $y = \operatorname{arccosh}\, x$.

Za $y = \operatorname{arcsinh} x$ važi:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \log\left(\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \log\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}} = \log\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f(x) \end{aligned}$$

pa je neneparna,

(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

Ako su posmatra $y = \operatorname{arccosh} x$, onda je:

(1) Domen: $D = [1, +\infty)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = [0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: domen nije simetričan skup pa nije ni parna ni neparna funkcija,

(4) Nule: $x = 1$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$,

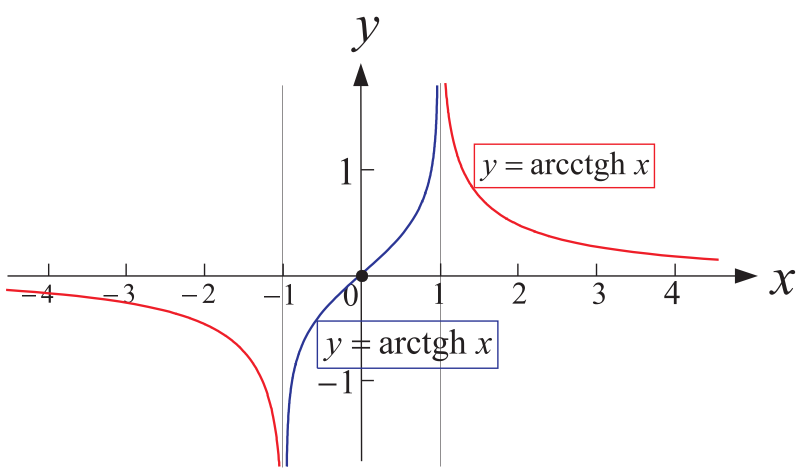
(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (1, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: $f(x)$ ima minimum u $x = 1$.

Dalje, inverzni hiperbolički tangens i kotagens su

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{arcctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Na slici 7.46 dati su grafici funkcija $y = \operatorname{arctgh} x$ i $y = \operatorname{arcctgh} x$.



Slika 7.46: Funkcije $y = \operatorname{arctgh} x$ i $y = \operatorname{arcctgh} x$.

Za $y = \operatorname{arctgh} x$ važi:

(1) Domen: $D = (-1, 1)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = \mathbb{R}$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$$

pa je neneparna,

(4) Nule: $x = 0$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-1, 0)$,

(6) Monotonost: funkcija je rastuća za $x \in (-1, 1)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema,

a za inverzni hiperbolički kotangens, $y = \operatorname{arcctgh} x$:

(1) Domen: $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

(3) Parnost i neparnost:

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{-(x-1)}{-(x+1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} = -\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = -f(x)$$

pa je neparna,

(4) Nule: nema,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -1)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: nema.

7.4 Polinomi

Definicija 7.4.1 *Polinom n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}_0$, je funkcija $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,, a_n \neq 0 \,, \tag{7.1}$$

gde su a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n koeficijenti polinoma iz skupa $\mathbb{C}$.

Ipak, u ovom udžbeniku, ograničićemo se na polinome $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, tako da će njegovi koeficijenti biti realni brojevi. Koeficijent a_0 naziva se slobodan član.

Primer 7.4.2 Polinom $P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ je trećeg stepena, $a_3 = 3$, $a_2 = -4$, $a_1 = 5$ i $a_0 = -7$. ∎

Količnik dva polinoma P_n i Q_m u oznaci $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ naziva se racionalna funkcija (ako je $m > n$, tada je R prava racionalna funkcija).

Primer 7.4.3 Polinom $R(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^3 + 2}$ je prava racionalna funkcija. ∎

Ako racionalna funkcija nije prava (za $n \geq m$), tada se ona može predstaviti kao zbir polinoma stepena $n-m$ i prave racionalne funkcije.

Primer 7.4.4 Predstaviti racionalnu funkciju $R(x) = \dfrac{x^4-2x^3+x^2-3x+8}{x^2+2}$ preko zbira polinoma i prave racionalna funkcije.

Rešenje. Podelimo polinome $P_4(x) = x^4-2x^3+x^2-3x+8$ i $Q_2(x) = x^2+2$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrr}
 & (x^4 & - & 2x^3 & + & x^2 & - & 3x & + & 8) & : & (x^2 & + & 2) & = & x^2-2x-1 \\
- & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & - & 2x^3 & - & x^2 & - & 3x & + & 8 & & & & & & \\
- & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & - & 2x^3 & & & - & 4x & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & - & x^2 & + & x & + & 8 & & & & & & \\
- & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & - & x^2 & & & - & 2 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & x & + & 10 & & & & & &
\end{array}
$$

pa je tada

$$\frac{x^4-2x^3+x^2-3x+8}{x^2+2} = x^2-2x-1+\frac{x+10}{x^2+2}\,.$$

Primetimo da se polinom P_4 može zapisati kao

$$P_4(x) = (x^2-2x-1)\,Q_2(x)+x+10\,.$$

■

Tačka $x_0 \in \mathbb{C}$ je nula polinoma $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ako je $P_n(x_0) = 0$. *Osnovni stav algebre* je da svaki polinom n-tog stepena ima tačno n nula u skupu kompleksnih brojeva, među kojima može biti i jednakih (višestrukih) nula. Ako nule polinoma obeležimo sa x_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, tada je

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_n)\,.$$

Ako $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tada se njegova faktorizacija svodi na (biće nam potrebna kod integraljenja racionalnih funkcija)

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_l)(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\cdot\dots\cdot(x^2+b_sx+c_s)\,,$$

gde je $l+2s = n$ i za svako $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ važi $b_i^2-4c_i < 0$.

Primer 7.4.5 Polinom $P_3(x) = x^3+3x^2+4x+4$ se, u skupu realnih brojeva, faktorizuje kao

$$P_3(x) = x^3+2x^2+x^2+2x+2x+4 = x^2(x+2)+x(x+2)+2(x+2) = (x+2)(x^2+x+2)\,.$$

Za polinom x^2+x+2 važi da se ne može više rastaviti na proizvod polinoma prvog stepena jer je $b^2-4c = 1-8 = -7 < 0$ (nesvodljiv je). ■

Kandidat za racionalnu nulu polinoma je svaki broj p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, za koji važi da p deli slobodni član a_0 polinoma P_n iz (7.1), a q deli a_n.

Primer 7.4.6 Odrediti kandidate za racionalne nule polinoma

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6\,.$$

Rešenje. Primetimo prvo da je $a_4 = 2$ i $a_0 = 6$. Broj p deli a_0 pa važi $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, dok q deli a_4 te je $q \in \{1, 2\}$. Dakle, kandidati za racionalne nule polinoma su

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 6 \right\}.$$

■

Postupak kojim se proverava da li je p/q nula polinoma dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 7.4.7 *Neka je dat polinom* $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ *koji delimo polinomom prvog stepena* $x - x_0$*. Tada važi* $P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + r = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} b_i\, x^i + r$*, gde je* r *ostatak pri tom deljenju i gde su* b_i*,* $i = 0, 1, \ldots, n-1$*, nepoznati koeficijenti. Tada je*

$$b_{n-1} = a_n,\ \ldots,\ b_i = b_{i+1} \cdot x_0 + a_{i+1},\ \ldots,\ b_0 = b_1 \cdot x_0 + a_1,\ r = b_0 \cdot x_0 + a_0$$

za $i = 1, 2, \ldots, n-2$*. Važi i: 1)* $P(x_0) = r$*; 2) ako je* $P(x_0) = 0$*, tada je* $P(x)$ *je deljiv polinomom* $x - x_0$ *i tačka* $x = x_0$ *je nula polinoma.*

Kada se proveraju racionalne nule polinoma, uobičajeno je da se napravi shema, poznatija kao Hornerova shema, na sledeći način:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_0	r	$x = x_0$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = b_{n-1} \cdot x_0 + a_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = b_1 \cdot x_0 + a_1$	$b_0 \cdot x_0 + a_0$	

Primer 7.4.8 Odrediti racionalne nule polinoma

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6$$

i rastaviti ga na činioce.

Rešenje. U primeru 7.4.6 odredili smo kandidate za racionalne nule datog polinoma i oni su

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 6\,.$$

Ako je zbir svih koeficijenata polinoma jednak nuli ($2 - 3 - 12 + 7 + 6 = 0$), to znači da je $x_1 = 1$ sigurno jedna nula polinoma. Neka to bude početno x.

2	-3	-12	7	6	r	$x = 1$	
	2	-1	-13	-6	0		$P(x) = (x-1)(2x^3 - x^2 - 13x - 6) + 0$

Preostale kandidate biramo iz skupa kandidata i nastavljamo sa shemom i posmatramo novodobijene koeficijente i njih sada tretiramo kao poznate, tj. tražimo nule polinoma $2x^3-x^2-13x-6$.

2	-3	-12	7	6	r	$x=1$	
	2	-1	-13	-6	0	$x=-2$	$P(x)=(x-1)(2x^3-x^2-13x-6)$
		2	-5	-3	0		$P(x)=(x-1)(x+2)(2x^2-5x-3)$

Dobili smo da je druga nula $x_2=-2$. Kako je ostalo tri koeficijenta u tablici (2,−5,3), rešićemo jednačinu

$$2x^2-5x-3=0 \Rightarrow x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4} \Rightarrow x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=3\,.$$

Sada se $P(x)$ rastavlja kao

$$P(x)=2(x-1)(x+2)(x-3)(x+\frac{1}{2})=(x-1)(x+2)(x-3)(2x+1)\,.$$

■

Hornerova shema je korisna i pri integraljenju racionalnih funkcija u slučaju kada treba imenilac rastaviti na činioce.

7.4.1 Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija je polinom drugog stepena i oblika je $y=ax^2+bx+c$, gde je $a\neq 0$. Nule kvadratne funkcije su

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,, \tag{7.2}$$

pa se kvadratna funcija može rastaviti na činioce kao $y=a(x-x_1)(x-x_2)$. Kanonski oblik kvadratne funkcije je

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\,.$$

U zavisnosti od a i od diskriminante $\underline{D}=b^2-4ac$ imamo šest različitih tipova grafika kvadratne funkcije (slika 7.47). Teme parabole je uvek u tački

$$T\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)\,.$$

Ako je $a>0$ tada je:

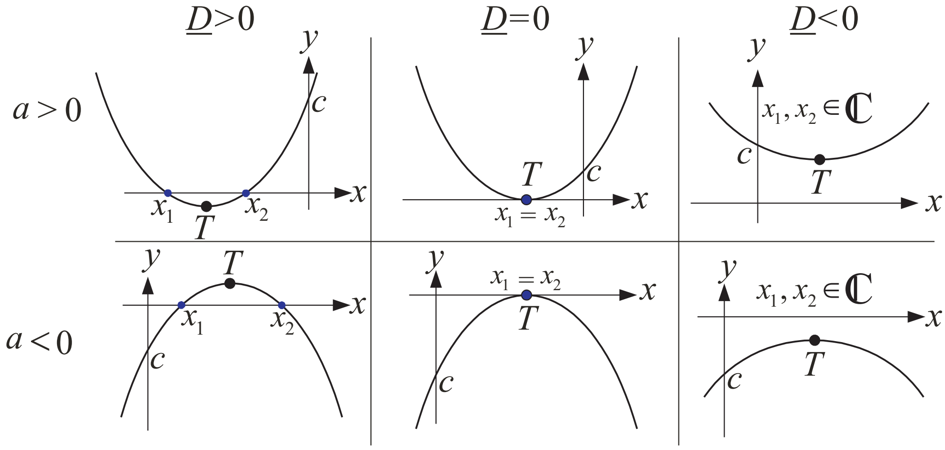
(1) Domen: $D=\mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D)=[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x)=a(-x)^2+b(-x)+c=ax^2-bx+c=f(x)$ samo ako je $b=0$ i tada je parna funkcija.

Ako je $a>0$ i $\underline{D}>0$, tada je:

(4) Nule: x_1 i x_2 računamo iz (7.2) i neka je $x_1<x_2$,



Slika 7.47: Funkcija $y = ax^2 + bx + c$ za $a \neq 0$.

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$, a rastuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a = (x_1 + x_2)/2$ funkcija ima minimum.

Ako je $a > 0$ i $\underline{D} = 0$, tada je:

(4) Nule: $x_1 = x_2$ računamo iz (7.2),

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$, a rastuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a = x_1 = x_2$ funkcija ima minimum.

Ako je $a > 0$ i $\underline{D} < 0$, tada je:

(4) Nule: nema u skupu $\mathbb{R}$,

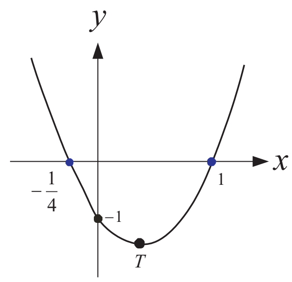
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$, a rastuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a$ funkcija ima minimum.

Primer 7.4.9 Skicirati funkciju $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$ i rastaviti je na činioce u skupu $\mathbb{R}$.

Rešenje. Nule su $x_1 = -1/4$, $x_2 = 1$, a teme parabole je $T(\frac{3}{8}, -\frac{25}{16})$ (slika 7.48).



Slika 7.48: Funkcija $y = 4x^2 - 3x - 1 = 4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$, $T(\frac{3}{8}, -\frac{25}{16})$.

■

Ako je sada $a < 0$, tada je:

(1) Domen: $D = \mathbb{R}$,

(2) Skup vrednosti: $f(D) = (-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$,

(3) Parnost i neparnost: $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c = f(x)$ samo ako je $b = 0$ i tada je parna funkcija.

Ako je $a < 0$ i $\underline{D} > 0$, tada je:

(4) Nule: x_1 i x_2 računamo iz (7.2) i neka je $x_1 < x_2$,

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a = (x_1 + x_2)/2$ funkcija ima maksimum.

Ako je $a < 0$ i $\underline{D} = 0$, tada je:

(4) Nule: $x_1 = x_2$ računamo iz (7.2),

(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in \emptyset$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a = x_1 = x_2$ funkcija ima maksimum.

Ako je $a < 0$ i $\underline{D} < 0$, tada je:

(4) Nule: nema u skupu $\mathbb{R}$,

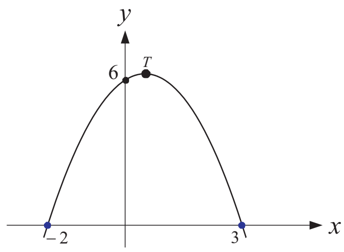
(5) Znak: $f(x) > 0$ za $x \in \emptyset$, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, +\infty)$,

(6) Monotonost: funkcija je opadajuća za $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$,

(7) Ekstremne vrednosti: u $x = -b/2a$ funkcija ima maksimum.

Primer 7.4.10 Skicirati funkciju $y = -x^2 + x + 6$ i rastaviti je na činoce u skupu $\mathbb{R}$.

Rešenje. Za funkciju $y = -x^2 + x + 6$, nule su $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, a teme parabole je $T(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$ (slika 7.49).

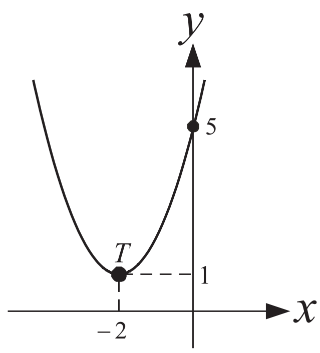


Slika 7.49: Funkcija $y = -x^2 + x + 6 = -(x+2)(x-3)$, $T(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$.

■

Primer 7.4.11 Skicirati funkciju $y = x^2 + 4x + 5$ i rastaviti je na činoce u skupu $\mathbb{R}$.

Rešenje. Za funkciju $y = x^2 + 4x + 5$, nule su kompleksni brojevi, a teme parabole je $T(-2, 1)$ (slika 7.50).

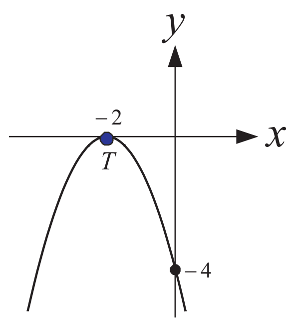


Slika 7.50: Funkcija $y = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$.

■

Primer 7.4.12 Skicirati funkciju $y = -x^2 - 4x - 4$ i rastaviti je na činoce u skupu $\mathbb{R}$.

Rešenje. Za funkciju $y = -x^2 - 4x - 4$, nule su $x_1 = x_2 = -2$, a teme parabole je $T(-2, 0)$ (slika 7.51).



Slika 7.51: Funkcija $y = -x^2 - 4x - 4 = -(x + 2)^2$.

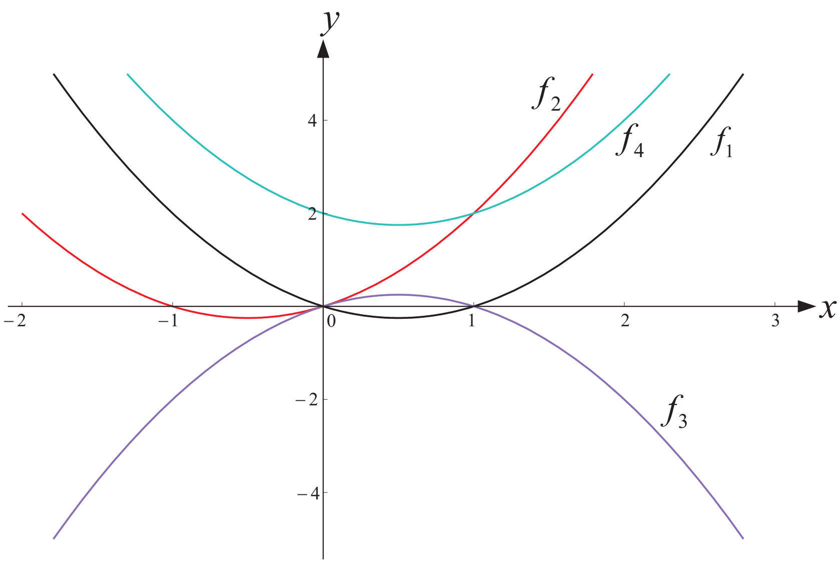
■

Napomenimo još kako se ponaša grafik funkcije $f(x)$ u sledećim slučajevima:

- grafik funkcije $f(-x)$ je osno simetričan u odnosu na y-osu u odnosu na grafik funkcije $f(x)$,
- grafik funkcije $-f(x)$ je osno simetričan u odnosu na x-osu u odnosu na grafik funkcije $f(x)$,
- grafik funkcije $f(x) + a$ se translira za a po y-osi u odnosu na grafik funkcije $f(x)$ i to ako je $a > 0$ „nagore za a”, a ako je $a < 0$ „nadole za a”,
- grafik funkcije $f(x + a)$ se translira za a po x-osi u odnosu na grafik funkcije $f(x)$ i to ako je $a > 0$ „ulevo za a”, a ako je $a < 0$ „udesno za a”.

Primer 7.4.13 Skicirati funkcije $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = f_1(-x)$, $f_3(x) = -f_1(x)$ i $f_4(x) = f_1(x) + 2$ u jednom Dekartovom koordinatnom sistemu.

Rešenje.

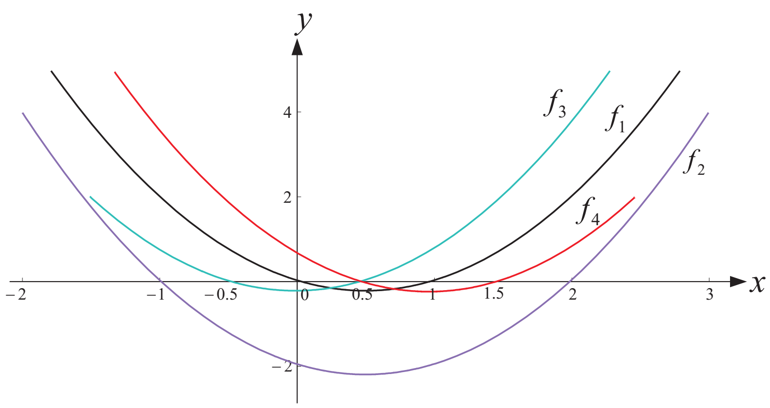


Slika 7.52: Grafici funkcija $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = f_1(-x)$, $f_3(x) = -f_1(x)$ i $f_4(x) = f_1(x) + 2$

■

Primer 7.4.14 Skicirati funkcije $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = f_1(x) - 2$, $f_3(x) = f_1(x + 0.5)$, $f_4(x) = f_1(x - 0.5)$ u jednom koordinatnom sistemu.

Rešenje.



Slika 7.53: Grafici funkcija $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = f_1(x) - 2$, $f_3(x) = f_1(x + 0.5)$ i $f_4(x) = f_1(x - 0.5)$

■

7.5 Funkcija data u parametarskom obliku

Neka $y = f(x)$ dok $x \in (a, b)$. U parametarskom obliku, ova funkcija bi bila data sa

$$x = \psi(t), \quad y = \phi(t), \quad t \in (t_1, t_2)\,, \tag{7.3}$$

gde $\psi, \phi : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$, uz to da je ψ monotona funkcija. Važi $\psi(t_1) = a$ i $\psi(t_2) = b$.

Primer 7.5.1 Zapisati u parametarskom obliku jednačinu kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Rešenje. Definisaćemo $x(t) = r\cos t$ i $y(t) = r\sin t$ za $t \in [0, 2\pi]$. U tabeli 7.5 date su vrednosti za $x(t)$ i $y(t)$ za neko t.

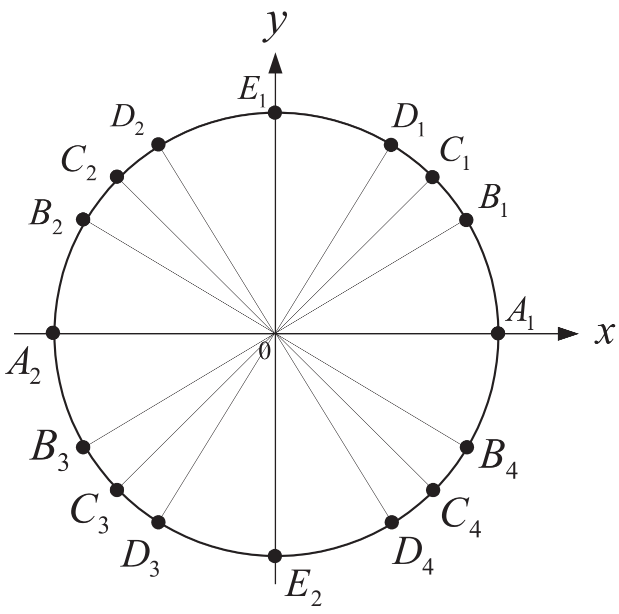
Tabela 7.5: $x(t) = r\cos t$ i $y(t) = r\sin t$ za neke vrednosti t, $0 \le t \le 2\pi$.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$x(t)$	r	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$\frac{r}{2}$	0	$-\frac{r}{2}$	$-\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$-r$
$y(t)$	0	$\frac{r}{2}$	$\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	r	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$\frac{r}{2}$	0
t	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$x(t)$	$-\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{r}{2}$	0	$\frac{r}{2}$	$\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$\frac{r\sqrt{3}}{2}$	r	
$y(t)$	$-\frac{r}{2}$	$-\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$-r$	$-\frac{r\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{r\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{r}{2}$	0	

Na slici 7.54, obeležene su tačke iz tabele 7.5:

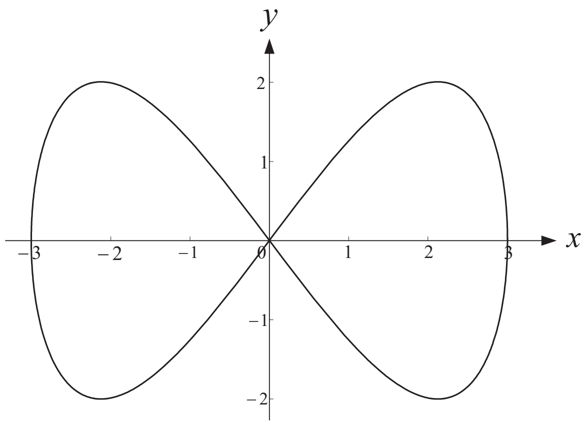
- $A_1\,(r\cos 0, r\sin 0) = A_1(r, 0)$,
- $B_1\left(r\cos\frac{\pi}{6}, r\sin\frac{\pi}{6}\right) = B_1\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$,
- $B_3\left(r\cos\frac{7\pi}{6}, r\sin\frac{7\pi}{6}\right) = B_3\left(-\frac{r\sqrt{3}}{2}, -\frac{r}{2}\right)$,
- $C_1\left(r\cos\frac{\pi}{4}, r\sin\frac{\pi}{4}\right) = C_1\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$,
- $C_3\left(r\cos\frac{5\pi}{4}, r\sin\frac{5\pi}{4}\right) = C_3\left(-\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$,
- $D_1\left(r\cos\frac{\pi}{3}, r\sin\frac{\pi}{3}\right) = D_1\left(\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $D_3\left(r\cos\frac{4\pi}{3}, r\sin\frac{4\pi}{3}\right) = D_3\left(-\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $E_1\left(r\cos\frac{\pi}{2}, r\sin\frac{\pi}{2}\right) = E_1(0, r)$,
- $A_2\,(r\cos\pi, r\sin\pi) = A_2(-r, 0)$,
- $B_2\left(r\cos\frac{5\pi}{6}, r\sin\frac{5\pi}{6}\right) = B_2\left(-\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$,
- $B_4\left(r\cos\frac{11\pi}{6}, r\sin\frac{11\pi}{6}\right) = B_4\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}, -\frac{r}{2}\right)$,
- $C_2\left(r\cos\frac{3\pi}{4}, r\sin\frac{3\pi}{4}\right) = C_2\left(-\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$,
- $C_4\left(r\cos\frac{7\pi}{4}, r\sin\frac{7\pi}{4}\right) = C_4\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$,
- $D_2\left(r\cos\frac{2\pi}{3}, r\sin\frac{2\pi}{3}\right) = D_2\left(-\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $D_4\left(r\cos\frac{5\pi}{3}, r\sin\frac{5\pi}{3}\right) = D_4\left(\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $E_2\left(r\cos\frac{3\pi}{2}, r\sin\frac{3\pi}{2}\right) = E_2(0, -r)$.

■



Slika 7.54: Grafik funkcije $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Primer 7.5.2 Grafik parametarski zadate funkcije $x(t) = 3\sin t$, $y(t) = 2\sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$, dat je na slici 7.55. ■

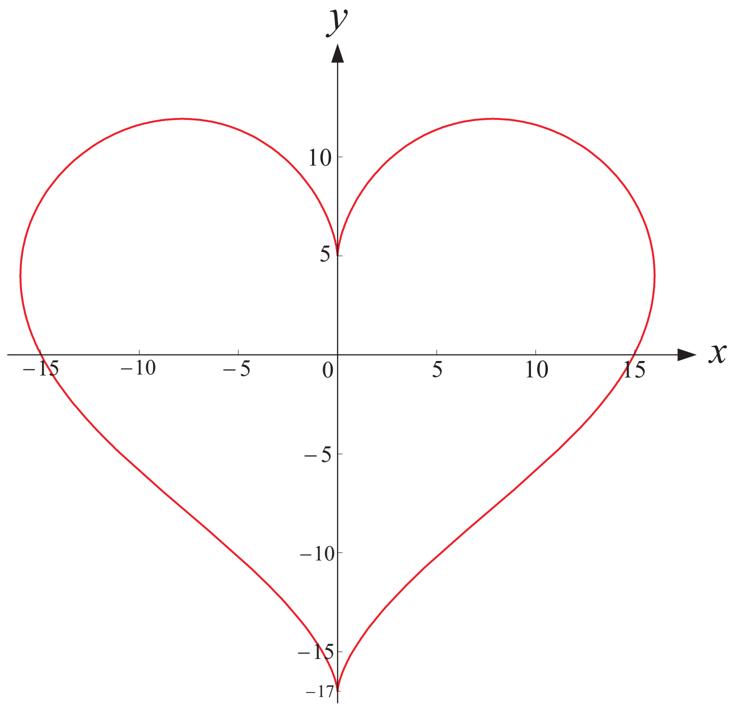


Slika 7.55: Grafik funkcije $x(t) = 3\sin t$, $y(t) = 2\sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Primer 7.5.3 Grafik parametarski zadate funkcije

$$x(t) = 16\sin^3 t\,,\quad y(t) = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t\,,\quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

dat je na slici 7.56. ■



Slika 7.56: Grafik funkcije $x(t) = 16\sin^3 t$, $y(t) = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$, $t \in [0, 2\pi]$.

7.6 Zadaci za vežbu

1. Svaku od sledećih funkcija predstaviti u obliku zbira parne i neparne funkcije: *a)* $g(x) = x^2 + 3x - 2$, *b)* $h(x) = 1 - x^3 - x^4 - 2x$.

2. Dokazati da je zbir dve parne funkcije, parna funkcija, i da je zbir dve neparne funkcije, neparna funkcija.

3. Dokazati da je proizvod dve parne funkcije ili dve neparne funkcije, parna funkcija, i da je proizvod neparne i parne funkcije, neparna funkcija.

Skicirati sledeće funkcije i odrediti domen, skup vrednosti, ispitati parnost i neparnost, odrediti nule, znak, monotonost i ekstreme (ako postoje).

4. $y = -4x + 8$

5. $y = 3x + 18$

6. $y = -5x$

7. $y = 2$

8. $y = (x - 2)^3 + 1$

9. $y = \sqrt[3]{x - 1} + 1$

10. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 2$

11. $y = 4^x + 1$

12. $y = \log_{1/2} x$

13. $y = -\log_3(x-2)$

14. $y = |\ln x|$

15. $y = 2\sin x + 1$

16. $y = -3\,\mathrm{tg}\,x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

17. $y = -2\arccos x + \frac{\pi}{2}$

18. $y = \cosh(x-2)$

19. $y = 2x^2 - 8x + 8$

20. $y = -3x^2 - 7x + 3$

21. $y = -2x^2 + 8x$

22. $y = x^2 - 6x + 13$

Odrediti racionalne nule sledećih polinoma i faktorisati ih nad poljem $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

23. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$. (nule su: $-4, -2, 3$)

24. $P(x) = 4x^5 + 4x^4 - 14x^3 - 14x^2 - 8x - 8$. (nule su: $-2, -1, 2, -\sqrt{2}\,i/2, \sqrt{2}\,i/2$)

25. $P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 18x^2 - 4x - 8$. (nule su: 2-trostruka nula i $-1/2$)

26. $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x$. (nule su: $0, 1, -2, -i, i$)

Skicirati sledeće parametarski zadate funkcije:

27. $x(t) = t - 1$, $y(t) = t + 1$, $t \in \mathbb{R}$. (prava $y = x + 2$)

28. $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $a, b > 0$, $a \neq b$, $t \in [0, 2\pi]$. (elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$)

29. $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$. (cikloida)

30. $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$. (astroida)

31. Početni broj bakterija je 500 i udvostručuje se svakih pola sata. Koliko je broj bakterija nakon 3 sata? Koliko ih ima nakon t sati? Koliko nakon 40 minuta? Kada će broj bakterija biti 100000?

32. Izotop ^{24}Na, ima vreme poluraspada 15 sati. Početna masa mu je 2 grama. Odredi gramažu nakon 60 sati. Koliko je ostalo grama nakon t sati? A posle 4 dana? koje je vreme potrebno da se masa smanji na 0.01 gram?

33. Broj stanovnika n, u godini g u USA, data je u narednoj tabeli.

godina	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
br. stan. u mil.	76	92	106	123	131	150	179	203	227	250	281	310

Eksponencijalni model je $n(g) = 0.0032 \cdot e^{0.0126\,g}$. Proceniti broj stanovnika 2020. i 2030. godine. Koje godine se procenjuje da je broj stanovnika bio 160 miliona?

34. Ako je početni broj bakterija bio 500 i ako se one dupliraju svakih pola sata, tada je broj bakterija nakon t časova jednak $n = f(t) = 500 \cdot 4^t$. Kada će broj bakterija biti 10000?

35. Kada se blic fotoaparata isključi, baterije odmah počnu da pune kondenzator blica, koji skladišti električnu energiju naknada koju daje po formuli $Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/2})$, gde je $Q(t)$ napunjenost kondezatora u vremenu t, Q_0 maksimalni kapacitet punjenja, t je vreme u sekundama. Koliko vremena treba da bi se kondezator napunio do 90%?

GLAVA 8

Nizovi

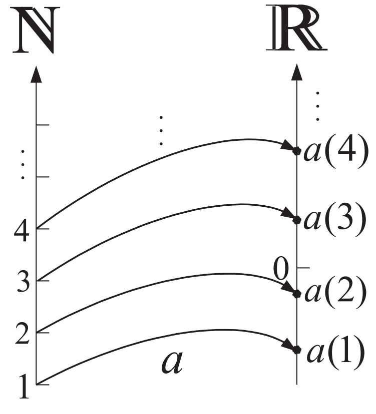
U ovoj glavi definisaćemo niz, biće date neke njegove osobine sa velikim brojem primera i sve u svrhu pripreme za narednu glavu. Određivaće se tačke nagomilavanja niza, koristiće se teorema o postojanju granične vrednosti monotonog i ograničenog niza. Pomoću poznatih graničnih vrednosti niza, biće određivane granične vrednosti zadatih nizova.

8.1 Definicija i primeri nizova

Definicija 8.1.1 *Niz a je funkcija koja preslikava skup prirodnih brojeva u skup realnih brojeva, odnosno*

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Sa $a(n)$ ili a_n obeležavamo n-ti član (opšti član) niza a, $n \in \mathbb{N}$, tako da se niz a može još zapisati i kao $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Slika 8.1: Niz $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Primer 8.1.2 Najjednostavniji primer niza je niz prirodnih brojeva

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

koji se može zapisati i kao $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Ili, recimo, niz neparnih prirodnih brojeva

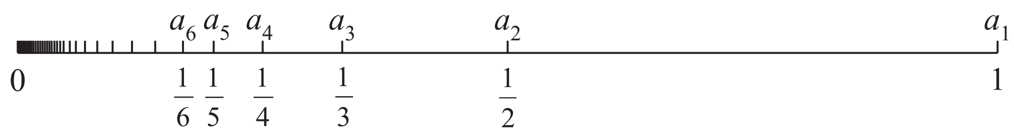
$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

sa opštim članom $b_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. ■

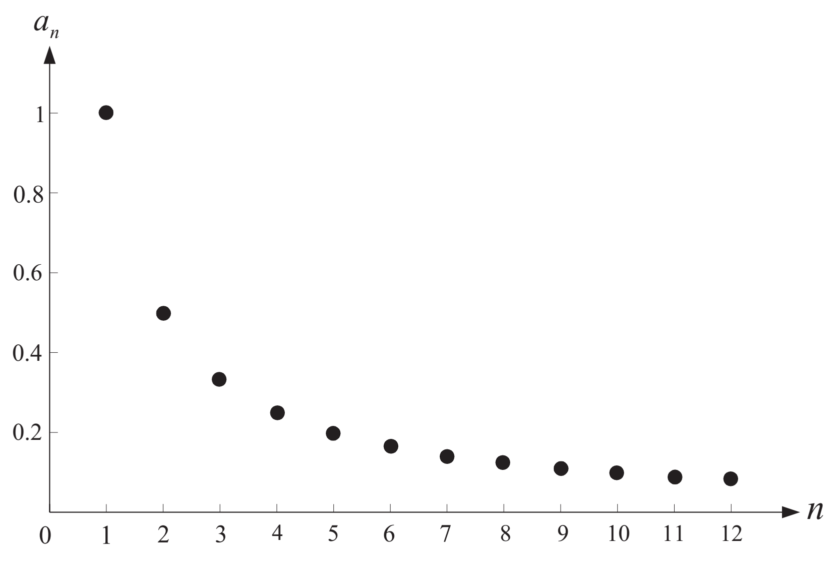
Primer 8.1.3 Ispisati nekoliko članova nizova definisanih opštim članom:

(i) ako je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (slike 8.2 i 8.3), tada je

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}, a_6 = \frac{1}{6}, \ldots.$$



Slika 8.2: Niz $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

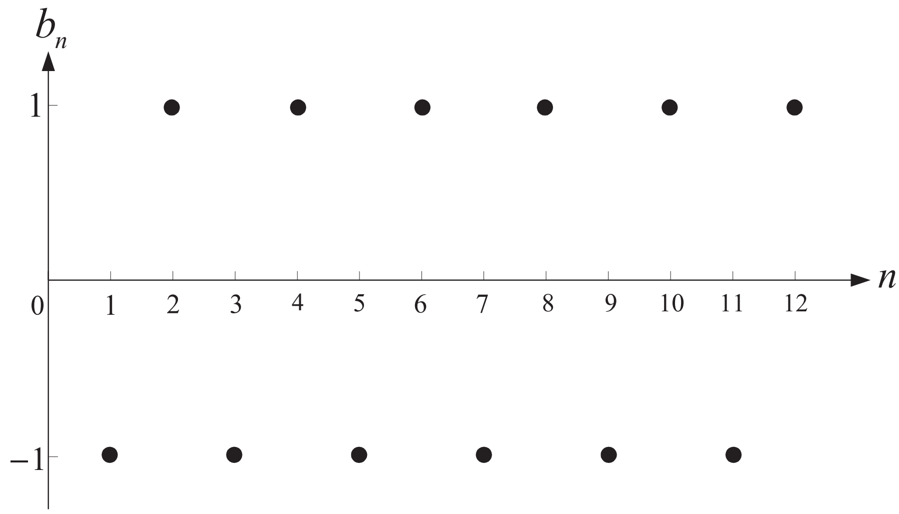


Slika 8.3: Niz $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) niz čiji je opšti član $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ (slike 8.4 i 8.5), oblika je

$$b_1 = -1, b_2 = 1, b_3 = -1, b_4 = 1, b_5 = -1, b_6 = 1, \ldots$$

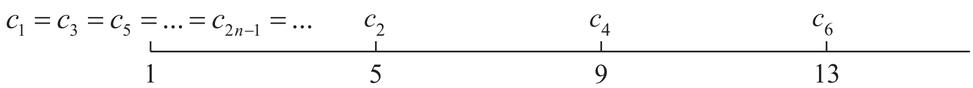
Slika 8.4: Niz $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.



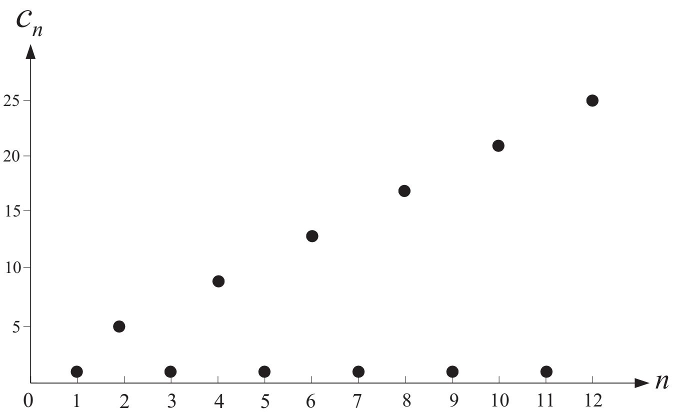
Slika 8.5: Niz $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(iii) u slučaju da je opšti član $c_n = 1 + ((-1)^n + 1)n$, $n \in \mathbb{N}$ (slike 8.6 i 8.7), tada je

$$c_1 = 1, c_2 = 5, c_3 = 1, c_4 = 9, c_5 = 1, c_6 = 13, \ldots$$



Slika 8.6: Niz $c_n = 1 + ((-1)^n + 1)n$, $n \in \mathbb{N}$.

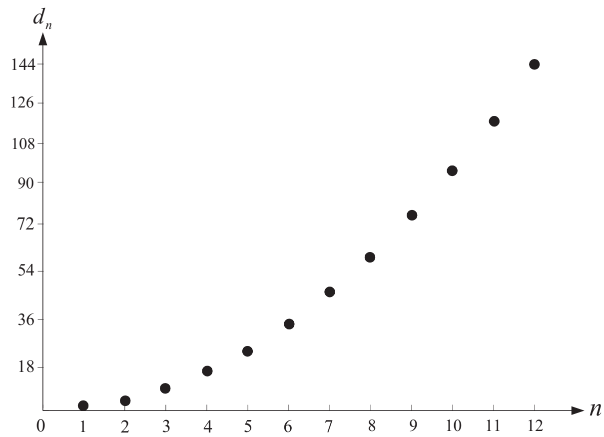


Slika 8.7: Niz $c_n = 1 + ((-1)^n + 1)n$, $n \in \mathbb{N}$.

(iv) neka je opšti član $d_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ (slike 8.8 i 8.9), onda je

$$d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 9, d_4 = 16, d_5 = 25, d_6 = 36, \ldots$$

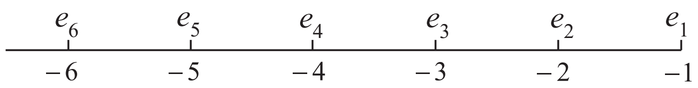
Slika 8.8: Niz $d_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.



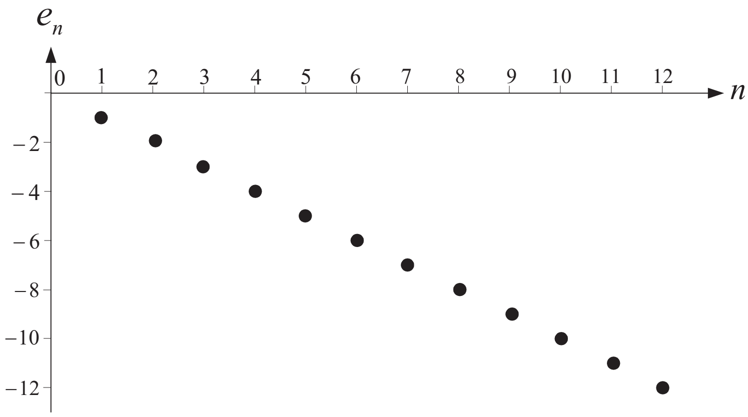
Slika 8.9: Niz $d_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

(v) ako je opšti član $e_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, onda je

$$e_1 = -1, e_2 = -2, e_3 = -3, e_4 = -4, e_5 = -5, e_6 = -6, \ldots$$



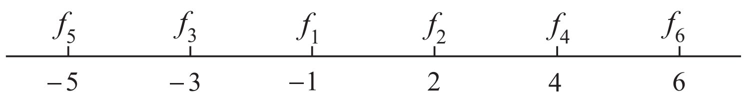
Slika 8.10: Niz $e_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.



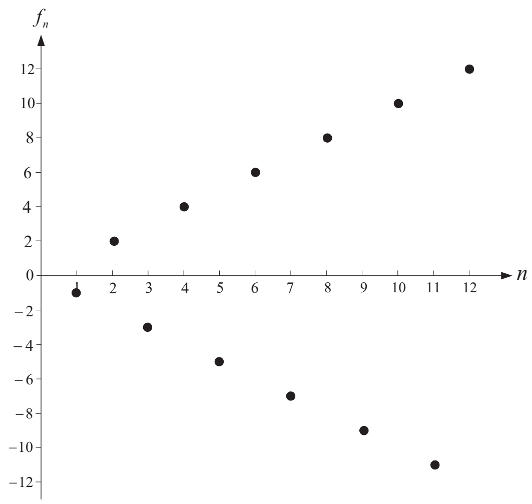
Slika 8.11: Niz $e_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

(vi) u slučaju da je opšti član $f_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$, niz je oblika

$$f_1 = -1, f_2 = 2, f_3 = -3, f_4 = 4, f_5 = -5, f_6 = 6, \ldots$$



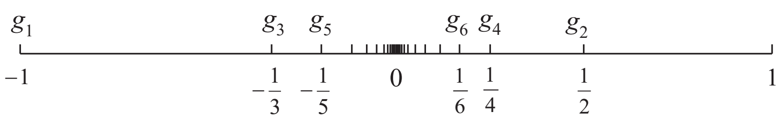
Slika 8.12: Niz $f_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$.



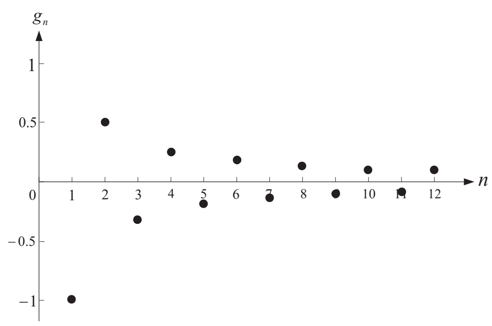
Slika 8.13: Niz $f_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$.

(vii) neka je opšti član $g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je

$$g_1 = -1, g_2 = \frac{1}{2}, g_3 = -\frac{1}{3}, g_4 = \frac{1}{4}, g_5 = -\frac{1}{5}, g_6 = \frac{1}{6}, \ldots$$



Slika 8.14: Niz $g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.



Slika 8.15: Niz $g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

■

U naredna dva primera, definisaćemo pojmove aritmetičkog i geometrijskog niza.

Primer 8.1.4 Niz $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je aritmetički ako je razlika svaka dva uzastopna člana niza isti broj različit od nule. Razliku obeležavamo sa

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \ldots$$

n-ti član niza računa se kao

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, n \in \mathbb{N}\,, \tag{8.1}$$

pa je $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$,...

Sumu prvih n članova niza obeležavamo sa $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ i izračunavamo kao

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \tag{8.2}$$

ili kao

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\,d)\,.$$

Broj članova niza dobija se iz formule

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1\,.$$

Na primer, niz 2, 6, 10, 14, 18,... je aritmetički jer je razlika svaka dva uzastopna člana niza $d = 4$. Opšti član niza bi bio, na osnovu (8.1), $a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$, $n \geq 1$, pa je tako, recimo, $a_6 = 4 \cdot 6 - 2 = 22$, a $S_6 = \frac{6}{2}(2 + 22) = 72$ zbog (8.2). Niz -3, -5, -7, -9,... je takođe aritmetički gde je $d = -2$.

Korišćenjem sume aritmetičkog niza, možemo izračunati zbir prvih n prirodnih brojeva. Naime, niz 1, 2,..., n,... je aritmetički gde je $d = 1$. Prvi član niza je $a_1 = 1$, n-ti član je $a_n = 1$ pa iz (8.2) sledi

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(1 + n)\,. \tag{8.3}$$

Sada je, recimo,

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5050\,.$$

Primetimo da je $a_n = a_{n-1} + d$ i da je $a_n = a_{n+1} - d$ za $n \geq 2$ i da odatle sledi da je

$$a_n = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2} \text{ za } n \geq 2\,,$$

po čemu je ovaj niz i dobio ime - aritmetički, jer je svaki član niza (osim prvi) jednak aritmetičkoj sredini susedna dva člana. ■

Primer 8.1.5 Niz $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je geometrijski ako je količnik svaka dva uzastopna člana niza isti broj različit od nule i jedinice. Količnik obeležavamo sa

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \cdots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \ldots$$

n-ti član niza se računa kao

$$b_n = b_1\, q^{n-1}, n \in \mathbb{N}\,,$$

pa je, $b_2 = b_1\, q$, $b_3 = b_1\, q^2$, $b_4 = b_1\, q^3$,...

Sumu prvih n članova niza obeležavamo sa $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ i izračunavamo kao

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}\,. \tag{8.4}$$

Ako izrazimo n iz (8.4), dobijamo da je broj članova niza jednak

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{S_n(q-1)}{b_1}\right)}{\ln q}\,.$$

Na primer niz 2, 4, 8, 16, 32,... je geometrijski jer je količnik svaka dva uzastopna člana niza $q = 2$. Opšti član niza bi bio $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, $n \geq 1$, pa je tako, recimo, $b_6 = 2^6 = 64$, a $S_6 = 2 \cdot \frac{2^6-1}{2-1} = 126$. Niz 27, 9, 3, 1,... je takođe aritmetički gde je $q = 1/3$.

Primetimo da je $b_n = b_{n-1}\, q$ i $b_n = b_{n+1}/q$ za $n \geq 2$, pa je

$$b_n = \sqrt{b_{n+1} \cdot b_{n-1}}$$

za $n \geq 2$, po čemu je ovaj niz i dobio ime - geometrijski, jer je svaki član niza (osim prvi) jednak geometrijskoj sredini susedna dva člana (ako su članovi niza pozitivni). ■

Primer 8.1.6 Niz čija su prva dva člana $h_1 = h_2 = 1$, a svaki sledeći se računa po rekurentnoj formuli $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$, $n \geq 3$, naziva se Fibonačijev niz[1] i oblika je 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... ■

8.2 Konvergencija, ograničenost i monotonost

Definicija 8.2.1 *Epsilon okolina (ε-okolina) realnog broja l je otvoreni interval realnih brojeva $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, pri čemu je ε realan pozitivan broj.*

Ako je $\varepsilon = 0.1$, tada je ε-okolina broja $l = 2$ oblika $(2 - 0.1, 2 + 0.1) = (1.9, 2.1)$.

Napomena 8.2.2 *Ako $x \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, to znači da je*

$$l - \varepsilon < x < l + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - l < \varepsilon \Leftrightarrow |x - l| < \varepsilon\,.$$

Definicija 8.2.3 *Broj l je tačka nagomilavanja niza realnih brojeva $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako svaka ε-okolina broja l sadrži beskonačno mnogo članova niza $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Primer 8.2.4 Ukoliko postoje, pronaći tačke nagomilavanja nizova iz primera 8.1.3:

Rešenje.

(*i*) Niz čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja $l = 0$ koja nije član niza. Ako je $\varepsilon = \frac{1}{n}$, članovi niza počevši od $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ nalaze se unutar intervala $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

[1] Fibonačijev niz je usko povezan sa zlatnim presekom jer količnik susedna dva člana Fibonačijevog niza teži zlatnom preseku ($(1 + \sqrt{5})/2$) kako se n povećava.

(*ii*) Niz čiji je opšti član $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ima dve tačke nagomilavanja, $l_1 = -1$ i $l_2 = 1$ i obe su članovi niza.

(*iii*) Niz čiji je opšti član $c_n = 1 + ((-1)^n + 1)n$, $n \in \mathbb{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja, $l = 1$.

(*iv*), (*v*), (*vi*) Nizovi nemaju tačke nagomilavanja.

(*vii*) Niz čiji je opšti član $g_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja, $l = 0$.

■

Posebno je interesantno šta se dešava sa članovima niza kako se n povećava, odnosno kada n postaje veliko što ćemo zapisivati $n \to +\infty$. Na primer, članovi niza pod (*i*) u primeru 8.1.3 se smanjuju i približavaju nuli kako se n povećava. Broj kome se članovi niza približavaju obeležićemo sa L, pa je u ovom slučaju $L = 0$. Napravimo sada jednu ε-okolinu oko tačke $L = 0$, recimo $(0 - 0.1, 0 + 0.1)$ gde je $\varepsilon = 0.1$. Sada vidimo da je prvih deset članova niza van tog intervala. Taj broj obeležićemo sa n_0, pa je $n_0 = 10 = \frac{1}{0.1} = \frac{1}{\varepsilon}$. Počevši od $n = 11 > 10 = n_0$, preostali članovi niza jesu u tom intervalu, odnosno $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$,... pripadaju intervalu $(0 - 0.1, 0 + 0.1)$ što se zapisuje kao $a_n \in (0 - 0.1, 0 + 0.1)$, $n \geq 11$. Ako sada izaberemo da je $\varepsilon = 0.01$, tada je $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} = 100$, pa će za sve članove niza počevši od $n = 101$ $(n > n_0)$ (ima ih, opet, beskonačno mnogo) važiti $|\frac{1}{n} - L| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = 0.01 = \varepsilon$, itd. Broj L ćemo nazvati granična vrednost niza. Sada sledi precizna definicija granične vrednosti niza.

Definicija 8.2.5 *Realan broj L je granična vrednost niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tako da za svako $n > n_0$ važi da je $|a_n - L| < \varepsilon$. Kraće zapisano*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon))(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)\,.$$

Ako je broj L granična vrednost niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tada kažemo da je taj niz konvergentan, da konvergira ka broju L, što zapisujemo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

Napomena 8.2.6 *Ako je tačka nagomilavanja niza jedinstvena i konačna, nazivamo je granična vrednost (limes), odnosno $l = L$.*

Jedinstvenost granične vrednosti sledi iz definicije jer je nemoguće postojanje broja $\bar{L}$, tako da je $\bar{L} \neq L$, a da je on druga granična vrednost jer bi tada važilo

$$\bar{L} = \lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

što je u suprotnosti sa $\bar{L} \neq L$.

Niz je divergentan ako ne konvergira.

Definicija 8.2.7 *Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergira ka plus beskonačno ako*

$$(\forall\, M > 0)(\exists n_0 = n_0(M))(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n > M)$$

i pišemo $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergira ka minus beskonačno ako

$$(\forall\, M > 0)(\exists n_0 = n_0(M))(\forall\, n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n < -M)$$

i zapisujemo $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Primer 8.2.8 Ukoliko postoje, pronaći konvergentne i divergentne nizove iz primera 8.1.3.

Rešenje.

(*i*) Niz $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$, $a_5 = 1/5$, $a_6 = 1/6$, ..., je konvergentan i konvergira ka 0.

(*ii*) Niz $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 1$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, ..., je divergentan ali ne divergira niti ka plus, niti ka minus beskonačno.

(*iii*) Niz $c_1 = 1$, $c_2 = 5$, $c_3 = 1$, $c_4 = 9$, $c_5 = 1$, $c_6 = 13$, ..., divergira ka plus beskonačno.

(*iv*) Niz $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 9$, $d_4 = 16$, $d_5 = 25$, $d_6 = 36$, ..., divergira ka plus beskonačno.

(*v*) Niz $e_1 = -1$, $e_2 = -2$, $e_3 = -3$, $e_4 = -4$, $e_5 = -5$, $e_6 = -6$, ..., divergira ka minus beskonačno.

(*vi*) Niz $f_1 = -1$, $f_2 = 2$, $f_3 = -3$, $f_4 = 4$, $f_5 = -5$, $f_6 = 6$, ..., jeste divergentan ali ne divergira niti ka plus, niti ka minus beskonačno.

(*vii*) Niz $g_1 = -1$, $g_2 = 1/2$, $g_3 = -1/3$, $g_4 = 1/4$, $g_5 = -1/5$, $g_6 = 1/6$, ..., je konvergentan i konvergira ka 0.

■

Neke poznate granične vrednosti nizova date su u nastavku:

$a)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0,$

$b)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0,$

$c)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}$

$d)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0,$

$e)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

$f)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, a > 0,$

$g)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_s n^s + a_{s-1}n^{s-1} + \ldots + a_0}{b_t n^t + b_{t-1}n^{t-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0, & s < t, \\ \frac{a_s}{b_t}, & s = t, \\ +\infty, & s > t,\ a_s\, b_t > 0, \\ -\infty, & s > t,\ a_s\, b_t < 0. \end{cases}$

$h)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty,\ a > 0,\ k \in \mathbb{R}.$

Uvedimo pojmove monotonog i ograničenog niza.

Definicija 8.2.9 *Za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je*

a) opadajući, ako je $a_{n+1} < a_n$ za svaki prirodan broj n,

b) rastući, ako je $a_{n+1} > a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$,

c) neopadajući, ako je $a_{n+1} \geq a_n$ za svaki prirodan broj n,

d) nerastući, ako je $a_{n+1} \leq a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, *e) stacionaran, ako postoji $M > 0$, tako da je $a_{n+1} = a_n$ za svaki prirodan broj $n > M$.*

Niz je monoton ako je opadajući ili rastući.

Primer 8.2.10 Ukoliko postoje, pronaći monotone nizove iz primera 8.1.3.

Rešenje.

(*i*) Niz $a_1 = 1 > a_2 = 1/2 > a_3 = 1/3 > a_4 = 1/4 > a_5 = 1/5 > a_6 = 1/6 > \cdots$, je monotono opadajući.

(*ii*) Niz $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 1$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, ..., nije monoton.

(*iii*) Niz $c_1 = 0$, $c_2 = 4$, $c_3 = 0$, $c_4 = 8$, $c_5 = 0$, $c_6 = 12$, ..., nije monoton.

(*iv*) Niz $d_1 = 1 < d_2 = 4 < d_3 = 9 < d_4 = 16 < d_5 = 25 < d_6 = 36 < \cdots$, je monotono rastući.

(*v*) Niz $e_1 = -1 > e_2 = -2 > e_3 = -3 > e_4 = -4 > e_5 = -5 > e_6 = -6 > \cdots$, je monotono opadajući.

(*vi*) Niz $f_1 = -1$, $f_2 = 2$, $f_3 = -3$, $f_4 = 4$, $f_5 = -5$, $f_6 = 6$, ..., nije monoton.

(*vii*) Niz $g_1 = -1$, $g_2 = 1/2$, $g_3 = -1/3$, $g_4 = 1/4$, $g_5 = -1/5$, $g_6 = 1/6$, ..., nije monoton.

■

Definicija 8.2.11 *Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen ako postoji pozitivan realan broj M tako da se svi članovi niza nalaze u intervalu $[-M, M]$, odnosno ako je $|a_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$.*

Primer 8.2.12 Ukoliko postoje, pronaći ograničene nizove iz primera 8.1.3:

Rešenje.

(*i*) Niz $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$, $a_5 = 1/5$, $a_6 = 1/6$, ..., je ograničen jer važi $|a_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Niz $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 1$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, ..., je takođe ograničen jer važi $|b_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(*iii*), (*iv*), (*v*), (*vi*) Nizovi nisu ograničeni.

(*vii*) Niz $g_1 = -1$, $g_2 = 1/2$, $g_3 = -1/3$, $g_4 = 1/4$, $g_5 = -1/5$, $g_6 = 1/6$, ..., je ograničen jer važi $|g_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

■

Teorema 8.2.13 *Svaki konvergentan niz je i ograničen, obrnuto ne važi.*

Dokaz. Ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, tada važi $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, odnosno za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0, tako da za $n > n_0$, $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Ako sada izaberemo M, kao $M = \max\{|L| + \varepsilon, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$, za sve članove niza važiće $|a_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Da obrnuto ne važi, dokaz su nizovi (*ii*) i (*vii*) iz primera 8.1.3. ■

Teorema 8.2.14 *Ako je niz monoton i ograničen, tada je konvergentan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući, tj. $a_n < a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ i neka važi $|a_n| < M$ za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je M najmanje gornje ograničenje. To znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji n_0, tako da za $n > n_0$, $|a_n - M| < \varepsilon$, što dalje implicira da je niz konvergentan. Slično se dokazuje kada je u pitanju opadajući niz. ■

Napomena 8.2.15 *Treba primetiti da monotonost nije nužna za konvergenciju niza. Na primer, niz $g_n = (-1)^n/n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira ka 0, a nije monoton.*

Primer 8.2.16 Neka je dat niz sa opštim članom $a_n = \frac{2n}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}$. Pokazati da niz konvergira ka $2/3$ u smislu definicije 8.2.5.

Rešenje. Pokažimo da je niz monotono rastući, tj. da je $a_{n+1} > a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Naime,

$$\frac{2(n+1)}{3(n+1)+4} > \frac{2n}{3n+4} \Leftrightarrow (2n+2)(3n+4) > 2n(3n+7) \Leftrightarrow 6n^2 + 14n + 8 > 6n^2 + 14n\,,$$

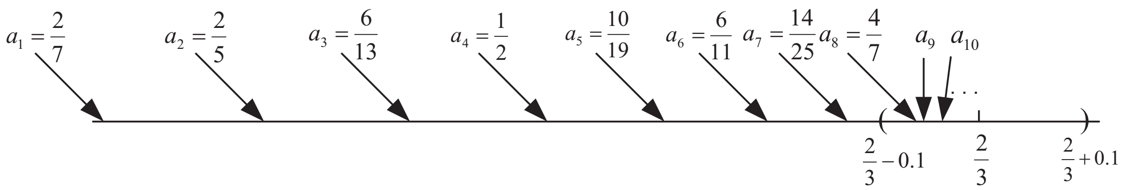
što je tačno, pa je niz monotono rastući. Kako je još

$$\left|\frac{2n}{3n+4}\right| = \frac{2n}{3n+4} < \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}\,,$$

sledi da je ograničen (odozgo). Pokažimo da je $L = 2/3$ granična vrednost tog niza kada $n \to +\infty$. Sada je

$$|a_n - L| = \left|\frac{2n}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n - 2(3n+4)}{3(3n+4)}\right| = \left|\frac{-8}{3(3n+4)}\right| < \varepsilon\,,$$

odakle sledi da je $n > (8 - 12\varepsilon)/(9\varepsilon)$, pa se za n_0 može uzeti ceo deo od $(8 - 12\varepsilon)/(9\varepsilon)$. Na primer, za $\varepsilon = 0.1$ sledi da je $n_0 = 7$, a to znači je prvih 7 članova niza (sedmi član je $a_7 = \frac{14}{25} = \frac{588}{1050}$) van intervala $(2/3 - 0.1, 2/3 + 0.1) = (\frac{595}{1050}, \frac{805}{1050})$, dok su preostali članovi, počevši od osmog, $a_8 = \frac{4}{7} = \frac{600}{1050}$, unutar tog intervala (slike 8.16 i 8.17). Za $\varepsilon = 0.01$ imamo da je $n_0 = 87$, a to znači je sada prvih 87 članova niza van intervala $(2/3 - 0.01, 2/3 + 0.01)$, dok su preostali članovi, počevši od $n = 88$, unutar tog intervala.



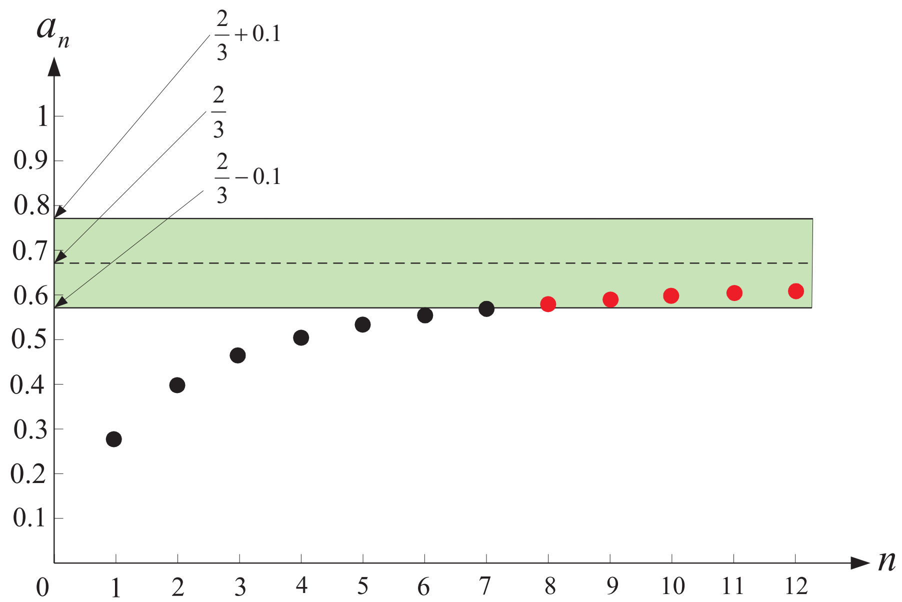
Slika 8.16: Niz $a_n = \frac{2n}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}$ koji teži $2/3$, $\varepsilon = 0.1$.

■

Primer 8.2.17 Dokazati konvergenciju niza $h_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, korišćenjem teoreme 8.2.14.

Rešenje. Napišimo prvo nekoliko članova niza.

$$h_1 = 2, h_2 = 2.25, h_3 = 2.37037, h_4 = 2.44141, h_5 = 2.48832, h_6 = 2.52163, \ldots$$



Slika 8.17: Niz $a_n = \frac{2n}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}$, koji teži $2/3$, $\varepsilon = 0.1$. Prvih sedam članova niza (crne tačke) je van intervala $(2/3-0.1, 2/3+0.1)$, a svi preostali (crvene tačke), počevši od osmog, su u tom intervalu.

Korak 1. Pokažimo da je niz h_n, $n \in \mathbb{N}$ monotono rastući, odnosno da važi $h_n < h_{n+1}$ ili

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Podsetimo se da je za $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\,, \tag{8.5}$$

gde je

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

i

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

binomni koeficijent. Tada je

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \tag{8.6}$$

i

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^{n+1-k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \tag{8.7}$$

na osnovu (8.5). Za formulu (8.7) važi

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &> \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k . \end{aligned}$$

Pokazaćemo da važi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = h_n$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ tako što ćemo dokazati

$$\binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \geq \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \tag{8.8}$$

za svako $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Ako uprostimo izraz (8.8) imaćemo da treba dokazati

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^k} \geq \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k},$$

odnosno

$$\frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^k} \geq \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k},$$

a nakon skraćivanja

$$\frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{1}{(n+1)^k} \geq \frac{1}{n^k}.$$

Mi ćemo pokazati da za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ važi

$$\frac{n+1}{n+1-k} \geq \frac{(n+1)^k}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k . \tag{8.9}$$

Prethodni izraz (8.9) može se zapisati i kao

$$\frac{n+1}{n+1-1} \cdot \frac{n+1-1}{n+1-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1-(k-1)}{n+1-k} \geq \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}}_{k\text{-puta}} .$$

Dovoljno je da pokažemo da je svaki činilac sa leve strane prethodne nejednakosti, veći ili jednak $\frac{n+1}{n}$, odnosno da je

$$\frac{n+1-(i-1)}{n+1-i} \geq \frac{n+1}{n} \tag{8.10}$$

za $i = 1, 2, \ldots, k$, a to je tačno zbog

$$\frac{n+1-(i-1)}{n+1-i} = \frac{n+1-i+1}{n+1-i} = 1 + \frac{1}{n+1-i} \geq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n},$$

jer je $1 - i \leq 0$ pa je $n + 1 - i \leq n \Rightarrow \dfrac{1}{n+1-i} \geq \dfrac{1}{n}$. Zaključujemo da je posmatrani niz monotono rastući.

Korak 2. Pokazaćemo sada ograničenost. Jasno je da je

$$h_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > (1+0)^n = 1\,.$$

Sa gornje strane važi, na osnovu (8.6),

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} < 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 + \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 = 3\,.
\end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ suma n članova geometrijskog niza $\dfrac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$ i da je

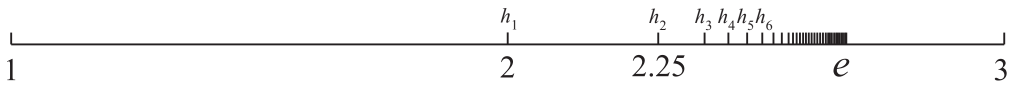
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\,.$$

Pošto smo u dva koraka pokazali da je niz h_n, $n \in \mathbb{N}$, ograničen i monoton, sledi da je konvegentan. Njegova granica[2] je broj e, odnosno važi (slike 8.18 i 8.19)

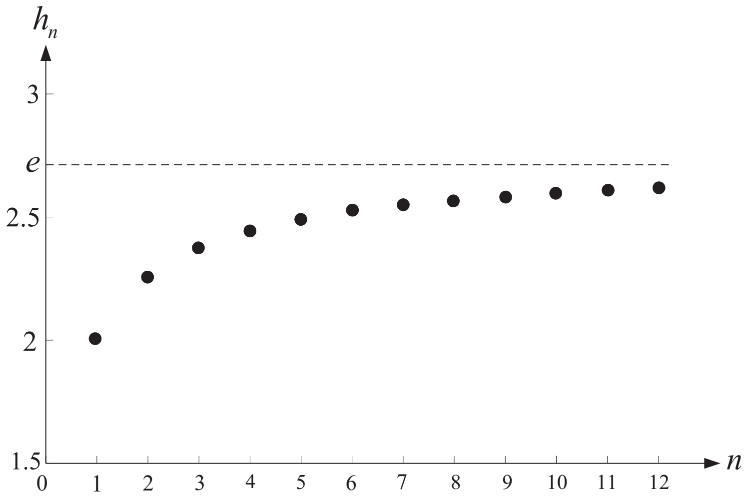
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,. \tag{8.11}$$

■

[2]Broj $e \approx 2.71828182845904523536$ je jedna od najznačajnijih matematičkih konstanti, poznata još i kao Ojlerov broj. Prvi put se pojavio 1618. godine u logaritamskim tablicama (nakon otkrića logaritama), ali mu tada nije pridavan naročit značaj. Njegov smisao, kako u matematici, tako i u drugim naučnim oblastima, biće otkriven znatno kasnije.



Slika 8.18: Niz $h_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.



Slika 8.19: Niz $h_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

8.2.1 Košijevi nizovi

Sada ćemo navesti važan uslov za konvergenciju niza, odnosno uslov koji je i potreban i dovoljan za konvergenciju. Pre toga, uvedimo sledeću definiciju.

Definicija 8.2.18 *Niz* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je Košijev ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)\,. \tag{8.12}$$

Primer 8.2.19 Pokazati da je niz

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdot + \frac{1}{2^n}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Košijev.

Rešenje. Prvo treba da ocenimo sledeću razliku

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left|\frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^{n+p-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right| \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left|\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-2}} + \cdots + \frac{1}{2^0}\right| \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\,.
\end{aligned}$$

Sada, ako za ε izaberemo tako da je $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$, tada je

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \log_2 2^n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}$$

nakon promene baze. Ako n_0 izaberemo tako da je

$$n_0 = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}\right] + 1\,,$$

dobijamo da je posmatrani niz Košijev ($[x]$ je ceo deo od x). ∎

Teorema 8.2.20 *Potreban i dovoljan uslov da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u skupu $\mathbb{R}$ konvergira je da je on Košijev.*

Primer 8.2.21 Ispitati da li niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

konvergira.

Rešenje. Ocenimo razliku

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n+p} \frac{\cos k!}{k(k+1)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k!}{k(k+1)} \right| \\
&\le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos k!|}{k(k+1)} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{k+1-k}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Ako za ε izaberemo tako da je $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, tada je

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1\,.$$

Dalje, n_0 biramo tako da je

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\,,$$

što implicira da je posmatrani niz Košijev, a time i konvergentan. ∎

Primer 8.2.22 Ispitati da li niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergira.

Rešenje. Sada je

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n+p} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

te za n_0 biramo $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, tako da je posmatrani niz Košijev, a time i konvergentan. ■

Primer 8.2.23 Ispitati da li niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergira.

Rešenje. Pretpostavićemo da dati niz nije Košijev, a to znači da treba dokazati

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n, p \in \mathbb{N})(n > n_0 \land |a_{n+p} - a_n| > \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon = 1/3$. Tada je

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p}}_{p \text{ sabiraka}} \\
&= \frac{p}{n+p}.
\end{aligned}$$

Ako postavimo da je $p = n$, dobijamo

$$|a_{2n} - a_n| \geq \frac{n}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon\,,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, tako da niz nije Košijev, pa nije ni konvergentan. ■

8.2.2 Osobine konvergentnih nizova

Ako su nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni i ako je $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n = P$, tada važi:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

  Primer 8.2.24 $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ ■

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \cdot L, \alpha \in \mathbb{R}$

  Primer 8.2.25 Koristeći primer 8.2.16, imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} 3 \cdot \frac{2n}{3n+4} = 3 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n+4} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2\,.$$

■

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L \pm P$

  Primer 8.2.26 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod *b*) i *g*), kao i primer 8.2.16, sledi da je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3} + \frac{2n}{3n+4}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^2+2n}{5n^2+3} + \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n+4} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(5+\frac{3}{n^2}\right)} + \frac{2}{3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-3+\frac{2}{n}}{5+\frac{3}{n^2}} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{1}{15}\,.
\end{aligned}$$

■

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=L\cdot P$

Primer 8.2.27 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod g) i primer 8.2.26, sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}\cdot\frac{3n}{-3n+1})=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{-3n+1}=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{3}\right)=\frac{3}{5}\,.$$

■

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to+\infty}a_n}{\lim_{n\to+\infty}b_n}=\dfrac{L}{P}, P\neq 0$

Primer 8.2.28 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod g) i primer 8.2.26, sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}}{\frac{4n}{5n+3}}=\frac{\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+2n}{5n^2+3}}{\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{5n+3}}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}\,.$$

■

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^m=(\lim\limits_{n\to+\infty}a_n)^m=L^m, m\in\mathbb{N}$

Primer 8.2.29 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod g) i primer 8.2.28, sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{5n+3}\right)^2=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{5n+3}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}\,.$$

■

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[m]{a_n}=\sqrt[m]{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}=\sqrt[m]{L}, m\in\mathbb{N}, a_n>0, n\in\mathbb{N}$

Primer 8.2.30 Koristeći poznatu graničnu vrednost datu pod b), sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{8n^3}{27n^3+2n^2-2}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to+\infty}\frac{8n^3}{n^3\left(27+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)}}=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}\,.$$

■

- Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=K$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=L$, i neka je postoji $n_0\in\mathbb{N}$, tako da za svako $n\in\mathbb{N}$, za koje je $n>n_0$, važi $a_n\leq b_n$, tada je i $K\leq L$.

Primer 8.2.31 Posmatrajmo nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=1+1/n$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=2+1/n$. Jasno je da je za svako $n\geq 1$ tačno $a_n=1+\frac{1}{n}<2+\frac{1}{n}=b_n$, pa je tada i

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1<2=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}b_n\,.$$

■

- Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$, i neka je postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, za koje je $n > n_0$, važi $a_n \le c_n \le b_n$, tada je i $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$.

Primer 8.2.32 Koristeći primer 8.2.17, pokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,. \tag{8.13}$$

Rešenje. Jasno je da je niz $i_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ograničen jer je

$$0 \le \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1\,.$$

Napišimo nekoliko članova niza i_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$i_1 = 0, i_2 = 0.25, i_3 = 0.296296, i_4 = 0.316406, i_5 = 0.32768, i_6 = 0.334898, \ldots$$

Da bi niz bio konvergentan, pokažimo da je još i monoton, odnosno da je monotono rastući. Naime,

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} &= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n+1}}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \\
&= \left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n}{n+1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\,.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(-\frac{1}{n^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{n^{2k}} \\
&= 1-\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^4}-\binom{n}{3}\frac{1}{n^6}+\binom{n}{4}\frac{1}{n^8}-\binom{n}{5}\frac{1}{n^{10}}+\ldots \\
&= 1-\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^4}-\left(\binom{n}{3}\frac{1}{n^6}-\binom{n}{4}\frac{1}{n^8}\right) \\
&\quad -\left(\binom{n}{5}\frac{1}{n^{10}}-\binom{n}{6}\frac{1}{n^{12}}\right)-\ldots
\end{aligned} \tag{8.15}$$

pokazaćemo da za svako $k \ge 2$, važi

$$\binom{n}{2k-1}\frac{1}{n^{2\cdot(2k-1)}}-\binom{n}{2k}\frac{1}{n^{2(2k)}} > 0\,,$$

pa će slediti da je

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1-\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^4}\,. \tag{8.16}$$

Naime,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{2k-1}\frac{1}{n^{4k-2}}-\binom{n}{2k}\frac{1}{n^{4k}} &= \frac{n!}{(2k-1)!(n-(2k-1))!}\cdot\frac{n^2}{n^{4k}}-\frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}\cdot\frac{1}{n^{4k}}\\
&= \frac{n!}{n^{4k}(2k-1)!(n-2k)!}\left(\frac{n^2}{n-(2k-1)}-\frac{1}{2k}\right).
\end{aligned}$$

Izraz u zagradi je veći od nule jer je

$$\frac{n-(2k-1)}{2k\,n^2}<\frac{n}{2k\,n^2}=\frac{1}{2k\,n}<1\Rightarrow\frac{1}{2k}<\frac{n^2}{n-(2k-1)}\Rightarrow\frac{n^2}{n-(2k-1)}-\frac{1}{2k}>0\,.$$

Vratimo se sada na izraz (8.14) iz kog sledi, na osnovu (8.16),

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} &< \left(1-\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{2n^4}\\
&= 1-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^4}<1
\end{aligned} \tag{8.17}$$

što znači da je niz i_n, $n\in\mathbb{N}$ monotono rastući. Sada ćemo pokazati da važi (8.13). Neka je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=b\,,$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=b\,e\,,$$

na osnovu primera 8.2.17. Pokažimo da je $b\,e=1$ odakle će slediti da je $b=1/e$.

Posmatrajmo sada niz

$$c_n=1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n,$$

za svako $n\in\mathbb{N}$. Kako je

$$0<\frac{1}{n^2}\le 1\Rightarrow 0>-\frac{1}{n^2}\ge -1\Rightarrow 1>1-\frac{1}{n^2}\ge 0\Rightarrow 1>\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\ge 0$$

pa je

$$c_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 0$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Sa druge strane, koristeći (8.15),

$$\begin{aligned} c_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n &= \frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n^4} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^6} - \binom{n}{4}\frac{1}{n^8} + \binom{n}{5}\frac{1}{n^{10}} - \dots \\ &= \frac{1}{n} - \left(\binom{n}{2}\frac{1}{n^4} - \binom{n}{3}\frac{1}{n^6}\right) - \left(\binom{n}{4}\frac{1}{n^8} - \binom{n}{5}\frac{1}{n^{10}}\right) - \dots \\ &< \frac{1}{n} \end{aligned}$$

jer je za svako $k \in \mathbb{N}$, tačno

$$\binom{n}{2k}\frac{1}{n^{2\cdot 2k}} - \binom{n}{2k+1}\frac{1}{n^{2(2k+1)}} > 0$$

što ćemo sada dokazati. Naime,

$$\begin{aligned} \binom{n}{2k}\frac{1}{n^{4k}} - \binom{n}{2k+1}\frac{1}{n^{4k+2}} &= \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} \cdot \frac{1}{n^{4k}} \\ &\quad - \frac{n!}{(2k+1)!(n-(2k+1))!} \cdot \frac{1}{n^{4k} \cdot n^2} \\ &= \frac{n!}{n^{4k}(2k)!(n-(2k+1))!}\left(\frac{1}{n-2k} - \frac{1}{(2k+1)\,n^2}\right). \end{aligned}$$

Izraz u zagradi je veći od nule jer je

$$\begin{aligned} \frac{n-2k}{(2k+1)\,n^2} < \frac{n}{(2k+1)\,n^2} = \frac{1}{(2k+1)\,n} < 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{(2k+1)\,n^2} < \frac{1}{n-2k} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{n-2k} - \frac{1}{(2k+1)\,n^2} > 0\,. \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$0 < c_n < \frac{1}{n}$$

odakle sledi da kada $n \to +\infty$ mora važiti

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right) = 0$$

jer je $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, a to dalje povlači da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

što je i trebalo pokazati. ■

Primer 8.2.33 Odrediti
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n.$$

Rešenje. Koristeći (8.13) imaćemo da je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n-3}{n+2}-1\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{5}{n+2}\right)^n\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{5}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{5}}\right)^{\frac{n+2}{5}\cdot\frac{5}{n+2}\cdot n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{5}}\right)^{\frac{n+2}{5}}\right)^{\frac{5n}{n+2}} = \frac{1}{e^5}.
\end{aligned}$$

■

Primer 8.2.34 Odrediti
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{2n+1}\right)^n.$$

Rešenje. Korišćenjem (8.11) dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{2n+1}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{6}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{6}}\right)^{\frac{2n+1}{6}\cdot\frac{6}{2n+1}\cdot n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{6}}\right)^{\frac{2n+1}{6}}\right)^{\frac{6n}{2n+1}} = e^{\frac{6}{2}} = e^3.
\end{aligned}$$

■

8.3 Zadaci za vežbu

Odrediti tačke nagomilavanja (ako postoje), ispitati ograničenost, monotonost i konvergenciju sledećih nizova koji su dati opštim članom:

1. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $c_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. $d_n = 1 + 2\cdot(-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ispitati da li su nizovi sa sledećim opštim članovima Košijevi:

5. $a_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdot + \dfrac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$. (jeste)

6. $b_n = \dfrac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \dfrac{\sin 2}{2 \cdot 3} + \cdot + \dfrac{\sin n}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. (jeste)

7. $c_n = \dfrac{\cos 1!}{1} + \dfrac{\cos 2!}{2^2} + \cdot + \dfrac{\cos n!}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. (jeste)

8. $d_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdot + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. (nije)

Odrediti sledeće granične vrednosti:

9. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^4 + 3n^2 - 1}{n^5 + n + 4}$. $(L = 1)$

10. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^5 + 2n^2 + 4}{n^3 - 2}$. $(L = +\infty)$

11. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7n^2 + 5n + 3}{n^3 + 9}$. $(L = 0)$

12. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n + 4}{n\sqrt[n]{2019} - n}$. $(L = +\infty)$

13. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$. $(L = 2)$

14. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$. $(L = 3)$

15. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 3n - 4}\right)$. $(L = 3)$

16. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2n - 1}{2n + 3}\right)^{3n}$. $(L = 1/e^6)$

17. $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + n + 1}\right)^{5n-1}$. $(L = e^5)$

18. Funkcija u_n, $n \in \mathbb{N}$ uzima vrednosti:

$$u_1 = \frac{1}{4},\ u_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}, \ldots, u_n = \frac{1}{3^1 + 1} + \frac{1}{3^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{3^n + 1}, \ldots$$

Dokazati da u_n teži nekoj graničnoj vrednosti kada $n \to \infty$.

19. Dokazati da niz

$$a_n = \frac{1}{3^1 + 1} + \frac{1}{3^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{3^n + n}$$

ima graničnu vrednost kada $n \to \infty$.

20. Dokazati da niz brojeva

$$u_1 = 6,\ u_2 = \sqrt{6 + u_1}, \ldots, u_n = \sqrt{6 + u_{n-1}}, \ldots$$

teži određenoj vrednosti L i naći tu vrednost. $(L = 3)$

GLAVA 9

Granična vrednost funkcije

Granična vrednost funkcije je fundamentalna oblast na kojoj se zasnivaju diferencijalni i integralni račun. U ovoj glavi definisaćemo graničnu vrednost funkcije, dati njene osobine i uvesti pojam neprekidne funkcije. Činjenica da „lim" i „f" komutiraju je najsuptilnije svojstvo koje se koristi kod neprekidnih funkcija.

9.1 Definicija

Često je potrebno znati vrednost funkcije f kada se x približava nekoj tački x_0 pri čemu u toj tački funkcija ne mora biti definisana. Definišimo prvo tačku nagomilavanja skupa.

Definicija 9.1.1 *Tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sadrži bar jedan element iz skupa A različit od x_0. Tačka x_0 ne mora pripadati skupu A.*

Primer 9.1.2 Navedimo sada primere za tačke nagomilavanja nekih skupova.

- Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ nema tačku nagomilavanja jer se u intervalu $(n - 0.5, n + 0.5)$ ne nalazi ni jedan prirodni broj različit od n dok $n \in \mathbb{N}$. Slično važi i za skup celih brojeva.

- Svaka tačka skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ je i tačka nagomilavanja skupa jer se u svakoj okolini $\left(\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon\right)$ nalazi bar još jedan racionalan broj. Do tog broja može se doći na sledeći način. Ako je $\varepsilon \geq 1$, tada racionalan broj $\frac{p}{q} + \frac{1}{2} \in \left(\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon\right)$. Ako je $0 < \varepsilon < 1$, tada sigurno postoji $n \in \mathbb{N}$ za koje važi $10^{-n} < \varepsilon$. Tada racionalan broj $\frac{p}{q} + \frac{1}{2 \cdot 10^n} \in \left(\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon\right)$.

- Svaka tačka skupa realnih brojeva je i tačka nagomilavanja toga skupa jer se u svakoj okolini realnog broja a nalazi beskonačno mnogo realnih brojeva različitih od a.

- Skup $\left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ ima jednu tačku nagomilavanja, nulu, i ona ne pripada datom skupu.

■

Sada sledi definicija granične vrednosti funkcije u tački x_0.

Definicija 9.1.3 *Neka funkcija f preslikava svoj domen D u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, odnosno $f : D \to \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa D. Broj L je granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall\, x \in D)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

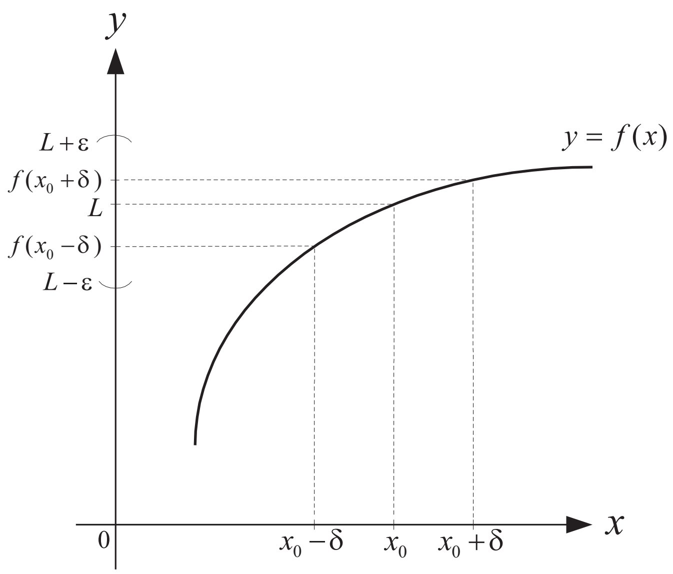
Podsetimo se $0 < |x - x_0|$ znači da je $x \neq x_0$ i

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

pa je $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Dalje,

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\,.$$

Dakle, drugim rečima, iz definicije 9.1.3 sledi da će broj L biti granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako za proizvoljni interval oko L uvek možemo izabrati interval oko x_0 tako da se ceo interval oko x_0 (bez tačke x_0) preslikava u interval oko L (slika 9.1).



Slika 9.1: Broj L je granična vrednost funkcije f kada x teži x_0.

Primer 9.1.4 Po definiciji dokazati da je

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\,.$$

Rešenje. Kako $x \to 1$ koristićemo da je $0<|x-1|<\delta$, odnosno $1-\delta<x<1+\delta$ i $x\neq 1$. Zadatak je da se odredi δ koje zavisi od unapred zadatog ε tako da važi

$$\big|(x^2+x+1)-3\big|<\varepsilon\,.$$

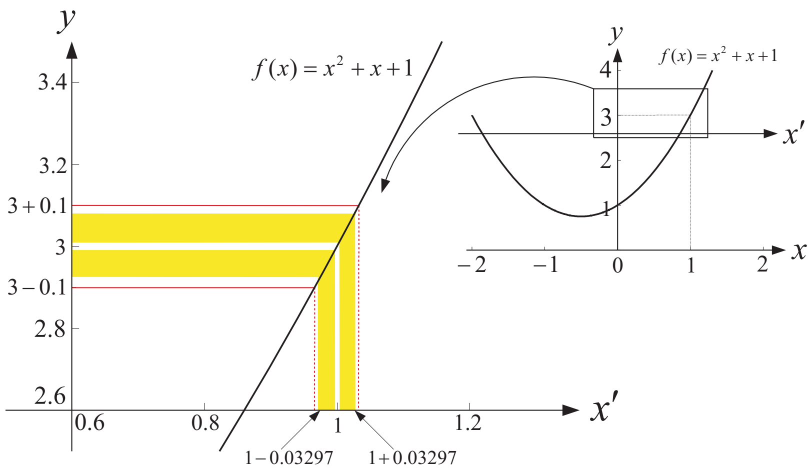
Naime,

$$\begin{aligned}\big|(x^2+x+1)-3\big| &= \big|x^2+x-2\big| \\ &= |(x-1)(x+2)| \\ &= |x-1||x+2| \\ &< \delta(\delta+3)\,.\end{aligned}$$

Ako sada stavimo da je $\delta(\delta+3)=\varepsilon$, tada rešavajući kvadratnu jednačinu $\delta^2+3\delta-\varepsilon=0$ po $\delta>0$, dobijamo da je

$$\delta=\frac{-3+\sqrt{9+4\varepsilon}}{2}$$

čime je dokazana tvrdnja. Na primer, za $\varepsilon=0.1$, $\delta=0.03297$ (slika 9.2), dok je za $\varepsilon=0.01$, $\delta=0.00333$.



Slika 9.2: Primena definicije 9.1.3 za određivanje granične vrednosti funkcije $f(x)=x^2+x+1$ kada x teži 1 za $\varepsilon=0.1$ i $\delta=\frac{-3+\sqrt{9+4\varepsilon}}{2}=0.03297$.

■

Definišimo sada levu i desnu graničnu vrednost u tački x_0 potrebnu za ispitivanje neprekidnosti funkcije u tački, za traženje izvoda u tački, itd.

Definicija 9.1.5 *Neka funkcija f preslikava svoj domen D u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, odnosno $f : D \to \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa D. Broj L_1 je leva granična vrednost funkcije f u tački x_0 (slika 9.3 a)) ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall x \in D)(x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

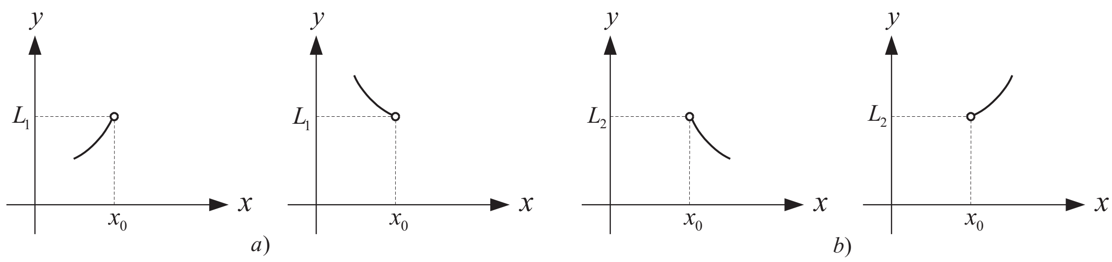
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1 .$$

Slično, broj L_2 je desna granična vrednost funkcije f u tački x_0 (slika 9.3 b)) ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall x \in D)(x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2 .$$



Slika 9.3: Leva i desna granična vrednost funkcije u tački x_0 u smislu definicije 9.1.5.

Ako postoje, leva i desna granična vrednost ne moraju biti jednake. U slučaju da su jednake ($L_1 = L_2$), tada kažemo da funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0 i važi

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L .$$

Definišimo sada graničnu vrednost funkcije u $+\infty$ i $-\infty$ jer ćemo ih koristiti kod ispitivanja horizontalnih asimptota.

Definicija 9.1.6 *Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i neka $(a, +\infty) \subseteq D$ za neko $a \in \mathbb{R}$. Broj L je granična vrednost funkcije f u $+\infty$ ako (slika 9.4 a))*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall x \in (a, +\infty))(x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

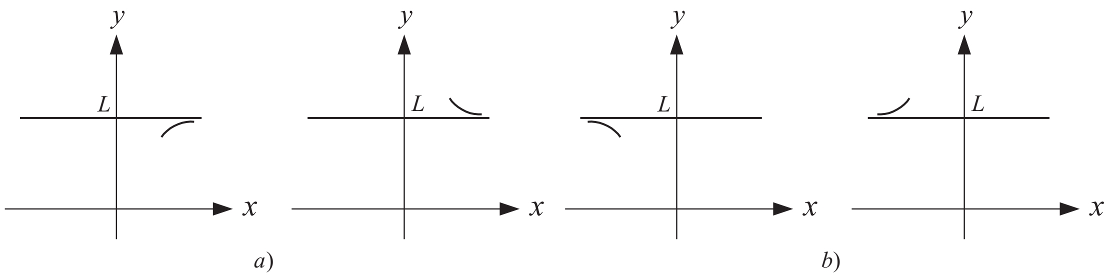
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L .$$

Slično, ako je $(-\infty, a) \subseteq D$, tada je broj L je granična vrednost funkcije f u $-\infty$ ako (slika 9.4 b))

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall x \in (-\infty, a))(x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L .$$



Slika 9.4: Granična vrednost funkcije kada $x \to \pm\infty$.

Za funkciju koja ima graničnu vrednost L u tački x_0 kažemo da konvergira ka L kada x teži x_0, a suprotnom, divergira. Naime,

Definicija 9.1.7 *Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i neka $(x_0, b) \subseteq D$ za neko $b > x_0$. Funkcija f teži ka $+\infty$ ako (slika 9.5 a))*

$$(\forall\, M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall\, x \in (x_0, b))(x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > M)$$

i pišemo

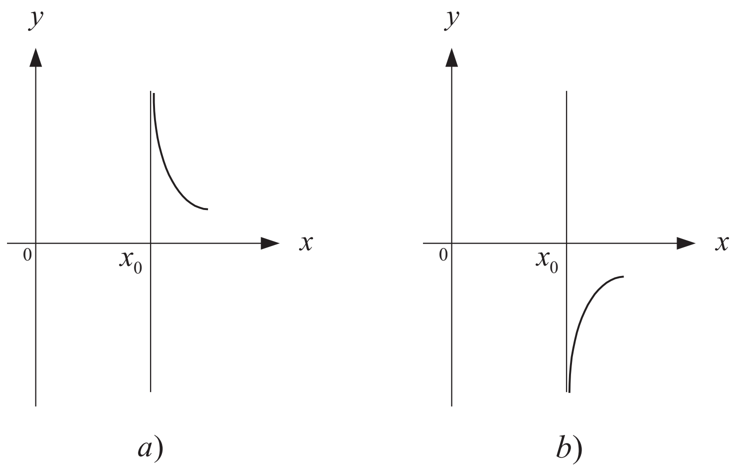
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty\,.$$

Slično, f teži ka $-\infty$ ako (slika 9.5 b))

$$(\forall\, M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall\, x \in (x_0, b))(x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < -M)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty\,.$$



Slika 9.5: Funkcija teži ka $+\infty$ (a)) i ka $-\infty$ (b)) kada x teži x_0 sa desne strane.

Definicija 9.1.8 *Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i neka $(a, x_0) \subseteq D$ za neko $a < x_0$. Funkcija f teži ka $+\infty$ ako (slika 9.6 a))*

$$(\forall\, M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall\, x \in (a, x_0))(x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) > M)$$

i pišemo

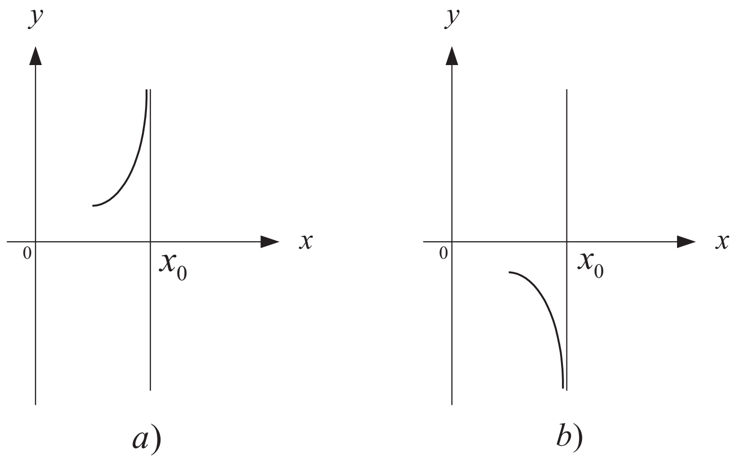
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty\,.$$

Slično, f teži ka $-\infty$ ako (slika 9.6 b))

$$(\forall\, M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall\, x \in (a, x_0))(x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < -M)$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty\,.$$



Slika 9.6: Funkcija teži u $+\infty$ (a)) i u $-\infty$ (b)) kada x teži x_0 sa leve strane.

Definicije 9.1.7 i 9.1.8 koristimo pri ispitivanju vertikalnih asimptota funkcije o kojima će kasnije biti reči (poglavlje 9.3). Postoji 7 neodređenih izraza koje moramo, na odgovarajući način, transformisati da bismo odrednili njihovu graničnu vrednost. To su

$$\frac{\infty}{\infty},\ \ \frac{0}{0},\ \ \infty \cdot 0,\ \ \infty - \infty,\ \ 0^0,\ \ \infty^0,\ \ 1^\infty.$$

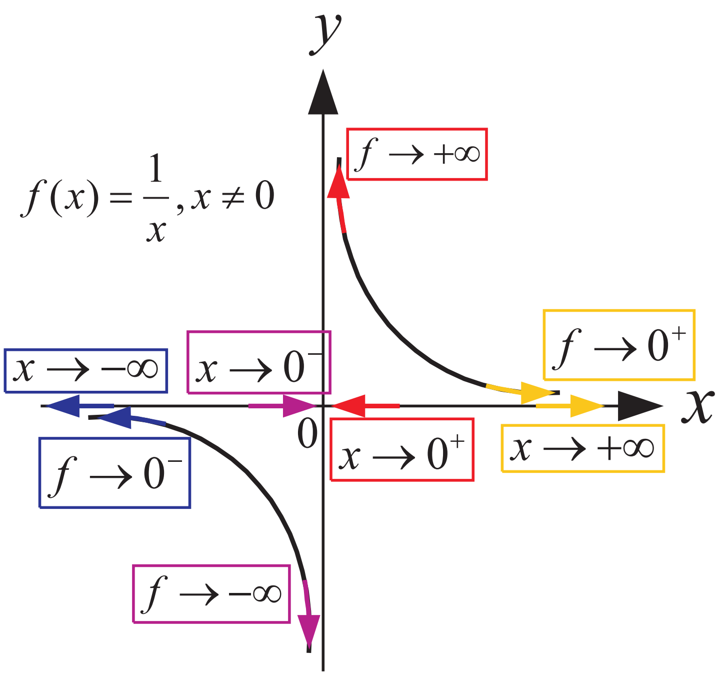
9.2 Neke važne granične vrednosti i njene osobine

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ nad njenim domenom $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (slika 9.7). Zaključujemo sledeće

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+\,,\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-\,,\quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\,,\quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,,$$

što se može uopštiti kao

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x^\alpha} = 0,\ \ a \in \mathbb{R}\,,\ \ \alpha > 0 \tag{9.1}$$



Slika 9.7: Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ i njeno ponašanje kada $x \to \pm\infty$ i $x \to 0^{\pm}$.

i

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{a}{x - x_0} = \mp\infty, \quad a \in \mathbb{R}^-, \quad \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{a}{x - x_0} = \pm\infty, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

Jasno je i da važi

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty, \ \alpha > 0. \tag{9.2}$$

Navedimo i ostale poznate granične vrednosti:

- $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & , \ m < n, \\ \frac{a_m}{b_n} & , \ m = n, \\ +\infty \text{ ili } -\infty & , \ m > n, \end{cases}$

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$ • $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$ • $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$

- $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$ • $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e},$ • $\displaystyle \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}.$

Navedimo sada osobine graničnih vrednosti. Neka f, g i h preslikavaju svoj domen D u skup realnih brojeva i neka je x_0 tačka nagomilavanja domena. Pretpostavimo da postoje sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ i } \lim_{x \to x_0} g(x) = K.$$

Tada važi:

(o1) $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c\cdot L$, $c\in\mathbb{R}$,

(o2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L\pm K$,

(o3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L\cdot K$,

(o4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{K}$, $K\neq 0$,

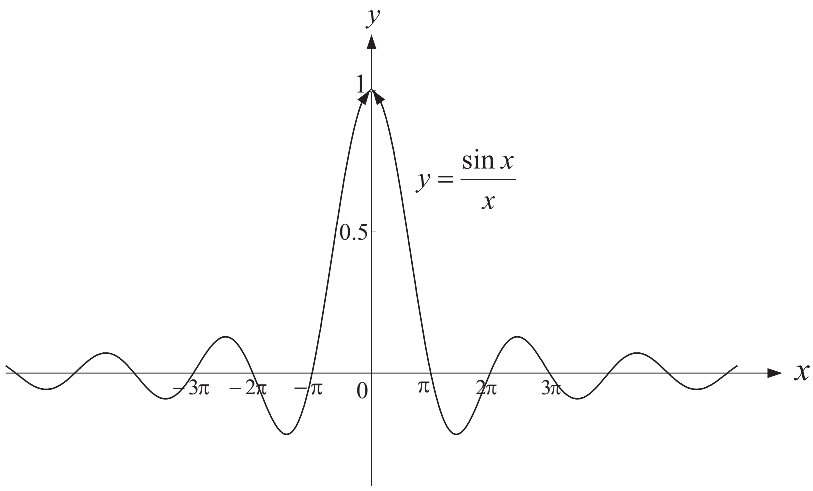
(o5) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = L^K$,

(o6) ako za svako $x\in D\setminus\{x_0\}$ važi $f(x)\le g(x)$, tada je i $L\le K$,

(o7) ako je $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ i ako za svako $x\in D\setminus\{x_0\}$ važi $f(x)\le h(x)\le g(x)$, tada je i $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$.

Analogno važi i kada je $x_0=\pm\infty$.

Dokažimo sada, geometrijski, da funkcija $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ (slika 9.8) teži jedinici kada x teži nuli.

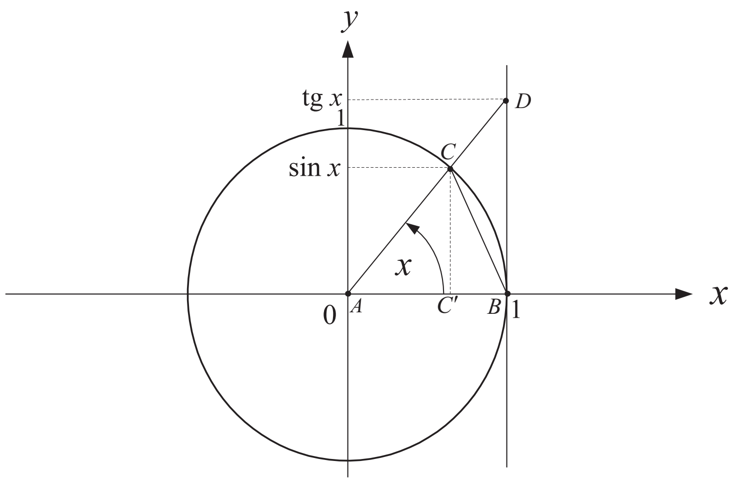


Slika 9.8: Funkcija $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ i njeno ponašanje kada $x\to 0$.

Primetimo prvo da je posmatrana funkcija parna jer važi

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)\,,$$

što implicira da je funkcija simetrična u odnosu na y-osu i da je dovoljno posmatrati slučaj kada $x\to 0^+$. Pretpostavićemo da $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ i iskoristiti to kasnije u dokazu. Sa slike (9.9) sledi da je površina trougla $\triangle ABC$ (označimo je sa $P_{\triangle ABC}$) manja od površine kružnog isečka ABC (P_{kiABC}), a ona manja od površine trougla $\triangle ABD$ ($P_{\triangle ABD}$).



Slika 9.9: Trigonometrijski krug za ugao x.

Izračunajmo sada te površine imajući u vidu da je (pogledati poglavlje 7.2.5)

$$|CC'| = \sin x\,, \quad |BD| = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad |AB| = |AC| = 1\,.$$

Dakle,

$$P_{\triangle ABC} = \frac{|AB||CC'|}{2} = \frac{1 \cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}\,,$$
$$P_{kiABC} = |AC|^2\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = 1 \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

i

$$P_{\triangle ABD} = \frac{|AB||BD|}{2} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x}\,.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} < P_{kiABC} < P_{\triangle ABD} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2\cos x} \Big/ \cdot \frac{2}{\sin x} \\ &\Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ &\Rightarrow \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x\,. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je, na osnovu pretpostavke za x, $\sin x > 0$ i $\cos x > 0$. Ako pustimo sada da $x \to 0^+$ imaćemo

$$\lim_{x\to 0+} 1 \geq \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0+} \cos x \Rightarrow 1 \geq \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \geq \cos 0 \Rightarrow 1 \geq \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \geq 1\,,$$

pa je jasno da mora, na osnovu osobine (o7), važiti i

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

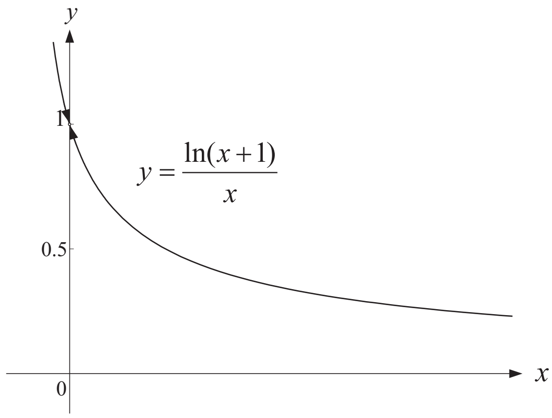
Zbog parnosti funkcije $f(x) = \sin x/x$ važiće i

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

što nas dovodi do

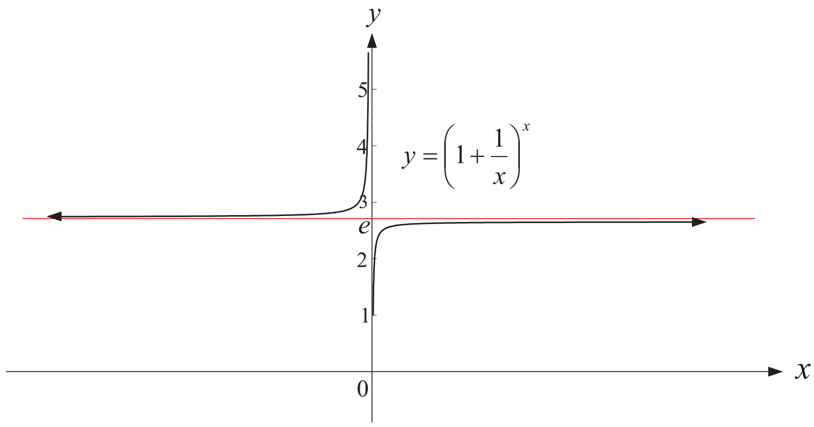
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Na slici 9.10 prikazana je funkcija $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ kada $x \to 0^-$ i $x \to 0^+$.



Slika 9.10: Funkcija $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ i njeno ponašanje kada $x \to 0$.

Dokaz da je $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ biće dat u primeru 10.3.2 (poglavlje 10.3). Na slici 9.11 prikazana je funkcija $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ i njeno ponašanje kada $x \to \pm\infty$.



Slika 9.11: Funkcija $f(x) = (1+1/x)^x$ i njeno ponašanje kada $x \to \pm\infty$.

Primer 9.2.1 Koristeći važne granične vrednosti i osobine odrediti:

$(i)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x}{x^2+4}$ $\quad (ii)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+4}{x^3+x-3}$ $\quad (iii)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x+2}{2x^2-5}$

$(iv)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$ $\quad (v)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+x)-\ln 2}{x^2-1}$ $\quad (vi)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

$(vii)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2x}\right)^x$ $\quad (viii)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^x$ $\quad (ix)\ \lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}$

$(x)\ \lim\limits_{x\to2}\left(1-(x^3-8)\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$

Rešenje.

(i) Koristeći osobine (o4) i (o2) i formulu (9.1) imaćemo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2+4} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}\\ &= \frac{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}}=\frac{2-0}{1+0}=2\,.\end{aligned}$$

(ii) Korišćenjem osobina (o4) i (o2) i formulu (9.1) dobijamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+4}{x^3+x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(x^2+1-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{4}{x}}{x^2+1-\frac{3}{x}}=0\,.$$

(iii) Koristeći osobine (o4) i (o2) i formulu (9.1) imaćemo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x+2}{2x^2-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}}=-\infty\,.$$

(iv) Koristićemo da je $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ i osobinu (o1):

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4}=\frac{3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{4x}}=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 1}=\frac{3}{4}\,.$$

(v) Koristićemo $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ i osobine logaritamske funkcije.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+x)-\ln 2}{x^2-1} &= \lim_{x-1\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln 2}{(x-1)(x+1)} = \{t = x-1 \Rightarrow x = t+1\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+(t+1))-\ln 2}{t((t+1)+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(2+t)-\ln 2}{t(t+2)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\ln \frac{2+t}{2}}{t(t+2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t(t+2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}\cdot 2\cdot (t+2)} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2\cdot (t+2)} \right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\cdot (t+2)} = 1\cdot \frac{1}{2\cdot (0+2)} = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

(vi) Koristićemo da je $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ i osobinu (o1):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{2\,x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(2\,e^{-x} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2\,x} \right) = 2\,e^0 \cdot 1 = 2\cdot 1\cdot 1 = 2\,.
\end{aligned}$$

(vii) Datu graničnu vrednost ćemo svesti na $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, a koristićemo osobine (o2), (o4) i (o5) i formulu (9.1).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-2x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x^2+3}{x^2-2x}-1\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x^2+3-x^2+2x}{x^2-2x}\right)^x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2x+3}{x^2-2x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}\cdot\frac{2x+3}{x^2-2x}\cdot x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}} \right)^{\frac{2x^2+3x}{x^2-2x}} \\
&= \left(\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}} \right)^{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2-2x}} = e^2\,,
\end{aligned}$$

jer je u eksponentu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=2\,.$$

$(viii)$ Datu graničnu vrednost ćemo svesti na $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$ uz korišćenje osobine (o5).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3=\frac{1}{e^3}\,.$$

(ix) Koristićemo da je $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ i $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ kao i osobine (o1) i (o5).

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{2\cdot\frac{\sin x}{x}}=e^{2\cdot 1}=e^2\,.$$

(x) Koristićemo da je $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}$ i osobinu (o5).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(1-(x^3-8)\right)^{\frac{1}{x^2-4}} &= \lim_{x-2\to 0}\left(1-(x-2)(x^2+2x+4)\right)^{\frac{1}{(x-2)(x+2)}}\\
&= \{t=x-2\Rightarrow x=t+2\}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(1-t((t+2)^2+2(t+2)+4)\right)^{\frac{1}{t((t+2)+2)}}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(1-t(t^2+6t+12)\right)^{\frac{1}{t(t+4)}}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(1-t(t^2+6t+12)\right)^{\frac{1}{t(t^2+6t+12)}\cdot\frac{t^2+6t+12}{t+4}}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\left(1-t(t^2+6t+12)\right)^{\frac{1}{t(t^2+6t+12)}}\right)^{\frac{t^2+6t+12}{t+4}}\\
&= \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{0^2+6\cdot 0+12}{0+4}}=\frac{1}{e^3}\,.
\end{aligned}$$

■

9.3 Asimptote grafika funkcije

Grafik funkcije može imati horizontalnu, vertikalnu i kosu asimptotu.

Definicija 9.3.1 *Grafik funkcije f ima horizontalnu asimptotu $y=n$ ako važi bar jedan od sledeća dva uslova (slika 9.4, $n=L$):*

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=n,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=n.$$

Definicija 9.3.2 *Grafik funkcije f ima vertikalnu asimptotu $x = x_0$ u tački x_0 ako važi bar jedan od sledeća četiri uslova:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \ (slika\ 9.6\ b)), \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \ (slika\ 9.6\ a)),$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \ (slika\ 9.5\ b)), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \ (slika\ 9.5\ a)).$$

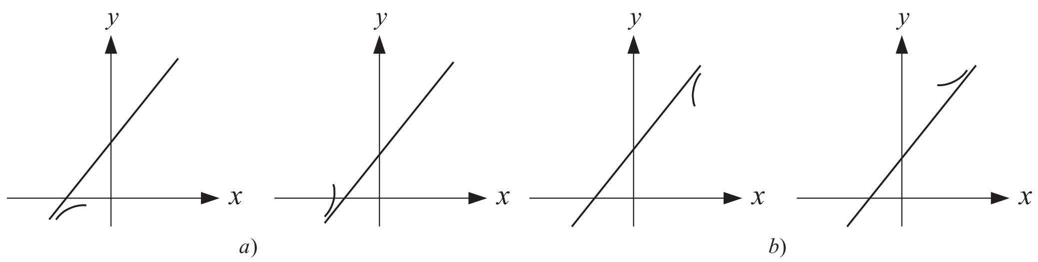
Vertikalne asimptote se traže u rubnim tačkama domena funkcije ili u tačkama prekida. Ako su u pitanju intervali (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ i $[a, b]$, rubne tačke su a i b. Ako su pitanju intervali $(-\infty, b)$ i $(-\infty, b]$, rubna tačka je b. Analogno, za intervale $(a, +\infty)$ i $[a, +\infty)$, rubna tačka je a.

Definicija 9.3.3 *Grafik funkcije f ima kosu asimptotu $y = kx + n$, ako se brojevi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{R}$ mogu odrediti na sledeći način:*

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \ n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k\,x) \ \ (slika\ 9.12\ a))$$

ili

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \ n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k\,x) \ \ (slika\ 9.12\ b)).$$



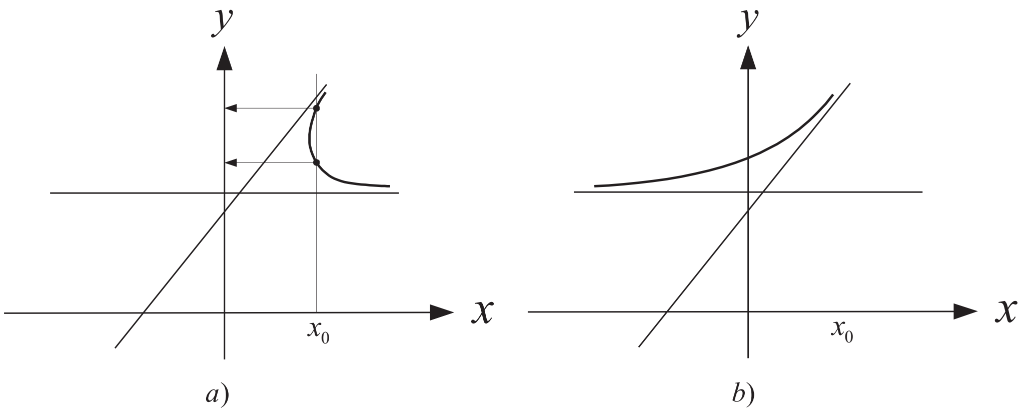
Slika 9.12: Kosa asimptota grafika funkcije.

Dakle, asimptote funkcije opisuju ponašanje funkcije u okolini neke tačke ili u $\pm\infty$.

Napomena 9.3.4 *Ako se traže asimptote racionalne funkcije $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, gde je $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_m \neq 0$ i $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $b_n \neq 0$. Tada*

- *ako je $m \leq n$, onda postoji horizontalna asimptota kada $x \to \pm\infty$ i to $y = 0$ ako je $m < n$ i $y = a_m/b_n$ ako je $m = n$,*
- *ako je $m = n + 1$, onda postoji kosa asimptota kada $x \to \pm\infty$,*
- *ako je $m > n + 1$, onda ne postoje ni horizontalna ni kosa asimptota,*
- *ako postoji x_0 za koje je $Q_n(x_0) = 0$, onda treba tražiti vertikalnu asimptotu u $x = x_0$.*

Napomena 9.3.5 *Ako grafik funkcije ima horizontalnu asimptotu kada $x \to +\infty$ (ili $x \to -\infty$), tada nema kosu asimptotu kada $x \to +\infty$ (ili $x \to -\infty$) i obrnuto. U suprotnom, za jedno x_0 imali bismo dva različita $f(x_0)$ pa f ne bi bila funkcija (slika 9.13 a)). Ipak, funkcija može imati kosu asimptotu kada, recimo, $x \to +\infty$, a horizontalnu kada $x \to -\infty$ (slika 9.13 b)) i obrnuto.*



Slika 9.13: a) Funkcija ne može imati i kosu i horizontalnu kada $x \to +\infty$ (ili $x \to -\infty$). b) Funkcija može imati istovremeno i horizontalnu asimptotu kada $x \to -\infty$ ($x \to +\infty$) i kosu asimptotu kada $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Primer 9.3.6 Odrediti asimptote sledećih funkcija:

$$(i)\, f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 + 1}, \quad (ii)\, f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}, \quad (iii)\, f(x) = \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + 4}.$$

Rešenje.

(i) Odredimo prvo domen za datu funkciju: $x^3 + 1 \neq 0 \Rightarrow x^3 \neq -1 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Potražimo sada vertikalnu asimptotu u tački $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = -\infty$$

jer je brojilac jednak $(-1)^2 - (-1) = 2$, a za imenilac važi

$$x \to -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x^3 < (-1)^3 = -1 \Rightarrow x^3 + 1 < 0,$$

pa je količnik $\frac{x^2-x}{x^3+1}$ negativan što znači da ta granična vrednost mora režiti ka $-\infty$. Dalje,

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = +\infty$$

jer za imenilac važi

$$x \to -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow x^3 + 1 > 0,$$

pa je količnik $\frac{x^2-x}{x^3+1}$ pozitivan, a tada sledi da granična vrednost mora režiti ka $+\infty$. Zaključujemo da je prava $x = -1$ vertikalna asimptota grafika funkcije. Na osnovu napomene 9.3.4, potražimo još i horizontalnu asimptotu. Imamo da je

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = 0\,,$$

što znači da je prava $y = 0$ horizontalna asimptota kada $x \to \pm\infty$.

(ii) Vidimo da iz $x^2-1\neq 0$ sledi $x\neq\pm 1$, pa je domen $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Odredimo odmah vertikalne asimptote:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3+x}{x^2-1}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3+x}{x^2-1}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+x}{x^2-1}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+x}{x^2-1}=+\infty\,.$$

te su prave $x=-1$ i $x=1$ vertikalne asimptote. Sada tražimo kosu asimptotu $y=kx+n$, $k\neq 0$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3+x}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x}{x^3-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1\,.$$

Potražimo sada i n. Naime,

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\,x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0\,,$$

što znači da je $y=x$ kosa asimptota kada $x\to\pm\infty$.

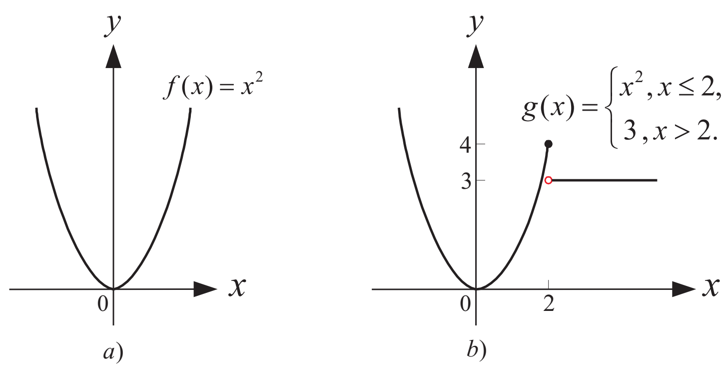
(iii) Kako je $3x^2+4>0$ za svaki realan broj x, to znači da posmatrana neprekidna funkcija nad svojim domenom nema vertikalnu asimptotu. Na osnovu napomene 9.3.4, potražimo horizontalnu asimptotu.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{4}{x^2}}=\frac{2}{3}\,.$$

Dakle, jedina asimptota je prava $y=\frac{2}{3}$ kada $x\to\pm\infty$. ■

9.4 Neprekidnost funkcije

Posmatrajmo funkcije $f(x)=x^2$ (slika 9.14 a)) i $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 2,\\ 3, & x>2,\end{cases}$ (slika 9.14 b)) kao i njihove vrednosti u okolini tačke $x=2$.



Slika 9.14: Neprekidna funkcija f i prekidna funkcija g u tački $x=2$.

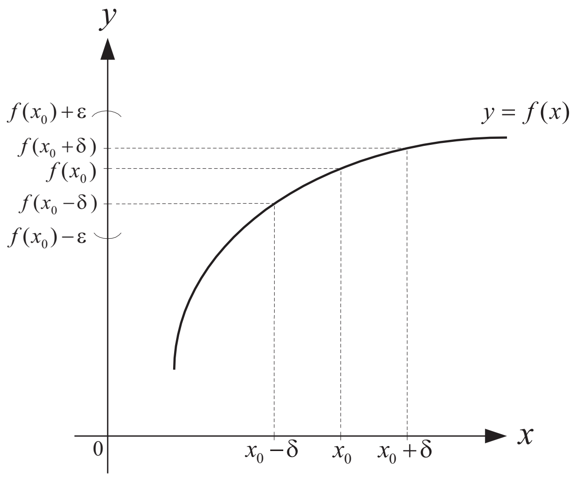
Jasno je da je $f(2) = g(2) = 4$. Tada je

	$f(x)$	$g(x)$	$\|x-2\|$	$\|f(x)-f(2)\|$	$\|g(x)-g(2)\|$
$x = 2.1$	4.41	3	0.1	0.41	1
$x = 2.01$	4.0401	3	0.01	0.0401	1
$x = 2.001$	4.004001	3	0.001	0.004001	1
$x = 2.0001$	4.00040001	3	0.0001	0.00040001	1

pa se zaključuje da „maloj" promeni promenljive x odgovara „mala" promena funkcije $f(x)$ dok za funkciju $g(x)$ to ne važi jer je $|g(x) - g(2)| = 1$ za svako $x > 2$. Intuitivno, f je neprekidna, a g prekidna u tački $x = 2$.

Definicija 9.4.1 *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna u tački $x_0 \in D$ ako (slika 9.15)*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall x \in D)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) . \qquad (9.3)$$



Slika 9.15: Neprekidna funkcija f u tački x_0.

Funkcija je neprekidna nad nekim skupom ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je prekidna u tački $x_0 \in D$ ako nije neprekidna u toj tački.

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b] \subseteq D$ ako je neprekidna na otvorenom intervalu (a, b) i ako važi

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Primer 9.4.2 Daćemo primere neprekidnih i prekidnih funkcija.

- Funkcija $s(x) = x$ je neprekidna nad celim skupom $\mathbb{R}$. Naime, uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ za koje važi $|x - x_0| < \delta$. Tada je

  $$|s(x) - s(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon .$$

  Dakle, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, ako je $\delta = \varepsilon$, funkcija $s(x) = x$ je neprekidna nad celim skupom $\mathbb{R}$.

- Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna nad celim skupom $\mathbb{R}$ što se dokazuje na sledeći način. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ za koje važi $|x - x_0| < \delta$. Tada je

  $$|f(x)-f(x_0)| = |x^2-x_0^2| = |x-x_0||x+x_0| < \delta|x+x_0| = \delta|x-x_0+2x_0| \leq \delta(|x-x_0|+2|x_0|)\,.$$

  Sada je jasno da je $\delta(|x - x_0| + 2|x_0|) < \delta(\delta + 2|x_0|)$, pa neka je $\delta(\delta + 2|x_0|) = \varepsilon$. Tada je

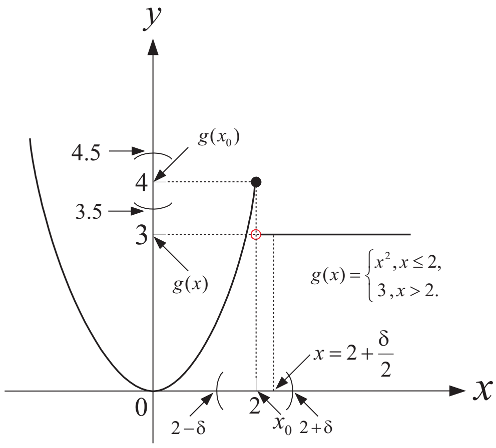
  $$\delta^2 + 2|x_0|\delta - \varepsilon = 0 \Rightarrow \delta = -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}\,. \tag{9.4}$$

  Dakle, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, ako δ izaberemo kao u (9.4), uvek će važiti (9.3), što znači da je $f(x) = x^2$ neprekidna nad celim skupom $\mathbb{R}$.

- Ispitajmo sada neprekidnost funkcije $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ 3, & x > 2, \end{cases}$ u tački $x_0 = 2$. Lako se pokazuje da je neprekidna za $x \neq 2$. Pokazaćemo da funkcija $g(x)$ ima prekid u $x_0 = 2$ tako što ćemo negirati (9.3). Naime, treba pokazati sledeće

  $$(\exists \varepsilon > 0)(\forall\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\exists x \in D)(|x - x_0| < \delta \wedge |g(x) - g(x_0)| \geq \varepsilon)\,.$$

  Za $\varepsilon = 1/2$ i $x = 2 + \delta/2$ važi $|x - x_0| = |2 + \delta/2 - 2| < \delta$ i $|g(x) - g(x_0)| = |g(2 + \delta/2) - g(2)| = |3 - 4| = 1 > 1/2$. Dakle, $g(x)$ ima prekid u $x_0 = 2$ (slika 9.16).



Slika 9.16: Funkcija $g(x)$ ima prekid u tački $x_0 = 2$.

■

A ako $f : D \to \mathbb{R}$ i ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa D, tada je f neprekidna u $x = x_0$ ako i samo ako važi

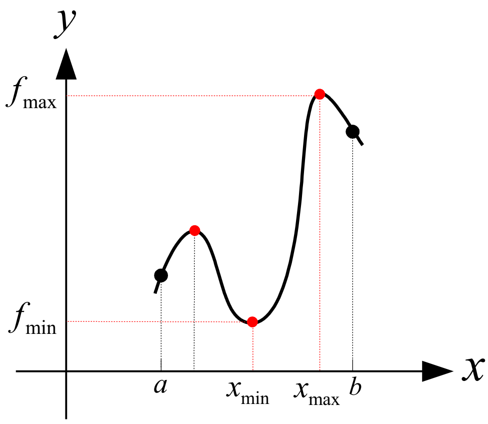
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{9.5}$$

što sledi direktno iz definicije granične vrednosti 9.1.3 za $L = f(x_0)$. Važi i:

- ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne u tački $x = x_0$ tada su u tački $x = x_0$ neprekidne i funkcije $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, $g(x_0) \neq 0$, kao i kompozicija funkcija $(f \circ g)(x) = f(g(x))$,
- elementarne funkcije su neprekidne nad svojim domenom.

Često se koriste sledeća dva tvrđenja.

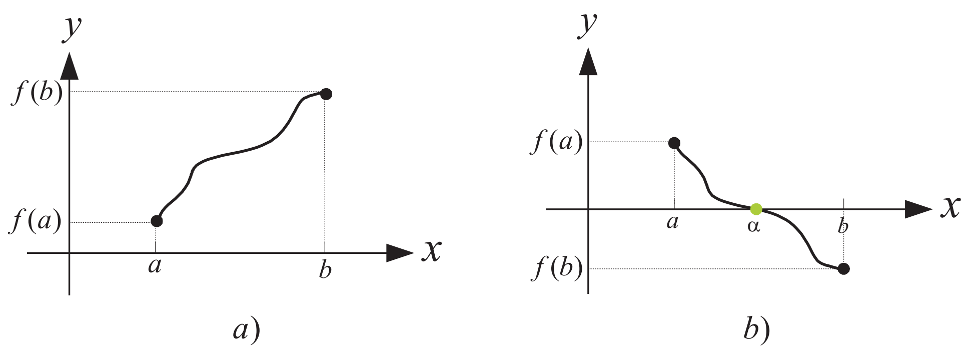
Tvrđenje 9.4.3 *Neka je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Neprekidna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ na zatvorenom intervalu $[a, b] \subseteq D$ dostiže svoj minimum i maksimum (slika 9.17).*



Slika 9.17: Ilustracija tvrđenja 9.4.3.

To znači da postoje tačke $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ u kojima funkcija $f(x)$, $x \in [a, b]$, dostiže svoj minimum $f_{\min} = f(x_{\min})$ i maksimum $f_{\max} = f(x_{\max})$. Takođe, kod diferencijalnog računa, pri dokazu Rolove teoreme koristi se tvrđenje 9.4.3.

Tvrđenje 9.4.4 *Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ i $f(a) \neq f(b)$, tada funkcija $f(x)$ uzima sve vrednosti na intervalu $[a, b]$ (slika 9.18).*



Slika 9.18: Ilustracija tvrđenja 9.4.4.

Dakle, ako je $f(a) < c < f(b)$ ili $f(b) < c < f(a)$, tada postoji $\alpha \in (a, b)$ tako da je $f(\alpha) = c$. Ako je još $f(a)\,f(b) < 0$, tvrđenje 9.4.4 nam govori u postojanju bar jedne tačke $\alpha \in (a, b)$ za koju važi da je $f(\alpha) = 0$ (slika 9.18 *b*)). Ovo tvrđenje ćemo koristiti i kod integralnog računa, a koristi se i pri približnom rešavanju jednačina $f(x) = 0$ kod metode polovljenja koja će ukratko biti objašnjena uz jedan primer.

Metoda polovljenja

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad svojim domenom i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ako je $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, tada je nađena nula funkcije. Ako nije, posmatraćemo intervale $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ i $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. Ako je $f(a) \cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, tada ćemo interval $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ obeležiti kao $[a_1, b_1]$. U suprotnom $[a_1, b_1] = \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. Primetimo da je dužina intervala $[a_1, b_1]$ jednaka polovini dužine intervala $[a, b]$, pa je $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$. Sada izračunamo $\dfrac{a_1+b_1}{2}$. Ako je $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, to je tražena nula funkcije. U suprotnom, formiramo intervale $\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$ i $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Ako je $f(a_1) \cdot f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, tada je $[a_2, b_2] = \left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$, a ako nije, $[a_2, b_2] = \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Opet je dužina intervala $[a_2, b_2]$ jednaka polovini dužine intervala $[a_1, b_1]$, pa je $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b-a}{2^2}$. Ako nastavimo ovaj algoritam, važiće $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ i $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Ako pustimo da n teži plus beskonačnosti, tada će važiti

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0\,. \tag{9.6}$$

Jasno je da je $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots$ i $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \dots$, pa je niz $(a_n)_{n\in mN}$ monotono neopadajući, a niz $(b_n)_{n\in mN}$ monotono nerastući, a oba niza su ograničena. Dakle, konvergiraju, a zbog (9.6) važiće i

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to+\infty} b_n\,. \tag{9.7}$$

Pokazaćemo da je $f(\xi) = 0$. Naime, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, a to dalje znači da je

$$\lim_{n\to+\infty}(f(a_n) \cdot f(b_n)) \le 0 \Rightarrow (f(\xi) \cdot f(\xi)) \le 0 \Rightarrow (f(\xi))^2 \le 0 \Rightarrow f(\xi) = 0\,.$$

U prvom koraku, važiće $|\xi - a_1| < b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$. U drugom, $|\xi - a_2| < b_2 - a_2 = \dfrac{b-a}{2^2}$, itd. Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$, $|\xi - a_n| < \dfrac{b-a}{2^n}$, što nam pomaže da za neko $\varepsilon > 0$, odredimo $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je, recimo,

$$|\xi - a_n| < \varepsilon\,, \ \ n \ge n_0.$$

Primer 9.4.5 Odrediti nulu funkcije $f(x) = x^2 - 2$ na intervalu $[1, 2]$ korišćenjem metode polovljenja, ako je $\varepsilon = 0.01$.

Rešenje. Neka je $a_0 = a = 1$ i $b_0 = b = 2$. Odredićemo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \ge n_0$ važi

$$\frac{b-a}{2^n} \le \frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2^{n_0}}{b-a} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 2^{n_0} > \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 > \frac{\ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}\,.$$

Tada je

$$n_0 > \frac{\ln\frac{2-1}{0.01}}{\ln 2} = \frac{\ln 100}{\ln 2} = 6.64 \Rightarrow n_0 = 7\,.$$

n	a_n	$(a_n+b_n)/2$	b_n	$\lvert\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{2}\rvert$	$f(a_n)$	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$	$f(b_n)$
0	1	1.5	2	0.08579	-1	0.25	2
1	1	1.25	1.5	0.16421	-1	-0.4375	0.25
2	1.25	1.375	1.5	0.03921	-0.4375	-0.10938	0.25
3	1.375	1.4375	1.5	0.02329	-0.10938	0.06641	0.25
4	1.375	1.40625	1.4375	0.00796	-0.10938	-0.02246	0.06641
5	1.40625	1.42188	1.4375	0.00766	-0.02246	0.02173	0.06641
6	1.40625	1.41406	1.42188	0.00015	-0.02246	-0.00043	0.02173
7	1.41406	1.41797	1.42188	0.00376	-0.00043	0.01064	0.02173

Dakle, približno rešenje je $x = 1.41797$. ■

Primer 9.4.6 Rešiti jednačinu $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{x}$ ako $x \in [\pi/4, \pi/3]$, za $\varepsilon = 0.0001$.

Rešenje. Napomenimo da se tražena jednačina ne može eksplicitno rešiti, pa se mora pokušati numeričkim aparatima doći do rešenja. Odredimo $f(x) = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{x}$. Sada je

$$n_0 > \frac{\ln \frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}{0.0001}}{\ln 2} = \frac{\frac{\pi}{12}\ \ln 10000}{\ln 2} = 11.35 \Rightarrow n_0 = 12\,.$$

i

n	a_n	$(a_n+b_n)/2$	b_n	$f(a_n)$	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$	$f(b_n)$
0	0.78540	0.91630	1.04720	-0.27324	0.21188	0.77712
1	0.78540	0.85085	0.91630	-0.27324	-0.03501	0.21188
2	0.85085	0.88357	0.91630	-0.03502	0.08674	0.21188
3	0.85085	0.86721	0.88357	-0.03502	0.02552	0.08674
4	0.85085	0.85903	0.86721	-0.03502	-0.00483	0.02552
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11	0.86031	0.86037	0.86044	-0.00010	0.00014	0.00038
12	0.86031	0.86034	0.86037	-0.00010	0.00002	0.00014

Dakle, približno rešenje je $x = 0.86031$. ■

9.4.1 Vrste prekida funkcije

Ako je funkcija prekidna, tada može imati tri vrste prekida: prividan (otklonjiv) prekid, prekid prve i prekid druge vrste.

Definicija 9.4.7 *Funkcija $f(x)$ ima:*

- *otklonjiv prekid ako postoji $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ i $L \neq f(x_0)$,*
- *prekid prve vrste ako postoje $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$ i $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$ i važi $L_1 \neq L_2$,*
- *prekid druge vrste ako nije ni otklonjiv ni prekid prve vrste.*

Primer 9.4.8 Sada će biti dati primeri za sve tri vrste prekida.

- Neka je
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-8}{x-2}, & x \neq 2, \\ 5, & x = 2. \end{cases}$$
Potražimo sada graničnu vrednost u tački $x = 2$.
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+4)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{1} = 6 \neq 5 = f(2).$$
Dakle, ova funkcija ima prividan (otklonjiv) prekid. Otklonio bi se tako što bi se za $x = 2$, vrednost funkcije predefinisala na $f(2) = 6$.

- Funkcija
$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ 3, & x > 2, \end{cases}$$
ima prekid prve vrste u tački $x = 2$ jer je
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \neq 3 = \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

- Funkcija
$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$
ima prekid druge vrste jer je $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Primetimo da ova funkcija, iako je definisana na celom skupu realnih brojeva, ima vertikalnu asimptotu $x = 0$.

■

9.5 Zadaci za vežbu

1. Neka je $y = x^2$. Kada $x \to 2$, tada $y \to 4$. Koliko mora biti δ da bi iz $|x-2| < \delta$ sledilo $|y-4| < \varepsilon = 0.001$? ($\delta < 0.00025$)

2. Neka je $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Kada $x \to 2$, tada $y \to \frac{3}{5}$. Koliko mora biti δ da bi iz $|x-2| < \delta$ sledilo $|y - \frac{3}{5}| < \varepsilon = 0.1$? ($\delta < 2 - \sqrt{3}$)

Odrediti sledeće granične vrednosti:

3. $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x+5}{2x^3-x^2+4}$. ($L = 3/2$)

4. $L = \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+3}}{5x+\sqrt[4]{x^4+x^2}}$. ($L = 1/2$)

5. $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4x^2+7}{x^3-3x+3}$. ($L = 0$)

6. $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^4+2x^2+x+1}{3x^3-3x^2+x-1}$. ($L=+\infty$)

7. $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$. ($L=2$)

8. $L = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+7x^2+11x+5}$. (ne postoji)

9. $L = \lim\limits_{x\to4} \dfrac{x^3-5x^2+4x}{x^2-2x-8}$. ($L=2$)

10. $L = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x^3-3x^2+2\sin x+8x^6}{3x^5+\sin^2 x+4x-7x^8}$. ($L=1/2$)

11. $L = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$. ($L=1$)

12. $L = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$. ($L=-\sqrt{2}/\sqrt{5}$)

13. $L = \lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$. ($L=4/3$)

14. $L = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt[3]{27}}{3-x}$. ($L=-1/3$)

15. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$. ($L=-1/2$)

16. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x}$. ($L=0$)

17. $L = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1}{x-3}$. ($L=+\infty$)

18. $L = \lim\limits_{x\to0^-} \left(\sqrt{(-x)^5}+\ln(1+x)\right)$. ($L=0$)

19. $L = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. ($L=1$)

20. $L = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$. ($L=0$)

Odrediti asimptote sledećih funkcija:

21. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

22. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

24. Dokazati da jednačina $x^3 - 6x + 3 = 0$ ima na intervalu $(1/2, 1)$ jedan realan koren x_1. Izračunati približno taj koren. ($x_1 \approx 0.52$)

25. Dokazati da jednačina $x^5 - 3x - 1 = 0$ ima na intervalu $(1, 2)$ bar jedan realan koren x_1. Izračunati približno taj koren. ($x_1 \approx 1.39$)

26. Odrediti parametar λ tako da funkcija $y =$ bude neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$. ($\lambda = 2$)

27. Odrediti vrste prekida funkcije $y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ x, & 1 < x \le 2, \\ 3, & 2 < x \le 3, \\ \frac{2x^2-18}{x^2-3x}, & x > 3. \end{cases}$

28. Pokazati da za $x \in [-2, 2]$ funkcija $y = \begin{cases} (x+1)e^{-2/x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$ uzima sve vrednosti između $f(-2)$ i $f(2)$ iako je prekidna (u kojoj tački?).

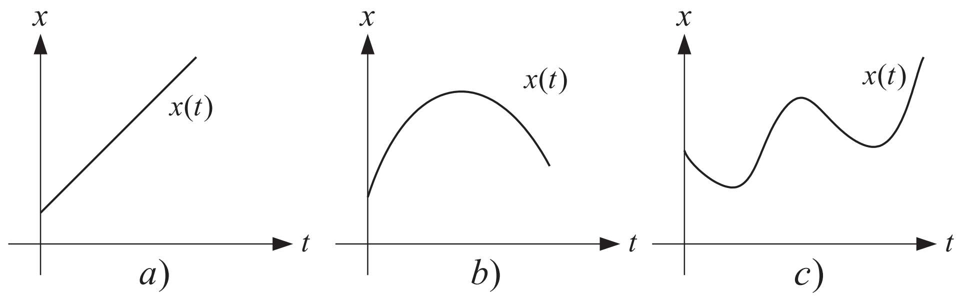
29. Data je funkcija $y = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ 1 + x, & x > 0. \end{cases}$ Kolika treba da je konstanta a da bi funkcija bila neprekidna za $x = 0$? Nacrtati grafik funkcije. ($a = 1$)

30. Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$ nije definisana za $x = 1$. Može li se odrediti $f(1)$ da bi funkcija za $x = 1$ bila neprekidna?

GLAVA 10

Izvod funkcije

Izvod funkcije je jedan od najvažnijih pojmova u matematici zbog veoma široke primene. Pojam izvoda nastao je iz problema tangente krive linije (proučavao ga je Lajbnic i problema brzine kretanja (proučavao ga je Njutn. Oba problema su proučavana nezavisno gotovo u istom vremenskom periodu. Ideja je da se tangenta linija shvati kao granična linija ka kojoj teži sečica krive, kada se jedna od presečnih tačaka na krivoj približava drugoj presečnoj tački. Osnovni problem na koji su prethodnici Lajbnica nailazili, kada su pokušavali da reše problem tangente, ležao je u radu sa beskrajno malim veličinama. Lajbnicu je pošlo za rukom da reši problem tangente uvodeći pojam izvoda, odnosno diferencijala. Njutn se bavio problemom brzine koji ga je doveo do pojma izvoda funkcije. Rešavao je problem pronalaženja brzine kretanja u datom vremenskom trenutku kada je pređeni put poznat kao funkcija vremena. Kao tipičan primer, Njutn je uzeo put pokretne tačke i došao do pojma izvoda, posmatrajući problem kretanja, što je odigralo značajnu ulogu u razvoju mehanike tokom XVII i XVIII veka. Na primer, tri različite vrste kretanja date su na slici 10.1.

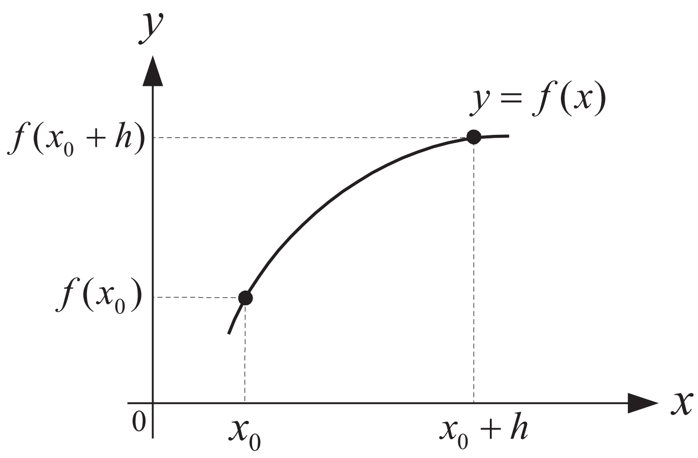


Slika 10.1: Tri različite vrste kretanja duž krive $x(t)$ koja je funkcija od vremena t: a) konstantna brzina (prvi izvod je konstantan), b) konstantno ubrzanje (drugi izvod je konstantan), c) promenljivi su i brzina i ubrzanje.

10.1 Definicija prvog izvoda funkcije

Posmatrajmo funkciju kao na slici 10.2. Srednja brzina kretanja od tačke $(x_0, f(x_0))$ do tačke $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h > 0$ je

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$



Slika 10.2: Tačka $(x_0, f(x_0))$ se kreće putanjom koju opisuje funkcija $f(x)$ do tačke $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h > 0$.

Ako pustimo da $h \to 0$ dobijamo trenutnu brzinu u tački x_0 koja je jednaka

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Tako dolazimo do pojma prvog izvoda funkcije u tački x_0.

Definicija 10.1.1 *Neka funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ i neka $x_0 \in (a,b)$. Prvi izvod funkcije f u tački x_0 je*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{10.1}$$

pod uslovom da navedena granična vrednost postoji.

Ako funkcija ima prvi izvod u tački $x = x_0$, tada se kaže da je *diferencijabilna* u toj tački. Funkcija je diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) ako je diferencijabilna u svakoj tački tog intervala. Funkcija je diferencijabilna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ ako je diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b) i ako postoji desni izvod u tački a, odnosno,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

i levi izvod u tački b, odnosno,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

Definisaćemo sada levi i desni izvod u proizvoljnoj tački $x = x_0$.

Definicija 10.1.2 *Levi izvod funkcije f u tački $x = x_0$ je*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Analogno, desni izvod funkcije f u tački $x = x_0$ je

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ako su levi i desni izvodi jednaki, odnosno ako je $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, tada kažemo da je to i prvi izvod funkcije u tački $x = x_0$. U suprotnom, kažemo da prvi izvod ne postoji.

Tablica izvoda elementarnih funkcija

Sada će biti dati izvodi elementarnih funkcija koji se mogu dobiti korišćenjem (10.1).

(i1) $(c)' = 0$, c je konstanta;

(i2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(i3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > 0$;

(i4) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

(i5) $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

(i6) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(i7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

(i8) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$;

(i9) $(e^x)' = e^x$;

(i10) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;

(i11) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$;

(i12) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$;

(i13) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$;

(i14) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(i15) $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pokazaćemo da je $(x^3)' = 3x^2$. Neka je $f(x) = x^3$. Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2+3xh+h^2}{1} = 3x^2 \,. \end{aligned}$$

Pokažimo da je $(\sin x)' = \cos x$. Uzmimo da je $f(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(1-\cos h)\sin x + \sin h\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}\sin x + \sin h\cos x}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2\frac{h}{2}\sin x}{\frac{h}{2}} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h\cos x}{h} \\ &= -\sin x \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}\sin^2\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= -\sin x\cdot(0\cdot 1) + \cos x\cdot 1 = \cos x \,. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ i da je $1-\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$.

Pokazaćemo još da je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Neka je $f(x) = \ln x$, tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x\cdot\frac{h}{x}} \\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}\,. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

Važna osobina svake diferencijabilne funkcije u tački $x = x_0$ je da je ona i neprekidna u toj tački. Naime, ako je funkcija diferencijablina u $x = x_0$, tada je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,,$$

a treba da pokažemo da važi neprekidnost u $x = x_0$, odnosno

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x-x_0\to 0} f(x_0+x-x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)\,,$$

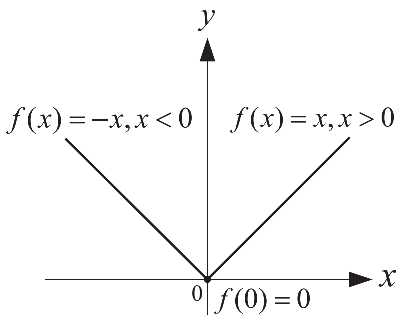
kada uvedemo smenu $x - x_0 = h$. Naime,

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h = f'(x_0)\cdot\lim_{h\to 0} h = 0\,.$$

Obrnuto ne mora da važi, odnosno pronaći ćemo funkciju koja je neprekidna u tački $x = x_0$, a nije diferencijablina u toj tački. Pokazaćemo da je funkcija

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

neprekidna u $x = 0$, a da nije diferencijabilna (slika 10.3).



Slika 10.3: Grafik funkcije $f(x) = |x|$.

Potražimo levu i desnu graničnu vrednost u tački $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0\,,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0\,.$$

Dobijeno je da je $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ čime je pokazana neprekidnost u tački $x = 0$. Proverimo sada i diferencijabilnost u istoj tački. Važi

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-1) = -1$$

i

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\,.$$

Zbog $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, jasno je da prvi izvod u tački $x = 0$ ne postoji pa posmatrana funkcija nije diferencijabilna u toj tački.

10.2 Diferencijal funkcije

Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a, b). Neka $x, x+h \in (a, b)$. Tada važi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}\,.$$

Sa $x + h - x = h = \Delta x$ obeležićemo priraštaj argumenta, a neka je $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ priraštaj funkcije. Sada je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

Odavde sledi da je

$$\Delta y - f'(x)\Delta x = \varphi(\Delta x)\Delta x\,,$$

gde je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = 0$. Dakle,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varphi(\Delta x)\Delta x \Rightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x\,,$$

kada $\Delta x \to 0$, odnosno, priraštaj funkcije $y = f(x)$ u tački x približno je jednak $f'(x)\Delta x$ (videti primer 10.2.1 i tabelu 10.1) ili

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Primer 10.2.1 Odrediti priraštaj funkcije $y = x^2$ za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$ u tački $x = 1$ i uporediti $\Delta y/\Delta x$ sa $f'(x)$.

Rešenje. Jasno je da je $f'(x) = 2x$ i da je $f'(1) = 2$. Pogledati tabelu 10.1.

Tabela 10.1: Priraštaj funkcije $y = x^2$ u tački $x = 1$ za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$, $\Delta y/\Delta x$ i $f'(x)$.

x	Δx	$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2$	$\Delta y/\Delta x$	$f'(x)$
1	0.1	0.21	2.1	2
1	0.01	0.0201	2.01	2
1	0.001	0.002001	2.001	2
1	0.0001	0.00020001	2.0001	2

■

Ovim dolazimo do definicije diferencijala funkcije.

Definicija 10.2.2 *Neka je f diferencijabilna funkcija i neka je sa $dx = \Delta x$ obeležen priraštaj argumenta (odnosno diferencijal argumenta). Diferencijal funkcije $y = f(x)$ je $dy = f'(x)\,dx$.*

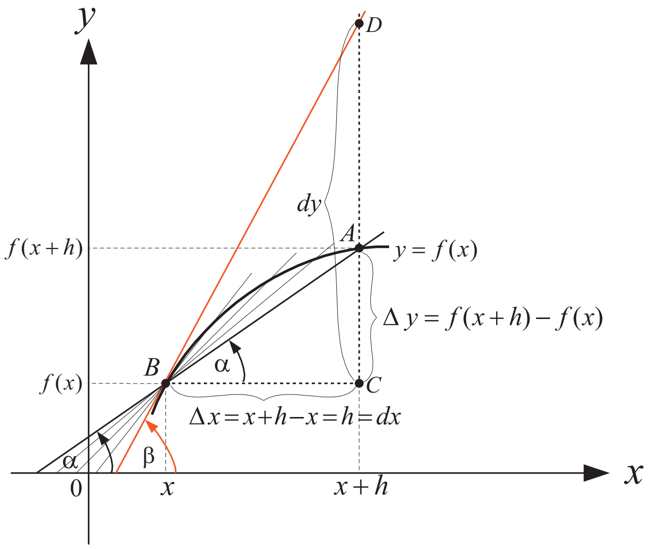
Na slici 10.4, dy jednako je rastojanju između tačaka D i C, dok je priraštaj funkcije Δy jednak rastojanju između tačaka A i C.

Primer 10.2.3 Odrediti diferencijal funkcije $y = \sin x + x^5$.

Rešenje. Kako je $f(x) = \sin x + x^5$ i kako je $f'(x) = \cos x + 5x^4$, tada je $dy = (\cos x + 5x^4)\,dx$. ■

10.3 Geometrijska interpretacija prvog izvoda

Da bismo objasnili geometrijsko tumačenje prvog izvoda, posmatrajmo funkciju f kao na slici 10.4.



Slika 10.4: Geometrijsko tumačenje prvog izvoda.

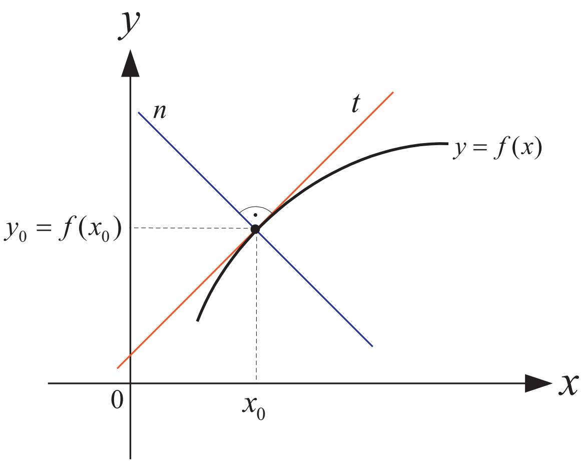
Neka je $h > 0$ (analogno se tumači i za $h < 0$) i na x-osi nanesimo x i $x+h$. Time su određeni $f(x)$ i $f(x+h)$. Priraštaj argumenta obeležićemo sa $\Delta x = (x+h)-x = h$, a priraštaj funkcije sa $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Tačka A na slici 10.4 ima koordinate $A(x+h, f(x+h))$, tačka $B(x, f(x))$, a $C(x+h, f(x))$. U trouglu $\triangle ABC$ ugao $\angle ABC$ obeležićemo sa α. Tada je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Kada $h = \Delta x \to 0$, tada se tačka A kreće po grafiku funkcije f ka tački B, prava koja prolazi kroz tačke A i B (sečica) postaje tangenta funkcije f u tački x, a ugao α teži uglu β:

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\,.$$

Dakle, prvi izvod funkcije f u tački x jednak je tangensu ugla koji zaklapa tangenta grafika funkcije f u tački x sa pozitivnim delom x-ose. Sada je jasno da se jednačina tangente grafika funkcije f u tački (x_0, y_0) može zapisati kao $t: \ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, a jednačina normale u (x_0, y_0) je $n: \ y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$, gde je $y_0 = f(x_0)$ (slika 10.5).



Slika 10.5: Tangenta (t) i normala (n) na grafik funkcije f u tački (x_0, y_0).

Primer 10.3.1 Odrediti jednačinu tangente i normale funkcije $f(x) = x^2$ u tački $(1, f(1))$.

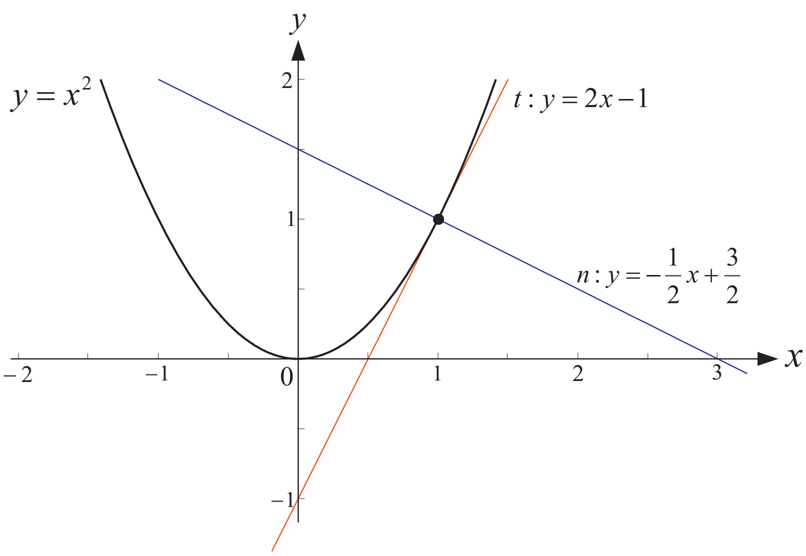
Rešenje. Kako je $f(1) = 1$, tada je tačka $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Dalje je $f'(x) = 2x$, pa je $f'(x_0) = f'(1) = 2$. Jednačina tangente je

$$t : y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1\,,$$

a normale

$$n : y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\,,$$

što je prikazano na slici 10.6.



Slika 10.6: Tangenta (t) i normala (n) na grafik funkcije $f(x) = x^2$ u tački $(1, 1)$.

∎

Primer 10.3.2 Dokazati graničnu vrednost $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Rešenje. Potražimo po definiciji prvi izvod funkcije $f(x) = a^x$ za $a > 0$ i $a \neq 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \left(a^h - 1\right)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je

$$f'(0) = a^0 \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \Rightarrow f'(x) = a^x f'(0).$$

Posmatrajmo sada tabelu 10.2 u kojoj su dati količnici $(a^h - 1)/h$ za $a = 2$ i $a = 3$ za različite vrednosti h kada $h \to 0$.

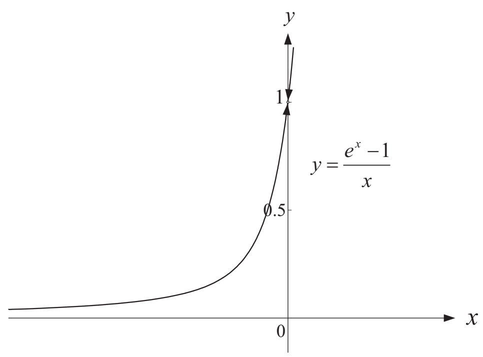
Tabela 10.2: Količnici $(a^h - 1)/h$ za $a = 2$ i $a = 3$ za različite vrednosti h.

h	$(2^h - 1)/h$	$(3^h - 1)/h$
0.1	0.71774	1.16123
0.01	0.69556	1.10467
0.001	0.69339	1.09922
0.0001	0.69317	1.09867
0.00001	0.69315	1.09862
$f'(0) \approx$	0.693	1.099

Dakle, sigurno postoji neki broj a između 2 i 3 tako da je $f'(0) = 1$. Taj broj je nazvan broj e što znači da je za $a = e$ (slika 10.7)

$$1 = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot f'(0) = e^x \cdot 1 = e^x,$$

što dalje implicira da je od svih eksponencijalnih funkcija, jedino kod funkcije $f(x) = e^x$, tangenta na grafik te funkcije u tački $(0, 1)$ sa x-osom zaklapa ugao od 45 stepeni ili $\pi/4$ radijana ($f'(0) = e^0 = 1$). ■



Slika 10.7: Funkcija $f(x) = (e^x - 1)/x$ i njeno ponašanje kada $x \to 0$.

10.4 Osnovna pravila za nalaženje prvog izvoda funkcije i izvoda višeg reda

Sva osnovna pravila za izvod funcije dokazuju se pomoću definicije prvog izvoda.

- Pravilo za izvod konstanta puta funkcija: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, c-konstanta

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$$

Primer 10.4.1 Korišćenjem pravila za $(c \cdot f(x))'$ možemo izračunati da je:

(i) $(5\sin x)' = 5\,(\sin x)' = 5\cos x\,,$

(ii) $(-3\ln x)' = -3\,(\ln x)' = -\dfrac{3}{x}\,,$

(iii) $(2\operatorname{arctg} x)' = 2\,(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{2}{1+x^2}\,.$

$\blacksquare$

- Pravilo za izvod zbira/razlike: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$\begin{aligned}
(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \pm g'(x)\,.
\end{aligned}$$

Primer 10.4.2 Korišćenjem pravila za izvod zbira/razlike možemo izračunati da je:

(i) $(e^x + \cos x)' = (e^x)' + (\cos x)' = e^x - \sin x\,,$

(ii) $(2\operatorname{tg} x - \arcsin x + 5x^3)' = 2(\operatorname{tg} x)' - (\arcsin x)' + 5(x^3)' = \dfrac{2}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 15x^2\,,$

(iii) $(\sqrt[5]{x^3} + 3^x - \dfrac{5}{x} + 10)' = (x^{3/5})' + (3^x)' - 5(x^{-1})' + (10)' = \dfrac{3}{5}\,x^{-2/5} + 3^x\,\ln 3 + \dfrac{5}{x^2}\,.$

$\blacksquare$

- Pravilo za izvod proizvoda: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$$\begin{aligned}
(f(x)\cdot g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\,.
\end{aligned}$$

Primer 10.4.3 Korišćenjem pravila za izvod proizvoda dobijamo da je:

(i) $(x^2\cdot\log_4 x)' = (x^2)'\cdot\log_4 x + x^2\cdot(\log_4 x)' = 2x\cdot\log_4 x + x^2\cdot\dfrac{1}{x\ln 4} = 2x\cdot\log_4 x + \dfrac{x}{\ln 4}$,

(ii) $(\operatorname{ctg} x\cdot e^x)' = (\operatorname{ctg} x)'\cdot e^x + \operatorname{ctg} x\cdot(e^x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}\cdot e^x + \operatorname{ctg} x\cdot e^x = e^x\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

■

- Pravilo za izvod količnika: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{h\,g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\,.
\end{aligned}$$

Primer 10.4.4 Korišćenjem pravila za izvod količnika imamo da je:

(i) $\left(\dfrac{\cos x}{x^4}\right)' = \dfrac{(\cos x)'x^4 - \cos x(x^4)'}{(x^4)^2} = \dfrac{-\sin x\cdot x^4 - \cos x\cdot 4x^3}{x^8} = \dfrac{-x\,\sin x - 4\,\cos x}{x^5}$,

(ii)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x + 3\sqrt{x}}{\ln x}\right)' &= \frac{(e^x + 3\sqrt{x})'\ln x - (e^x + 3\sqrt{x})(\ln x)'}{(\ln x)^2} \\
&= \frac{\left(e^x + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\ln x - (e^x + 3\sqrt{x})\frac{1}{x}}{\ln^2 x} \\
&= \frac{e^x\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2\sqrt{x}}\ln x - 3\frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2 x}\,.
\end{aligned}$$

■

- Pravilo za izvod složene funkcije: $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Ako obeležimo sa $\Delta g = g(x+h) - g(x)$, tada je

$$\begin{aligned}
(f(g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+\Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+\Delta g) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Primer 10.4.5 Korišćenjem pravila za izvod složene funkcije dobijamo:

(i) $(\sin(5x))' = \cos(5x) \cdot (5x)' = 5\,\cos(5x)\,,$

(ii) $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3\,e^{3x}\,,$

(iii) $(\arcsin(x^{2019}))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^{2019})^2}} \cdot (x^{2019})' = \dfrac{2019\,x^{2018}}{\sqrt{1-x^{4038}}}\,,$

(iv) $((\arcsin x)^{2019})' = 2019\,(\arcsin x)^{2018} \cdot (\arcsin x)' = \dfrac{2019\,\arcsin^{2018} x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$

(v) $(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,,$

(vi)

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\right)' &= \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot 2 \cdot \frac{x'(1-x^2) - x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1\cdot(1-x^2) - x\cdot(-2\,x)}{(1-x^2)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{(1-x^2)^2}{1-2x^2+x^4+4x^2} \cdot \frac{1-x^2+2\,x^2}{(1-x^2)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{1+x^2}{1+2x^2+x^4} = 2 \cdot \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}\,.
\end{aligned}$$

■

Izvod inverzne funkcije

Potražimo izvod inverzne funkcije (definicija inverzne funkcije data je u uvodu ovog udžbenika). Neka je $y = f(x)$ diferencijabilna na nekom intervalu (a, b) i neka je f^{-1} njena inverzna funkcija. Tada je i $f^{-1}(y) = x$ takođe diferencijabilna na tom intervalu i važi

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad (f^{-1}(f(x)))' = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Ako sada zamenimo $y \to x$ dobijamo tražnu formulu

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,. \tag{10.2}$$

Primer 10.4.6 Dokazati tablični izvod funkcije $\arcsin x$.

Rešenje. Ako je $f(x) = \sin x$, tada je $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Sada, po formuli (10.2) imaćemo

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

Koristili smo da je $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. ■

Primer 10.4.7 Dokazati tablični izvod funkcije $\operatorname{arctg} x$.

Rešenje. Ako je $f(x) = \operatorname{tg} x$, tada je $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$. Sada, po formuli (10.2) imaćemo

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x))' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x)} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} + \frac{\sin^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}\,.\end{aligned}$$

■

Analogno se dokazuju i tablični izvodi za funkcije $\arccos x$ i $\operatorname{arcctg} x$.

Logaritamski izvod

A sada potražimo logaritamski izvod. Neka su $h(x)$ i $g(x)$ dve diferencijabilne funkcije na intervalu (a, b). Ako se traži prvi izvod funkcije $f(x) = h(x)^{g(x)}$, tada se mogu i leva i desna strana logaritmovati i onda primeniti formulu za izvod složene funkcije.

$$\begin{aligned} f(x) = h(x)^{g(x)} \quad &\Rightarrow \quad \ln f(x) = \ln h(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln f(x) = g(x)\, \ln h(x) \\ &\Rightarrow \quad (\ln f(x))' = (g(x)\, \ln h(x))' \\ &\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)\, \ln h(x) + g(x)\, (\ln h(x))' \\ &\Rightarrow \quad f'(x) = f(x) \cdot \left(g'(x)\, \ln h(x) + g(x)\, \frac{h'(x)}{h(x)} \right)\,. \end{aligned}$$

Primer 10.4.8 Naći prvi izvod funkcije $f(x) = x^x$.

Rešenje. Dakle, ponavljanjem postupka opisanog odmah pre ovog primera, imaćemo

$$f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = x^x (\ln x + 1) .$$

■

Primer 10.4.9 Naći prvi izvod funkcije $f(x) = (\ln x)^{\sin x}$.

Rešenje. Sada je

$$\ln f(x) = \sin x \ \ln(\ln x) \Rightarrow f'(x) = (\ln x)^{\sin x} \left(\cos x \ \ln(\ln x) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\right) .$$

■

Prvi izvod funkcije date u parametarskom obliku

Podsetimo se (poglavlje 7.5) da je funkcija $y = f(x)$ dok $x \in (a, b)$, u parametarskom obliku data sa $x = \psi(t)$, $y = \phi(t)$, za $t \in (t_1, t_2)$. Ako su $\psi(t)$ i $y = \phi(t)$ dve diferencijabilne funkcije na intervalu (t_1, t_2), tada je izvod funkcije f, zadate u parametarskom obliku, dat sa

$$f'_x(x(t)) = \frac{\phi'_t(t)}{\psi'_t(t)}, \quad \psi'_t(t) \neq 0 \, , t \in (t_1, t_2) \, .$$

Naime,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \, .$$

Primer 10.4.10 Odrediti prve izvode parametarski zadatih funkcija:

(a) $x(t) = 3 \sin t$, $y = 2 \sin 2t$, $t \in (0, 2\pi)$,

(b) $x(t) = 16 \sin^3 t$, $y = 13 \cos t - 5 \cos 2t - 2 \cos 3t - \cos 4t$, $t \in (0, \pi)$,

Rešenje.

(a) Kako je $x'(t) = 3 \cos t$, $y' = 4 \cos 2t$, tada je

$$f'_x(x(t)) = \frac{4 \cos 2t}{3 \cos t} \, .$$

(b) Sada je $x'(t) = 48 \sin^2 t \cos t$, $y' = -13 \sin t + 10 \sin 2t + 6 \sin 3t + 4 \sin 4t$, te je

$$f'_x(x(t)) = \frac{-13 \sin t + 10 \sin 2t + 6 \sin 3t + 4 \sin 4t}{48 \sin^2 t \cos t} \, .$$

■

10.4.1 Izvodi višeg reda

Pretpostavimo da funkcija f ima prvi izvod f' na intervalu (a, b), odnosno, pretpostavimo da je f diferencijabilna na tom intervalu. Neka tačka $x_0 \in (a, b)$.

Definicija 10.4.11 *Drugi izvod funkcije f u tački x_0 je izvod funkcije $f'(x)$ u tački x_0, ako postoji, i obeležava se $f''(x_0)$.*

Analogno se definišu i treći, četvrti,..., n-ti izvod funkcije f u tački x_0 i označavaju se sa $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$,..., $f^{(n)}(x_0)$, redom.

Primer 10.4.12 Odrediti od prvi, drugi, treći i četvrti izvod sledećih funkcija:

- $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

  Rešenje.
$$f'(x) = (5x^3 - 2x^2 + 6x - 8)' = 15x^2 - 4x + 6$$
$$f''(x) = (15x^2 - 4x + 6)' = 30x - 4$$
$$f'''(x) = (30x - 4)' = 30$$
$$f^{(4)}(x) = (30)' = 0$$

- $f(x) = \ln(3x + 2) - e^{-2x} + \dfrac{1}{x}$, $x \in (-2/3, 0) \cup (0, +\infty)$.

  Rešenje.
$$f'(x) = \left(\ln(3x+2) - e^{-2x} + \frac{1}{x}\right)' = \frac{3}{3x+2} + 2e^{-2x} - \frac{1}{x^2}$$
$$f''(x) = \left(\frac{3}{3x+2} + 2e^{-2x} - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-9}{(3x+2)^2} - 4e^{-2x} + \frac{2}{x^3}$$
$$f'''(x) = \left(\frac{-9}{(3x+2)^2} - 4e^{-2x} + \frac{2}{x^3}\right)' = \frac{54}{(3x+2)^3} + 8e^{-2x} - \frac{6}{x^4}$$
$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{54}{(3x+2)^3} + 8e^{-2x} - \frac{6}{x^4}\right)' = \frac{-486}{(3x+2)^4} - 16e^{-2x} + \frac{24}{x^5}$$

■

Primer 10.4.13 Odrediti n-te izvode sledećih funkcija, $n \in \mathbb{N}$:

- $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

  Rešenje. Koristeći tablični izvod funkcije $f(x) = e^x$ jasno je da je $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$, za svaki realan broj x i svako $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

  Rešenje. Imamo da je $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x = f'(x)$,..., tako da se svaki četvrti izvod ponavlja. Neka $k \in \mathbb{N}_0$ i $x \in \mathbb{R}$, tada je

$$f^{(4k+1)}(x) = \cos x\,, \quad f^{(4k+2)}(x) = -\sin x\,, \quad f^{(4k+3)}(x) = -\cos x\,, \quad f^{(4k+4)}(x) = \sin x\,.$$

- $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

  Rešenje. Sada je $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, $f^{(5)}(x) = -\sin x = f'(x)$,..., tako da se, opet, svaki četvrti izvod ponavlja. Neka $k \in \mathbb{N}_0$ i $x \in \mathbb{R}$, tada je

$$f^{(4k+1)}(x) = -\sin x\,, \quad f^{(4k+2)}(x) = -\cos x\,, \quad f^{(4k+3)}(x) = \sin x\,, \quad f^{(4k+4)}(x) = \cos x\,.$$

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

  Rešenje. Prvi izvod je $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, drugi $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$, $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$,..., pa je $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$.

  Rešenje. Sada je $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^4}$,..., pa je $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (-1, +\infty)\,.$

■

Aproksimacija drugog izvoda funkcije

Često je u numeričkoj analizi potrebna aproksimacija izvoda funkcije. Videli smo kako se aproksimira prvi izvod funkcije, a sada objasnimo aproksimaciju drugog izvoda. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na intervalu (a,b). Neka $x, x+h \in (a,b)$. Tada važi

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}\,.
\end{aligned}$$

Ako obeležimo sa $(\Delta x)^2 = h^2$, a sa $\Delta^2 y = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$, tada je

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} - f''(x) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 y - f''(x)(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = 0\,.$$

Odavde sledi da je

$$\Delta^2 y - f''(x)(\Delta x)^2 = \varpi(\Delta x)(\Delta x)^2\,,$$

gde je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varpi(\Delta x) = 0$. Dakle,

$$\Delta^2 y = f''(x)(\Delta x)^2 + \varpi(\Delta x)(\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta^2 y \approx f''(x)(\Delta x)^2\,,$$

kada $\Delta x \to 0$ (videti primer 10.4.14 i tabelu 10.3), odnosno

$$f''(x) \approx \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}\,.$$

Primer 10.4.14 Za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ odrediti $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y/(\Delta x)^2$ funkcije $y = x^3$ u tački $x = 1$ i uporediti sa $f''(x)$.

Rešenje. Jasno je da je $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ i da je $f''(1) = 6$. Videti tabelu 10.3. ■

Tabela 10.3: $\Delta^2 y$ i $f''(x)\,\Delta^2 x$ funkcije $y = x^3$ u tački $x = 1$ za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$.

x	$(\Delta x)^2$	$\Delta^2 y = (x+2\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)^3 + x^3$	$\Delta^2 y/(\Delta x)^2$	$f''(x)$
1	10^{-2}	$6.6 \cdot 10^{-2}$	6.6	6
1	10^{-4}	$6.06 \cdot 10^{-4}$	6.06	6
1	10^{-6}	$6.006 \cdot 10^{-6}$	6.006	6

10.5 Zadaci za vežbu

Odrediti prve izvode sledećih funkcija:

1. $y = x^{23} - 5\cos x + 6e^x$. $(y' = 23x^{22} + 5\sin x + 6e^x)$

2. $y = x - \sin x \cos x$. $(y' = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x)$

3. $y = \dfrac{\ln x}{1 - \ln x}$. $(y' = \dfrac{1}{x(1-\ln x)^2})$

Odrediti prve izvode složenih funkcija:

4. $y = \ln\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}$. $(y' = \dfrac{\mathrm{ctg}(2x)}{(1-\sin(2x))})$

5. $y = \ln\left(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right)$. $(y' = \dfrac{1}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+x}{1-x}})$

6. $y = x\sin(3x)\ln x$. ($y' = \sin(3x)\ln x + 3x\cos(3x)\ln x + \sin(3x)$)

7. $y = \ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1}\right)$. ($y' = \dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$)

8. $y = (x^2-3)^x$. ($y' = (x^2-3)^x\left(\ln(x^2-3) + \dfrac{2x^2}{x^2-3}\right)$)

9. $y = x^{x+5}$. ($y' = x^{x+5}\left(\ln x + \dfrac{x+5}{x}\right)$)

Odrediti izvod inverzne funkcije ako je:

10. $y = \sqrt{x}+3$. ($(y^{-1})' = 2(x-3)$)

11. $y = x^3+6$. ($(y^{-1})' = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x-6})^2}$)

12. $y = e^{x-5}$. ($(y^{-1})' = \dfrac{1}{x}$)

Odrediti izvod funkcije date u parametarskom obliku:

13. $x(t) = 3(t-\sin t)\,, y(t) = 3(1-\cos t)$, $t\in(0,2\pi)$. ($f'_x(x(t)) = \sin t/(1-\cos t)$)

14. $x(t) = 4\cos^3 t\,, y(t) = 4\sin^3 t$, $t\in(0,\pi/2)$. ($f'_x(x(t)) = -\sin t/\cos t$)

15. $x(t) = t^3+3t\,, y(t) = \dfrac{3}{2}t^2-6t$, $t\in\mathbb{R}$. ($f'_x(x(t)) = (t-2)/(t^2+1)$)

Odrediti prvi, drugi i treći izvod sledećih funkcija:

16. $y = \sqrt{3-5x}$. ($y' = \dfrac{-5}{2\sqrt{3-5x}}$, $y'' = \dfrac{-25}{4\sqrt{(3-5x)^3}}$, $y''' = \dfrac{-375}{8\sqrt{(3-5x)^5}}$)

17. $y = \dfrac{2x-3}{3x+1}$. ($y' = \dfrac{11}{(3x+1)^2}$, $y'' = \dfrac{-66}{(3x+1)^3}$, $y''' = \dfrac{594}{(3x+1)^4}$)

18. Odrediti jednačine tangente i normale na grafik $f(1) = x^2+2x-3$ u tački $A(1, f(1))$. ($t:\ y = 4x-4$, $n:\ y = -x/4+1/4$)

19. Odrediti priraštaj funkcije $y = x^3$ za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ u tački $x = 2$ i uporediti $\Delta y/\Delta x$ sa $f'(x)$.

20. Za $\Delta x \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$ odrediti $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y/(\Delta x)^2$ funkcije $y = x^2-1$ u tački $x = 1$ i uporediti sa $f''(x)$.

GLAVA 11

Primena izvoda funkcija

U ovoj glavi biće date osnovne teoreme diferencijalnog računa. Detaljno je ispitano pet funkcija. Da bi studenti mogli da razumeju rešenja većine zadataka, moraju najpre da se dobro upoznaju sa elementarnim funkcijama. Za određivanje definisanosti, ponašanja na krajevima intervala definisanosti i asimptota funkcija, studenti treba dobro da „vladaju" određivanjem znaka izraza i Lopitalovim pravilom. Često se koristi znak kvadratnog trinoma i činjenice da $a \cdot b$ i a/b imaju isti znak, da x i x^3 imaju isti znak, itd. Određivanje znaka izraza posebno je važno pri ispitivanju lokalnih ekstrema, prevojnih tačaka, intervala monotonosti i konveksnosti i konkavnosti funkcija.

11.1 Teoreme o srednjoj vrednosti izvoda

Naredna teorema (*Teorema Ferma*) daje potreban uslov za postojanje ekstremne vrednosti funkcije u tački u kojoj postoji izvod funkcije.

Teorema 11.1.1 *Neka funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i neka postoji tačka $c \in (a,b)$ u kojoj postoji $f'(c)$ i u kojoj funkcija dostiže najmanju ili najveću vrednost na nekom intervalu unutar (a,b). Tada je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Neka funkcija f u tački c dostiže najmanju vrednost (analogno se pokazuje ako dostiže najveću vrednost). Tada je $f(x) \geq f(c)$, $x \in [a,b]$, a odatle i $f(x) - f(c) \geq 0$. Ako je $x > c$, tada je $x - c > 0$ pa je

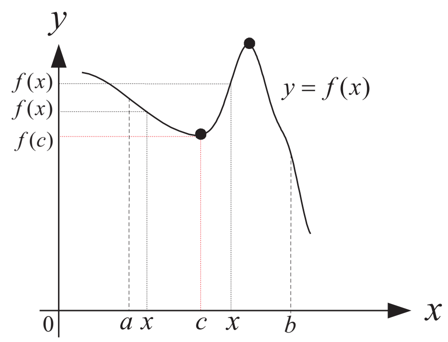
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0\,, \; x \in (c,b]\,. \tag{11.1}$$

Pošto postoji $f'(c)$, to znači da je $f'_+(c) \geq 0$ zbog (11.1). Ako je $x < c$, tada je $x - c < 0$, pa je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0\,, \; x \in [a,c)\,, \tag{11.2}$$

a to znači da je $f'_-(c) \leq 0$ jer važi (11.2). Dakle, $f'(c) = 0$. ■

Veoma je važno što tačka c pripada otvorenom intervalu (a, b) u teoremi 11.1.1. Da je u pitanju zatvoreni interval, tada, kao što se vidi na slici 11.1, najmanja vrednost funkcije je u tački b, a jasno je da je $f'(b) \neq 0$.

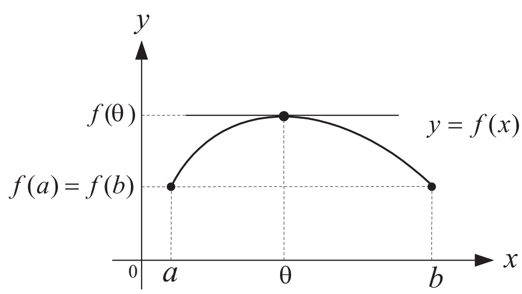


Slika 11.1: Ilustracije Fermaove teoreme 11.1.1.

Dovoljne uslove za postojanje tačke c za koju je $f'(c) = 0$ daje *Rolova teorema.*

Teorema 11.1.2 *Neka je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b). Neka važi da je $f(a) = f(b)$. Tada postoji tačka $\theta \in (a, b)$, tako da je $f'(\theta) = 0$ (slika 11.2).*

Dokaz. Iz neprekidnosti na zatvorenom intervalu sledi da postoje dve tačke u kojima funkcija dostiže svoju minimalnu i maksimalnu vrednost (tvrdjenje 9.4.3). Neka su to tačke ν_1 i ν_2, redom. Ako se te tačke poklapaju sa krajevima intervala, tada je $f(\nu_1) = f(\nu_2)$, a to znači da je f konstantna funkcija na $[a, b]$, pa je za svako $x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$. Ako, recimo, $\nu_2 \in (a, b)$, kako je f diferencijabilna na (a, b), po teoremi 11.1.1 sledi da je $f'(\nu_2) = 0 \Rightarrow \theta = \nu_2$. ■



Slika 11.2: Ilustracije Rolove teoreme 11.1.2.

Navedimo i Lagranžovu teoremu.

Teorema 11.1.3 *Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Tada postoji tačka $\theta \in (a,b)$ (slika 11.3), tako da važi*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\theta)\,.$$

Dokaz. Prava koja prolazi kroz tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ ima jednačinu

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

Posmatrajmo sada funkciju

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

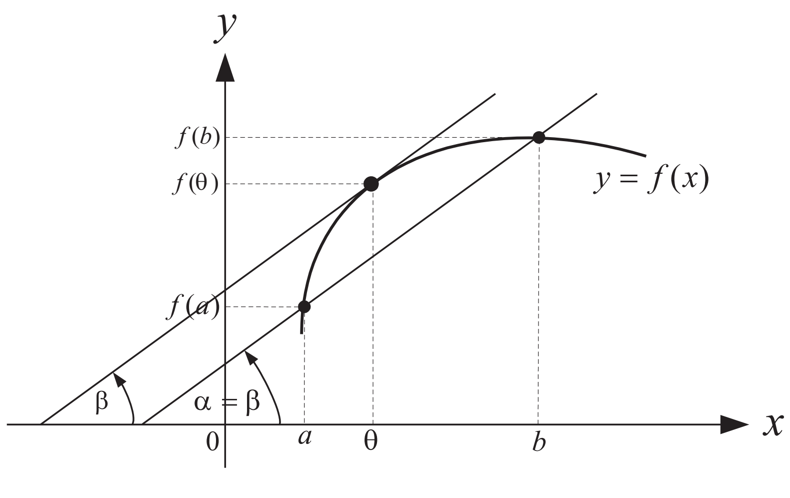
Jasno je da je neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Važi i $g(a) = g(b) = 0$ pa su zadovoljeni uslovi Rolove teoreme 11.1.2. Dakle, postoji $\theta \in (a,b)$ tako da je $g'(\theta) = 0$. Kako je

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,$$

važi

$$0 = g'(\theta) = f'(\theta) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\theta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

■



Slika 11.3: Ilustracija Lagranžove teorema 11.1.3.

Napomena 11.1.4 *Rolova teorema je specijalni slučaj Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti izvoda kada je $f(a) = f(b)$.*

11.2 Tejlorova i Maklorenova formula

Tejlorova i Maklorenova formula su značajne pri aproksimaciji funkcije polinomom. Formule sadrže i grešku aproksimacije tako da se aproksimativni polinom može odrediti ako je unapred zadata tačnost.

Posmatrajmo prvo polinom

$$P_n(x) = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) + a_0\,, \qquad (11.3)$$

za $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Odredimo sada $P(x_0)$, $P'(x_0)$, $P''(x_0)$,..., $P^{(n)}(x_0)$. Tada je $P(x_0) = a_0$,

$$P'(x) = n\,a_n(x-x_0)^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}(x-x_0)^{n-2} + \cdots + 2\,a_2(x-x_0)^1 + a_1\,,$$

pa je $P'(x_0) = a_1$. Dalje,

$$P''(x) = n(n-1)\,a_n(x-x_0)^{n-2} + (n-1)(n-2)\,a_{n-1}(x-x_0)^{n-3} + \cdots + 2\cdot 1\,a_2\,,$$

te je $P''(x_0) = 2!\,a_2$. Ako nastavimo postupak, dobijamo $P^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$, $k = 3,4,\ldots,n$. To znači da se svaki koeficijent polinoma (11.3) može zapisati kao $a_0 = P(x_0)$ i

$$a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,.$$

Dakle,

$$P_n(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,. \qquad (11.4)$$

Izraz (11.4) naziva se Tejlorov polinom n-tog stepena polinoma $P(x)$ u tački x_0. Odredimo sada Tejlorovu formulu za proizvoljnu funkciju f.

Teorema 11.2.1 *Neka funkcija f ima neprekidne izvode sve do reda n na intervalu $[a,b]$ i neka postoji $f^{(n+1)}$ na (a,b), $n \in \mathbb{N}$. Tada za svako $x \in [a,b]$ važi Tejlorova formula*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)\,,$$

gde postoji tačka $\theta \in (a,x)$ za koju važi $\theta = a + \nu(x-a)$, $0 < \nu < 1$.

Polinom

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

naziva se Tejlorov polinom n-tog stepena za funkciju f u tački a, a

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)$$

naziva se greška aproksimacije ili ostatak.

Napomena 11.2.2 *Tejlorova formula je uopštenje Lagranžove teoreme jer za $n = 0$ i $x = b$ važi*

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(\theta)\,, \quad a < \theta < b\,.$$

Tejlorov razvoj funkcije f u okolini tačke x_0 dobija se direktno iz Tejlorove formule, uz uslov da ostatak R_n teži nuli kako se povećava stepen Tejlorovog polinoma. Naime, ako su tačke $x, x_0 \in (a, b)$, tada važi

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \underbrace{\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)}_{R_n}\,,$$

gde je $\theta = x_0 + \nu(x - x_0)$, $0 < \nu < 1$. Specijalno, ako je $x_0 = 0$, tada dobijamo Maklorenov razvoj funkcije f u okolini tačke $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)\,, \quad \theta = \nu x, \quad 0 < \nu < 1\,.$$

Primer 11.2.3 Koristeći primer 10.4.13, odrediti Maklorenove polinome za funkcije: (i) $f(x) = e^x$, (ii) $f(x) = \sin\, x$, (iii) $f(x) = \cos\, x$, (iv) $f(x) = \ln\,(x + 1)$ i odrediti ostatke.

Rešenje.

(i) Kako je $f'(x) = \cdots = f^{(n+1)}(x) = e^x$ za svako $x \in \mathbb{R}$, tada je $f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ i $f^{(n+1)}(\theta) = e^\theta$, $\theta = \nu\, x$, $0 < \nu < 1$. Pošto je i $f(0) = e^0 = 1$, tada je

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\nu x}\,,$$

odnosno

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n\,,$$

gde je

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\nu x}$$

za $0 < \nu < 1$ i za svako $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Ako je $f(x) = \sin\, x$, tada je $f(0) = 0$ i

$$f^{(4k+1)}(0) = 1\,, \quad f^{(4k+2)}(0) = 0\,, \quad f^{(4k+3)}(0) = -1\,, \quad f^{(4k+4)}(0) = 0\,,$$

za $k \in \mathbb{N}_0$, pa je

$$\sin\, x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin\left(\nu x + \frac{(2n+2)\pi}{2}\right)\,,$$

odnosno

$$\sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}\,,$$

gde je

$$R_{2n+1} = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sin\left(\nu x + \frac{(2n+2)\pi}{2}\right)$$

za $0 < \nu < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(*iii*) Neka je $f(x) = \cos\, x$. Tada je $f(0) = 1$ i

$$f^{(4k+1)}(0) = 0\,,\quad f^{(4k+2)}(0) = -1\,,\quad f^{(4k+3)}(0) = 0\,,\quad f^{(4k+4)}(0) = 1\,,$$

za $k \in \mathbb{N}_0$, pa je

$$\cos\, x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(\nu x + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\,,$$

odnosno

$$\cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}\,,$$

gde je

$$R_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(\nu x + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$$

za $0 < \nu < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(*iv*) Za $f(x) = \ln(x+1)$ važi $f(0) = 0$ i

$$f'(0) = 1\,,\quad f''(0) = -1\,,\quad f'''(0) = 2\,,\quad f^{(4)}(0) = -6\,,\ldots, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,,$$

i $f^{(n+1)}(\theta) = (-1)^n\dfrac{n!}{(\nu x+1)^{n+1}}$, $0 < \nu < 1$, $x \in \mathbb{R}$. Sada je

$$\begin{aligned}\ln(x+1) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!}\,(k-1)! + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!(\nu x+1)^{n+1}}\,n!\\ &= \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(\nu x+1)^{n+1}}\,,\end{aligned}$$

odnosno

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n\,,$$

gde je

$$R_n = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(\nu x+1)^{n+1}}$$

za $0 < \nu < 1$. ■

Primer 11.2.4 Odrediti e^x za $x = 1$ tako da je $|R_n| < 0.01$ (tačna prva cifra iza decimalne tačke) koristeći Maklorenov razvoj.

Rešenje. Posmatrajmo primer 11.2.3 pod (i). Primetimo da je za $x = 1$, $R_n = \frac{1}{(n+1)!}\, e^{\nu}$, a pošto je $0 < \nu < 1$, tada je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\, e^{\nu} < \frac{1}{(n+1)!}\, e^{1} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Odredićemo $n \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0.01\,,$$

a to je $n = 5$, jer je $\dfrac{3}{(5+1)!} = 0.0042 < 0.01$. Dakle,

$$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2.71667 \;\; (e \approx 2.71828)\,.$$

■

Primer 11.2.5 Odrediti $\ln(x+1)$ za $x = 1$ tako da je $|R_n| < 0.0001$ (tačne prve tri cifre iza decimalne tačke) koristeći Maklorenov razvoj.

Rešenje. Posmatrajmo primer 11.2.3 pod (iv). Sada je za $x = 1$,

$$|R_n| = \left| (-1)^n \frac{1}{(n+1)(\nu+1)^{n+1}} \right|,$$

a pošto je $0 < \nu < 1$, tada je

$$|R_n| = \frac{1}{(n+1)(\nu+1)^{n+1}} < \frac{1}{n+1}$$

Odredićemo $n \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\frac{1}{n+1} < 0.0001 \Rightarrow n+1 > 10000 \Rightarrow n > 10001\,,$$

a to je $n = 10002$. Dakle,

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{10002} \approx 0.693097 \;\; (\ln 2 \approx 0.693147)\,.$$

■

11.3 Lopitalovo pravilo

Lopitalovo pravilo koristi se pri određivanju graničnih vrednosti oblika

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

kao i graničnih vrednosti koje se mogu svesti na prethodne dve.

Teorema 11.3.1 *1) Neka su funkcije f i g dve diferencijabilne funkcije na intervalu (a,b) osim možda u tački $c \in (a,b)$. Neka važi i*

- *obe funkcije teže ili nuli ili u beskonačno kada $x \to c$,*
- $g'(x) \neq 0,\ x \neq c$,
- *postoji* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i važi*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Neka su funkcije f i g dve diferencijabilne funkcije na intervalu $(a,+\infty)$ (analogno za $(-\infty,b)$). Neka važi još i

- *obe funkcije teže ili nuli ili u beskonačno kada $x \to +\infty$,*
- $g'(x) \neq 0,\ x \in (b,+\infty),\ b > a$,
- *postoji* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i važi*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primer 11.3.2 Odrediti sledeće granične vrednosti pomoću Lopitalovog pravila:

- *Oblik* „$\frac{0}{0}$". Odrediti $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

  Rešenje.
  $$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = 6,$$
  pa je $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$.

- *Oblik* „$\frac{\infty}{\infty}$". Odrediti $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$, $n \in \mathbb{N}$.

  Rešenje. Kako je $(x^n)^{(n)} = n!$ i $(e^x)^{(n)} = e^x$, posle n puta primene Lopitalovog pravila imaćemo
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^n)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^n)''}{(e^x)''} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^n)^{(n)}}{(e^x)^{(n)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0,$$
  odakle sledi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.

- *Oblik* „$\infty - \infty$". Odrediti $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{\ln(x-1)} - \dfrac{1}{x-2}\right)$.

  Rešenje.
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\ln(x-1)} - \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)-\ln(x-1)}{(x-2)\ln(x-1)}\,.$$
  Ovim je dobijen izraz „$\dfrac{0}{0}$" pa je
$$\lim_{x\to 2}\frac{((x-2)-\ln(x-1))'}{((x-2)\ln(x-1))'} = \lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{1}{x-1}}{\ln(x-1)+\frac{x-2}{x-1}}\,.$$
  Poslednji izraz je, ponovo, „$\dfrac{0}{0}$", pa je
$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(1-\frac{1}{x-1}\right)'}{\left(\ln(x-1)+\frac{x-2}{x-1}\right)'} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}} = \frac{1}{2}\,.$$
  Sledi da je i početni limes jednak 1/2.

- *Oblik* „$0\cdot\infty$". Odrediti $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln(x-1)$.

  Rešenje. Pretvorimo u oblik „$\dfrac{\infty}{\infty}$". Naime,
$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln(x-1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}\,,$$
  pa je sada
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = -\lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0\,.$$
  Dakle, i početna granična vrednost je jednaka 0.

- *Oblik* „0^0". Odrediti $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

  Rešenje. Koristeći ideju predloženu kod logaritamskih izvoda, imaćemo
$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}\,.$$
  Sada je
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\cos x} = -1\cdot 0 = 0\,.$$
  Konačno rešenje je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$.

- *Oblik* „∞^0". Odrediti $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{x}}$.

  Rešenje.
$$\lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x}\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2\ln x}{x}}$$
  Sada je
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 0\,,$$
  pa je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{x}} = e^0 = 1$.

- *Oblik* „1^∞". Odrediti $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x+1}$.

  Rešenje.
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} e^{(2x+1)\ln\frac{x+2}{x}}\,.$$
  Sada je
$$\lim_{x\to+\infty} (2x+1)\ln\frac{x+2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x+2}{x}}{\frac{1}{2x+1}}$$
  i ovo je oblik „$\frac{0}{0}$". Primenimo Lopitalovo pravilo.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\frac{x+2}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{2x+1}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x+2}\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{-\frac{2}{(2x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x+2}\cdot\frac{-2}{x^2}}{-\frac{2}{(2x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)^2}{x(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x} = 4\,,$$
  pa je konačno rešenje $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x+1} = e^4$.

■

11.4 Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

U poglavlju 7.1 definisani su lokalni i globalni ekstremi funkcije, kao i monotonost funkcije. Sada ćemo te pojmove povezati sa prvim izvodom funkcije. Naime, neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b). Tada

- ako je $f'(x) > 0$ za $x \in (a,b)$, tada je funkcija f monotono rastuća na intervalu $[a,b]$,
- ako je $f'(x) < 0$ za $x \in (a,b)$, onda je funkcija f monotono opadajuća na intervalu $[a,b]$.

Primer 11.4.1 Odrediti intervale monotonosti za $f(x) = x^2$.

Rešenje. Jasno je da je $f'(x) = 2x$ i da je za $x < 0$, $f'(x) < 0$ pa je tada f monotono opadajuća (obeležavaćemo sa $f \searrow$) na intervalu $(-\infty, 0)$. Ako je $x > 0$, $f'(x) > 0$ i tada je f monotono rastuća (obeležavaćemo sa $f \nearrow$) na intervalu $(0, +\infty)$. ■

Definicija 11.4.2 *Neka $f : D \to \mathbb{R}$ gde je sa D obeležen domen funkcije f. Tačka $c \in D$ naziva se kritična tačka funkcije f ako je $f'(c) = 0$ ili ako funkcija f u toj tački nije direfencijabilna ($f'(c)$ ne postoji).*

Na osnovu Fermaove teoreme 11.1.1 sledi da, ako je funkcija neprekidna na intervalu (a, b) i ako ima lokalni minimum ili maksimum u tački $c \in (a, b)$, tada je c kritična tačka funkcije. Da li je u pitanju lokalni minimum ili maksimum možemo odrediti na dva načina:

1. Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b). Neka $c \in (a, b)$.

   – Ako je $f'(c) < 0$ za $x \in (c - \delta, c) \subset (a, b)$, $f'(c) > 0$ za $x \in (c, c + \delta) \subset (a, b)$, tada je tačka $(c, f(c))$ lokalni minimum, za neko $\delta > 0$.
   – Ako je $f'(c) > 0$ za $x \in (c - \delta, c) \subset (a, b)$, $f'(c) < 0$ za $x \in (c, c + \delta) \subset (a, b)$, tada je tačka $(c, f(c))$ lokalni maksimum, za neko $\delta > 0$.

   Dakle, ako prvi izvod menja znak u okolini tačke c, imaćemo lokalni ekstrem.

2. Neka je f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) i neka $c \in (a, b)$. Ako je $f'(c) = 0$ i ako je

   – $f''(c) > 0$, tada funkcija f u tački $(c, f(c))$ ima lokalni minimum,
   – $f''(c) < 0$, tada funkcija f u tački $(c, f(c))$ ima lokalni maksimum.

   Ako je $f''(c) = 0$ tada su potrebna dodatna ispitivanja. Naime, neka je f $2n$-puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b), $n \in \mathbb{N}$, i neka $c \in (a, b)$. Ako je $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(2n-1)}(c) = 0$ i ako je

   – $f^{(2n)}(c) > 0$, tada funkcija f u tački $(c, f(c))$ ima lokalni minimum,
   – $f^{(2n)}(c) < 0$, tada funkcija f u tački $(c, f(c))$ ima lokalni maksimum.

Primer 11.4.3 Odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$ koristeći oba načina.

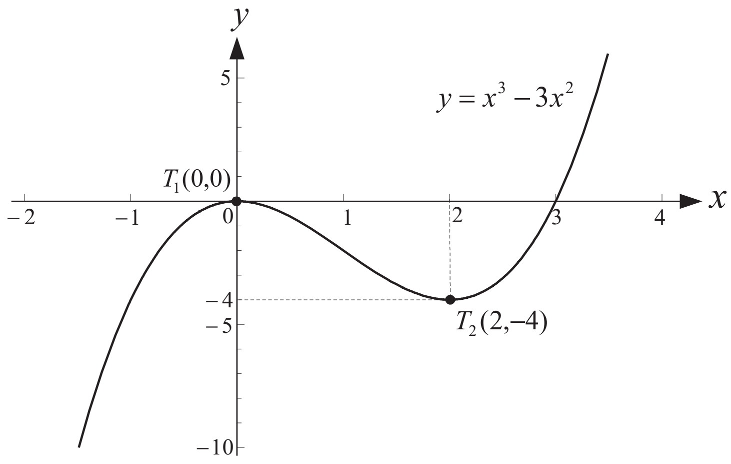
Rešenje. Prvi način. Rešavanjem jednačine

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0\,,$$

zaključujemo da su stacionarne tačke $x = 0$ i $x = 2$. Kako je za $x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$, za $0 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ i za $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ sledi da su tačke $T_1(0, f(0)) = T_1(0, 0)$ i $T_2(2, f(2)) = T_2(2, -4)$ lokalni ekstremi funkcije f i to tačka T_1 je lokalni maksimum, a T_2 lokalni minimum (slika 11.4).
Drugi način. Odredimo i drugi izvod funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6\,,$$

pa je $f(0) = -6 < 0$ i $T_1(0, 0)$ je lokalni maksimum, a pošto je $f(2) = 6 > 0$, tada je $T_1(2, -4)$ lokalni minimum. ■



Slika 11.4: Grafik funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$ sa lokalnim maksimumom u T_1 i lokalnim minimumom u T_2.

Primer 11.4.4 Odrediti lokalne i globalne ekstremne vrednosti (ako postoje) za funkciju $f(x) = x^3 - 3x^2$: a) na celom skupu $\mathbb{R}$, b) na intervalu $[-1, 1]$, c) na intervalu $[-0.5, 4]$.

Rešenje.

a) Urađeno je u primeru 11.4.3. Tačka $T_1(0, 0)$ je lokalni maksimum, a $T_2(2, -4)$ lokalni minimum. Funkcija nema ni globalni minimum ni globalni maksimum na skupu $\mathbb{R}$.

b) Na intervalu $[-1, 1]$ funkcija ima lokalni i globalni maksimum u $T_1(0, 0)$ i lokalni i globalni minimum u tački $(-1, f(-1)) = (-1, -4)$.

c) Na intervalu $[-0.5, 4]$ funkcija ima lokalni maksimum u $T_1(0, 0)$, globalni maksimum u tački $(4, f(4)) = (4, 16)$ i lokalni i globalni minimum u tački $T_2(2, -4)$.

■

11.5 Konveksnost i konkavnost grafika funkcije

U ovom poglavlju prvo ćemo da definišemo konveksnost i konkavnost grafika funkcije, a nakon toga povezati ih sa drugim izvodom funkcije.

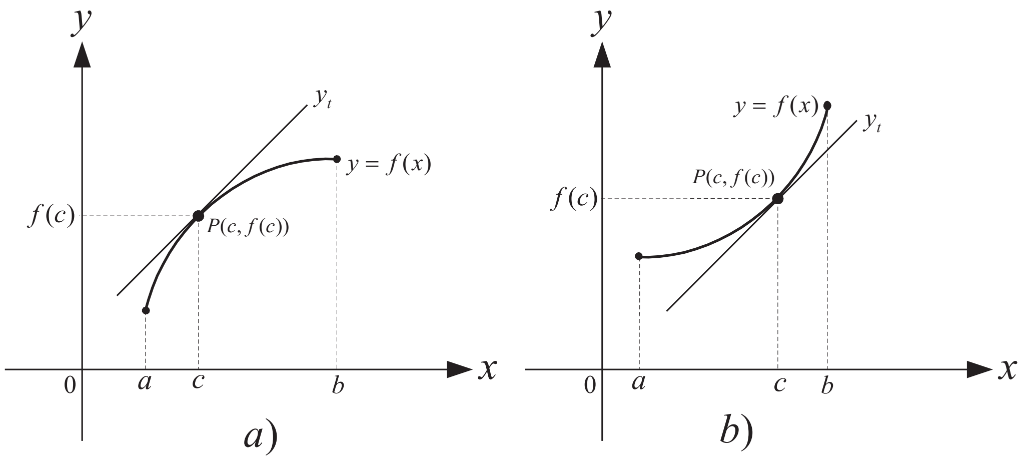
Definicija 11.5.1 *Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a, b). Grafik funkcije f je konveksan ako za svako $c \in (a, b)$ i za svako $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ važi*

$$f(x) > y_t(x)\,,$$

a konkavan ako je

$$f(x) < y_t(x)\,,$$

gde je $y_t(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $(c, f(c))$. Ako je grafik funkcije f konveksan (konkavan) na intervalu (a, b), kažemo da je funkcija konveksna (konkavna) na tom intervalu (slika 11.5).



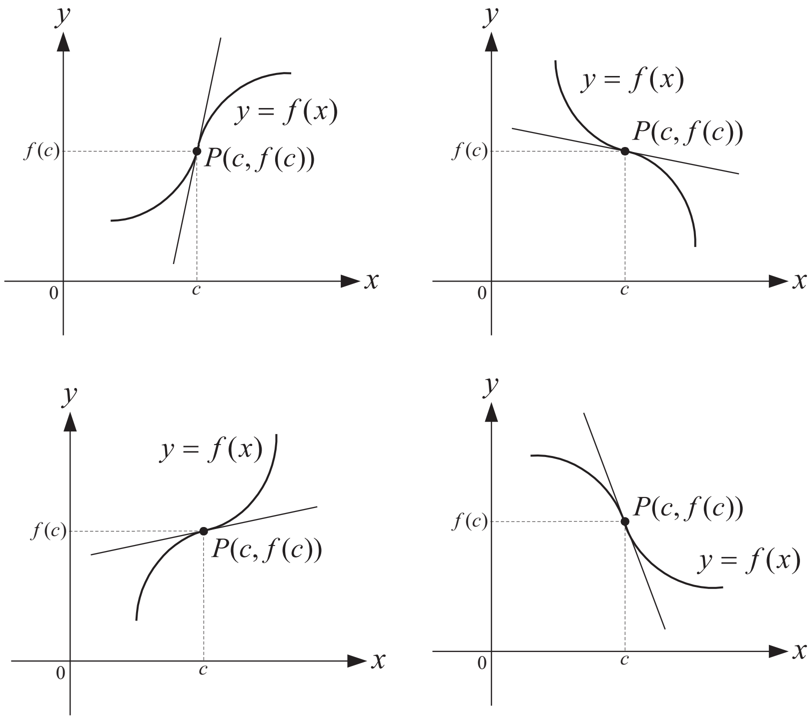
Slika 11.5: Konkavnost (a)) i konveksnost (b)) grafika funkcije f.

Sada ćemo povezati drugi izvod funkcije sa konveksnošću i konkavnošću funkcije. Naime, neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na intervalu (a, b).

- Ako za svako $x \in (a, b)$ važi $f''(x) > 0$, onda je funkcija f konveksna na tom intervalu.
- Ako za svako $x \in (a, b)$ važi $f''(x) < 0$, tada je funkcija f konkavna na tom intervalu.

Postavlja se pitanje šta ako je $f''(x_0) = 0$. Pre nego što damo odgovor, definišimo prevojnu tačku grafika funkcije.

Definicija 11.5.2 *Neka je funkcija f neprekidna na intervalu (a, b) i diferencijabilna u tački $c \in (a, b)$. Tačka $P(c, f(c))$ je prevojna tačka grafika funkcije f ako postoji $\delta > 0$ tako da je funkcija f na intervalu $(c - \delta, c)$ konveksna, a na $(c, c + \delta)$ konkavna ili da je na intervalu $(c - \delta, c)$ konkavna, a na $(c, c + \delta)$ konveksna (slika 11.6).*



Slika 11.6: Prevojne tačke funkcije f.

Povežimo sada prevojnu tačku sa drugim izvodom funkcije.

Teorema 11.5.3 *Neka je funkcija f diferencijabilna u tački $c \in (a,b)$ i ima drugi izvod na intervalu (a,b) osim možda u tački c. $P(c, f(c))$ je prevojna tačka grafika funkcije f ako važi:*

- $f''(x) > 0$, $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ *i* $f''(x) < 0$, $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$ *ili*
- $f''(x) < 0$, $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ *i* $f''(x) > 0$, $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, *za neko* $\delta > 0$.

Dakle, drugi izvod u okolini tačke c menja znak. Ako funkcija f ima neprekidan drugi izvod na intervalu (a,b), tada je potreban uslov za postojanje prevojne tačke $P(c, f(c))$ da važi $f''(c) = 0$. A ako još u okolini tačke c drugi izvod menja znak, tada iz definicije prevojne tačke sledi njeno postojanje.

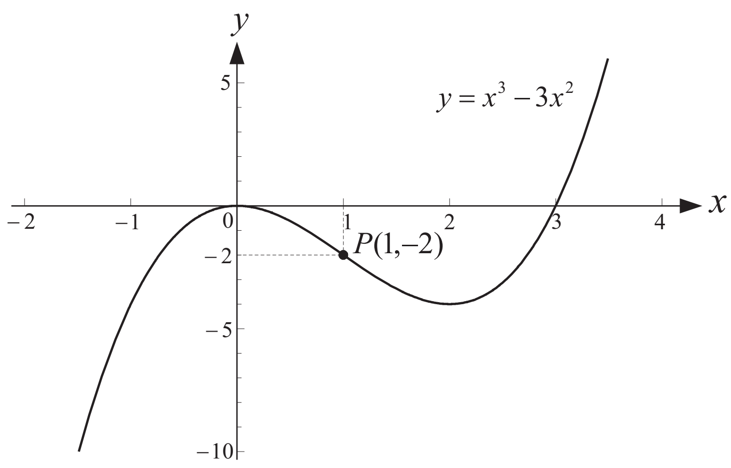
Primer 11.5.4 Odrediti prevojne tačke funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 3x^2 - 6x$, tada je $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$. Rešavanjem jednačine

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1\,,$$

zaključujemo da je tačka $x = 1$ kandidat za prevojnu tačku grafika funkcije. Kako je za $x < 1$, $f''(x) < 0$, a za $x > 1$, $f''(x) > 0$, sledi da je tačka $P(1, f(1)) = P(1, -2)$ prevojna tačka grafika funkcije f (slika 11.7).

■



Slika 11.7: Prevojna tačka $P(1,-2)$ grafika funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$.

11.6 Primeri detaljno ispitanih funkcija

Primer 11.6.1 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$.

Rešenje.

- *Domen.* Pošto je u imeniocu $x^2 + 4 > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, sledi da je $D = \mathbb{R}$.
- *Nule.* $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+4} = -\dfrac{x}{x^2+4} = -f(x)$, pa je funkcija neparna, odnosno grafik funkcije će biti simetričan u odnosu na koordinatni početak. Tada se može ispitivanje obaviti samo za $x \geq 0$, ali zbog kompletnosti, ispitivanje ćemo uraditi za svako $x \in D$.
- *Znak funkcije.* Formiraćemo tabelu u koju unosimo domen i nule funkcije.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
x	$-$	$+$
x^2+4	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$

  Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$.

- *Asimptote.* Kako je domen funkcije skup realnih brojeva, sledi da neprekidna funkcija nema vertikalnih asimptota. Pošto je stepen polinoma u brojiocu manji od stepena polinoma u imeniocu, funkcija će imati samo horizontalnu asimptotu.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2+4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x\left(x + \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x + \frac{4}{x}} = 0^{\pm},$$

  pa je $y = 0$ horizontalna asimptota kada $x \to \pm\infty$.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

a) Potražimo prvi izvod funkcije.

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+4) - x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}\,.$$

b) Potražimo sada nule prvog izvoda $f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ i to su kritične tačke.

c) Odredimo sada znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i nule prvog izvoda.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$4-x^2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2+4)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Dakle, u tački $T_1(-2, f(-2)) = T_1(-2, -\frac{1}{4})$ funkcija će imati lokalni minimum, a u tački $T_2(2, f(2)) = T_2(2, \frac{1}{4})$ lokalni maksimum. Dalje $f(x) \nearrow$ za $x \in (-2,2)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

a) Potražimo drugi izvod funkcije.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(4-x^2)'(x^2+4)^2 - (4-x^2)((x^2+4)^2)'}{(x^2+4)^4} \\
&= \frac{-2x\,(x^2+4)^2 - (4-x^2)\cdot 2\,(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} \\
&= \frac{(x^2+4)\left(-2x\,(x^2+4) - 4x\,(4-x^2)\right)}{(x^2+4)^4} \\
&= \frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3} \\
&= \frac{2x\,(x^2-12)}{(x^2+4)^3}
\end{aligned}$$

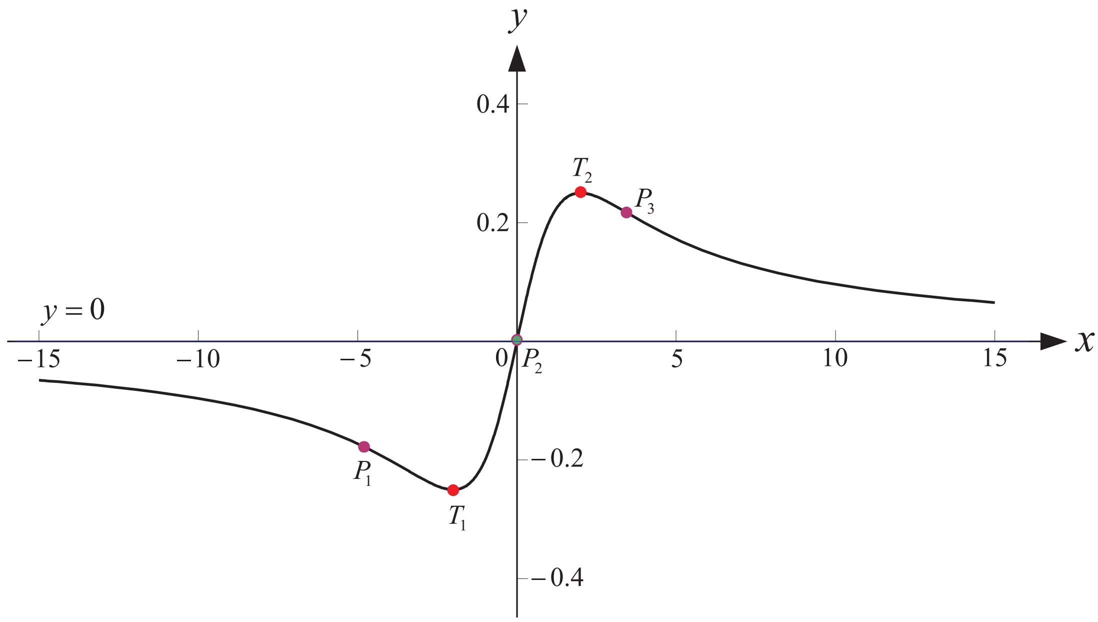
b) Potražimo sada nule drugog izvoda $f''(x) = 0 \Rightarrow x\,(x^2-12) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{3}$ i to su kandidati za prevojne tačke funkcije.

c) Odredimo sada znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i nule drugog izvoda.

	$(-\infty,-2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3},0)$	$(0,2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3},+\infty)$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-12	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x^2+4)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Dakle, u tačkama $P_1(-2\sqrt{3}, f(-2\sqrt{3})) = P_1(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{8})$, $P_2(0, f(0)) = P_2(0,0)$ i $P_3(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3})) = P_3(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{8})$, funkcija ima prevojne tačke. Dalje, funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$, a konkavna ($\frown$) za $x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 11.8.



Slika 11.8: Grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ gde je: $x = 0$ je nula funkcije, $T_1(-2, -\frac{1}{4})$ - lokalni minimum, $T_2(2, \frac{1}{4})$ - lokalni maksimim, $P_1(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{8})$, $P_2(0,0)$ i $P_3(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{8})$ su prevojne tačke. Horizontalna asimptota je $y = 0$.

$\blacksquare$

Primer 11.6.2 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Rešenje.

- *Domen.* Funkcija $\ln x$ je definisana za $x > 0$. Funkcija $f(x)$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}^+$ za koje važi $\ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ pa je $D = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

- *Nule.* $f(x) = 0$ jedino ako je brojilac jednak nuli, ali $x = 0 \notin D$ pa funkcija nema nula.

- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = \dfrac{-x}{\ln(-x)}$, a to nije ni $f(x)$ ni $-f(x)$ pa funkcija nije ni parna ni neparna.

- *Znak funkcije.* Formiraćemo tabelu u koju sada unosimo samo domen jer funkcija nema nula.

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
x	$+$	$+$
$\ln x$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$

  Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (0,1)$.

- *Asimptote.* Potražimo horizontalnu asimptotu i to samo $x \to +\infty$ jer, zbog domena, ne možemo tražiti i kada $x \to -\infty$. Podsetimo se da važi

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\,.$$

  Dakle,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\,,$$

  primenom Lopitalovog pravila (u pitanju je izraz „$\frac{\infty}{\infty}$"), pa ne postoji horizontalna asimptota kada $x \to +\infty$ (potražićemo onda kosu asimptotu kada $x \to +\infty$). Kosa asimptota, ako postoji, oblika je $y = kx + n$, $k \neq 0$. Odredimo sada k.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0\,,$$

  pa ne postoji ni kosa asimptota. Preostalo je da još ispitamo postojanje vertikalne asimptote. Pošto je

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to1^\pm} \ln x = 0^\pm\,,$$

  tada je

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to0^+} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x}\right) = 0^+ \cdot 0^- = 0^-\,, \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty\,, \quad \text{i} \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty\,,$$

  sledi da je prava $x = 1$ vertikalna asimptota, a $x = 0$ nije. Ponašanje funkcije kada $x \to 0^+$ vidi se na slici 11.9 - uvećani kvadrat.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

  a) Potražimo prvi izvod funkcije.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)' \ln x - x\,(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\,.$$

  b) Potražimo sada nule prvog izvoda $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$ i to je jedina kritična tačka.

  c) Odredimo znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i kritične tačke.

	$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
$\ln x - 1$	$-$	$-$	$+$
$\ln^2 x$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

  Dakle, u tački $T_1(e, f(e)) = T_1(e,e)$ je lokalni minimum. Dalje, $f(x) \nearrow$ za $x \in (e,+\infty)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (0,1) \cup (1,e)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

  a) Potražimo drugi izvod funkcije.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\right)' = \frac{(\ln x - 1)' \ln^2 x - (\ln x - 1)\,(\ln^2 x)'}{\ln^4 x} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot 2\,\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\,\ln x\,(\ln x - 2\,(\ln x - 1))}{\ln^4 x} \\ &= \frac{\ln x - 2\ln x + 2}{x\,\ln^3 x} = \frac{2 - \ln x}{x\,\ln^3 x} \end{aligned}$$

  b) Odredimo sada nule drugog izvoda.

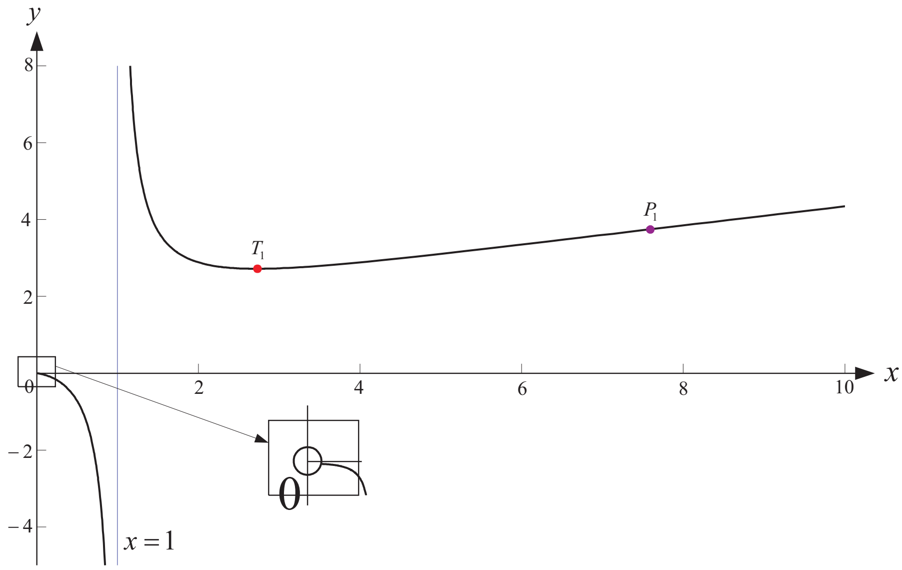
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2\,.$$

  c) Odredimo i znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo samo domen i nulu drugog izvoda.

	$(0,1)$	$(1,e^2)$	$(e^2,+\infty)$
$2 - \ln x$	$+$	$+$	$-$
x	$+$	$+$	$+$
$\ln^3 x$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

  Prevojna tačka je $P_1(e^2, f(e^2)) = P_1(e^2, \frac{e^2}{2}))$. Funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (1,e^2)$, a konkavna ($\frown$) za $x \in (0,1) \cup (e^2,+\infty)$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 11.9.



Slika 11.9: Grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ gde je: $T_1(e, e)$ - lokalni minimum, $P_1(e^2, \frac{e^2}{2})$ je prevojna tačka. Prava $x = 1$ je vertikalna asimptota.

■

Primer 11.6.3 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje.

- *Domen.* Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jer se u $e^{\frac{1}{x}}$, x nalazi u imeniocu eksponenta.

- *Nule.* Posmatrana fukcija ima nulu u $x = -2$ što sledi iz $f(x) = 0 \Rightarrow x+2 = 0$. Funkcija $e^{\frac{1}{x}} > 0$ za svako $x \in D$.

- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = (-x+2)\, e^{\frac{1}{-x}} = -(x-2)\, e^{-\frac{1}{x}} \notin \{f(x), -f(x)\}$, tako da funkcija nije ni parna ni neparna.

- *Znak funkcije.* Formiraćemo tabelu u koju unosimo domen i nulu funkcije.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

  Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in (-2,0) \cup (0,+\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty,-2)$.

- *Asimptote.* Potražimo prvo horizontalnu asimptotu. Podsetimo se da važi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0^{\pm} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1\,.$$

Dakle,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}=\pm\infty\,,$$

pa ne postoji horizontalna asimptota. Kosa asimptota, ako postoji, oblika je $y=kx+n$, $k\neq 0$. Odredimo sada k.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x}\,e^{\frac{1}{x}}=1\cdot 1=1\,.$$

Zaključujemo da je $k=1$. Odredimo i n.

$$\begin{aligned}
n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\,x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\Big((x+2)\,e^{\frac{1}{x}}-x\Big)=\lim_{x\to\pm\infty}\Big(x\,\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big)+2\,e^{\frac{1}{x}}\Big)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}x\,\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big)+2\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+2\\
&= 2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= 2+\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=2+e^0=2+1=3\,.
\end{aligned}$$

Funkcija ima kosu asimptotu $y=x+3$ kada $x\to\pm\infty$. Preostalo je da još ispitamo postojanje vertikalne asimptote kada x teži 0 sa leve i sa desne strane. Podsetimo se da važi

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\quad\text{i}\quad \lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty\,,$$

pa je

$$\lim_{x\to 0^-}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}=2\cdot 0=0\quad\text{i}\quad \lim_{x\to 0^+}(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}=2\cdot(+\infty)=+\infty\,,$$

pa sledi da je prava $x=0$ vertikalna asimptota samo kada $x\to 0^+$.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

  a) Potražimo prvi izvod funkcije.

$$\begin{aligned}
f'(x)=\Big((x+2)\,e^{\frac{1}{x}}\Big)' &= (x+2)'\,e^{\frac{1}{x}}+(x+2)\,\Big(e^{\frac{1}{x}}\Big)'=e^{\frac{1}{x}}+(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2}
\end{aligned}$$

  b) Potražimo nule prvog izvoda $f'(x)=0\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=-1$, $x=2$ i to su kritične tačke.

c) Odredimo sada znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i kritične tačke.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-x-2	$+$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, u tački $T_1(-1,f(-1))=T_1(-1,\dfrac{1}{e})$ lokalni maksimum, dok je u $T_2(2,f(2))=T_2(2,4\sqrt{e})$ lokalni minimum. Dalje, $f(x)\nearrow$ za $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$, a $f(x)\searrow$ za $x\in(-1,0)\cup(0,2)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

a) Potražimo drugi izvod funkcije. Uradimo prvo pomoćni izvod koji će nam biti potreban kasnije.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)' &= \frac{(x^2-x-2)'x^2-(x^2-x-2)(x^2)'}{x^4}\\
&= \frac{(2x-1)\,x^2-(x^2-x-2)\cdot 2x}{x^4}\\
&= \frac{2x^3-x^2-2x^3+2x^2+4x}{x^4}\\
&= \frac{x^2+4x}{x^4}=\frac{x\,(x+4)}{x^4}=\frac{x+4}{x^3}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
f''(x)=\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)' &= \left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\frac{x^2-x-2}{x^2}+e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)'\\
&= -\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2}+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x+4}{x^3}\\
&= \frac{1}{x^4}\,e^{\frac{1}{x}}\,(-x^2+x+2+x^2+4x)\\
&= \frac{1}{x^4}\,e^{\frac{1}{x}}\,(5x+2)\,.
\end{aligned}$$

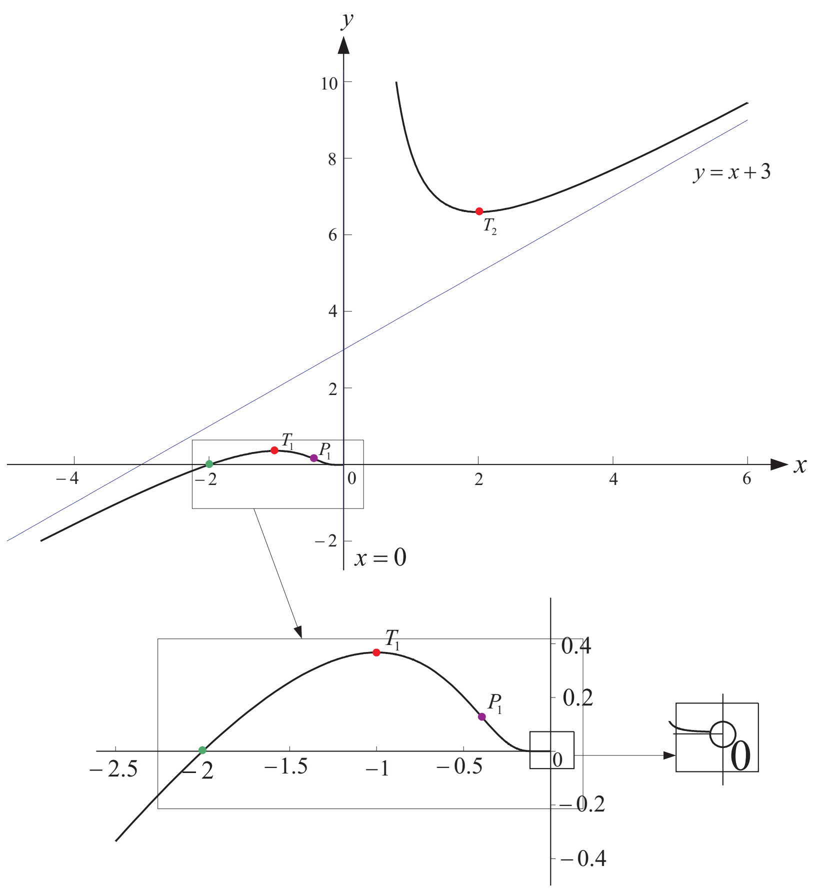
b) Nula drugog izvoda se dobija iz $5x+2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{5}$ i to je kandidat za prevojnu tačku.

c) Odredimo sada znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i jedinog kandidata za prevojnu tačku.

	$(-\infty,-\frac{2}{5})$	$(-\frac{2}{5},0)$	$(0,+\infty)$
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$
$5x+2$	$-$	$+$	$+$
x^4	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\smile$

Prevojna tačka je $P_1\left(-\frac{2}{5}, f\left(-\frac{2}{5}\right)\right) = P_1\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5\,e^2\sqrt{e}}\right)$. Funkcija je konveksna $(\smile)$ za $x \in (-\frac{2}{5},0) \cup (0,+\infty)$, a konkavna $(\frown)$ za $x \in (-\infty,-\frac{2}{5})$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 11.10.



Slika 11.10: Grafik funkcije $f(x) = (x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$ gde je: $x=-2$ nula funkcije, $T_1(-1,\frac{1}{e})$ - lokalni maksimum, $T_2(2,4\sqrt{e})$ - lokalni minimum. Prevojna tačka je $P_1\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5\,e^2\sqrt{e}}\right)$. Prava $x=0$ je vertikalna asimptota kada $x \to 0^+$, a $y=x+3$ je kosa asimptota.

■

Primer 11.6.4 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

Rešenje.

- *Domen.* Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$ za koje važi $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ pa je $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

- *Nule.* Posmatrana fukcija nema nula jer je $e^x > 0$ za svako $x \in D$.

- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{-x-1} = -\dfrac{1}{e^x(x+1)} \notin \{f(x), -f(x)\}$, tako da funkcija nije ni parna ni neparna.

- *Znak funkcije.* Formiraćemo tabelu u koju unosimo samo domen.

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
e^x	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$

  Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 1)$.

- *Asimptote.* Potražimo horizontalnu asimptotu i to posebno kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$. Podsetimo se da važi

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

  Dakle,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty\,,$$

  primenom Lopitalovog pravila (izraz „$\frac{\infty}{\infty}$”), pa ne postoji horizontalna asimptota kada $x \to +\infty$ (potražićemo onda kasnije kosu asimptotu kada $x \to +\infty$). U preostalom slučaju imaćemo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{-x}(x-1)} = 0\,,$$

  odakle sledi da je $y = 0$ horizontalna asimptota kada $x \to -\infty$ i tada nema i kosu asimptotu kada $x \to -\infty$.

  Potražimo kosu asimptotu. Odredimo prvo k.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

  nakon dve primene Lopitalovog pravila. Sledi da ne postoji kosa asimptota kada $x \to +\infty$. Preostalo je da još ispitamo postojanje vertikalne asimptote. Pošto je

$$\lim_{x\to1^-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to1^+} \frac{e^x}{x-1} = +\infty\,,$$

  sledi da je prava $x = 1$ vertikalna asimptota.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

  a) Potražimo prvi izvod funkcije.
  $$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x-1}\right)' = \frac{(e^x)'(x-1) - e^x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{e^x\,(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x\,(x-2)}{(x-1)^2}\,.$$

  b) Potražimo i nule prvog izvoda $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ i to je jedina kritična tačka.

  c) Odredimo sada znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i kritične tačke.

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
e^x	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

  Dakle, u tački $T_1(2, f(2)) = T_1(2, e^2)$ je lokalni minimum. Dalje, $f(x) \nearrow$ za $x \in (2,+\infty)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (-\infty,1) \cup (1,2)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

  a) Potražimo drugi izvod funkcije. Pošto je
  $$(e^x\,(x-2))' = (e^x)'\,(x-2) + e^x\,(x-2)' = e^x\,(x-2) + e^x = e^x\,(x-1)\,,$$
  tada je
  $$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^x\,(x-2)}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(e^x\,(x-2))'(x-1)^2 - e^x\,(x-2)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} \\ &= \frac{e^x\,(x-1)(x-1)^2 - e^x\,(x-2)\cdot 2\,(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{e^x\,(x-1)\left((x-1)^2 - 2\,(x-2)\right)}{(x-1)^4} = \frac{e^x\,\left(x^2-2x+1-2x+4\right)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{e^x\,\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3} = \frac{e^x\,\left((x-2)^2+1\right)}{(x-1)^3}\,. \end{aligned}$$

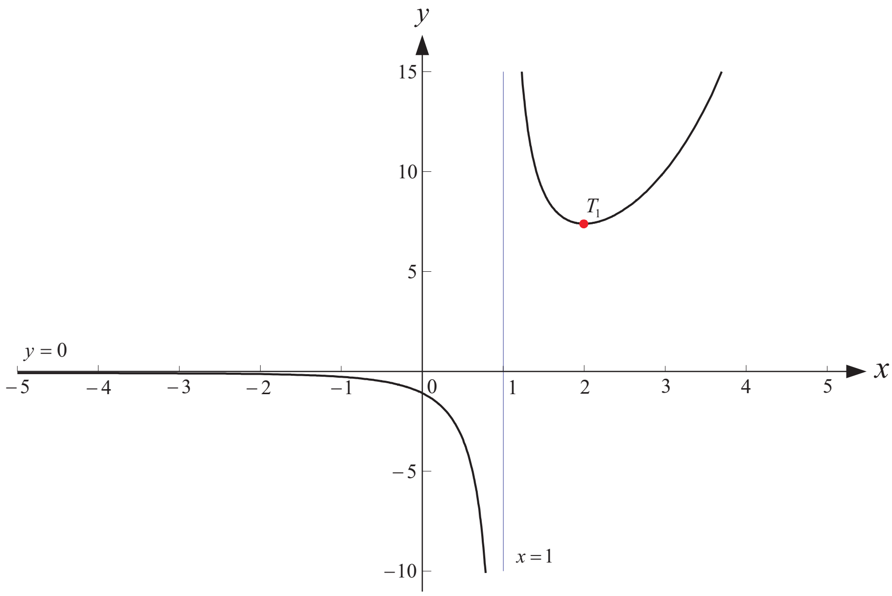
  b) Kako je brojilac drugog izvoda veći od nule za svako $x \in D$, sledi da nema kandidata za prevojne tačke ($f''(x) \neq 0\,,\ x \in D$).

  c) Odredimo sada znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo onda samo domen.

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
e^x	$+$	$+$
$(x-2)^2+1$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

  Funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (1,+\infty)$, a konkavna ($\frown$) za $x \in (-\infty,1)$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 11.11.



Slika 11.11: Grafik funkcije $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ gde je: $T_1(2, e^2)$ - lokalni minimum. Prava $y = 0$ je horizontalna asimptota kada $x \to -\infty$, a $x = 1$ je vertikalna asimptota.

■

Primer 11.6.5 Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

Rešenje.

- *Domen.* Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, pa je $D = \mathbb{R}$.
- *Nule.* $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
- *Parnost i neparnost.* $f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x)$, pa je funkcija parna, odnosno grafik funkcije je osno simetričan u odnosu na y-osu.
- *Znak funkcije.* Pošto je potkorena veličina kvadrirana, funkcija je stalno pozitivna osim u tačkama u kojima je jednaka nuli. Znači, $f(x) > 0$ za $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, a $f(x) < 0$ za $x \in \emptyset$.
- *Asimptote.* Pošto je domen funkcije skup realnih brojeva, neprekidna funkcija nema vertikalnih asimptota. Potražimo horizontalnu asimptotu.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = +\infty$$

pa horizontalna asimptota ne postoji. Kosa asimptota je oblika $y = kx + n$, $k \neq 0$. Odredimo k.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \pm\infty\,,$$

odakle sledi da ne postoji ni kosa asimptota.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti.*

a) Potražimo prvi izvod funkcije.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right)' = \left((x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\,(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}\,.$$

b) Potražimo sada nule prvog izvoda $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ i to je jedna kritična tačka. Vidimo da je imenilac jednak nuli u $x = \pm 1$, pa u tim tačkama prvi izvod nije definisan, odnosno funkcija nije diferencijabilna. Odredimo ponašanje prvog izvoda u okolini tačaka $x = -1$ i $x = 1$.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty\,, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty\,,$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty\,,$$

pa će se u tačkama $x = \pm 1$ (druge dve kritične tačke) pojaviti „špic".

c) Odredimo sada znak prvog izvoda, ekstremne vrednosti i intervale monotonosti. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i kritične tačke.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt[3]{x^2-1}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, u tačkama $T_1(-1, f(-1)) = T_1(-1,0)$ i $T_3(1, f(1)) = T_3(1,0)$ funkcija će imati lokalni minimum, a u tački $T_2(0, f(0)) = T_2(0,1)$ lokalni maksimum. Dalje $f(x) \nearrow$ za $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$, a $f(x) \searrow$ za $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$.

- *Prevojne tačke, konveksnost i konkavnost.*

  a) Potražimo drugi izvod funkcije.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}\right)' = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}\right)' \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{x'\,(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - x\left((x^2-1)^{\frac{1}{3}}\right)'}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - x\cdot\frac{1}{3}\cdot(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2-1-\frac{2}{3}x^2\right)}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4(x^2-3)}{9(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4(x^2-3)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}.
\end{aligned}
$$

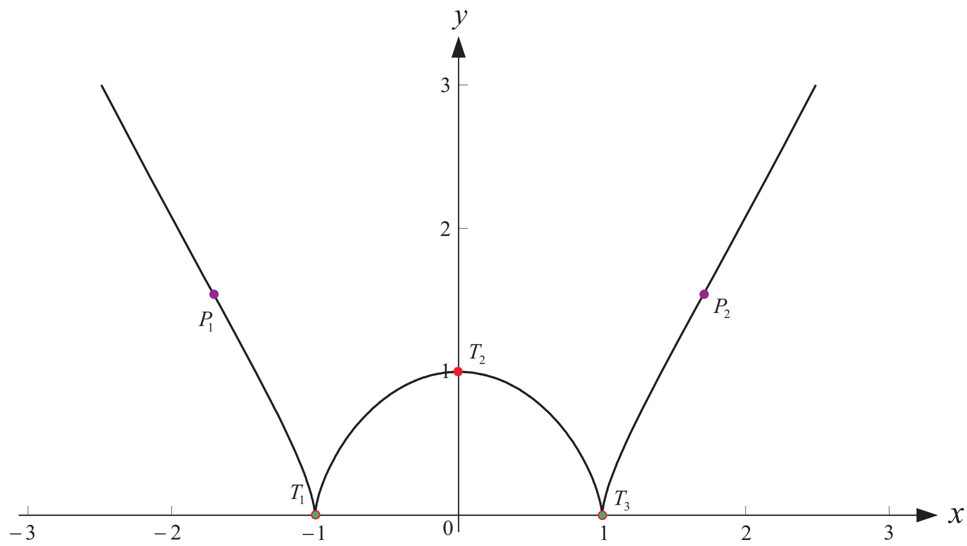
  b) Nule drugog izvoda su: $f''(x)=0 \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ i to su kandidati za prevojne tačke funkcije.

  c) Odredimo još i znak drugog izvoda, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost. Formiramo tabelu u koju unosimo domen i nule drugog izvoda i tačke u kojima drugi izvod nije definisan.

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
x^2-3	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\sqrt[3]{(x^2-1)^4}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\smile$

  Dakle, $P_1(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = P_1(-\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ i $P_2(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = P_2(\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ su prevojne tačke. Dalje, funkcija je konveksna ($\smile$) za $x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$, a konkavna ($\frown$) za $x \in (-\sqrt{3},-1) \cup (-1,1) \cup (1,\sqrt{3})$.

- *Grafik ispitane funkcije.* Pogledati sliku 11.12.



Slika 11.12: Grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ gde je: $x = -1$ i $x = 1$ su nule funkcije, $T_1(-1, 0)$ i $T_3(1, 0)$ - lokalni minimumi, $T_2(0, 1)$ - lokalni maksimim, $P_1(-\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ i $P_2(\sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ su prevojne tačke.

■

11.7 Primena izvoda u biologiji i fitomedicini

Primer 11.7.1 Jedan od modela za stopu rasta populacije veličine N odražava činjenicu da neke populacije opadaju do izumiranja osim ako ne ostanu iznad kritične vre-dnosti. Specijalan slučaj takvog modela je

$$f(N) = N(N-3)(8-N),$$

gde je broj N u stotinama individua. Odrediti minimum i maksimum date funkcije za $0 \leq N \leq 9$.

Rešenje. Odredimo prvi i drugi izvod date funkcije rasta populacije.

$$f'(N) = (-N^3 + 11N^2 - 24N)' = -3N^2 + 22N - 24,$$
$$f''(N) = (-3N^2 + 22N - 24)' = -6N + 22.$$

Rešenja jednačine $f'(N) = 0$ su

$$N_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{484-288}}{-6} = \frac{-22 \pm 14}{-6} \Rightarrow N_1 = 4/3,\ N_2 = 6.$$

Sada je $f''(4/3) = 14 > 0$, pa je u tački $(4/3, f(4/3)) = (4/3, -400/27)$ lokalni minimum. Kako je $f''(6) = -14 < 0$, tada je u tački $(6, f(6)) = (6, 36)$ lokalni maksimum. Pošto je $f(0) = 0$ i $f(9) = -54$, zaključujemo da je najveći rast pri $N = 6$, odnosno pri populaciji od 600 jedinki i on iznosi 3600 idividua godišnje, a najveći pad je 5400 individua godišnje za $N = 9$. ■

Primer 11.7.2 Nakon što je uzeta tableta antibiotika, koncentracija u krvotoku se modeluje funkcijom

$$C(t) = 8(e^{-0.4t} - e^{-0.6t}),$$

gde je t vreme izraženo u satima, C koncentracija antibiotika u $\mu g/ml$. Koja je maksimalna koncentracija antibiotika tokom prvih 12 sati?

Rešenje. Kako je $0 \leq t \leq 12$, tada je $C(0) = 0$ i $C(12) = 8\left(e^{-24/5} - e^{-36/5}\right) \approx 0.06$. Odredimo prvi i drugi izvod funkcije $C(t)$ i izjednačimo prvi izvod sa nulom da bismo odredili stacionarne tačke.

$$C'(t) = 8\left(0.6e^{-0.6t} - 0.4e^{-0.4t}\right), \quad C''(t) = 8\left(0.16e^{-0.4t} - 0.36e^{-0.6t}\right).$$

Dalje je,

$$\begin{aligned}
C'(t) = 0 \Rightarrow \quad & 0.6e^{-0.6t} - 0.4e^{-0.4t} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{0.6}{0.4} = \frac{e^{-0.4t}}{e^{-0.6t}} \\
\Rightarrow \quad & \frac{3}{2} = e^{0.2t} \\
\Rightarrow \quad & \ln\frac{3}{2} = 0.2\,t \\
\Rightarrow \quad & t = 5\ln\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Pošto je $C''\left(5\ln\frac{3}{2}\right) = -\frac{64}{225} < 0$, sledi da $C(t)$ ima maksimum u tački $t = 5\ln\frac{3}{2} \approx 2h$ i on iznosi $C_{\max} = C\left(5\ln\frac{3}{2}\right) = 32/27 \approx 1.19\,\mu g/ml$. ■

Primer 11.7.3 Zapremina V jednog kilograma vode (u kubnim centimetrima) pri temperaturi T je aproksimirana formulom

$$V(T) = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3.$$

Naći temperaturu pri kojoj je maksimalna gustina vode, ako je $0 \leq T \leq 30$.

Rešenje. Potrebno je naći kada je zapremina najmanja da bi gustina bila najveća. Prvo ćemo odrediti zapremine pri temperaturama $T = 0$ i $T = 30$ stepeni. $V(0) = 999.87\ cm^3$, a $V(30) = 1003.76\ cm^3$. Dalje je prvi izvod jednak $V'(T) = -0.06426 + 0.0170086T - 0.0002037T^2$, a drugi $V''(T) = 0.0170086 - 0.0004074T$. Odredimo sada stacionarne tačke rešavanjem jednačine

$$V'(T) = 0 \Rightarrow T_1 = 3.9665146, \quad T_2 = 79.5317672.$$

Kako je $V''(T_1) = 0.0153926 > 0$, a $V(T_2) = -0.0153926 < 0$, lokalni (i globalni) minimum je u tački T_1 i iznosi

$$V_{\min} = V(T_1) = 999.7446746\ cm^3.$$

Maksimalna gustina vode je, dakle, pri temperaturi $T_1 = 3.9665146$ stepeni i iznosi

$$\rho_{max} = \frac{1}{999.7446746}\frac{kg}{cm^3} = 1000.255391\frac{kg}{m^3}.$$

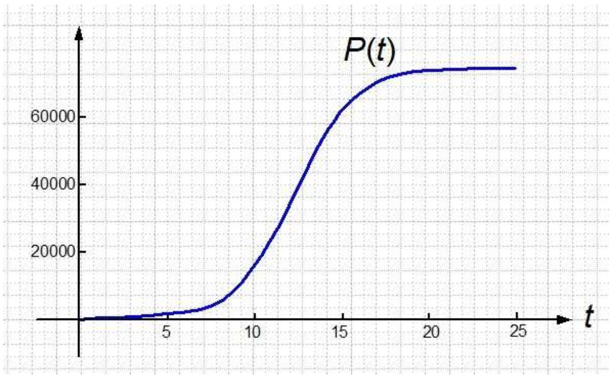
■

Primer 11.7.4 Populacija medonosnih pčela uzgajanih u pčelinjaku brojala je 50 pčela u vremenu $t = 0$. Porast broja pčela prikazan je funkcijom

$$P(t) = \frac{75200}{1 + 1503\, e^{-0.5932\, t}}$$

gde je t vreme u nedeljama, $0 \leq t \leq 25$. U kojoj nedelji je najveći porast populacije pčela?

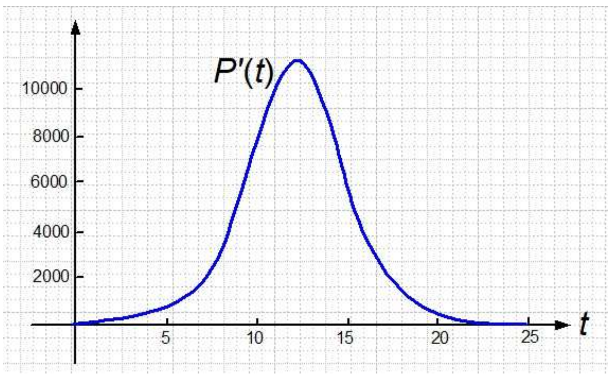
Rešenje. Grafik funkcije $P(t)$ prikazan je na slici 11.13. Najveći porast populacije pčela biće u tački u kojoj tangenta ima najveći nagib u odnosu na pozitivni deo t-ose. To će biti tačka u kojoj je prvi izvod maksimalan. Znači treba naći tačku u kojoj je drugi izvod date funkcije jednak nuli.



Slika 11.13: Grafik funkcije $P(t)$.

Odredimo sada prvi i drugi izvod funkcije $P(t)$. Prvi izvod je (slika 11.14)

$$P'(t) = \frac{67046785.92\, e^{-0.5932\, t}}{(1 + 1503\, e^{-0.5932\, t})^2}.$$



Slika 11.14: Grafik funkcije $P'(t)$.

Radi jednostavnosti, neka je $a = 67046785.92$, $b = 0.5932$ i $c = 1503$. Tada je drugi izvod jednak

$$P''(t) = \left(\frac{a\, e^{-b\, t}}{(1 + c\, e^{-b\, t})^2} \right)' = \frac{a\, b\, e^{-b\, t}\, (-1 + c\, e^{-b\, t})}{(1 + c\, e^{-b\, t})^3}.$$

Odredimo nulu drugog izvoda.

$$\begin{aligned} P''(t) = 0 \quad &\Rightarrow -1 + c\,e^{-b\,t} = 0 \\ &\Rightarrow e^{-b\,t} = \tfrac{1}{c} \\ &\Rightarrow -b\,t = \ln \tfrac{1}{c} \\ &\Rightarrow t = -\tfrac{1}{b} \ln \tfrac{1}{c} \\ &\Rightarrow t = \tfrac{1}{b} \ln c \\ &\Rightarrow t \approx 12.3318\,. \end{aligned}$$

■

Primer 11.7.5 Bumbari posećuju mnogo cveća tražeći nektar. Količina $N(t)$ uzetog nektara sa bilo kog cveta raste sa količinom vremena t provedenog na tom cvetu. Pretpostavimo da je ova funkcija data sa

$$N(t) = \frac{0.3\,t}{t+2}\,,$$

gde je t vreme u sekundama, N količina uzetog nektara u miligramima. Pretpostavimo da je vreme potrebno da se sa jednog cveta preleti na drugi 4 sekunde. Ako bumbar provede t sekundi na svakom cvetu, napisati jednačinu za prosečnu količinu nektara uzetog u jednoj sekundi od početka uzimanja do doletanja na naredni cvet. Ako pretpostavimo da se bumbari hrane na datom cvetu onoliko vremena za koje je dobijena maksimalna prosečna količina nektara, koliko je optimalno vreme traženja hrane?

Rešenje. Prosečna količina nektara uzeta u jednoj sekundi je

$$f(t) = \frac{N(t)}{t+4} = \frac{0.3\,t}{(t+2)(t+4)}\,.$$

Odredimo prvi i drugi izvod funkcije $f(t)$:

$$f'(t) = \frac{-0.3t^2 + 2.4}{((t+2)(t+4))^2}, \quad f''(t) = \frac{0.6(t^3 - 24\,t - 48)}{((t+2)(t+4))^3}\,.$$

Pošto je $t \geq 0$, iz jednačine $f'(t) = 0$ sledi $t = 2\sqrt{2}$. Kako je $f''(2\sqrt{2}) \approx -0.0012 < 0$, zaključujemo da je optimalno vreme traženja hrane $t = 2\sqrt{2}$ sekunde uz maksimalni uzeti nektar od $f(2\sqrt{2}) \approx 0.175736$ miligrama. ■

11.8 Zadaci za vežbu

1. Pokazati da funkcija $f(x) = x^4 - 2x^2$ zadovoljava uslove Rolove teoreme za $x \in [0, \sqrt{2}]$. Naći odgovarajuće vrednosti θ.

2. Koji od uslova Rolove teoreme nije ispunjen na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$ za funkciju $f(x) = |\sin x|$?

3. Da li funkcija $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ ispunjava uslove Rolove teoreme na intervalu $[-1, 1]$?

4. Napisati Lagranžovu formulu i naći odgovarajuće θ za $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $[0, 1]$ i za $f(x) = \ln x$ na intervalu $[1, e]$.

5. Koji od uslova Lagranžove teoreme nije ispunjen na intervalu $[1/e, e]$ za funkciju $f(x) = |\ln x|$?

6. Primenom Lagranžove teoreme dokazati da je $\sin(x+h) - \sin x = h\cos\theta$, gde je $x < \theta < x+h$.

7. Primenom Lagranžove teoreme dokazati nejednakost $\dfrac{1}{a+1} < \ln\dfrac{1+a}{a} < \dfrac{1}{a}$, $a > 0$.

8. Razviti polinom $P(x) = 5x^4 - 36x^3 + 99x^2 - 122x + 57$ po stepenima od $(x-2)$ koristeći Tejlorov polinom.
$(P(x) = 1 + 2(x-2) + 3(x-2)^2 + 4(x-2)^3 + 5(x-2)^4)$

9. Razviti polinom $P(x) = x^{10} - 3x^5 + 1$ po stepenima od $(x-1)$ koristeći Tejlorov polinom.
$(P(x) = -1 - 5(x-1) + 15(x-1)^2 + 90(x-1)^3 + 195(x-1)^4 + 249(x-1)^5 + 210(x-1)^6$
$+120(x-1)^7 + 45(x-1)^8 + 10(x-1)^9 + (x-1)^{10})$

10. Naći Tejlorovu formulu n-tog stepena za funkciju $y = x^3 \ln x$ u okolini tačke $x_0 = 1$.
$(y = (x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \sum_{k=4}^{n} \frac{(-1)^k\, 6\,(x-1)^k\,(k-4)!}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}\, 6\,(x-1)^{n+1}\,(n-3)!}{(1+\nu(x-1))^{n-2}(n+1)!}$,
$0 < \nu < 1)$

11. Aproksimirati funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ Maklorenovim polinomom trećeg stepena i procenti grešku aproksimacije za $|x| \le \frac{1}{10}$. $(\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + R_3,\ R_3 < 1/(3 \cdot 10^3))$

12. Izračunati približno $\sin 1$ pomoću Maklorenovog polinoma petog stepena za funkciju $\sin x$. $(\sin 1 \approx 0.84)$

13. Aproksimirati funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \ge -1$, Maklorenovim polinomom drugog stepena i oceniti grešku u intervalu $\left(0, \frac{1}{10}\right)$. $(R_2 < \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3)$

14. Izračunati graničnu vrednost $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x - 1}{x^7 - 4x + 3}$. $(L = -2/3)$

15. Izračunati graničnu vrednost $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$. $(L = 0)$

16. Izračunati graničnu vrednost $L = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - 2^x}{x}$. $(L = +\infty)$

17. Izračunati graničnu vrednost $L = \lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$. $(L = 1)$

18. Naći odnos između poluprečnika r i visine H cilindra, tako da njegova površina bude najmanja pri datoj zapremini V.

19. Zapremina pravilne trostrane prizme je V. Kolika treba da bude ivica osnove da bi površina prizme bila najmanja?

20. Između svih pravouglih trouglova obima $2s$, odrediti onaj čiji je poluprečnik upisanog kruga najveći.

21. Od svih pravougaonika datog obima, naći onaj čija je površina maksimalna.

22. Rastaviti broj 10 na dva sabirka tako da njihov proizvod ima najveću moguću vrednost.

23. Komad žice čija je dužina a cm, treba podeliti na dva dela, i od jednog napraviti kvadrat, a od drugog jednakostranični trougao. Kako treba podeliti žicu da bi zbir površina tako dobijenih figura bio minimalan? (Stranica trougla je $3a/(9+4\sqrt{3})$, a kvadrata $\sqrt{3}a/(9+4\sqrt{3})$.)

24. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=(x-1)^3/(x+1)^2$.

25. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=x-2-6/(x-1)$.

26. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$.

27. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=\ln((1-x)/(x+5))$.

28. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

29. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=(\ln x)^2-\ln x^2$.

30. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=x+\ln(x^2-1)$.

31. Pretpostavimo da se antibiotik intravenozno primenjuje kod pacijenta i to konstantnom brzinom i da se metaboliše. Koncentracija antibiotika posle jedne jedinice vremena je $c(V)=c_0e^{-1/V}+\vartheta V(1-e^{-1/V})$, gde je c_0 početna koncentracija, ϑ brzina primene leka, V zapremina krvi pacijenta. Za velike vrednosti V, kako se ponaša $c(V)$?

32. Farmer ima 2400 metara ograde i želi da ogradi polje u obliku pravougaonika. Ono se graniči sa rekom koja ima ravnu obalu i ne treba mu ograda duž reke. Kolike treba da budu stranice pravougaonika da bi polje imalo najveću površinu?

33. Kermack-McKendrick-ov model za prenošenje zarazne bolesti može biti korišćen za predviđanje veličine populacije P kao funkcije od virulentnosti bolesti (tj. stepena u kojem bolest ubija ljude). Veličina populacije P je velika kada je virulencija v niska i takođe je velika i kada je virulencija visoka jer bolest ubija ljude tako brzo da se vrlo mali broj ljudi zarazi. Veličina populacije je

$$P(v)=\frac{10+v+v^2}{1+v},\quad 0\le v\le 9.$$

Odrediti najmanju i najveću veličinu populacije i virulentnost za koje se one pojavljuju.

34. Pretpostavimo da se antibiotici ubrizgavaju pacijentu za lečenje sinusne infekcije. Antibiotici cirkulišu u krvi, polako difuzno ulazeći u sinusnu šupljinu, dok se istovremeno filtriraju iz krvi pomoću jetre. Koncentracija antibiotika u sinusnoj šupljini u vremenu t nakon ubrizgavanja je:

$$c(t)=\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha},\quad \beta>\alpha>0.$$

U koje vreme t koncentracija antibiotika dodstiže maksimalnu vrednost ako je $\beta=0.4$, $\alpha=0.2$?

GLAVA 12

Neodređeni integral

U prethodnom poglavlju se za poznatu funkciju određivao prvi izvod. Postavlja se pitanje, da li se može odrediti funkcija čiji je prvi izvod poznat, odnosno, da li se može odrediti funkcija $F(x)$ tako da, za poznato $f(x)$, važi $F'(x) = f(x)$. U ovoj glavi uveden je pojam neodređenog integrala, date su osobine i načini rešavanja u zavisnosti od tipa integrala.

12.1 Pojam i osnovne osobine

Definicija 12.1.1 *Neka funkcija f preslikava otvoreni interval (a,b) u skup $\mathbb{R}$, odnosno, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Funkcija F je primitivna funkcija (ili prvobitna) za funkciju f na intervalu (a,b) ako je*

$$F'(x) = f(x), \; x \in (a,b)\,. \tag{12.1}$$

Na primer, ako je $f(x) = x$, tada je jedna primitivna funkcija $F(x) = x^2/2$ jer je

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x = f(x)\,.$$

Međutim, i funkcija $F(x) = x^2/2 + 1$ je takođe primitivna funkcija za $f(x) = x$. Umesto broja 1, može stajati bilo koja konstanta C, tako da je i $F(x) = x^2/2 + C$ primitivna funkcija za $f(x) = x$. Sada dolazimo do pojma neodređenog integrala.

Definicija 12.1.2 *Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) je neodređeni integral funkcije f na intervalu (a,b) i zapisuje se*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \; x \in (a,b), \tag{12.2}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Veza između neodređenog integrala i izvoda funkcije data je preko sledeće dve jednakosti koje slede iz (12.2)

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

i

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C\,.$$

Formirajmo sada tablicu osnovnih neodređenih integrala.

(ni1) $\displaystyle\int dx = x + C$;

(ni2) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. U slučaju da x^α nije definisano za $x \leq 0$, tada jednakost važi za $x > 0$;

(ni3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, $x \neq 0$;

(ni4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

(ni5) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

(ni5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$, $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

(ni6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$, $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

(ni7) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$;

(ni8) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$;

(ni9) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$;

(ni10) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$;

(ni11) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$, $x \neq \pm 1$;

(ni12) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $a \neq 0$, $x \neq \pm a$;

(ni13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$;

(ni14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$, $a \neq 0$;

(ni15) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$, $|x| > 1$;

(ni16) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,\ a\neq 0,\ |x|>a;$

(ni17) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,\ |x|<1;$

(ni18) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a\neq 0,\ |x|<a;$

(ni19) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C;$

(ni20) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C.$

Osobine neodređenog integrala su:

- $\displaystyle\int (\alpha f(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx,\ \alpha\in\mathbb{R};$
- $\displaystyle\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx;$

Primer 12.1.3 Izračunati integral

$$\int\left(3x^2-4\cos x+e^x-2\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx\,.$$

Rešenje. Korišćenjem osobina integrala i tablične integrale (ni2), (ni5), (ni8) i (ni18) imaćemo

$$\begin{aligned}
&\int\left(3x^2-4\cos x+e^x-2\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx\\
&\qquad= 3\int x^2\,dx-4\int\cos x\,dx+\int e^x\,dx-2\int x^{3/4}\,dx+5\int\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx\\
&\qquad= 3\cdot\frac{x^3}{3}-4\sin x+e^x-2\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+5\arcsin\frac{x}{2}+C\\
&\qquad= x^3-4\sin x+e^x-2\cdot\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}+5\arcsin\frac{x}{2}+C\\
&\qquad= x^3-4\sin x+e^x-\frac{8}{7}\cdot\sqrt[4]{x^7}+5\arcsin\frac{x}{2}+C\,.
\end{aligned}$$

■

Primer 12.1.4 Izračunati integral

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx\,.$$

Rešenje. Pokušaćemo jednom transformacijom da početni integral svedemo na integrale (ni1), (ni2) i (ni9) iz tablice integrala. Naime,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx &= \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^4-1}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}\, dx + \operatorname{arctg} x = \int (x^2-1)\, dx + \operatorname{arctg} x \\
&= \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C\,.
\end{aligned}$$

■

Primer 12.1.5 Izračunati integral

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx\,.$$

Rešenje. Ovde ćemo koristiti osnovnu trigonometrijsku jednakost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i integrale (ni5) i (ni6) iz tablice osnovnih integrala.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C\,.
\end{aligned}$$

■

12.2 Metod smene kod neodređenog integrala

Smena kod neodređenog integrala koristi se da bi se početni integral sveo na jedan od tabličnih integrala. Neka je $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ jedna primitivna funkcija za funkciju f, tj, $\int f(x)\, dx = F(x) + C$. Neka dalje funkcija $\phi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ diferencijablina na intervalu (α, β). Tada važi

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \{t = \phi(x),\ dt = \phi'(x)\, dx\} = \int f(t)\, dt = F(t) + C = F(\phi(x)) + C\,.$$

Primer 12.2.1 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a^2}\, dx$, $a > 0$.

Rešenje. Odgovarajuća smena je $t = x^2 + a^2$, $dt = 2x\, dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x\, dx$. Sada imamo

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C.$$

■

Primer 12.2.2 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a>0$.

Rešenje. Smena je $t = x^2 + a^2$, $\frac{dt}{2} = x\,dx$, pa je

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} + C\,.$$

■

Primer 12.2.3 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $|x|<a$, $a>0$.

Rešenje. Smena je $t = a^2 - x^2$, $dt = -2x\,dx \Rightarrow -\frac{dt}{2} = x\,dx$. Sada je

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{a^2-x^2} + C\,.$$

■

Primer 12.2.4 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$, $|x|>a$, $a>0$.

Rešenje. Slično kao i u prethodnom primeru, smena je $t = x^2 - a^2$, $dt = 2x\,dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x\,dx$. Sada je

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-a^2} + C\,.$$

■

Primer 12.2.5 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $|x|<a$, $a>0$.

Rešenje. Smena je $t = \sqrt{a^2-x^2}$, pa je $t^2 = a^2 - x^2$, $x^2 = a^2 - t^2$, $x = \sqrt{a^2-t^2}$, $dx = -t/\sqrt{a^2-t^2}\,dt$. Sada je

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}\cdot t}\cdot\frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = -\int \frac{1}{a^2-t^2}\,dt = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right| + C\,,$$

na osnovi (ni12). Dakle,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C\,.$$

■

Primer 12.2.6 Izračunati integral $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Rešenje. Koristićemo definiciju funkcije $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \{t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx\} = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C\,.$$

■

Primer 12.2.7 Izračunati integral $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$.

Rešenje.

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \{t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx\} = \int \sqrt{t} \, dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C \, .$$

■

Primer 12.2.8 Izračunati integral $\int \frac{1}{ax+b} \, dx$, $a \neq 0$.

Rešenje.

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \{t = ax+b \Rightarrow dt = a \, dx \Rightarrow \frac{dt}{a} = dx\} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln |t| + C = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C \, .$$

■

Primer 12.2.9 Izračunati integral $\int e^{ax+b} \, dx$, $a \neq 0$.

Rešenje.

$$\int e^{ax+b} \, dx = \{t = ax+b \Rightarrow dt = a \, dx\} = \frac{1}{a}\int e^t \, dt = \frac{1}{a} e^t + C = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \, .$$

■

Primer 12.2.10 Izračunati integral $\int \cos(ax+b) \, dx$, $a \neq 0$.

Rešenje.

$$\int \cos(ax+b) \, dx = \{t = ax+b \Rightarrow dt = a \, dx\} = \frac{1}{a}\int \cos t \, dt = \frac{1}{a} \sin t + C = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C \, .$$

■

12.3 Metod parcijalnog integraljenja kod neodređenog integrala

Podsetimo se da je pravilo za izvod proizvoda dve diferencijabilne funkcije $u(x)$ i $v(x)$ na intervalu (a, b)

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \, .$$

Ako sada integralimo prethodnu jednakost, dobijamo

$$\int (u(x)v(x))' \, dx = \int u'(x)v(x) \, dx + \int u(x)v'(x) \, dx \, ,$$

odnosno

$$u(x)v(x) = \int v(x) \, du(x) + \int u(x) \, dv(x) \, ,$$

ako izaberemo da je $C = 0$ na levoj strani jednakosti. Izrazimo sada jedan integral sa desne strane, na primer,

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x)\,.$$

ili kraće

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du\,. \tag{12.3}$$

Metod parcijalnog integraljenja koristi se tako da povoljnim odabirom u i dv, početni integral u (12.3) $\int u\,dv$ bude predstavljen preko jednostavnijeg $\int v\,du$.

Primer 12.3.1 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

Rešenje. Sada ćemo za dv izabrati $dx/\cos^2 x$ jer taj integral znamo da rešimo (tablični je), a za u biramo x. Tada je $v = \operatorname{tg} x$, a $du = dx$, pa je, korišćenjem primera 12.2.6,

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C\,.$$

■

Primer 12.3.2 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $a > 0$.

Rešenje. Prvo ćemo x^2, koji se nalazi u brojiocu razlomka, napisati kao $x \cdot x$ pa, koristeći primer 12.2.3, imaćemo

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{x\cdot x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, & v = -\sqrt{a^2-x^2} \end{array} \right\} \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\tfrac{x}{a} - I + 2C
\end{aligned}$$

Ako prebacimo I na desnu stranu dobijamo

$$2I = -x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} + 2C \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C\,.$$

■

Primer 12.3.3 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a>0$.

Rešenje. Sada ćemo brojilac podinegralne funkcije napisati kao $(x^2+a^2-x^2)/a^2$.

$$\begin{aligned} I=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx &= \frac{1}{a^2}\left(\int\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx-\underbrace{\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx}_{I_1}\right)\\ &= \frac{1}{a^2}\left(\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx-I_1\right)\\ &= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-I_1\right)\end{aligned}$$

Rešimo sada integral I_1 koristeći primer 12.2.2.

$$\begin{aligned} I_1=\int\frac{x\cdot x}{(x^2+a^2)^2}\,dx &= \left\{\begin{array}{ll} u=x, & du=dx,\\ dv=\frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, & v=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}\end{array}\right\}\\ &= -\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx\\ &= -\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\,.\end{aligned}$$

Dakle,

$$I=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C\,.$$

■

Primer 12.3.4 Izračunati integral $\displaystyle\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$, $|x|>a$.

Rešenje. Prvo ćemo $\sqrt{x^2-a^2}$, napisati kao $\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, i tada je

$$\begin{aligned} I=\int\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx-\int\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\\ &= \underbrace{\int\frac{x\cdot x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx}_{I_1}-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|\,.\end{aligned}$$

Sada je, korišćenjem primera 12.2.4,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\cdot x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx, & v = \sqrt{x^2-a^2} \end{array} \right\} \\
&= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2-a^2} - I\,.
\end{aligned}$$

Vratimo se na početni integral pa je

$$I = x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2 \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\,|\,.$$

Ako prebacimo I na levu stranu dobijamo

$$2I = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\,| + 2C\,,$$

odnosno

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\,|\right) + C\,.$$

■

Sada ćemo navesti neka pravila za odabir u i dv.

(p1) $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,dx$, $\alpha \neq -1$. Treba odabrati $u = \ln x$, $dv = x^\alpha\,dx$.

Primer 12.3.5 Izračunati integral $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\int \ln x\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}\,dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.
\end{aligned}$$

■

Primer 12.3.6 Izračunati integral $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\int x^2\ln x\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}\,dx, \\ dv = x^2dx, & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.
\end{aligned}$$

■

(p2) $\int x^n e^x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Sada treba odabrati $u = x^n$, $dv = e^x\, dx$.

Primer 12.3.7 Izračunati integral $\int xe^x\, dx$.

Rešenje.

$$\int xe^x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C\,.$$

■

Primer 12.3.8 Izračunati integral $\int x^2 e^x\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x\, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x\, dx, \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2\int xe^x\, dx \\ &= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C\,, \end{aligned}$$

na osnovu primera 12.3.7. ■

(p3) $\int x^n \sin x\, dx$ ili $\int x^n \cos x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Treba izabrati $u = x^n$, $dv = \sin x\, dx$ ili $dv = \cos x\, dx$.

Primer 12.3.9 Izračunati integral $\int x \sin x\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} \int x \sin x\, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \sin x\, dx, & v = -\cos x \end{array} \right\} = -x\cos x + \int \cos x\, dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\,. \end{aligned}$$

■

Primer 12.3.10 Izračunati integral $\int x^2 \cos x \, dx$.

Rešenje. Koristeći primer 12.3.9 imaćemo

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= \left\{\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x\,dx, \\ & \\ dv = \cos x\,dx, & v = \sin x \end{array}\right\} = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C \,.\end{aligned}$$

■

(p4) $\int x^n \arcsin x \, dx$ ili $\int x^n \arccos x \, dx$ ili $\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx$ ili $\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Treba izabrati za u ciklometrijsku funkciju, pa je tada $dv = x^n \, dx$.

Primer 12.3.11 Izračunati integral $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Rešenje.

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & du = \frac{1}{1+x^2}\,dx, \\ & \\ dv = dx, & v = x \end{array}\right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \,.$$

Integral $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$ je rešen u primeru 12.2.1 ($a = 1$), pa je

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \,.$$

■

Primer 12.3.12 Izračunati integral $\int x \arcsin x \, dx$.

Rešenje. Izaberimo $u = \arcsin x$ i $dv = x\,dx$, pa je tada $du = 1/\sqrt{1-x^2}\,dx$ i $v = x^2/2$. Dakle,

$$\int x \arcsin x \, dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \,.$$

Pošto je $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ rešen u primeru 12.3.2 (a=1),

$$\int x \arcsin x \, dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\left(-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C \,.$$

■

(p5) $\int e^x \sin x\, dx$ ili $\int e^x \cos x\, dx$. Sada je $u = e^x$, a $dv = \sin x\, dx$ ili $dv = \cos x\, dx$.

Primer 12.3.13 Izračunati integral $I = \displaystyle\int e^x \cos x\, dx$.

Rešenje.

$$I = \int e^x \cos x\, dx \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x\, dx, \\ & \\ dv = \cos x\, dx, & v = \sin x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx\,.$$

Rešimo sada integral $\int e^x \sin x\, dx$.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x\, dx \;&=\; \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x\, dx, \\ & \\ dv = \sin x\, dx, & v = -\cos x \end{array} \right\} \\ &=\; -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx = -e^x \cos x + I\,. \end{aligned}$$

Dakle, sada je početni integral jednak

$$I = e^x \sin x - (-e^x \cos x + I) + 2C = e^x \sin x + e^x \cos x - I + 2C\,.$$

Ako sada I prebacimo na levu stranu imaćemo

$$2I = e^x(\sin x + \cos x) + 2C \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C\,.$$

$\blacksquare$

12.4 Integraljenje racionalnih funkcija

Neka su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog i m-tog stepena, redom, $m \geq 2$. Integral oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx$$

naziva se integral racionalne funkcije. Ako je $n \geq m$, tada je potrebno podeliti date polinome. Ako je dobijen količnik $S_{n-m}(x)$ i ostatak $R_l(x)$, $l < m$, tada važi

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}$$

pa se posmatrani integral svodi na

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx = \int S_{n-m}(x)\, dx + \int \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}\, dx\,.$$

Sada je $\displaystyle\int S_{n-m}(x)\, dx$ praktično tablični integral, a rešavanje $\displaystyle\int \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}\, dx$ biće objašnjeno u slučaju kada je $n < m$ jer je kod tog integrala $l < m$.

Primer 12.4.1 Izračunati integral

$$\int \frac{2x^2+3}{x^2+4}\,dx\,.$$

Rešenje. Jasno je da je

$$\frac{2x^2+3}{x^2+4} = \frac{2x^2+8-5}{x^2+4} = \frac{2(x^2+4)-5}{x^2+4} = 2 - \frac{5}{x^2+4}\,,$$

pa je

$$\int \frac{2x^2+3}{x^2+4}\,dx = \int 2\,dx - \int \frac{5}{x^2+4}\,dx = 2x - 5\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx = 2x - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

∎

U slučaju kada je $n < m$, tada se $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ rastavlja na elementarne racionalne funkcije i to:

- Ako je $Q_m = (ax+b)^m$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tada važi

  $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}\,,$$

  gde su A_1, A_2, ..., A_m, konstante koje treba odrediti. Dakle,

  $$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{ax+b}\,dx + \int \frac{A_2}{(ax+b)^2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_m}{(ax+b)^m}\,dx\,,$$

  gde se svaki od integrala se desne strane rešava smenom $t = ax+b$.

- Ako je $Q_m = Q_{2p} = (ax^2+bx+c)^p$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ i ako se ax^2+bx+c ne može rastaviti na činioce u skupu realnih brojeva, tada važi

  $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_px+B_p}{(ax^2+bx+c)^p}\,,$$

  gde su A_1, A_2, ..., A_p, B_1, B_2, ..., B_p, konstante koje treba odrediti. Sada je

  $$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_px+B_p}{(ax^2+bx+c)^p}\,dx\,,$$

  gde integrale sa desne strane jednakosti treba dodatno rešiti.

- Ako je $Q_m = (a_1x+b_1)^{s_1}(a_2x+b_2)^{s_2}\cdots(a_lx+b_l)^{s_l}$, gde su $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in \mathbb{N}$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$ i $s_1 + s_2 + \cdots + s_l = m$, tada je

  $$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_{1,1}}{a_1x+b_1} + \frac{A_{1,2}}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,s_1}}{(a_1x+b_1)^{s_1}}\\ &\quad + \frac{A_{2,1}}{a_2x+b_2} + \frac{A_{2,2}}{(a_2x+b_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,s_2}}{(a_2x+b_2)^{s_2}}\\ &\quad + \cdots\\ &\quad + \frac{A_{l,1}}{a_lx+b_l} + \frac{A_{l,2}}{(a_lx+b_l)^2} + \cdots + \frac{A_{l,s_l}}{(a_lx+b_l)^{s_l}}\end{aligned}$$

  gde su $A_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $j = 1, 2, \ldots, s_i$, konstante koje treba odrediti.

- Ako je $Q_m = Q_{2p} = (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{s_1}(a_2x^2 + b_2x + c_2)^{s_2} \cdots (a_lx^2 + b_lx + c_l)^{s_l}$, gde su $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in \mathbb{N}$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, l$ i $s_1 + s_2 + \cdots + s_l = p$ (ako se kvadratni trinomi ne mogu rastaviti na činioce u skupu $\mathbb{R}$), tada je

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \tfrac{A_{1,1}x+B_{1,1}}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \tfrac{A_{1,2}x+B_{1,2}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} + \cdots + \tfrac{A_{1,s_1}x+B_{1,s_1}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{s_1}}\\ &+ \tfrac{A_{2,1}x+B_{2,1}}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \tfrac{A_{2,2}x+B_{2,2}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} + \cdots + \tfrac{A_{2,s_2}x+B_{2,s_2}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^{s_2}}\\ &+ \cdots\\ &+ \tfrac{A_{l,1}x+B_{l,1}}{a_lx^2+b_lx+c_l} + \tfrac{A_{l,2}x+B_{l,2}}{(a_lx^2+b_lx+c_l)^2} + \cdots + \tfrac{A_{l,s_l}x+B_{l,s_l}}{(a_lx^2+b_lx+c_l)^{s_l}}\end{aligned}$$

  gde su $A_{i,j}$ i $B_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, s_i$, konstante koje treba odrediti.

- Ako je, recimo, $Q_m = (ax + b)^{s_1}(cx^2 + ex + f)^{s_2}$, gde su $a, b, c, e, f \in \mathbb{R}$, $a, c \neq 0$ i ako se $cx^2 + ex + f$ se ne može rastaviti na činioce u skupu $\mathbb{R}$ i $s_1 + 2s_2 = m$, tada važi

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \tfrac{A_1}{ax+b} + \tfrac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \tfrac{A_{s_1}}{(ax+b)^{s_1}}\\ &+ \tfrac{B_1x+C_1}{cx^2+ex+f} + \tfrac{B_2x+C_2}{(cx^2+ex+f)^2} + \cdots + \tfrac{B_{s_2}x+C_{s_2}}{(cx^2+ex+f)^{s_2}}\end{aligned}$$

  gde su A_i, B_j i C_j, $i = 1, 2, \dots, s_1$, $j = 1, 2, \dots, s_2$, konstante koje treba odrediti.

Pre nego što damo nekoliko primera integraljenja racionalnih funkcija, pozabavićemo se integraljenjem elementarnih racionalnih izraza:

- I tip su integrali oblika $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2 + b}\,dx$, $a \cdot b > 0$.

  Primer 12.4.2 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2 + 8}\,dx$.

  Rešenje.

$$\int \frac{1}{2x^2+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

■

- II tip su integrali oblika $\displaystyle\int \frac{ex + f}{ax^2 + b}\,dx$, $e \neq 0$, $a \cdot b > 0$

  Primer 12.4.3 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{5x - 9}{2x^2 + 8}\,dx$.

  Rešenje.

$$\int \frac{5x-9}{2x^2+8}\,dx = \int \frac{5x}{2x^2+8}\,dx - \int \frac{9}{2x^2+8}\,dx = I_1 - I_2\,.$$

  Integral I_1 se rešava smenom $t = 2x^2 + 8$, pa je $dt = 4xdx$, a integral I_2 je I tipa. Dakle,

$$I_1 = \int \frac{5\frac{dt}{4}}{t} = \frac{5}{4}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{5}{4}\ln|t| + C = \frac{5}{4}\ln(2x^2+8) + C$$

i

$$I_2 = 9\int \frac{1}{2x^2+8}\,dx = \frac{9}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C\,.$$

Konačno

$$\int \frac{5x-9}{2x^2+8}\,dx = \frac{5}{4}\ln|2x^2+8| - \frac{9}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C\,.$$

■

- III tip su integrali oblika $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$, $b^2-4ac<0$, uz transformaciju imenioca u kanonski oblik

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

gde se, nakon smene $t = x + b/2a$, dobija I tip integrala.

Primer 12.4.4 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx = \{t = x+2 \Rightarrow dt = dx\} = \int \frac{1}{t^2+9}\,dt\\ &= \int \frac{1}{t^2+3^2}\,dt = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{3} + C = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{3} + C\,.\end{aligned}$$

■

- IV tip su integrali oblika $\displaystyle\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}\,dx$, $e \neq 0$, $b^2-4ac<0$. Nakon transfomacije imenioca u kanonski oblik i smene $t = x + b/2a$, dobijamo integral II tipa.

Primer 12.4.5 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx &= \int \frac{3x+15}{(x+2)^2+9}\,dx = \{t = x+2 \Rightarrow dt = dx\}\\ &= \int \frac{3(t-2)+15}{t^2+9}\,dt = \int \frac{3t+9}{t^2+9}\,dt\\ &= 3\int \frac{t}{t^2+9}\,dt + 9\int \frac{1}{t^2+9}\,dt = 3I_1 + 9I_2\,.\end{aligned}$$

Integral I_1 se rešava smenom $s = t^2+9$, $\frac{ds}{2} = t\,dt$ pa je

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{2}\ln|s| + C = \frac{1}{2}\ln|t^2+9| + C\,.$$

Integral I_2 je već rešen (primer 12.4.4), te je

$$I_2 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C\,.$$

Konačno rešenje je

$$\int \frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx = \frac{3}{2}\ln|t^2+9| + \frac{9}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln((x+2)^2+9) + 3\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C\,.$$

■

Sada sledi nekoliko primera integraljenja racionalnih funkcija sa određivanjem konstanti koje se budu pojavljivale.

Primer 12.4.6 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{2x+8}{x^2-x-2}\,dx$.

Rešenje. Podintegralnu funkciju treba rastaviti na elementarne racionalne izraze, te je

$$\begin{aligned}\frac{2x+8}{x^2-x-2} = \frac{2x+8}{(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}\,,\end{aligned}$$

a odatle se dobija sistem

$$\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 2 \\ -2A & + & B & = & 8 \end{array}$$

čije je rešenje $(A,B) = (-2,4)$. Početni integral je tada

$$\int \frac{2x+8}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{-2}{x+1}\,dx + \int \frac{4}{x-2}\,dx = -2\ln|x+1| + 4\ln|x-2| + C\,.$$

■

Primer 12.4.7 Izračunati integral $\displaystyle\int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}\,dx$.

Rešenje.

$$\frac{4x-8}{x^4+4x^2} = \frac{4x-8}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

jer x^2+4 nema nula u skupu $\mathbb{R}$. Dalje je

$$\begin{aligned}\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} &= \frac{Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 4Ax + 4B}{x^2(x^2+4)}\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\begin{array}{rrrrcr} A & & +\ C & & = & 0 \\ & B & & +\ D & = & 0 \\ 4A & & & & = & 4 \\ & 4B & & & = & -8 \end{array}$$

i rešenje je $(A, B, C, D) = (1, -2, -1, 2)$. Sledi da je

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{2}{x^2}\,dx + \int \frac{-x+2}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln|x| - 2\int x^{-2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx \\ &= \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} \end{aligned}$$

nakon smene $t = x^2 + 4 \Rightarrow dt = 2x\,dx$. Rešenje je

$$\int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

■

Primer 12.4.8 Izračunati integral $I = \displaystyle\int \frac{2x^2 - 274x - 700}{(x-1)(x^2+4x+13)^2}\,dx.$

Rešenje. Prvo ćemo podintegralnu funkciju rastaviti na elementarne racionalne funkcije.

$$\frac{2x^2-274x-700}{(x-1)(x^2+4x+13)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+13} + \frac{Dx+E}{(x^2+4x+13)^2} \tag{12.4}$$

pa je desna strana jednakosti (12.4) jednaka

$$\frac{A(x^2+4x+13)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4x+13) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+4x+13)^2},$$

odnosno

$$\frac{(A+B)x^4+(8A+3B+C)x^3+(42A+9B+3C+D)x^2+(104A-13B+9C-D+E)x+(169A-13C-E)}{(x-1)(x^2+4x+13)^2}.$$

Sada sledi da je

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} A & + & B & & & & & & & = & 0 \\ 8A & + & 3B & + & C & & & & & = & 0 \\ 42A & + & 9B & + & 3C & + & D & & & = & 2 \\ 104A & - & 13B & + & 9C & - & D & + & E & = & -274 \\ 169A & - & & & 13C & & & - & E & = & -700 \end{array}$$

što je sistem linearnih jednačina sa rešenjem $(A, B, C, D, E) = (-3, 3, 15, 56, -2)$ koje se dobije, kao i kod prethodnih sistema, korišćenjem Gausovog postupka eliminacije. Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-3}{x-1}\,dx + \int \frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx + \int \frac{56x-2}{(x^2+4x+13)^2}\,dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

i rešićemo svaki integral pojedinačno. Prvi integral je

$$I_1 = \int \frac{-3}{x-1}\,dx = -3\ln|x-1| + C\,.$$

Drugi je rešen u primeru 12.4.5, pa je

$$I_2 = \int \frac{3x+15}{x^2+4x+13}\,dx = \frac{3}{2}\ln((x+2)^2+9) + 3\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C\,.$$

Integral I_3 se transformiše smenom $t = x+2 \Rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned} I_3 = \int \frac{56x-2}{((x+2)^2+9)^2}\,dx &= \int \frac{56(t-2)-2}{(t^2+9)^2}\,dt = \int \frac{56t-114}{(t^2+9)^2}\,dt \\ &= 56\underbrace{\int \frac{t\,dt}{(t^2+9)^2}}_{I_4} - 114\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+9)^2}}_{I_5}\,. \end{aligned}$$

Integral I_4 je rešen u primeru 12.2.2 za $a = 3$, pa je

$$I_4 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+3^2} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+9} + C\,,$$

dok je integral I_5 rešen u primeru 12.3.3 za $a = 3$, te je

$$I_5 = \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} = \frac{1}{2\cdot 3^2}\left(\frac{t}{t^2+3^2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\right) + C = \frac{1}{18}\left(\frac{t}{t^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\right) + C\,.$$

Sada je

$$I_3 = -28\cdot\frac{1}{t^2+9} - \frac{19}{3}\left(\frac{t}{t^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\right) + C\,,$$

odnosno,

$$I_3 = -28\cdot\frac{1}{(x+2)^2+9} - \frac{19}{3}\left(\frac{x+2}{(x+2)^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\right) + C\,.$$

Uvrštavajući I_1, I_2 i I_3 u I i sabirajući odgovarajuće izraze, dobijamo

$$I = -3\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln((x+2)^2+9) - \frac{19x+122}{3((x+2)^2+9)} + \left(-\frac{19}{9}+3\right)\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C\,,$$

odnosno

$$I = -3\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+13) - \frac{19x+122}{3(x^2+4x+13)} + \frac{8}{9}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C\,.$$

■

12.5 Integraljenje trigonometrijskih funkcija

U ovom poglavlju rešavaćemo integrale oblika

$$\int (\sin(ax))^m (\cos(ax))^n \, dx,$$

gde je $m^2 + n^2 \geq 0$ i $m, n \in \mathbb{N}_0$, dok je a realan broj različiti od nule.

- Neka je $n = 0$, a m neparan broj. Tada je $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

$$\int (\sin(ax))^{2k+1} \, dx = \int \sin^{2k+1}(ax) \, dx = \int \sin^{2k}(ax) \sin(ax) \, dx \, .$$

Pošto u drugom integralu imamo $\sin(ax)\,dx$, odgovarajuća smena mora biti oblika $t = \cos(ax)$ i zbog toga je potrebno da se funkcija $\cos(ax)$ nalazi u integralu kao deo podintegralne funkcije. Koristićemo da je $\sin^2(ax) = 1 - \cos^2(ax)$. Dakle,

$$\int \sin^{2k}(ax) \sin(ax) \, dx = \int (\sin^2(ax))^k \sin(ax) \, dx = \int (1 - \cos^2(ax))^k \sin(ax) \, dx$$

i nakon smene $t = \cos(ax) \Rightarrow dt = -a \sin(ax) \, dx$ imaćemo

$$\int \sin^{2k}(ax) \sin(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \int (1 - t^2)^k \, dt \, .$$

Sada ćemo koristiti formulu za razvoj binoma $(x+y)^q$ u red, $q \in \mathbb{N}_0$,

$$(x+y)^q = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} x^{q-p} y^p \, , \; \binom{q}{p} = \frac{q!}{p! \, (q-p)!} \, .$$

Dakle, ako je $x = 1$, $y = -t^2$ i $q = k$ imaćemo

$$(1 - t^2)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} 1^{k-p} (-t^2)^p = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} t^{2p} \, .$$

Konačno,

$$\begin{aligned} \int (\sin(ax))^{2k+1} \, dx &= -\frac{1}{a} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \frac{t^{2p+1}}{2p+1} \\ &= -\frac{1}{a} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \frac{\cos^{2p+1}(ax)}{2p+1} + C \, . \end{aligned} \tag{12.5}$$

Ako je $m = 0$, a n neparan broj, sličnim postupkom se dobija

$$\int (\cos(ax))^{2k+1} \, dx = \frac{1}{a} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \frac{\sin^{2p+1}(ax)}{2p+1} + C \, . \tag{12.6}$$

gde je $k \in \mathbb{N}_0$.

Primer 12.5.1 Izračunati integral $\int \sin^3 x\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx \\ &= \{t=\cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx\} = -\int (1-t^2)\,dt \\ &= -\int dt + \int t^2\,dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C\,.\end{aligned}$$

Ako želimo da rešimo integral preko formule (12.5), za $a=1$ i $k=1$ imaćemo

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= -\frac{1}{1}\sum_{p=0}^{1}(-1)^p\binom{1}{p}\frac{\cos^{2p+1} x}{2p+1} + C \\ &= -\left(\underbrace{(-1)^0\binom{1}{0}\frac{\cos^{2\cdot 0+1} x}{2\cdot 0+1}}_{p=0} + \underbrace{(-1)^1\binom{1}{1}\frac{\cos^{2\cdot 1+1} x}{2\cdot 1+1}}_{p=1}\right) + C \\ &= -\left(1\cdot 1\cdot \frac{\cos x}{1} - 1\cdot 1\cdot \frac{\cos^3 x}{3}\right) + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C\,.\end{aligned}$$

■

Primer 12.5.2 Izračunati integral $\int \cos^5(2x)\,dx$.

Rešenje. Nakon smene $t = 2x \Rightarrow dt = 2\,dx$, imaćemo

$$\begin{aligned}\int \cos^5(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \cos^5 t\,dt = \frac{1}{2}\int \cos^4 t \cos t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int (\cos^2 t)^2 \cos t\,dt = \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 t)^2\cos t\,dt\,.\end{aligned}$$

Sada uvedimo smenu $s = \sin t \Rightarrow ds = \cos t\,dt$, pa je

$$\begin{aligned}\int \cos^5(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int (1-s^2)^2\,ds = \frac{1}{2}\int (1-2s^2+s^4)\,ds \\ &= \frac{1}{2}\int ds - \int s^2\,ds + \frac{1}{2}\int s^4\,ds = \frac{s}{2} - \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{10} + C \\ &= \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{10} + C = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{3} + \frac{\sin^5(2x)}{10} + C\,.\end{aligned}$$

Ako opet rešimo integral na drugi način, preko formule (12.6), za $a = 2$ i $k = 2$, imaćemo

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{2}(-1)^p\binom{2}{p}\frac{\sin^{2p+1}(2x)}{2p+1}+C \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{(-1)^0\binom{2}{0}\frac{\sin^{2\cdot 0+1}(2x)}{2\cdot 0+1}}_{p=0}+\underbrace{(-1)^1\binom{2}{1}\frac{\sin^{2\cdot 1+1}(2x)}{2\cdot 1+1}}_{p=1}\right. \\
&\qquad \left.+\underbrace{(-1)^2\binom{2}{2}\frac{\sin^{2\cdot 2+1}(2x)}{2\cdot 2+1}}_{p=2}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(1\cdot 1\cdot\frac{\sin(2x)}{1}-1\cdot 2\cdot\frac{\sin^3(2x)}{3}+1\cdot 1\cdot\frac{\sin^5(2x)}{5}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{1}-2\cdot\frac{\sin^3(2x)}{3}+\frac{\sin^5(2x)}{5}\right)+C \\
&= \frac{\sin(2x)}{2}-\frac{\sin^3(2x)}{3}+\frac{\sin^5(2x)}{10}+C\,.
\end{aligned}$$

■

- Neka je $n = 0$, a m paran broj. Tada je $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Korišćenjem formule

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

imamo

$$\int (\sin(ax))^{2k}\,dx = \int (\sin^2(ax))^k\,dx = \int\left(\frac{1-\cos(2ax)}{2}\right)^k dx\,.$$

Slično, ako je $m = 0$, a $n = 2k$ paran broj, $k \in \mathbb{N}$, važi

$$\int (\cos(ax))^{2k}\,dx = \int (\cos^2(ax))^k\,dx = \int\left(\frac{1+\cos(2ax)}{2}\right)^k dx\,.$$

Primer 12.5.3 Izračunati integral $\int \cos^2 x\,dx$.

Rešenje. Koristićemo formulu

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\,.$$

Sada je, koristeći primer 12.2.10 ($a = 2$, $b = 0$),

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\,.$$

■

Primer 12.5.4 Izračunati integral $\int \cos^2(2x)\,dx$.

Rešenje. Traženi integral se svodi na integral u primeru 12.5.3 smenom $t = 2x \Rightarrow dt = 2\,dx$.

$$\int \cos^2(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\sin(2t) + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin(4x) + C\,.$$

■

Primer 12.5.5 Izračunati integral $\int \cos^4 x\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\,dx &= \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin(4x) + C \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C\,.
\end{aligned}$$

korišćenjem primera 12.5.3 i 12.5.4. ■

- Ako je bar jedan od brojeva m i n neparan, tada se funkcija koja je stepenovana na neparni stepen rastavi na činioce od kojih je jedan činilac stepenovan na prvi stepen, a drugi na paran broj.

Primer 12.5.6 Izračunati integral $\int \sin^2 x\,\cos x\,dx$.

Rešenje. Ovaj integral se rešava smenom $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$ pa je

$$\int \sin^2 x\,\cos x\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C\,.$$

■

Primer 12.5.7 Izračunati integral $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Rešenje. Sada ćemo $\cos^3 x$ napisati kao $\cos^2 x \cos x$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \, (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\
&= \{t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx\} = \int t^2 (1 - t^2) \, dt \\
&= \int t^2 \, dt - \int t^4 \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \, .
\end{aligned}$$

■

Primer 12.5.8 Izračunati integral $\int \sin^2(2x) \cos^3(2x) \, dx$.

Rešenje. Nakon smene $t = 2x \Rightarrow dt = 2 \, dx$, dolazimo do primera 12.5.7.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(2x) \cos^3(2x) \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin^2 t \cos^3 t \, dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{\sin^5 t}{5} \right) + C \\
&= \frac{\sin^3(2x)}{6} - \frac{\sin^5(2x)}{10} + C \, .
\end{aligned}$$

■

- Ako su m i n istovremeno parni brojevi

Primer 12.5.9 Izračunati integral $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

Rešenje. Funkciju $\sin^2 x$ ćemo napisati kao $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ da bismo iskoristili već rešene integrale u primerima 12.5.3 i 12.5.5.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, dx = \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx \\
&= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{32} \sin(4x) + C \\
&= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin(4x) + C \, .
\end{aligned}$$

■

12.6 Metoda Ostrogradskog

Metoda Ostrogradskog koristi se za rešavanje integrala oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\,,$$

gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, $n > 1$. Rešenje se traži u obliku

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\,, \tag{12.7}$$

gde se, nakon diferenciranja (12.7), koeficijenti nepoznatog polinoma $Q_{n-1}(x)$ $(n-1)$-og stepena i λ određuju takozvanom *Metodom neodređenih koeficijenata.* Nju ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 12.6.1 Izračunati integral

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx\,.$$

Rešenje. Koristeći (12.7) imaćemo

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{1+x-x^2} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx\,, \tag{12.8}$$

a nakon diferenciranja (12.8) i korišćenja pravila za izvod proizvoda dve funkcije, izvoda složene funkcije i da je $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ važiće

$$\frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}} = A\sqrt{1+x-x^2} + (Ax+B)\frac{1-2x}{2\sqrt{1+x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x-x^2}}\,.$$

Nakon množenja cele jednakosti sa $\sqrt{1+x-x^2}$, dobijamo

$$x^2-x+1 = A(1+x-x^2) + \frac{1}{2}(Ax+B)(1-2x) + \lambda\,,$$

odnosno

$$x^2-x+1 = (-2A)x^2 + \left(\frac{3}{2}A - B\right)x + \left(A + \frac{1}{2}B + \lambda\right)\,.$$

Odavde sledi da je $-2A = 1$, $\frac{3}{2}A - B = -1$ i $A + \frac{1}{2}B + \lambda = 1$. Rešenje ovog sistema je $(A, B, \lambda) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8}\right)$. Vratimo se sada na (12.8).

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{11}{8}\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx}_{I_1}\,.$$

Preostalo je još da rešimo integral I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{4}-x+x^2\right)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}}\,dx \\ &= \{t = 1/2 - x \Rightarrow dt = -dx\} = \int \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - t^2}}\,dt \\ &= -\arcsin\frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = -\arcsin\frac{2\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\sqrt{5}} + C = -\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C\,. \end{aligned}$$

na osnovu (ni18). Konačno,

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C\,.$$

■

12.7 Zadaci za vežbu

Izračunati integrale:

1. $I = \displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} - \sqrt[2020]{x^{2019}}\right) dx$. $\left(I = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + 5\sqrt[5]{x} - \dfrac{2020}{4039}\sqrt[2020]{x^{4039}} + C\right)$

2. $I = \displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$. $(I = -\ln|\sin x + \cos x| + C)$

3. $I = \displaystyle\int \sqrt{x}\sqrt{2\sqrt{x}+5}\,dx$. $\left(I = \dfrac{(2\sqrt{x}+5)^{7/2}}{14} - (2\sqrt{x}+5)^{5/2} + \dfrac{25(2\sqrt{x}+5)^{3/2}}{6} + C\right)$

4. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)}$. $(I = \ln|\ln(\ln x)| + C)$

5. $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$, $a > 0$. $\left(I = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a}\right| + C\right)$

6. $I = \displaystyle\int e^{3x}\sin 4x\,dx$. $\left(I = \dfrac{1}{25}e^{3x}(3\sin 4t - 4\cos 4t) + C\right)$

7. $I = \displaystyle\int (3x^2-5x+6)e^{4x-1}\,dx$. $\left(I = \left(\dfrac{3x^2}{4} - \dfrac{13x}{8} + \dfrac{61}{32}\right)e^{4x-1} + C\right)$

8. $I = \displaystyle\int x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$. $\left(I = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{\operatorname{arctg} x}{4} + \dfrac{x^4 \operatorname{arctg} x}{4} + C\right)$

9. $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,dx$. $\left(I = -\dfrac{1}{x-2}\ \operatorname{arctg}(x-2) + C\right)$

10. $I = \int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)}\,dx.$ $(I = \frac{3}{8}\ln|x^2-8| - \frac{1}{8}\ln|x| + C)$

11. $I = \int \frac{9x+19}{x^3+9x^2+28x+40}\,dx.$
$(I = -2\ln|x+5| + \ln(x^2+4x+8) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C)$

12. $I = \int \frac{x^5+4x^4+9x^3+8x^2+3x-1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}\,dx.$
$(I = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C)$

13. $I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx.$ $(I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|\right) + C)$

14. $I = \int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx.$ $(I = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\right| + C)$

15. $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$ $(I = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C)$

16. $I = \int \frac{1}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}\,dx.$ $(I = -2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C)$

17. $I = \int \sin^6 x\,dx.$ $(I = \frac{5}{16}\,x - \frac{15}{64}\sin(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{1}{192}\sin(6x) + C)$

18. $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$ $(I = \frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{x^2+x+1}\right))$

19. $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}\,dx.$ $(I = \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3})$

20. $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$ $(I = \frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}})$

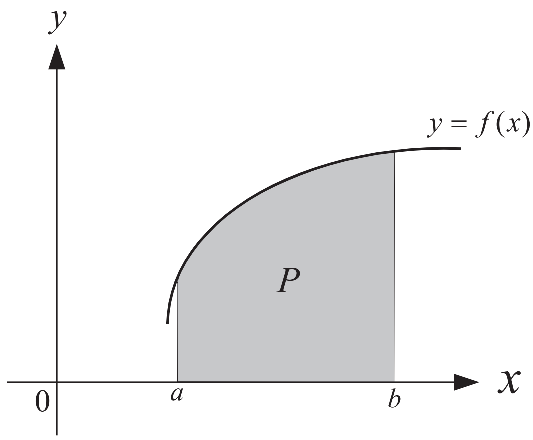
GLAVA 13

Određeni integral

U ovoj glavi biće definisan pojam određenog integrala (Rimanov integral), a cilj je da studenti savladaju smenu promenljivih i parcijalno integraljenje kod određenih intagrala. Da uvide široku primenu pri izračunavanju površine ravnog lika nepravilnog oblika, dužine krive koja nije prava linija, površine i zapremine obrtnog tela nepravilnog oblika.

13.1 Pojam određenog integrala

Neka je data neprekidna i pozitivna funkcija $y = f(x)$ na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Problem definisanja određenog integrala povezan je sa određivanjem površine krivolinijskog trapeza koji je ograničen funkcijom $f(x)$, x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$ (slika 13.1).

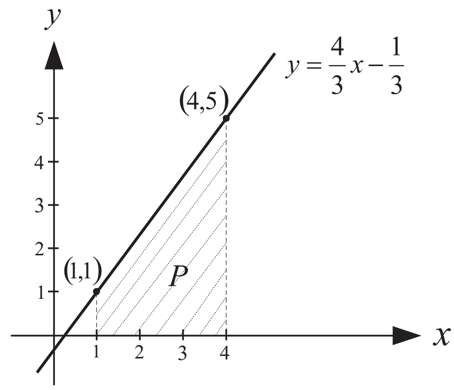


Slika 13.1: Krivolinijski trapez.

Da bi se odredila vrednost površine P, potrebno je da se ona dovoljno dobro aproksimira nekom površinom ili sumom površina koje znamo lako da izračunamo. Ideja je da se površina P podeli na $n \in \mathbb{N}$ manjih krivolinijskih trapeza čija će površina biti aprosimirana površinom odgovarajućih pravougaonika, pa da se, kako se n povećava, dobija preciznija aproksimacija tražene površine. U tu svrhu, pogledajmo sledeći primer.

Primer 13.1.1 Neka je data funkcija $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$. Odrediti površinu P koja je ograničena datom funkcijom, x-osom i pravama $x = 1$ i $x = 4$ (slika 13.2).

Rešenje. Koristeći formulu za površinu trapeza $P = \frac{a+b}{2}\,h$, gde su a i b osnovice, a h visina



Slika 13.2: Površina ravnog lika ograničenog funkcijom $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ i pravama $x = 1$, $x = 4$ i $y = 0$.

trapeza, dobijamo da je

$$P = \frac{f(4) + f(1)}{2}\,(4-1) = \frac{5+1}{2} \cdot 3 = 9\,.$$

■

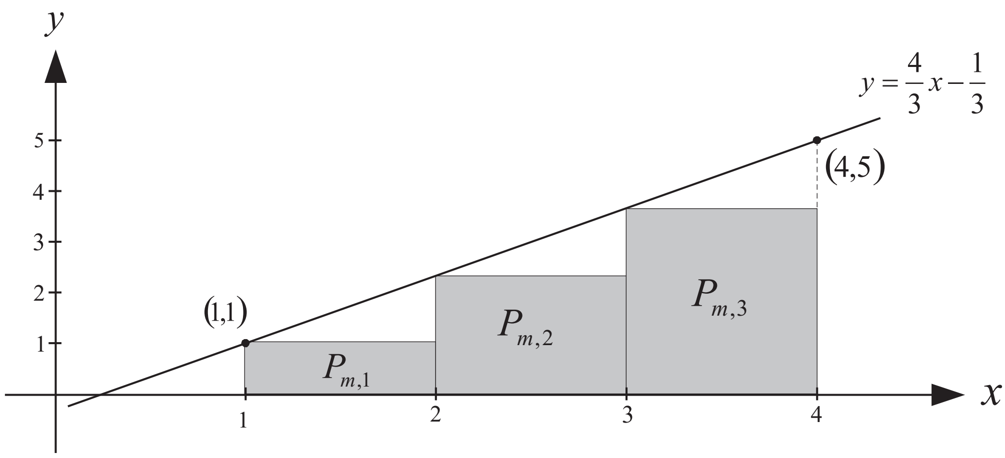
Cilj ovog primera je da se ukaže na to kako će se aproksimirati površina trepeza i uvođenje pojmova potrebih za definiciju određenog integrala. Podelimo interval $[1,4]$ na tri $(n = 3)$ podintervala iste dužine. Tada je njihova dužina $\Delta x = (b-a)/n = (4-1)/3 = 1$. Obeležimo sa $x_0 = 1$ i $x_1 = x_0 + \Delta x = 2$, $x_2 = x_1 + \Delta x = 3$ i $x_3 = x_2 + \Delta x = b = 4$. Time smo podelili interval $[1,4]$ na tri jednaka podintervala dužine 1. Kraće se može zapisati

$$x_0 = 1,\ x_i = x_{i-1} + \Delta x,\ i = 1,2,3\,.$$

Formirajmo sada *donje* pravougaonike na sledeći način: neka je $P_{m,i}$ površina pravougaonika čija je jedna stranica $[x_{i-1}, x_i]$, a druga stranica neka je dužine koja odgovara minimalnoj vrednosti funkcije $f(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ i nju ćemo obeležiti m_i, $i = 1,2,3$ (slika 13.3).

Dakle, jedna aproksimacija koju ćemo obeležiti sa P_m (suma donjih prvougaonika) je

$$\begin{aligned} P_m = P_{m,1} + P_{m,2} + P_{m,3} &= m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x \\ &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x \\ &= f(1)\Delta x + f(2)\Delta x + f(3)\Delta x \\ &= 1\cdot 1 + \frac{7}{3}\cdot 1 + \frac{11}{3}\cdot 1 = 7\,. \end{aligned}$$

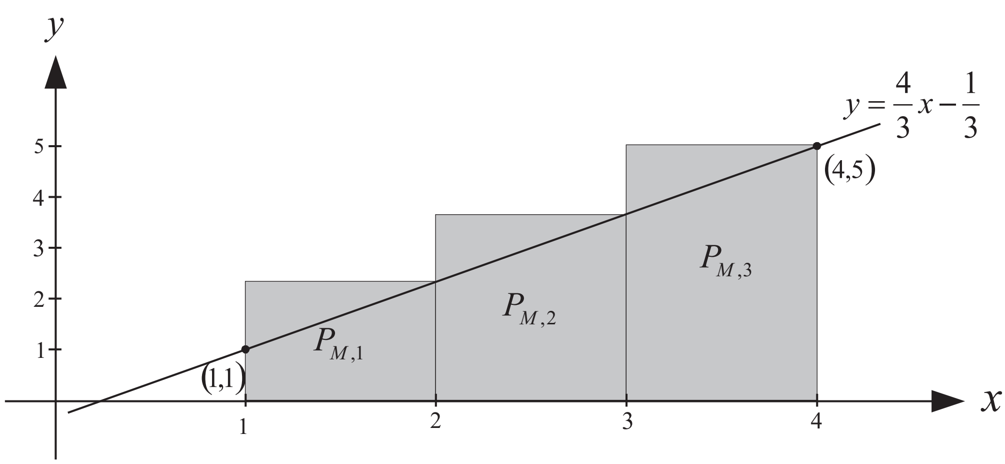


Slika 13.3: Aproksimacija površine donjim pravougaonicima za $n = 3$.

Primetimo da se P_m može kraće zapisati i kao

$$P_m = \sum_{i=1}^{3} P_{m,i} = \sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x\,.$$

Još jednu aproksimaciju dobijamo ako formiramo *gornje* pravougaonike. Označićemo sa $P_{M,i}$ pravougaonik sa jednom stranicom $[x_{i-1}, x_i]$, i drugom dužine koja odgovara maksimalnoj vrednosti funkcije $f(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ i nju ćemo obeležiti M_i, $i = 1, 2, 3$ (slika 13.4).



Slika 13.4: Aproksimacija površine gornjim pravougaonicima za $n = 3$.

Druga aproksimacija, koju ćemo obeležiti sa P_M, (suma gornjih prvougaonika) je

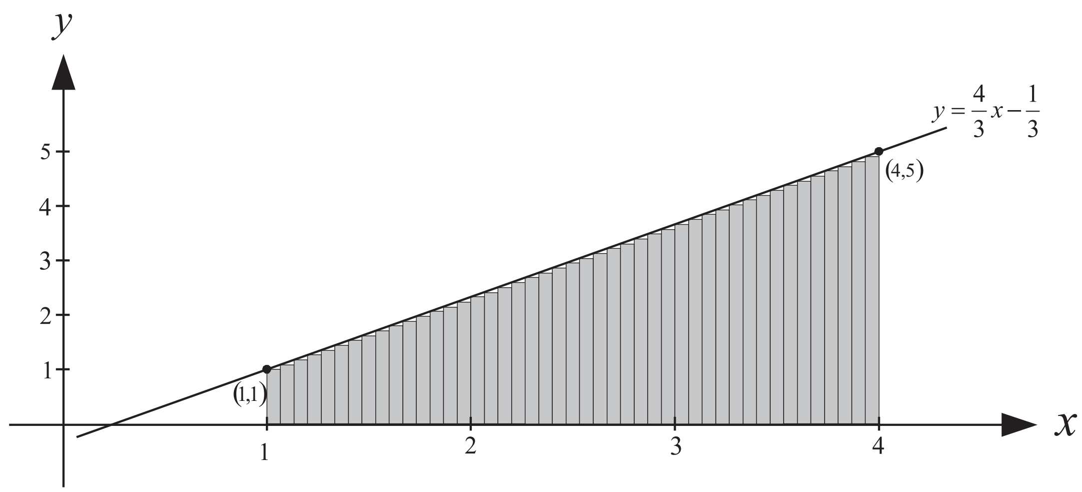
$$\begin{aligned} P_M = P_{M,1} + P_{M,2} + P_{M,3} &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x \\ &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x \\ &= \frac{7}{3}\cdot 1 + \frac{11}{3}\cdot +5\cdot 1 = 11\,. \end{aligned}$$

Primetimo, opet, da se P_M može kraće zapisati i kao

$$P_M = \sum_{i=1}^{3} P_{M,i} = \sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x\,.$$

Pokušajmo sada da poboljšamo aproksimaciju. Podelimo interval $[1,4]$ na $n = 30$ jednakih delova. Tada je dužina svakog intervala $\Delta x = (4-1)/30 = 0.1$ i važi $x_i = x_{i-1} + \Delta x$, $i = 1,2,\ldots,30$. Ako površinu aproksimiramo donjim pravougaonicima (slika 13.5), tada je

$$P_m = \sum_{i=1}^{30} P_{m,i} = \sum_{i=1}^{30} m_i \Delta x = \sum_{i=1}^{30} f(x_{i-1})\Delta x = 8.8\,,$$

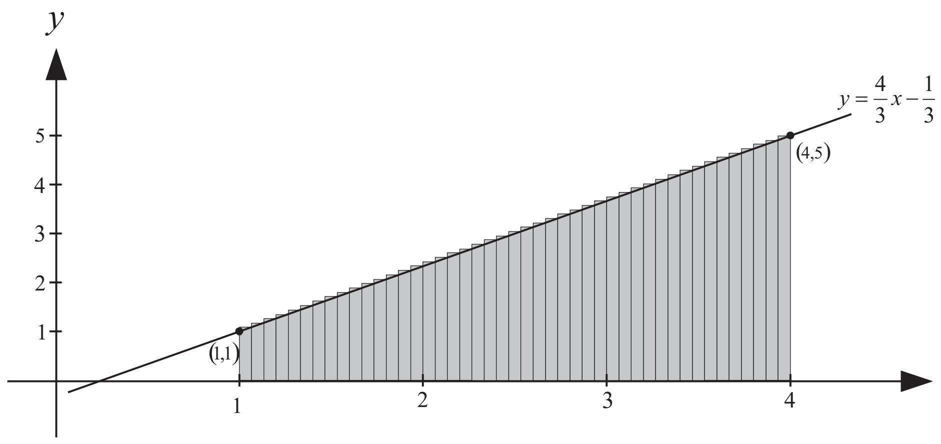


Slika 13.5: Aproksimacija površine donjim pravougaonicima za $n = 30$.

dok aproksimacija gornjim pravougaonicima daje (slika 13.6)

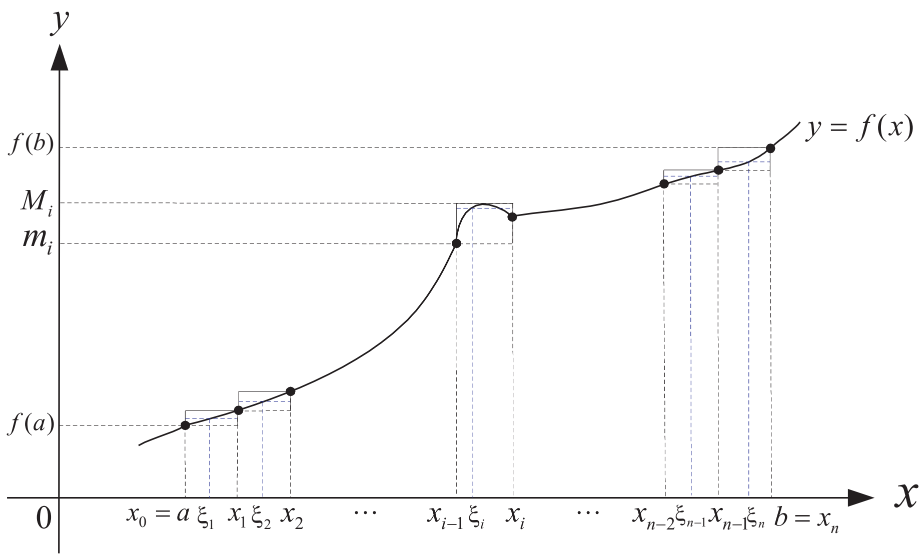
$$P_M = \sum_{i=1}^{30} P_{M,i} = \sum_{i=1}^{30} M_i \Delta x = \sum_{i=1}^{30} f(x_i)\Delta x = 9.2\,.$$

Za $n = 300$, $\Delta x = 0.01$ i dobija se $P_m = 8.98$ i $P_M = 9.02$, dok je za $n = 3000$, $\Delta x = 0.001$, $P_m = 8.998$ i $P_M = 9.002$. Primećujemo da kako se n povećava da se tako P_m i P_M približavaju stvarnoj površini $P = 9$. ∎



Slika 13.6: Aproksimacija površine gornjim pravougaonicima za $n = 30$.

U opštem slučaju, podelićemo interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala dužine $\Delta x = (b - a)/n$, gde je $x_0 = a$, $x_i = x_{i-1} + \Delta x$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_n = b$. Sa m_i obeležićemo minimalnu, a sa M_i maksimalnu vrednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, redom, $i = 1, 2, \ldots, n$ (slika 13.7).



Slika 13.7: Aproksimacija površine donjim i gornjim pravougaonicima za funkciju $f(x)$, $x \in [a, b]$.

Formiraćemo sume donjih i gornjih pravougaonika kao

$$P_m = \sum_{i=1}^{n} P_{m,i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x, \;\; P_M = \sum_{i=1}^{n} P_{M,i} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x\,.$$

Ako je ξ_i proizvoljna tačka na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, tada je

$$m_i \Delta x \le f(\xi_i)\Delta x \le M_i \Delta x\,,$$

pa je i

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x\,,$$

odnosno

$$P_m \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \le P_M\,.$$

Ako je f ograničena na intervalu $[a, b]$ i ako su podintervali jednake dužine, tada važi

$$\lim_{n\to+\infty} P_m = \lim_{n\to+\infty} P_M = P,$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = P\,. \tag{13.1}$$

za bilo koje $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n,$. Broj dobijen u formuli (13.1) se naziva određeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ i označava se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x\,, \tag{13.2}$$

dok se suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ naziva Rimanova suma, a za funkciju f se kaže da je *Riman-integrabilna* ili samo *integrabilna* na intervalu $[a, b]$.

13.2 Teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala

Ako je funkcija $y = f(x)$ linearna, tada je njena srednja vrednost na zatvorenom intervalu $[a, b]$, $a < b$, jednaka $(f(a)+f(b))/2$ i ona se dostiže u tački $x = (a+b)/2$. Ako je funkcija neka druga kriva, tada se za određivanje njene srednje vrednosti koristi određeni integral. Naime, neka je funkcija $y = f(x)$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Tada ona dostiže svoj minimum m i maksimum M, odnosno važi $m \le f(x) \le M$, $x \in [a, b]$ (tvrđenje 9.4.3). Tada je

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\,,$$

odnosno

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M\,.$$

Kako neprekidna funkcija nad zatvorenim i ograničenim intervalom uzima sve vrednosti (tvrđenje 9.4.4), to znači da postoji tačka $x_m \in (a, b)$ tako da je

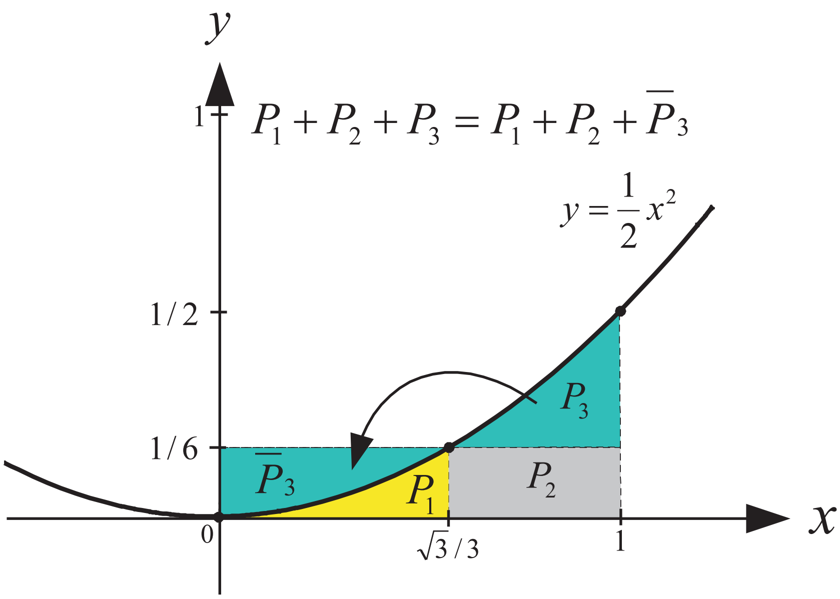
$$f(x_m) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{13.3}$$

i to je srednja vrednost funkcije $f(x)$ dok $x \in [a, b]$. Ako je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, tada je površina ravnog lika omeđenog sa $x = a$, $x = b$, x-osom i $y = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_m)\,. \tag{13.4}$$

To znači da je $\int_a^b f(x)\,dx$ jednak površini pravougaonika čije su stranice dužine $b-a$ i $f(x_m)$.

Primer 13.2.1 Odrediti srednju vrednost funkcije $y = x^2/2$ na intervalu $[0, 1]$ (slika 13.8).



Slika 13.8: Srednja vrednost funkcije $y = \frac{1}{2}x^2$ na intervalu $x \in [0, 1]$ je $y = \frac{1}{6}$.

Rešenje. Srednja vrednost dobija se izračunavanjem

$$f(x_m) = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx}{1-0} = \frac{\frac{1}{6}}{1-0} = \frac{1}{6}\,.$$

Ako rešimo sada jednačinu $x^2/2 = 1/6$ po $x > 0$, dobijamo da je $x = x_m = \sqrt{3}/3$. Pokazaćemo da su dve zelene oblasti sa slike 13.8 istih površina ($P_3 = \overline{P}_3$) kada uvedemo Njutn-Lajbnicovu formulu. ■

13.3 Osnovne osobine određenog integrala

Sada ćemo navesti neke od osnovnih osobina određenog integrala. Pretpostavimo da su funkcije $y = f(x)$ i $y = g(x)$ dve integrabilne funkcije na intervalu $[a, b]$. Tada važi:

(i)

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Ova osobina sledi iz (13.4). Naime, postoji $x_m \in (a, b)$ tako da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_m) = -(a-b)f(x_m) = -\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

čime je dokazana prva osobina.

(ii)

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Sledi iz definicije određenog integrala za $a = b$. Naime,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$

jer je $\Delta x = (a-a)/n = 0$.

(iii)

$$\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\,, \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Sada je za proizvoljno $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i))\Delta x = \alpha \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(iv)

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Za proizvoljno $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x \pm \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x \\
&= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

(*v*) Ako je $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Sledi iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \geq 0\,,$$

jer je izraz čija se granična vrednost traži, zapravo proizvod nenegativnih činilaca.

(*vi*) Ako je $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Pošto je $f(x) \geq g(x)$, tada je $f(x) - g(x) \geq 0$ pa je

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(*vii*)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Naime, korišćenjem nejednakost trougla (1.3) sledi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x\right| \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x = \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

(*viii*) Ako $c \in (a,b)$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Naime, neka je interval $[a,b]$ podeljen na n delova, interval $[a,c]$ na n_1 delova, a interval $[c,b]$ na n_2 delova tako da je $n_1 + n_2 = n$. Tada za $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$ i $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{n_1+1, n_1+2, \ldots, n_1+n_2\}$ važi

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{n_1,n_2\to+\infty} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} f(\xi_i)\Delta x \\
&= \lim_{n_1\to+\infty} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i)\Delta x + \lim_{n_2\to+\infty} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} f(\xi_i)\Delta x \\
&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

13.4 Njutn-Lajbnicova formula

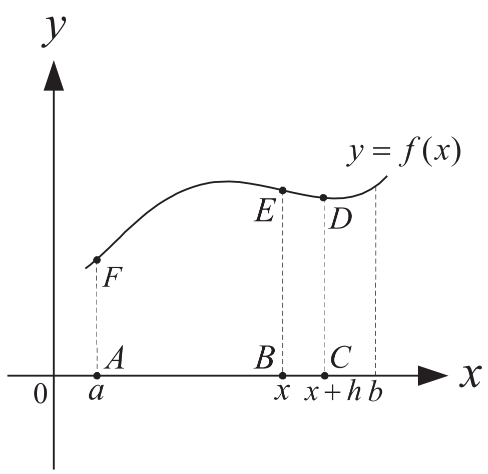
Važna posledica teoreme o srednjoj vrednosti je i Njutn-Lajbnicova formula. Da bismo je izveli, prvo ćemo pokazati da je za neprekidnu funkciju $f(x)$, $x \in [a,b]$,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]\,, \tag{13.5}$$

jedna primitivna funkcija za funkciju $f(x)$, odnosno, da za svako $x \in (a,b)$ važi $G'(x) = f(x)$. Po definiciji prvog izvoda i (13.5) imamo da je

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}\,,$$

gde su i x i $x+h$ iz intervala (a,b) (slika 13.9, $f(x) \geq 0$, $h > 0$).



Slika 13.9: $\int_a^x f(t)\,dt$ - krivolinijski trapez $ABEF$, $\int_a^{x+h} f(t)\,dt$ - krivolinijski trapez $ACDF$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti, postoji tačka $\xi \in (x, x+h)$ tako da važi

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)(x+h-x) = f(\xi)h\,.$$

Kada $h \to 0$, tada i $\xi \in (x, x+h)$ teži x. Tada je

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)h}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(\lim_{h\to 0} \xi) = f(x)\,,$$

gde je korišćena neprekidnost funkcije f u tački x.

Sada, kako se primitivne funkcije razlikuju do na konstantu, neka je $G(x) = F(x) + C$, gde je $F(x)$ još jedna primitivna funkcija za $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, odnosno, $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$. Pokazaćemo da važi Njutn-Lajbnicova formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_a^b\,. \tag{13.6}$$

Na osnovu osobine (ii) određenog integrala važi

$$G(a) = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

i

$$G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)\,.$$

Kako je, na osnovu (13.5),

$$G(b) = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

dobijena je tražena formula.

Primer 13.4.1 Izračunati date integrale.

Rešenje.

- $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}\,.$
- $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2\,.$
- $\displaystyle\int_0^\pi \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0\,.$
- $\displaystyle\int_0^1 (e^x - \sqrt{x})\,dx = \left(e^x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^1 = \left(e - \frac{2}{3}\right) - (1-0) = e - \frac{5}{3}\,.$

■

Primer 13.4.2 Pokazati da je $P_3 = \overline{P}_3$ sa slike 13.8.

Rešenje. Naime,

$$P_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{54},\ P_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\,,$$

dok je

$$P_3 = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx - P_2 - P_1 = \frac{1}{6} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{54} = \frac{\sqrt{3}}{27}\,.$$

Sada je

$$\overline{P}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{6} - P_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{54} = \frac{\sqrt{3}}{27}\,.$$

■

13.5 Metod smene i metod parcijalnog integraljenja

13.5.1 Metod smene

Neka je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, odnosno neka važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Na osnovu poglavlja 12.2, znamo da se sledeći integral rešava smenom $t=\phi(x)$, $dt=\phi'(x)\,dx$

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t)+C = F(\phi(x))+C$$

Ako je $x=a$, tada je $t=\phi(a)$, a ako je $x=b$, tada je $t=\phi(b)$. Dakle,

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{\phi(a)}^{\phi(b)} = F(\phi(b)) - F(\phi(a))\,.$$

Primer 13.5.1 Izračunati integral

$$\int_1^4 (x+2)^{2019}\,dx\,.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $t=x+2$, $dt=dx$ i promenimo granice integraljenja $x=1\Rightarrow t=3$ i $x=4\Rightarrow t=6$, pa je

$$\int_1^4 (x+2)^{2019}\,dx = \int_3^6 t^{2019}\,dt = \frac{1}{2020}t^{2020}\Big|_3^6 = \frac{6^{2020}-3^{2020}}{2020} = \frac{3^{2020}(2^{2020}-1)}{2020}\,.$$

■

Primer 13.5.2 Izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\,.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $t=1+x^2$, $dt=2xdx$ pa je $\frac{dt}{2}=xdx$. Promenimo sada i granice integraljenja $x=0\Rightarrow t=1$ i $x=1\Rightarrow t=2$, pa je

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

■

Primer 13.5.3 Izračunati integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx\,.$$

Rešenje. Napomenimo da je integral neodređen ili da granice nisu simetrične, ne bismo ga mogli izračunati. Početni integral ćemo rastaviti kao

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx\,. \tag{13.7}$$

Kod prvog integrala sa desne strane jednakosti u (13.7) ćemo uvesti smenu $t=-x$, $dt=-dx$. Promenimo sada i granice integraljenja $x=-1 \Rightarrow t=1$ i $x=0 \Rightarrow t=0$, pa je

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx &= -\int_{1}^{0} \frac{1}{(1+t^2)(1+e^{-t})}\, dt = -\int_{1}^{0} \frac{1}{(1+t^2)(1+\frac{1}{e^t})}\, dt \\
&= -\int_{1}^{0} \frac{e^t}{(1+t^2)(e^t+1)}\, dt = \int_{0}^{1} \frac{e^t}{(1+t^2)(1+e^t)}\, dt\,.
\end{aligned}$$

Kod drugog integrala da desne strane jednakosti u (13.7), samo ćemo umesto x napisati t (zapravo smena bi bila trivijalna $x=t$), pa je tada početni integral jednak

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}\, dx &= \int_{0}^{1} \frac{e^t}{(1+t^2)(1+e^t)}\, dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)(1+e^t)}\, dt \\
&= \int_{0}^{1} \frac{e^t+1}{(1+t^2)(1+e^t)}\, dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

■

Primer 13.5.4 Izračunati integral

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx\,.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $x = \operatorname{tg} t$ pa je tada

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}\, dt = \left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)\, dt\,.$$

Ako sada zamenimo granice integraljenja $x=0 \Rightarrow t=0$ i $x=1 \Rightarrow t=\pi/4$, imaćemo

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t} \left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)\, dt = \int_{0}^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} t)\, dt =: I\,.$$

Uvedimo sada još jednu smenu $s = \pi/4 - t$, pa je $ds = -dt$, $t = 0 \Rightarrow s = \pi/4$ i $t = \pi/4 \Rightarrow s = 0$. Dakle,

$$I = -\int_{\pi/4}^{0} \ln\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - s\right)\right) ds = \int_{0}^{\pi/4} \ln\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - s\right)\right) ds\,.$$

Koristeći formulu za $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ datu u poglavlju 7.2.5, imamo da je

$$I = \int_{0}^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} s}\right) ds = \int_{0}^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg} s}\right) ds.$$

Sada je,

$$I = \int_{0}^{\pi/4} \ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg} s + 1 - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg} s}\right) ds = \int_{0}^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} s}\right) ds\,.$$

Koristeći osobinu logaritma da je logaritam količnika jednak razlici logaritama, važiće

$$I = \int_{0}^{\pi/4} \ln 2\, ds - \int_{0}^{\pi/4} \ln\left(1 + \operatorname{tg} s\right) ds = \frac{\pi}{4}\,\ln 2 - I$$

i onda je

$$I = \frac{\pi}{8}\,\ln 2\,.$$

■

Primer 13.5.5 Izračunati integral

$$\int_{0}^{8} \frac{1}{x - 2\sqrt[3]{x} + 4}\, dx\,.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $t = \sqrt[3]{x}$, tada je $t^3 = x \Rightarrow 3t^2\, dt = dx$ i $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 8 \Rightarrow t = 2$. Sada integral postaje

$$\int_{0}^{2} \frac{3t^2}{t^3 - 2t + 4}\, dt$$

što je integral racionalne funkcije. Sada ćemo imenilac podintegralne funkcije rastaviti na činioce korišćenjem Hornerove sheme. Kandidati za racionalne nule su ± 1, ± 2 i ± 4. Krenućemo od $t = -1$.

1	0	-2	4	r	$t = -1$	
	1	-1	-1	5	$t = -2$	$t = -1$ nije nula polinoma, zanemarujemo dobijene koeficijente
	1	-2	2	0		$P(z) = (t+2)(t^2 - 2t + 2)$

Kako je $t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 > 0$, kvadratna funkcija se ne može rastaviti na činioce u skupu $\mathbb{R}$. Preostalo je da se reši integral (prvo kao neodređeni)

$$\begin{aligned}
\int \frac{3t^2}{(t+2)(t^2 - 2t + 2)}\, dt &= \int \left(\frac{A}{t+2} + \frac{Bt + C}{t^2 - 2t + 2}\right) dt \\
&= \int \frac{t^2(A+B) + t(-2A + 2B + C) + 2A + 2C}{(t+2)(t^2 - 2t + 2)}\, dt\,,
\end{aligned}$$

odakle sledi da je $A+B=3$, $-2A+2B+C=0$ i $2A+2C=0$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo $(A,B,C)=(6/5,9/5,-6/5)$. Znači

$$\begin{aligned}\int \frac{3t^2}{(t+2)(t^2-2t+2)}\,dt &= \frac{6}{5}\int \frac{1}{t+2}\,dt+\frac{3}{5}\int \frac{3t-2}{t^2-2t+2}\,dt\\ &= \frac{6}{5}\ln|t+2|+\frac{3}{5}\,I_1\end{aligned}$$

Integral I_1 rešavamo na sledeći način.

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{3t-2}{(t-1)^2+1}\,dt=\{s=t-1\Rightarrow ds=dt\}=\int \frac{3s+1}{s^2+1}\,ds\\ &= \int \frac{3s}{s^2+1}\,ds+\int \frac{1}{s^2+1}\,ds=\frac{3}{2}\ln|s^2+1|+\operatorname{arctg} s+C\\ &= \frac{3}{2}\ln|t^2-2t+2|+\operatorname{arctg}(t-1)+C\,.\end{aligned}$$

Dakle

$$\int \frac{3t^2}{(t+2)(t^2-2t+2)}\,dt=\frac{6}{5}\ln|t+2|+\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\ln|t^2-2t+2|+\operatorname{arctg}(t-1)\right)+C=F(t)\,,$$

a onda je i

$$\int_0^2 \frac{3t^2}{(t+2)(t^2-2t+2)}\,dt=F(2)-F(0)=\frac{3}{10}(\pi+\ln 16)\,.$$

■

13.5.2 Metod parcijalnog integraljenja

Formula za parcijalno integraljenje kod određenog integrala je

$$\int_a^b u(x)dv(x)\,dx=u(x)v(x)\big|_a^b-\int_a^b v(x)\,du(x)\,dx\,.$$

Primer 13.5.6 Izračunati integral

$$3\int_0^1 x^2\operatorname{arctg} x\,dx\,.$$

Rešenje. Biramo $u=\operatorname{arctg} x$ i $dv=x^2\,dx$, pa je $du=\frac{1}{1+x^2}\,dx$, $v=\frac{x^3}{3}$. Sada je

$$3\int_0^1 x^2\operatorname{arctg} x\,dx=3\left(\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x\big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx\right)=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx\,.$$

Ovde smo koristili da je $\operatorname{arctg} 1=\pi/4$. Rešimo sada preostali integral koristeći primer 13.5.2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\,dx=\int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2}\,dx-\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx=\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{2}\ln 2\\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\,.\end{aligned}$$

Dakle, konačno rešenje je

$$3\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

■

Primer 13.5.7 Izračunati integral

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx\,.$$

Rešenje. Kako je $\ln x < 0$ za $0 < x < 1$ i $\ln x > 0$ za $x > 1$, tada je (vidi primer 12.3.5),

$$\begin{aligned}\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx &= -\int_{1/e}^{1} \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = -(x\ln x - x)\big|_{1/e}^{1} + (x\ln x - x)\big|_1^e \\ &= -\left((0-1) - (\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \frac{1}{e})\right) + (e\ln e - e) - (0-1) = 2 - \frac{2}{e}\,.\end{aligned}$$

■

Primer 13.5.8 Izračunati integral

$$\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx\,.$$

Rešenje. U granicama integraljenja, podintegralna funkcija je negativna, tako da očekujemo i negativno rešenje integrala. Rešimo ga kao da je neodređeni integral uvođenjem smene $t = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow dt = x/\sqrt{x^2-1}\,dx$.

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{x}{x^4\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}\,,$$

jer je $t^2 = x^2 - 1$, pa je $x^2 = t^2 + 1$ i $x^4 = (t^2+1)^2$. Poslednji integral je rešen u primeru 12.3.3 za $a = 1$, te je

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t\right) + C\,.$$

Ako vratimo smenu, tada je

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} + \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right) + C = F(x)\,.$$

Dakle,

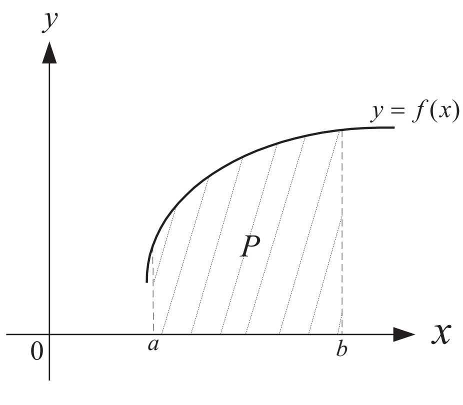
$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx &= F\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - F(-2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\frac{4}{3}-1}}{\frac{4}{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4}{3}-1} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{12}\,.
\end{aligned}$$

■

13.6 Izračunavanje površine ravnog lika

I slučaj. Iz prethodnog poglavlja jasno je da je površina ravnog lika koji je ograničen funkcijom $f(x) \geq 0$ sa gornje strane, x-osom sa donje i pravama $x = a$ i $x = b$ (slika 13.10) jednaka

$$P = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$



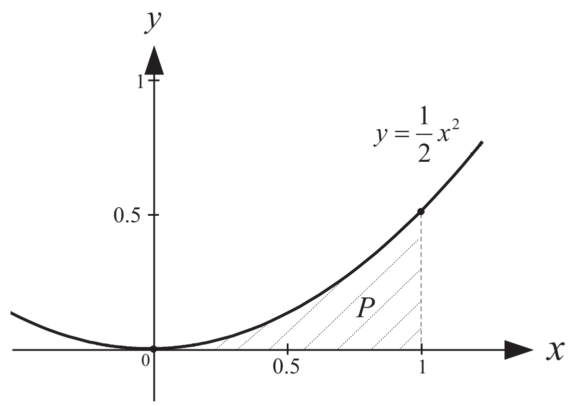
Slika 13.10: Površina ravnog lika ako je grafik funkcije iznad x-ose.

Primer 13.6.1 Korišćenjem Njutn-Lajbnicove formule (13.6), površina ravnog lika sa slike 13.2 je

$$P = \int_1^4 \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)\,dx = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4^2}{2} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 9\,.$$

■

Primer 13.6.2 Odrediti površinu ravnog lika koji je ograničen funkcijom $f(x) = x^2/2$, pravom $x = 1$ i x-osom (slika 13.11).



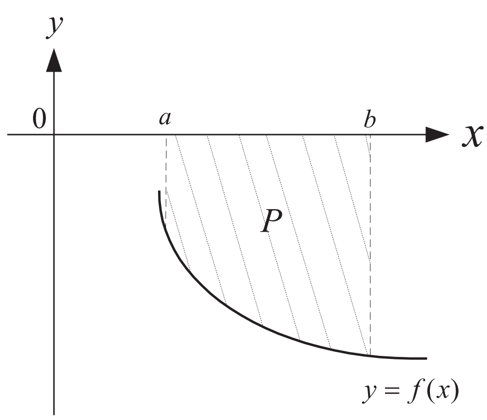
Slika 13.11: Površina ograničena funkcijom $f(x) = x^2/2$, pravom $x = 1$ i x-osom.

Rešenje. Površina se računa kao

$$P = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(1-0) = \frac{1}{6}\,.$$

■

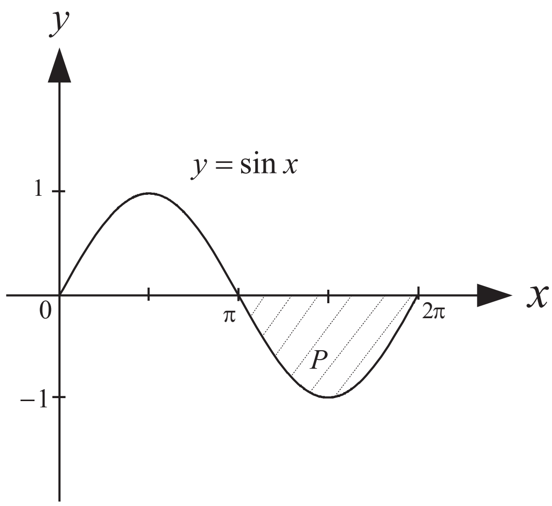
II slučaj. Kada je $f(x) \leq 0$ (slika 13.12), tada je



Slika 13.12: Površina ravnog lika ako je grafik funkcije ispod x-ose.

$$P = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\,.$$

Primer 13.6.3 Izračunati površinu ravnog lika ograničenog funkcijom $f(x) = \sin x$, x-osom, $x \in [\pi, 2\pi]$ (slika 13.13).



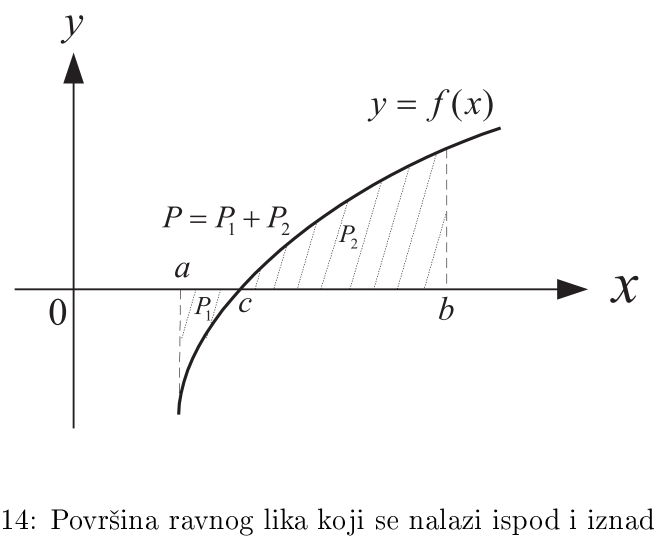
Slika 13.13: Površina ograničena funcijom $f(x) = \sin x$, $x \in [\pi, 2\pi]$ i x-osom.

Rešenje. Površina je

$$P = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = |-(\cos 2\pi - \cos \pi)| = |-(1-(-1))| = |-2| = 2.$$

■

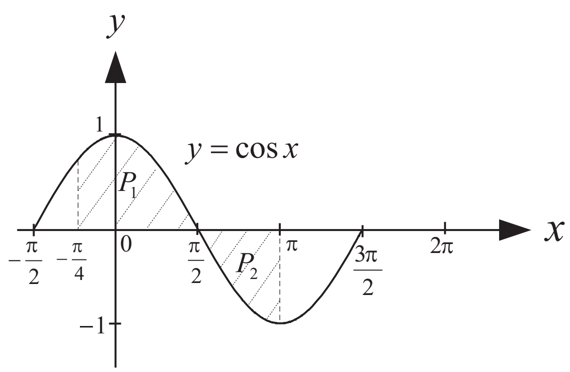
III slučaj. Ako se traži površina kao na slici (slika 13.14), tada je



Slika 13.14: Površina ravnog lika koji se nalazi ispod i iznad x-ose.

$$P = \left| \int_a^c f(x) \, dx \right| + \int_c^b f(x) \, dx \, .$$

Primer 13.6.4 Izračunati površinu ravnog lika koja je ograničena funkcijom $f(x) = \cos x$, $x \in [-\pi/4, \pi]$ i x-osom (slika 13.15).



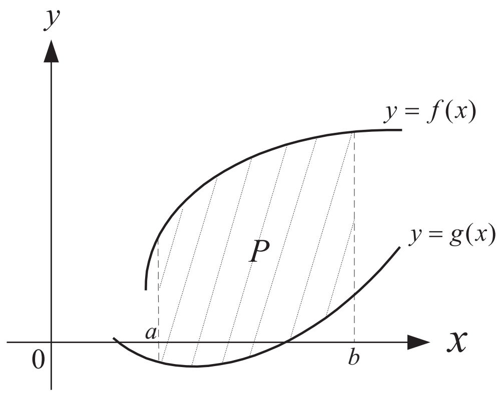
Slika 13.15: Površina ravnog lika funkcije $f(x) = \cos x$ koja je ograničena x-osom dok $x \in [-\pi/4, \pi]$.

Rešenje. Površina je $P = P_1 + P_2$, odnosno

$$P = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos x\, dx + \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\, dx \right| = \sin x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/2} + \left| \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right| = (1-(-\sqrt{2}/2)) + |0-1| = 2+\sqrt{2}/2\,.$$

■

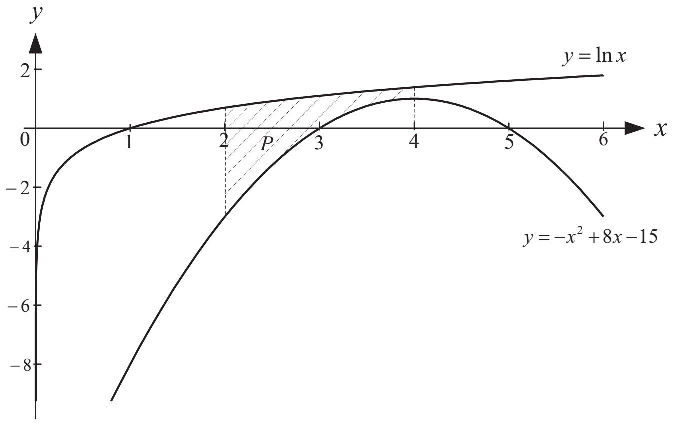
IV slučaj. U situaciji kao na slici (slika 13.16), površina je



Slika 13.16: Površina ravnog lika između dve funkcije.

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\,.$$

Primer 13.6.5 Izračunati površinu ravnog lika ograničenog pravama $x = 2$, $x = 4$ i funkcijama $y = \ln x$ i $y = -x^2 + 8x - 15$ (slika 13.17).



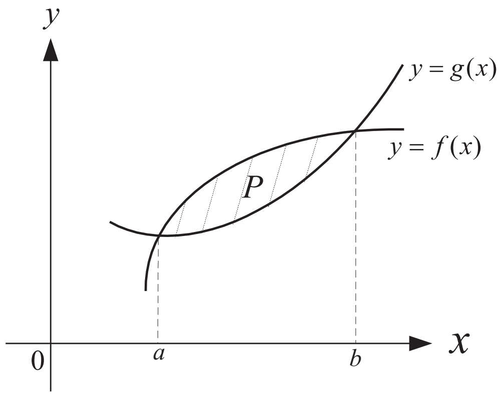
Slika 13.17: Površina ravnog lika ograničenog funkcijama $y = \ln x$ i $y = -x^2 + 8x - 15$ dok $x \in [2, 4]$.

Rešenje. Pre računanja ove površine, podsetimo se da je $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$. Sada je

$$P = \int_2^4 (\ln x - (-x^2 + 8x - 15))\, dx = \left(x \ln x - x + \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x \right) \Big|_2^4 = 6 \ln 2 - \frac{4}{3}\,.$$

∎

V slučaj. Površina ravnog lika sa slike 13.18, računa se kao

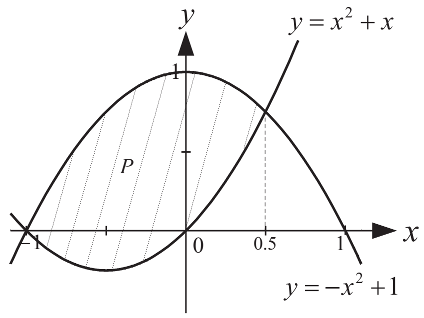


Slika 13.18: Površina ravnog lika između dve funkcije koje se seku.

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\,,$$

gde se a i b dobijaju rešavanjem jednačine $f(x) = g(x)$ po x.

Primer 13.6.6 Izračunati površinu ravnog lika omeđenog funkcijama $y = -x^2 + 1$ i $y = x^2 + x$ (slika 13.19).



Slika 13.19: Površina ravnog lika između funkcija $y = -x^2 + 1$ i $y = x^2 + x$.

Rešenje. Prvo moramo naći granice integraljenja rešavajući jednačinu $-x^2 + 1 = x^2 + x$. Dakle,

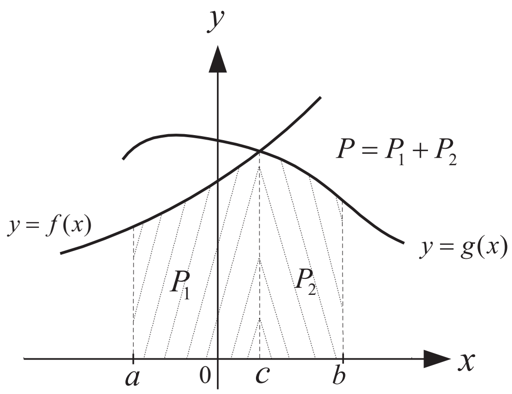
$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Tada je tražena površina

$$P = \int_{-1}^{1/2} ((-x^2+1) - (x^2+x))\,dx = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)\,dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8}\,.$$

■

VI slučaj. Ako je situacija kao na slici (slika 13.20), tada je

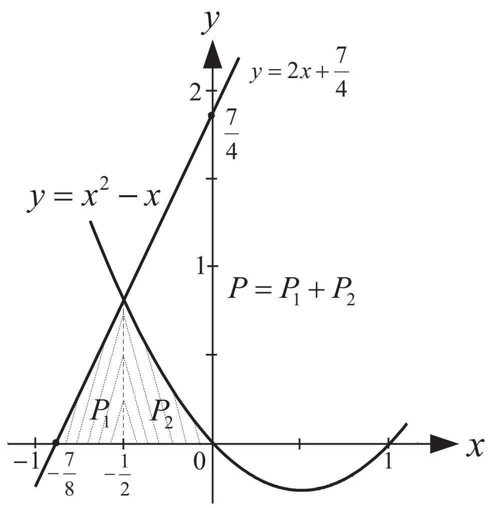


Slika 13.20: Površina ravnog lika ograničenog dvema funkcijama i x-osom.

$$P = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx\,,$$

gde se c dobija rešavanjem jednačine $f(x) = g(x)$ po x.

Primer 13.6.7 Odrediti površinu ravnog lika ograničenog x-osom i funkcijama $y = x^2 - x$ i $y = 2x + 7/4$ za $x \leq 0$. (slika 13.21).



Slika 13.21: Površina ravnog lika ograničenog funkcijama $y = x^2 - x$ i $y = 2x + 7/4$ i x-osom.

Rešenje. Vidimo sa slike 13.21 da se tražena površina mora podeliti na dve površine P_1 i P_2. Odredimo prvo granice integraljenja. Rešavanjem jednačine $x^2 - x = 2x + 7/4$ za $x \leq 0$, dobijamo da je $x = -1/2$. Tada je

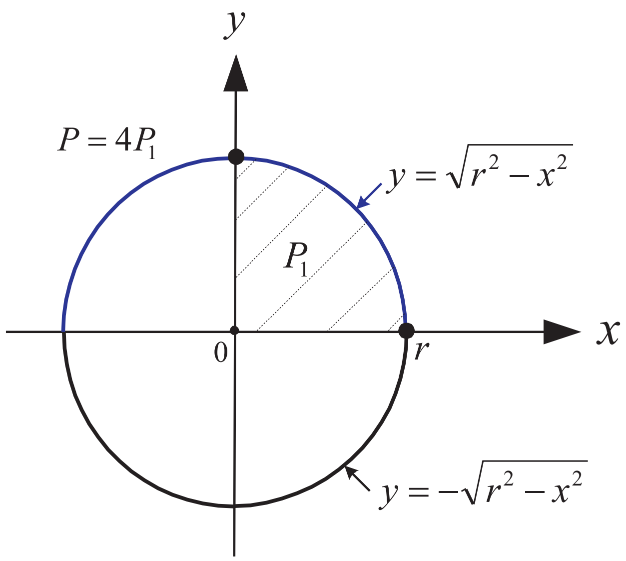
$$P_1 = \int_{-7/8}^{-1/2} \left(2x + \frac{7}{4}\right) dx = \left(x^2 + \frac{7}{4}x\right)\Big|_{-7/8}^{-1/2} = \frac{9}{64}\,,$$

i

$$P_2 = \int_{-1/2}^{0} (x^2 - x)\; dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1/2}^{0} = \frac{1}{6}\,,$$

pa je $P = P_1 + P_2 = \frac{59}{192}$. ∎

Primer 13.6.8 Izračunati površinu kruga poluprečnika r koristeći određeni integral ($P = r^2\pi$).



Slika 13.22: Površina četvrtine kruga ograničena funkcijom $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$ i x-osom.

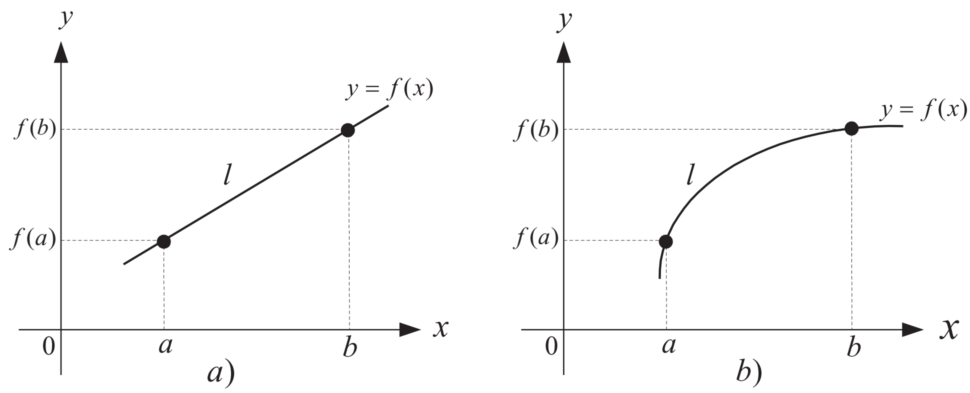
Rešenje. Kako je jednačina centralne kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, tada je tražena funkcija koja ograničava traženu površinu $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Površina kruga je (slika 13.22) $P = 4P_1$, gde je

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r\sin t, \\ dx = r\cos t\,dt \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)} \cdot r\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2 t} \cdot r\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt \\
&= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{r^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \right) dt = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{r^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi \right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right) = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{r^2}{4}\pi\,.
\end{aligned}$$

Pri promeni granice integraljenja koristili smo da je $t = \arcsin\frac{x}{r}$, te je za $x = 0$, $t = \arcsin 0 = 0$ i za $x = r$, $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. ■

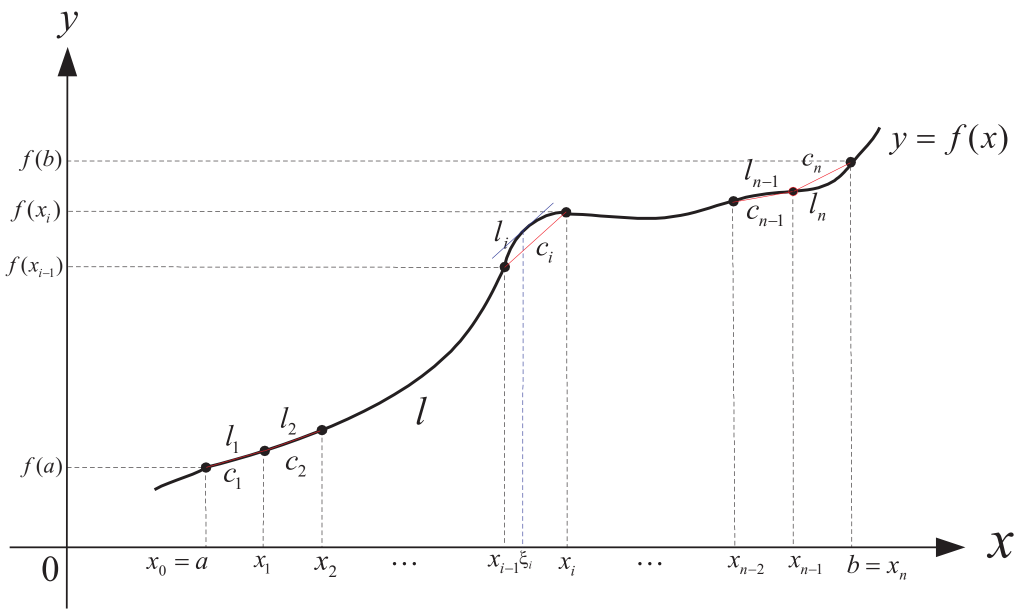
13.7 Izračunavanje dužine luka krive

Ako treba da se izračuna dužina putanje od tačke $(a, f(a))$ do $(b, f(b))$ kao na slici 13.23 a), tada se lako, korišćenjem Pitagorine teoreme, dolazi do $l = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$. U slučaju kao na slici 13.23 b), kada je u pitanju dužina luka neke krive linije, ovakav pristup, naravno, nije tačan.



Slika 13.23: a) Dužina luka prave linije, b) dužina luka krive linije.

Neka funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod na intervalu $[a, b]$. Da bismo izračunali dužinu luka krive određena grafikom funkcije $f(x)$, $x \in [a, b]$, odnosno od tačke $(a, f(a))$ do $(b, f(b))$, potrebno je podeliti interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala koji su dužine $\Delta x = (b-a)/n$, gde je $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\Delta x$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ i $x_n = b$ kao na slici 13.24.



Slika 13.24: Dužina luka krive koju čini grafik funkcije $f(x)$, $x \in [a, b]$.

Obeležićemo sa $\Delta x_i = \Delta x = x_i - x_{i-1}$, a sa $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Tada je (slika 13.24)

$$l \approx c_1 + c_2 + \cdots + c_n, \text{ gde je } c_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti (teorema 11.1.3), postoji tačka $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tako da je $f'(\xi_i) = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x}$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \approx l\,.$$

Dužina luka krive je tada

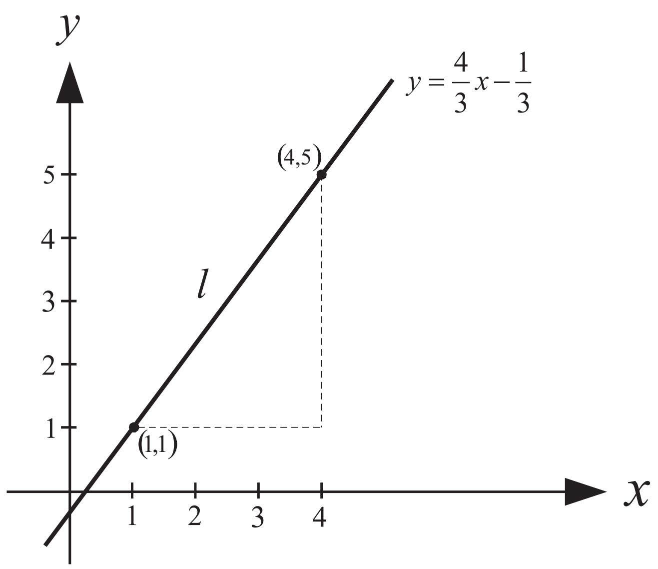
$$l = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \tag{13.8}$$

Poslednji izraz u (13.8) je zapravo Rimanova suma, pa je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,,$$

ako je $dx = \Delta x$.

Primer 13.7.1 Izračunati dužinu ravne putanje od tačke $(1, 1)$ do tačke $(4, 5)$ (slika 13.25) koristeći određeni integral.



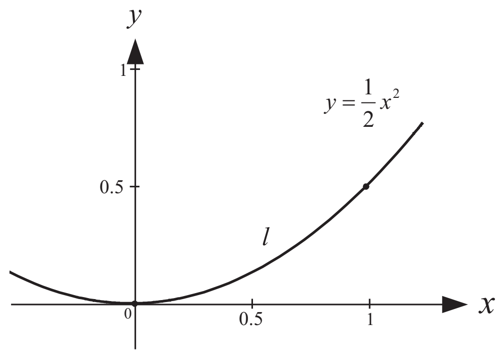
Slika 13.25: Dužina duži od tačke $(1, 1)$ do tačke $(4, 5)$.

Rešenje. Korišćenjem Pitagorine teoreme dobijamo da je dužina $l = 5$ (l je hipotenuza trougla čija su temena $(1,1)$, $(4,1)$ i $(4,5)$). Proverimo to pomoću određenog integrala. Prava koja prolazi kroz date tačke je $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$, pa je $f'(x) = 4/3$, a $\sqrt{1+(f'(x))^2} = 5/3$. Tada je

$$l = \int_1^4 \frac{5}{3}\,dx = \frac{5}{3}x\Big|_1^4 = \frac{5}{3}(4-1) = 5.$$

■

Primer 13.7.2 Odrediti dužinu luka krive $y = x^2/2$ za $x \in [0,1]$ (slika 13.26).



Slika 13.26: Luk grafika funkcije $y = x^2/2$, $x \in [0,1]$.

Rešenje. Jasno je da je $f'(x) = x$, a $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+x^2}$. Izračunajmo sada $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

$$I = \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = I_1 + I_2.$$

Sada je $I_1 = \ln|x + \sqrt{1+x^2}|$, dok je

$$\begin{aligned} I_2 = & \int \frac{x \cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, & v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\} \\ = & \; x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx \\ = & \; x\sqrt{1+x^2} - I\,. \end{aligned}$$

Znači,

$$I = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2} - I + 2C,$$

pa je

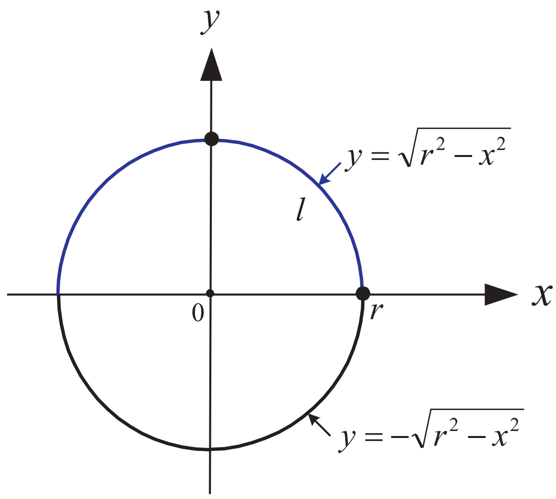
$$I = \frac{1}{2}\left(\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}\right) + C\,.$$

Tada je tražena dužina luka

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln|1+\sqrt{2}| + \sqrt{2}\right).$$

■

Primer 13.7.3 Izračunati obim O kružnice poluprečnika r (slika 13.27) koristeći određeni inte-gral ($O = 2r\pi$).



Slika 13.27: Kružnica poluprečnika r, posmatran je grafik funkcije za $x \in [0, r]$.

Rešenje. Ponovo, kako je jednačina centralne kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, tada je tražena funkcija čiji ćemo luk meriti $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Možemo obeležiti sa l deo kružnice kada je $x \in [0, r]$ i $f(x) \geq 0$ pa je tada $O = 4l$. Lako se dobija da je $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $(f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2-x^2}$, $1 + (f'(x))^2 = \frac{r^2}{r^2-x^2}$ i $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Tada je

$$l = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = r\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Odavde dobijamo da je $O = 4l = 2r\pi$. ■

Neka je data kriva $y = f(x)$ jednačinama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, gde su x i y neprekidno diferencijabilne na segmentu $[\alpha, \beta]$. Neka se eliminacijom parametra t iz datih jednakosti dobija jednačina krive u obliku $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Tada se dužina l krive linije od tačke $(a, f(a))$ do tačke $(b, f(b))$ izračunava po formuli

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,.$$

Primer 13.7.4 Zadatak iz prethodnog primera možemo uraditi ako zapišemo jednačinu kružnice u parametarskom obliku

$$x(t) = r\cos t,\; y(t) = r \sin t,\; t \in [0, \pi/2]\,.$$

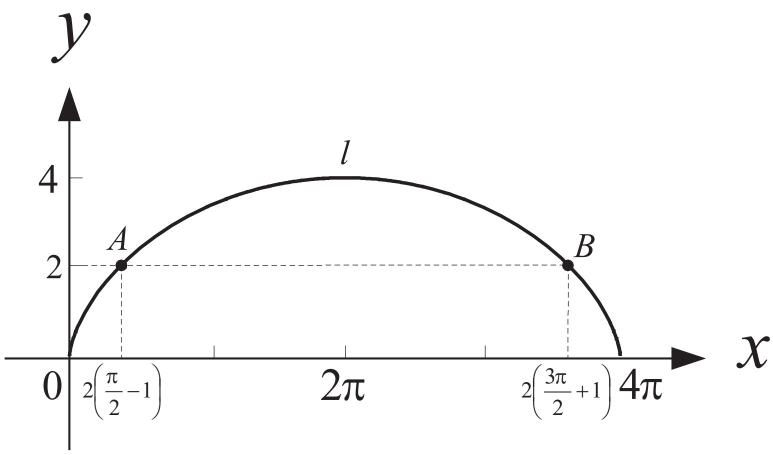
Tada je $x'(t) = -r\sin t$, $y'(t) = r\cos t$ i $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = r^2$, pa je $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = r$. Dakle,

$$l = \int_0^{\pi/2} r\, dt = r\Big|_0^{\pi/2} = r\,\frac{\pi}{2}\,,$$

što je dobijeno i u prethodnom primeru. ■

Primer 13.7.5 Izračunati dužinu luka krive $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$ ako $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ (slika 13.28).

Rešenje. Pošto je $x'(t) = 2(1 - \cos t)$ i $y'(t) = 2\sin t$, tada je $(x'(t))^2 = 4(1 - \cos t)^2$ i $(x'(t))^2 = 4\sin^2 t$. Znači da je



Slika 13.28: Cikloida $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$ za $t \in [0, 2\pi]$ $(0 \leq x \leq 4\pi$, $0 \leq y \leq 4)$. Dužina luka od tačke A do tačke B je $l = 8\sqrt{2}$.

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{4 - 8\cos t + 4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \sqrt{8 - 8\cos t} = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,.$$

Kako je

$$\int \sqrt{1 - \cos t}\, dt = \int \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = \sqrt{2}\int \sin \frac{t}{2}\, dt = -2\sqrt{2}\cos \frac{t}{2} + C,,$$

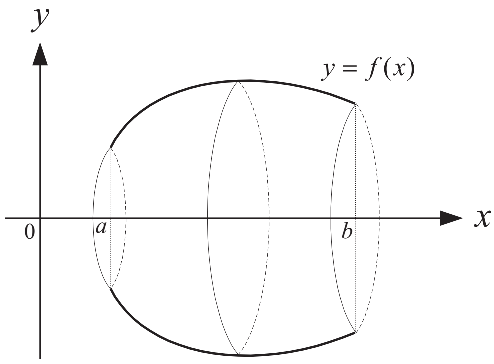
onda je

$$l = 2\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2\sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}\cos \frac{t}{2})\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -8\left(\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\,.$$

■

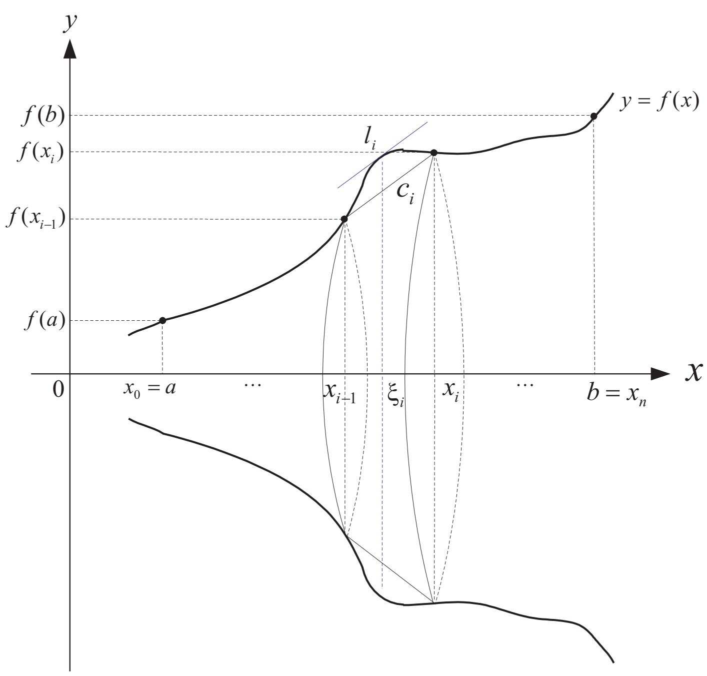
13.8 Izračunavanje površine obrtnog tela

Neka je $f(x)$ pozitivna funkcija na intervalu $[a, b]$ sa neprekidnim prvim izvodom na tom intervalu. Neka se grafik funkcije f rotira oko x-ose dok $x \in [a, b]$ (slika 13.29).



Slika 13.29: Funkcija $f(x)$ rotira oko x-ose formirajući obrtno telo.

Da bi se odredila površina obrtnog tela (bez baza), potrebno je, kao i pri određivanju dužine luka krive iz prethodnog poglavlja, interval $[a, b]$ podeliti na n jednakih podintervala dužine $\Delta x = (b - a)/n = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na svakom od tih intervala uoči se trapez sa osnovicama dužine $f(x_{i-1})$ i $f(x_i)$, i kracima Δx i c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (slika 13.30).



Slika 13.30: i-ta zarubljena kupa nastala rotacijom funkcije $f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ oko x-ose.

Prilikom rotacije oko x-ose, formira se zarubljena kupa. Poznato je da je površina omotača M zarubljene kupe jednaka

$$M = (r_1 + r_2)\pi\, s, \tag{13.9}$$

gde su r_1 i r_2 poluprečnici osnova kupe, a s izvodnica. Dakle, površina omotača zarubljene kupe sa slike 13.30 biće jednaka

$$M_i = (f(x_{i-1}) + f(x_i))\pi\, c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Opet, postoji tačka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tako da je $c_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x$, te je

$$M_i = (f(x_{i-1}) + f(x_i))\pi\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

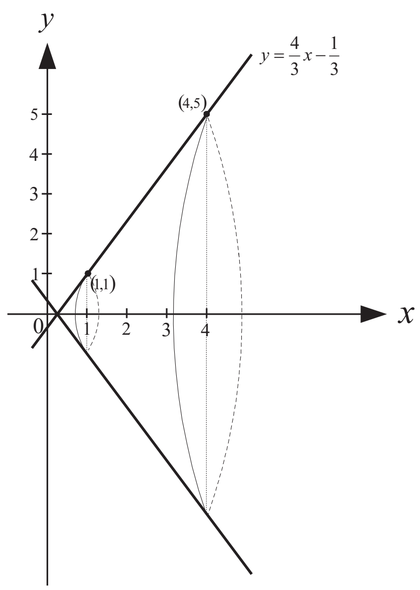
Zaključujemo da bi $\sum_{i=1}^{n} M_i$ bila jedna aproksimacija površine obrtnog tela koja bi postajala sve preciznija kako bi se n povećavalo. Ako pustimo da n teži beskonačnosti, tada dobijamo površinu obrtnog tela nastalog rotacijom funkcije f oko x-ose, odnosno

$$M = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\pi\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x\,.$$

Poslednji izraz u prethodnoj jednakosti je Rimanova suma za funkciju $2f(x)\pi\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Dakle, površina obrnog tela je

$$M = \int_a^b 2f(x)\pi\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,. \tag{13.10}$$

Primer 13.8.1 Izračunajmo sada površinu zarubljene kupe nastale rotacijom funkcije $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ oko x-ose, ako je $x \in [1, 4]$ (slika 13.31).



Slika 13.31: Zarubljena kupa nastala rotacijom prave $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$, $x \in [1, 4]$, oko x-ose.

Rešenje. Jasno je da je, na osnovu formule (13.9), površina tako dobijene zarubljene kupe

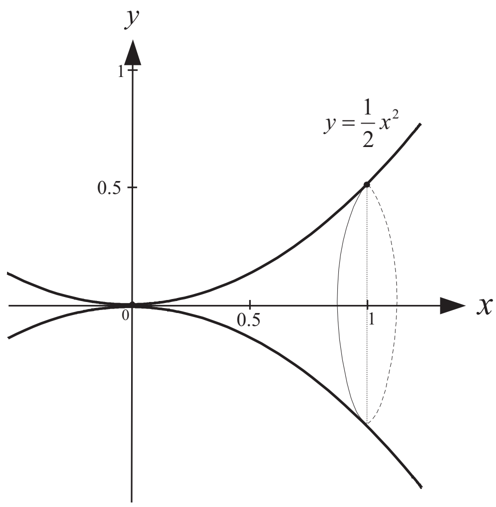
$$M = (f(1) + f(4))\pi \cdot 5 = (1+5)\pi \cdot 5 = 30\pi\,.$$

Koristeći određeni integral i da je $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ i $\sqrt{1+(f'(x))^2} = 5/3$, imamo da je

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_1^4 \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{3}\,dx = \frac{10}{3}\pi \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3}\right)\Big|_1^4 \\ &= \frac{10}{3}\pi \left(\left(\frac{2\cdot 16}{3} - \frac{1\cdot 4}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) = 30\pi\,. \end{aligned}$$

■

Primer 13.8.2 Odrediti površinu obrtnog tela koje nastaje rotacijom grafika funkcije $y = x^2/2$ ograničene pravama $x = 0$ i $x = 1$ i x-osom (slika 13.32).



Slika 13.32: Funkcija $y = \frac{1}{2}x^2$, $x \in [0,1]$, rotira oko x-ose.

Rešenje. Posmatramo funkciju $f(x) = x^2/2$, gde je $x \in [0,1]$ i $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+x^2}$. Tada je površina obrtnog tela

$$M = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2}\,dx = \pi \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx\,.$$

Rešimo sada neodređeni integral $I = \int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$.

$$I = \int \frac{x^2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^2+x^4}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = I_1 + I_2\,.$$

Sada je

$$I_1 = \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,.$$

Prvi integral je rešen u primeru 13.7.2, a drugi je tablični, pa je tada

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C\,. \end{aligned}$$

Rešimo sada I_2.

$$I_2 = \int \frac{x^3\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = x^3, & du = 3x^2dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, & v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\} = x^3\sqrt{1+x^2} - 3\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx,$$

pa je $I_2 = x^3\sqrt{1+x^2} - 3I$. Sada je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + x^3\sqrt{1+x^2} - 3I + 4C\,.$$

Konačno

$$4I = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + x^3\sqrt{1+x^2} + 4C,$$

pa je

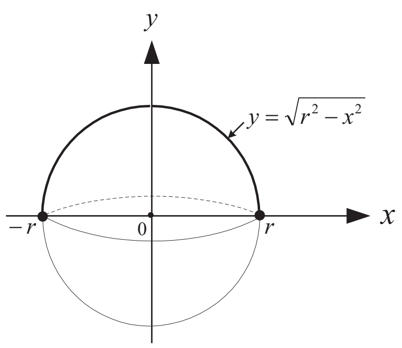
$$I = \frac{1}{8}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{4}x^3\sqrt{1+x^2} + C\,.$$

Površina omotača posmatranog obrtnog tela je

$$\begin{aligned} M &= \pi\left(\frac{1}{8}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{4}x^3\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\ln(1+\sqrt{2})\right)\pi\,. \end{aligned}$$

■

Primer 13.8.3 Izračunajmo sada površinu M lopte poluprečnika r koristeći određeni integral ($M = 4r^2\pi$, slika 13.33).



Slika 13.33: Sfera nastala rotacijom funkcije $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, oko x-ose.

Rešenje. Kao i u primeru 13.7.3, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ i $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Površina lopte je tada $M = 2M_1$, gde je

$$M_1 = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_0^r r\, dx = 2\pi r x\Big|_0^r = 2\pi r(r - 0) = 2\pi r^2 .$$

■

13.9 Izračunavanje zapremine obrtnog tela

Ako posmatramo sliku 13.30 i ako želimo da odredimo zapreminu tela koje nastaje rotacijom funkcije $f(x) \geq 0$ oko x-ose dok $x \in [a, b]$, tada je potrebno izračunati zapreminu zarubljene kupe sa slike 13.30 koristeći oznake iz poglavlja 13.8. Poznato je da je zapremina zarubljene kupe $V = \pi H(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3$ gde je H visina kupe, a r_1 i r_2 poluprečnici baza. Dakle, zapremina zarubljene kupe sa slike 13.30, čija je visina $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, a poluprečnici baza $f(x_i)$ i $f(x_{i-1})$, je

$$V_i = \pi \Delta x((f(x_{i-1}))^2 + f(x_{i-1})f(x_i) + (f(x_i))^2)/3,\ i = 1, 2, \ldots, n .$$

Zaključujemo da je jedna aproksimacija zapremine obrtnog tela

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{n} ((f(x_{i-1}))^2 + f(x_{i-1})f(x_i) + (f(x_i))^2)\Delta x ,$$

pa je tražena zapremina

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{n} ((f(x_{i-1}))^2 + f(x_{i-1})f(x_i) + (f(x_i))^2)\Delta x .$$

Izraz na desnoj strani prethodne jednakosti je Rimanova suma za funkciju $f^2(x)\pi$, pa je tražena zapremina

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx . \tag{13.11}$$

Primer 13.9.1 Izračunajmo sada zapreminu tela nastalog rotacijom grafika funkcije sa slike 13.31.

Rešenje. Jasno je da je

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot (4 - 1)(f(4)^2 + f(4)f(1) + f(1)^2) = \pi(5^2 + 5 \cdot 1 + 1^2) = 31\pi ,$$

po formuli za zapreminu zarubljene kupe

$$V = \frac{\pi}{3} \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) H ,$$

gde su r_1 i r_2 poluprečnici osnova, a H visina zarubljene kupe.

Ako želimo da izračunamo zapreminu preko određenog integrala, tada je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{\pi}{9}\int_1^4 (4x-1)^2\, dx = \frac{\pi}{9}\int_1^4 (16x^2 - 8x + 1)\, dx \\ &= \frac{\pi}{9}\left(\frac{16}{3}x^3 - 4x^2 + x\right)\Big|_1^4 = \frac{\pi}{9}\left(\frac{844}{3} - \frac{7}{3}\right) = 31\pi\,. \end{aligned}$$

■

Primer 13.9.2 Zapremina obtrnog tela sa slike 13.32 je

$$V = \pi\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^4\, dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{20}\,.$$

■

Primer 13.9.3 Zapremina lopte sa slike 13.33 ($V = 4r^3\pi/3$) koristeći određeni integral je

$$V = \pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = \frac{4}{3}r^3\pi\,.$$

■

13.10 Primena integrala u biologiji i fitomedicini

Opstanak i obnova. Populacija može stalno da dobija nove članove dok će neki od postojećih članova umreti. Ako budemo u stanju da modelujemo kako se ove promene dešavaju odgovarajućim funkcijama, moći ćemo predvideti veličinu populacije u bilo kom trenutku u budućnosti. Pretpostavimo da je početni broj članova populacije jednak P_0 i da se novi članovi dodaju po stopi $R(t)$, gde je t broj godina od početka posmatranja broja jedinki u populaciji. Funkciju R nazivamo funkcijom obnavljanja. Dalje, deo populacije koji preživi najmanje t godina od trenutka brojanja jedinki dat je funkcijom preživljavanja S. Na primer, ako je $S(5) = 0.8$, to znači da će 80% jedinki preživeti nakon 5 godina. Da bismo predvideli populaciju nakon T godina, prvo moramo primetiti da je $S(t)P_0$ trenutni broj članova populacije u vremenu $t \in [0, T]$. Da bismo izračunali broj novih članova, potrebno je podeliti interval $[0, T]$ na, recimo, n podintervala $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dužine $\Delta t = T/n$. Dakle, u i-tom intervalu $[t_{i-1}, t_i]$, broj članova populacije koji se dodaje je $R(t_i)\Delta t$, a do vremena T, preostalo je $T - t_i$ godina, pa je deo članova koji je preživeo $S(T - t_i)$. Broj članova od dodatih, a koji je preživeo, za posmatrani interval je

$$S(T - t_i)R(t_i)\Delta t.$$

Ukupan broj novih članova populacije koji će preživeti nakon T godina je približno

$$\sum_{i=1}^{n} S(T - t_i)R(t_i)\Delta t.$$

Ako pustimo da $n \to +\infty$, prethodni izraza postaje

$$\int_0^T S(T-t)R(t)\,dt.$$

Dakle, neka je početni broj članova populacije P_0 i neka je brzina povećanja populacije data funkcijom $R(t)$, gde je t vreme u godinama. Ako je deo populacije koji je ostao nakon t godina dat funkcijom preživljavanja $S(t)$, veličina populacije nakon T godina je

$$P(T) = S(T)\,P_0 + \int_0^T S(T-t)R(t)\,dt\,. \tag{13.12}$$

Primer 13.10.1 Neka je početni broj pastrmki u jezeru 5600 i neka je brzina reprodukcije data funkcijom $R(t) = 720e^{0.1t}$ riba u godini. Ipak, zagađenje utiče na pomor ribe, tako da je preživeli deo riba nakon t godina dat funkcijom $S(t) = e^{-0.2t}$. Koliko će biti pastrmki nakon 10 godina?

Rešenje. Rešimo integral u (13.12)

$$\int_0^T S(T-t)R(t)\,dt = 720\int_0^T e^{-0.2(T-t)}e^{0.1t}\,dt = 720e^{-0.2\,T}\int_0^T e^{0.3\,t}\,dt = \frac{720}{0.3}e^{-0.2\,T}e^{0.3\,t}\Big|_0^T$$

što nam daje

$$\int_0^T S(T-t)R(t)\,dt = 2400e^{-0.2\,T}\left(e^{0.3\,T}-1\right) = 2400\left(e^{0.1\,T}-e^{-0.2\,T}\right).$$

Sada je

$$P(T) = 5600e^{-0.2T} + 2400\left(e^{0.1\,T}-e^{-0.2\,T}\right) = 3200e^{-0.2T} + 2400e^{0.1\,T},$$

pa je broj pastrmki nakon 10 godina jednak

$$P(10) = 3200e^{-2} + 2400e \approx 6956.95.$$

■

Primer 13.10.2 Populacija insekata trenutno broji 22500 članova i njihov broj se povećava brzinom $R(t) = 1225e^{0.14\,t}$ insekata u jednoj nedelji. Ako je funkcija preživljavanja $S(t) = e^{-0.2\,t}$, gde je t vreme u nedeljama, koliki je broj insekata nakon 12 nedelja?

Rešenje. Rešimo opet integral u (13.12), tj.

$$\int_0^T S(T-t)R(t)\,dt = 1225\int_0^T e^{-0.2(T-t)}e^{0.14t}\,dt = 1225e^{-0.2\,T}\int_0^T e^{0.34\,t}\,dt = \frac{1225}{0.34}e^{-0.2\,T}e^{0.34\,t}\Big|_0^T$$

što nam daje

$$\int_0^T S(T-t)R(t)\,dt = \frac{1225}{0.34}e^{-0.2\,T}\left(e^{0.34\,T}-1\right) = \frac{1225}{0.34}\left(e^{0.14\,T}-e^{-0.2\,T}\right).$$

Sada je

$$P(T) = 22500e^{-0.2T} + \frac{1225}{0.34}\left(e^{0.14\,T} - e^{-0.2\,T}\right) = \frac{6425}{0.34}e^{-0.2\,T} + \frac{1225}{0.34}e^{0.14\,T},$$

pa je broj insekata nakon 12 nedelja jednak

$$P(12) = \frac{6425}{0.34}e^{-0.2\cdot 12} + \frac{1225}{0.34}e^{0.14\cdot 12} \approx 21046.09.$$

■

Primer 13.10.3 Lek se daje pacijentu intravenozno brzinom 12 mg/h. Nakon t sati, deo leka koji ostaje u organizmu je $e^{-0.25\,t}$. Ako pacijent trenutno ima 50 mg leka u svom krvotoku, koliko leka će biti prisutno nakon 8 sati od sada?

Rešenje. Sada je $R(t) = 12$ mg/h, $S(t) = e^{-0.25\,t}$ i $P_0 = 50$ mg. Tada je, na osnovu (13.12),

$$P(T) = 50e^{-0.25\,T} + \int_0^T e^{-0.25\,(T-t)} \cdot 12\,dt = 50e^{-0.25\,T} + 12e^{-0.25\,T}\int_0^T e^{0.25\,t}\,dt\,.$$

Dobijamo da je

$$P(T) = 50e^{-0.25\,T} + \frac{12}{0.25}e^{-0.25\,T}\,e^{0.25\,t}\Big|_0^T = 50e^{-0.25\,T} + 48e^{-0.25\,T}\,(e^{0.25\,T} - 1),$$

odakle je

$$P(8) = 50e^{-0.25\cdot 8} + 48e^{-0.25\cdot 8}\,(e^{0.25\cdot 8} - 1) = 50e^{-2} + 48(1 - e^{-2}) \approx 48.27 \text{ mg/h}\,.$$

■

Primer 13.10.4 Natalitet stanovništva dat je funkcijom $b(t) = 1240e^{0.0197\,t}$ ljudi za godinu dana, dok je mortalitet dat funkcijom $d(t) = 682e^{0.008\,t}$ ljudi za godinu dana. Odrediti površinu između ove dve krive za $0 \leq t \leq 20$ i napisati šta ona predstavlja.

Rešenje. Površina je jednaka (broj "novih" ljudi)

$$\begin{aligned}
\int_0^{20} (b(t) - d(t))\;dt &= \int_0^{20} \left(1240e^{0.0197\,t} - 682e^{0.008\,t}\right)\,dt \\
&= \frac{1240}{0.0197}e^{0.0197\,t}\Big|_0^{20} - \frac{682}{0.008}e^{0.008\,t}\Big|_0^{20} \\
&= \frac{1240}{0.0197}\left(e^{0.394} - 1\right) - \frac{682}{0.008}\left(e^{0.16} - 1\right) \\
&\approx 15604 \text{ stanovnika.}
\end{aligned}$$

■

Primer 13.10.5 Kada se uzme antibiotik, njegova koncentracija u krvi modeluje se funkcijom

$$C(t) = 8\left(e^{-0.4\,t} - e^{-0.6\,t}\right),$$

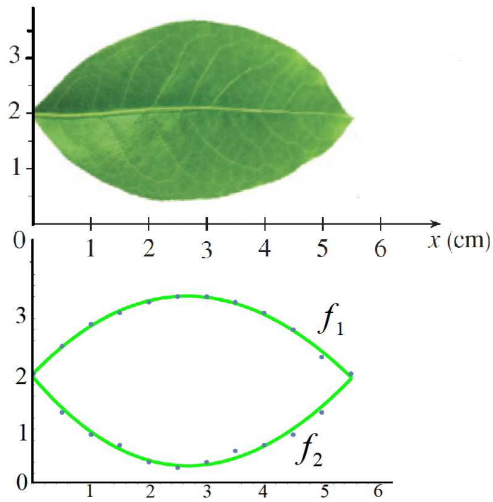
gde se vreme t meri u satima i C je u μg/ml. Koja je prosečna koncentracija antibiotika u prva dva sata?

Rešenje. Prosečna koncentracija antibiotika u prva dva sata biće

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_0^2 C(t)\,dt}{2-0} &= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{-0.4}e^{-0.4\,t}\Big|_0^2 - \frac{8}{-0.6}e^{-0.6\,t}\Big|_0^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{-0.4}\left(e^{-0.8}-1\right) + \frac{8}{0.6}\left(e^{-1.2}-1\right)\right)\\
&= -10\left(e^{-0.8}-1\right) + \frac{20}{3}\left(e^{-1.2}-1\right)\\
&\approx 0.848\ \mu\text{g/ml}.
\end{aligned}$$

■

Primer 13.10.6 Odrediti površinu lovorovog lista sa slike 13.34.



Slika 13.34: Lovorov list, rubne tačke i funkcije f_1 i f_2.

Ako je gornja ivica oivičena rubnim tačkama $(0,2)$, $(0.5,2.5)$, $(1,2.9)$, $(1.5,3.1)$, $(2,3.3)$, $(2.5,3.4)$, $(3,3.4)$, $(3.5,3.3)$, $(4,3.1)$, $(4.5,2.8)$, $(5,2.3)$ i $(5.5,2)$ i aproksimirana polinomom

$$f_1(x) = 0.0027972x^3 - 0.211988x^2 + 1.07013x + 2.00659,$$

a donja ivica oivičena rubnim tačkama $(0,2)$, $(0.5,1.3)$, $(1,0.9)$, $(1.5,0.7)$, $(2,0.4)$, $(2.5,0.3)$, $(3,0.4)$, $(3.5,0.6)$, $(4,0.7)$, $(4.5,0.9)$, $(5,1.3)$ i $(5.5,2)$ i aproksimirana polinomom

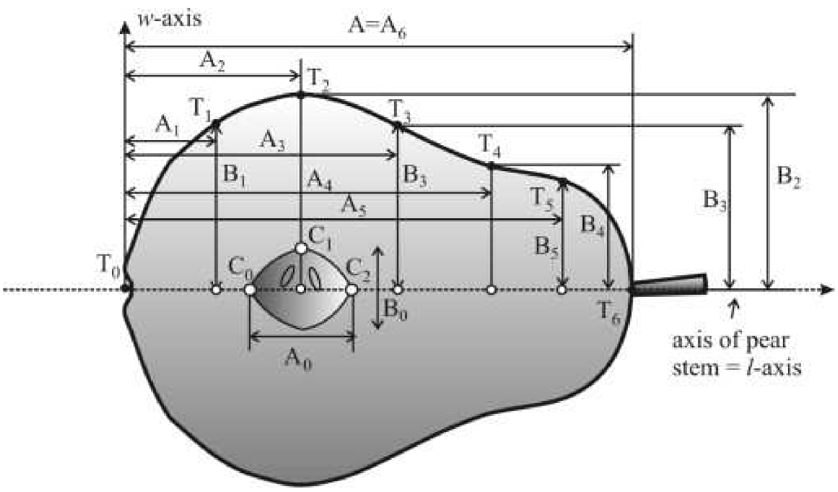
$$f_2(x) = -0.00466201x^3 + 0.247752x^2 - 1.22721x + 1.93297\,.$$

Rešenje. Napomenimo da su polinomi f_1 i f_2 dobijeni korišćenjem nelinearne regresione analize. Površina P će biti jednaka

$$\begin{aligned} P = \int_0^{5.5} (f_1(x) - f_2(x))\,dx &= \int_0^{5.5} (0.00745921x^3 - 0.45974x^2 + 2.29734x + 0.07362)\,dx \\ &= \left(0.00745921 \cdot \frac{x^4}{4} - 0.45974 \cdot \frac{x^3}{3} + 2.29734 \cdot \frac{x^2}{2} + 0.07362x\right)\Big|_0^{5.5} \\ &\approx 11.36 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

■

Primer 13.10.7 Na osnovu izmerenih dužina 30 proizvoljno izabranih krušaka sorte Viljamovka, prosečna dužina bila je 84.3 milimetara. Svaka kruška je isečena po uzdužnoj osi (l-osa na slici 13.35) i svaka polovina je istim postupkom podeljena na četvrtine.

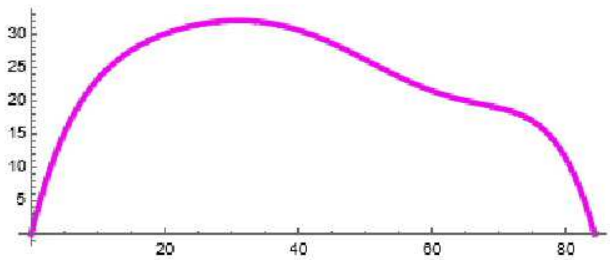


Slika 13.35: Koordinate tačaka koje su određivane kod 30 krušaka sorte Viljamovka.

Dalje su određene prosečne vrednosti koordinata u tačkama od T_1 do T_6 i zatim je gornja ivica četvrtine kruške, nelinearnom regresionom analizom, aproksimirana polinomom (slika 13.36)

$$P(x) = -8.59684 \cdot 10^{-9}x^6 + 2.08296 \cdot 10^{-6}x^5 - 0.00019599x^4 + 0.00929318x^3 - 0.253106x^2 + 4.11348x\,. \tag{13.13}$$

Odrediti zapreminu i površinu kruške.



Slika 13.36: Polinom $P(x)$ aproksimira gornju ivicu četvrtine kruške.

Rešenje. Ako funkcija $P(x)$ u (13.13) rotira oko x ose na intervalu $[0, 84.3]$, tada je zapremina tako dobijenog tela jednaka zapremini kruške i ona iznosi

$$V = \pi \int_0^{84.3} P^2(x)\, dx \approx 50762.1\pi \text{ mm}^3.$$

Površina tako dobijenog obrtnog tela je

$$S = 2\pi \int_0^{84.3} P(x)\sqrt{1 + (P'(x))^2}\, dx \approx 4694.05\pi \text{ mm}^2.$$

I zapremina i površina su izračunate u pogodnom softverskom paketu. ■

13.11 Zadaci za vežbu

1. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x\, dx$. $(I = (e-1)^5/5)$

2. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_1^2 x(\ln x + 1)\, dx$. $(I = 3/4 + \ln 4)$

3. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$. $(I = 1 - \cos 1)$

4. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^6 + 2x^3 + 1}\, dx$. $(I = (-9 + 2\sqrt{3}\,\pi + \ln 64)/54)$

5. Izračunati integral $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\, dx$. $(I = \left(\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1\right)/2)$

6. Izračunati površinu ograničenu pravama $y = x$, $y = -4x + 20$, $x = 2$ i $y = 0$. $(P = 8)$

7. Izračunati površinu četvorougla $ABCD$ ako je $A(1,1)$, $B(6,2)$, $C(8,6)$ i $D(2,6)$. $(P = 24)$

8. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y = -x^2 + 4x - 3$ i njenim tangentama u tačkama $(0,3)$ i $(3,0)$. $(P = 9/4)$

9. Izračunati površinu figure ograničenu parabolama $y = -x^2 + 9$ i $y = x^2 - 10x + 9$. $(P = 125/3)$

10. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y = x^2 - 12x + 36$, $y = x^2$ i pravama $y = 4$ i $y = 0$. $(P = 40/3)$

11. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$. $(P = 1/3)$

12. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y^2 + 8x = 16$ i $y^2 - 24x = 48$. $(P = 32\sqrt{6}/3)$

13. Izračunati površinu ograničenu krivom $y^2 = 2x + 1$ i pravom $y = x - 1$. $(P = 16/3)$

14. Izračunati površinu ograničenu krivama $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i $x = 1$. $(P = e + 1/e - 2)$

15. Izračunati površinu ograničenu krivama $y = e^{3x}$, $y = e^{2x}$ i pravama $y = e^3$ i $y = e^2$. $(P = e^3/3 - e^2/6)$

16. Izračunati površinu ograničenu krivama $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$. $(P = 3 - e)$

17. Izračunati površinu figure koja je ograničenu krivama $y = \cos x$ i pravama $y = 1/2$ i $y = 0$ za $x \in [0, \pi/2]$. $(P = \pi/6 + 1 - \sqrt{3}/2)$

18. Izračunati površinu figure koja je ograničenu krivama $y = \operatorname{tg} x$ i pravama $x = 0$, $y = \sqrt{3}$ i $y = 1$ za $x \in [0, \pi/2]$. $(P = \sqrt{3}\pi/3 - \pi/4 + \ln(1/2) - \ln(\sqrt{2}/2))$

19. Naći površinu koja leži između krive $y = xe^{-x^2/2}$ i njene asimptote ako $x \in [0, 2]$. $(P = 1 - 1/e^2)$

20. Izračunati površinu ograničenu x-osom i krivama $y = \arcsin x$ i $y = \arccos x$. $(P = \sqrt{2} - 1)$

21. Izračunati dužinu luka prave $y = x$ za $x \in [0, 6]$. $(l = 6\sqrt{2})$

22. Izračunati dužinu luka krive $y = x^2$ za $x \in [0, 1]$. $(l = \ln(2 + \sqrt{5}/4) + \sqrt{5}/2)$

23. Izračunati dužinu luka krive $y = \sqrt{x^3}$ za $x \in [0, 5]$. $(l = 335/27)$

24. Izračunati dužinu luka krive $y = (1 - x/3)\sqrt{x}$ između njenih nula. $(l = 2\sqrt{3})$

25. Izračunati dužinu luka krive $y = \ln x$ za $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$. $(l = 1 + 0.5\ln(3/2))$

26. Izračunati dužinu luka krive $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$. $(l = 2)$

27. Izračunati dužinu luka krive $y = \ln\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ za $\ln 2 \le x \le \ln 3$. $(l = \ln(16/9))$

28. Izračunati dužinu luka krive $x(t) = (1 + \sin t)\cos t$, $y(t) = (1 + \sin t)\sin t + 1/4$ ako $t \in [0, 2\pi]$. $(l = 8)$

29. Izračunati dužinu luka krive $x(t) = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y(t) = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$, ako $t \in [0, \pi]$. $(l = \pi^3/3)$

30. Naći dužinu petlje krive $x(t) = t^2$, $y(t) = t - t^3/3$. $(l = 4\sqrt{3})$

31. Prava $y = x$ rotira oko x-ose za $x \in [1, 3]$. Izračunati površinu obrtnog tela. $(M = 8\sqrt{2}\pi)$

32. Kriva $y = \cos x$ rotira oko x-ose za $x \in [0, \pi/2]$. Odrediti površinu tela koje tako nastaje. $(M = \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})))$

33. Izračunati površinu površi nastale rotacijom luka krive $y = x^3/3$ oko x-ose za $x \in [-2, 2]$. $(M = (34\sqrt{17} - 2)\pi/9)$

34. Luk krive $y = e^{-x}$ od $x = 0$ do $x = \ln 2$ rotira oko x-ose. Odrediti tako nastalu površinu. $\left(M = \pi\left(4\sqrt{2} - \sqrt{5} + \ln\left(68 + 48\sqrt{2}\right) - 2\ln\left(3 + \sqrt{5}\right)\right)/4\right)$

35. Izračunati površinu koja nastaje rotacijom krive $x^2 + y^2 = 2y$ oko x-ose. $(M = 4\pi^2)$

36. Figura koju obrazuju luci parabola $y = x^2$ i $y^2 = x$ obrće se oko x-ose. Izračunati zapreminu tako dobijenog tela. $(V = 3\pi/10)$

37. Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom oko x-ose krive $y = e^x$ na intervalu $[\ln 2, \ln 7]$. $(V = 45\pi/2)$

38. Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom oko x-ose zatvorene oblasti koju obrazuju krive $y = x^2 + 4$ i prave $x = -1$, $x = 1$ i $y = (x+5)/2$. $(V = 376\pi/15)$

39. Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom oko x-ose krive $y = \operatorname{ctg} x$ na intervalu $[\pi/4, \pi/2]$. $(V = (4\pi - \pi^2)/4)$

40. Odrediti zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi ograničene pravom $y = 0$ i krivom $y = x^2(1 - x^2)$, oko x-ose. $(V = 16\pi/135)$

41. Populacija životinja trenutno broji 7400 članova i obnavlja se brzinom $R(t) = 2240 + 60t$ članova za godinu dana. Funkcija preživljavanja je $S(t) = 1/(t+1)$. Koliko će biti članova nakon 4 godine?

42. Trenutan broj ptica zaštićene vrste u jednom parku je 3800 i njihov broj se povećava brzinom $R(t) = 525\, e^{0.05\, t}$ ptica u jednoj godini. Funkcija preživljavanja je data sa $S(t) = e^{-0.1\, t}$. Koliki se broj ptica predviđa za deset godina od sada?

43. Sterilne voćne mušice se koriste u eksperimentu gde je funkcija preživljavanja data sa $S(t) = e^{-0.15\, t}$, gde je t vreme u danima. Ako eksperiment počne sa 200 voćnih mušica i ako se obnavljaju brzinom 5 mušica na sat, koliko će biti mušica nakon 14 dana nakon početka eksperimenta?

44. U studiji o efektima aspirina, koncentracija salicilne kiseline je data funkcijom $C(t) = 11.4\, t\, e^{-t}$, gde je t vreme mereno u satima i C koncentracija merena u $\mu g/ml$. Koja je prosečna koncentracija salicilne kiseline tokom prva 4 sata?

45. Pretpostavimo da je trenutan broj stanovnika u gradu 75000 i da je funkcija brzine povećanja data sa $R(t) = 3200\, e^{0.05\, t}$. Ako je funkcija preživljavanja $S(t) = e^{-0.1\, t}$, predvideti broj stanovnika za 10 godina.

46. Jezero se kontaminira brzinom $R(t) = 1600\, e^{0.06\, t}$ galona za jedan sat. U jezero se dodaju enzimi koji neutrališu zagađenje tokom vremena, tako da posle t časova ostatak zagađenja je predstavljen funkcijom $S(t) = e^{-0.32\, t}$. Ako se trenutno 10000 galona materije koja zagađuje jezero nalazi u njemu, koliko će galona biti nakon 18 sati od datog trenutnog stanja?

GLAVA 14

Obične diferencijalne jednačine

14.1 Uvod

Diferencijalna jednačina je jednačina koja sadrži funkciju, njene nezavisne promenljive i izvode funkcije. Red diferencijalne jednačine jednak je redu najvišeg izvoda te funkcije koji se pojavljuje u toj jednačini. Diferencijalna jednačina funkcije jedne nezavisne promenljive naziva se obična diferencijalna jednačina (ODJ). Na primer, ako je $y = y(x)$, tada je jedna obična diferencijalna jednačina drugog reda oblika

$$xy''(x) + 2(x-1)y'(x) - 2y(x) = 0\,,$$

ili kraće zapisano

$$xy'' + 2(x-1)y' - 2y = 0\,.$$

Opšti oblik diferencijalne jedančine n-tog reda nepoznate funkcije $y = y(x)$ je oblika

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{14.1}$$

gde je F realna funkcija sa najviše $n+2$ realnih promenljivih, a y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ su izvodi funkcije $y = y(x)$. Na primer, opšti oblik ODJ drugog reda je

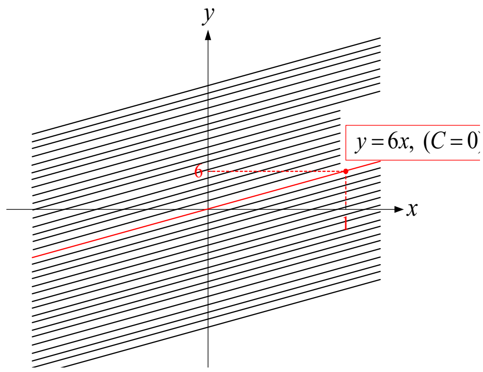
$$F(x, y, y', y'') = 0\,.$$

Postavlja se pitanje šta znači rešiti (integraliti) diferencijalnu jednačinu (14.1) na nekom intervalu (a, b). To zapravo znači odrediti sve funkcije $y = y(x)$ koje imaju sve izvode do n-tog (n puta diferencijabilne) na (a, b) i koje zadovoljavaju jednačinu (14.1).

Primer 14.1.1 Rešiti sledeće diferencijalne jednačine:
a) $y' = 6$, b) $y' = 6x$, c) $y'' = 6x^2$.

Rešenje. a) Ako zamenimo y' sa dy/dx tada jednačina postaje $\frac{dy}{dx} = 6$, odnosno $dy = 6\,dx$. Ako sada integralimo levu i desnu stranu dobijamo

$$\int dy = 6\int dx \Rightarrow y = 6x + C,$$



Slika 14.1: Rešenje diferencijalne jednačine $y' = 6$.

gde je C proizvoljna konstanta.
b) Sada je $\frac{dy}{dx} = 6x$, odnosno $dy = 6x\,dx$. Ako sada integralimo levu i desnu stranu dobijamo

$$\int dy = 6\int xdx \Rightarrow y = 6\cdot\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = 3x^2 + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta.
c) Zamenićemo y'' sa dy'/dx, pa je tada $\frac{dy'}{dx} = 6x^2$, odnosno $dy' = 6x^2\,dx$. Ako sada integralimo levu i desnu stranu dobijamo

$$\int dy' = 6\int x^2dx \Rightarrow y' = 6\cdot\frac{x^3}{3} + C_1 \Rightarrow y' = 2x^3 + C_1,$$

gde je C_1 proizvoljna konstanta. Nastavljamo sličnim postupkom, tj. $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + C_1$, pa je tada

$$\int dy = \int(2x^3 + C_1)dx \Rightarrow y = 2\cdot\frac{x^4}{4} + C_1x + C_2 \Rightarrow y = \frac{x^4}{2} + C_1x + C_2,$$

gde je i C_2 proizvoljna konstanta. ■

U prethodnim primerima smo videli da se u rešenjima diferencijalnih jednačina pojavljuju i proizvoljne konstante i to jedna konstanta C ako je red diferencijalne jednačine baš jedan (pod a) i pod b)), dok je u primeru pod c) diferencijalna jednačina drugog reda pa ima dve proizvoljne konstante C_1 i C_2.

U primeru pod a) rešenje date diferencijalne jednačine su sve prave oblika $y = 6x + C$, za proizvoljno C (slika 14.1), i te prave se još nazivaju integralne krive. Dakle, integralne krive predstavljaju grafičko rešenje diferencijalnih jednačina.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (14.1) je familija krivih u ravni oblika

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{14.2}$$

odnosno

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{14.3}$$

gde $y = y(x)$ zadovoljava jednačinu (14.1), a C_1, C_2,..., C_n su proizvoljne konstante koje ne narušavaju oblast definisanosti funkcije $y(x)$.

Partikularno rešenje je svako rešenje koje se dobije iz opšteg rešenja za konkretne vrednosti konstanti C_1, C_2,..., C_n.

Singularno rešenje je rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za jednu vrednost konstanti C_1, C_2,..., C_n.

Definicija 14.1.2 *Početni (Košijev) problem reda n čini diferencijalna jednačina*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

zajedno sa početnim uslovima

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

gde su x_0, y_0, y_1,..., y_{n-1} dati realni brojevi.

Problem

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{14.4}$$

je Košijev početni problem prvog reda.

Napomenimo da se pored Košijevog početnog problema u teoriji diferencijalnih jednačina izučavaju u *granični problemi*. Granični problem drugog reda je

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y') \\ y(a) = A,& \ y(b) = B, \end{aligned}$$

gde su a i b krajnje tačke posmatranog intervala, a A i B dati realni brojevi.

Primer 14.1.3 Rešiti Košijev problem:
a) $y' = 6$, $y(1) = 2$; b) $y' = 6x$, $y(0) = 1$.

Rešenje. a) Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $y(x) = 6x + C$. Pomoću početnog uslova $y(1) = 2$, dobijamo vrednost za konstantu C. Dakle, $y(1) = 6 \cdot 1 + C = 2$, pa je $C = -4$. Rešenje Košijevog problema se dobija tako što se u opšte rešenje uvrsti dobijena vrednost konstante C, tj. $y(x) = 6x - 4$.
b) Opšte rešenje je $y(x) = 3x^2 + C$. Kako je $y(0) = 1$, dobijamo $y(0) = 3 \cdot 0^2 + C = 1$, pa je $C = 1$. Rešenje Košijevog problema je $y(x) = 3x^2 + 1$. ■

Recimo i to da diferencijalne jednačine opisuju razne prirodne pojave. Tako, na primer, jednačina

$$y' = ky,$$

predstavlja model za Maltusov zakon porasta populacije, dok su rešenja Ermitove jednačine

$$y'' - 2xy' + 2py = 0,$$

talasne funkcije kvantne mehanike.

Sledeća teorema daje uslove za postojanje rešenja Košijevog problema za diferencijalne jednačine prvog reda.

Teorema 14.1.4 Peanova teorema. *Neka je f funkcija neprekidna u oblasti*

$$D = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

tada Košijev problem (14.4) ima bar jedno rešenje definisano na $(x_0 - h, x_0 + h)$, gde je

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad i \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|.$$

Naredna teorema daje uslove za jedinstvenost rešenja Košijevog problema za diferencijalne jednačine prvog reda.

Teorema 14.1.5 Pikarova teorema. *Neka je f funkcija neprekidna u oblasti*

$$D = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

i zadovoljava Lipšicov uslov po y, tj. postoji konstanta $L > 0$ takva da je

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

za svako $(x,y_1),(x,y_2) \in D$, tada Košijev problem (14.4) ima tačno jedno rešenje definisano na $(x_0 - h, x_0 + h)$, gde je

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad i \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|.$$

14.2 Obične diferencijalne jednačine prvog reda

Diferencijalne jednačine čija se rešenja mogu izraziti preko konačnog broja elementarnih funkcija i njihovih integrala su malobrojne. Ipak, te jednačine su značajne, jer su prva saznanja o diferencijalnim jednačinama nastala proučavanjem upravo tih tipova diferencijalnih jednačina.

14.2.1 Razdvojene promenljive

Diferencijalna jednačina prvog reda koja razdvaja promenljive je oblika

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{14.5}$$

gde je funkcija f neprekidna od x na intervalu $[a,b]$, a g neprekidna od y na $[c,d]$. Ako je $g(y) \neq 0$, tada se (14.5) može zapisati u formi

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx\,.$$

Ako je u nekoj tački $y_0 \in [c,d]$ važi $g(y_0) = 0$, tada za $y = y_0$, važi $y_0' = f(x) \cdot g(y_0)$ pa je $0 = f(x) \cdot 0$ i tada je $y = y_0$ rešenje date jednačine.

Primer 14.2.1 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(x^2+1)y' = y^2+1\,.$$

Rešenje. Prvo ćemo da razdvojimo promenljive

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = y^2+1 \Rightarrow \frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x^2+1}\,.$$

Nakon integraljenja imaćemo

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C\,.$$

Možemo i drugačije zapisati rešenje ove jednačine.

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = C \Rightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg} C\,.$$

Ako stavimo da je $\operatorname{tg} C = C_1$ i iskoristimo da je

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

dobijamo

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = C_1 \Rightarrow \frac{y-x}{1+y\cdot x} = C_1\,.$$

Dakle, opšte rešenje je

$$y - x - C_1(1+x\,y) = 0\,.$$

■

Primer 14.2.2 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$yy' = xe^{x^2-y^2}\,.$$

Rešenje. Sada je

$$y\frac{dy}{dx} = x\frac{e^{x^2}}{e^{y^2}} \Rightarrow ye^{y^2}dy = xe^{x^2}dx\,.$$

Sada ćemo da integralimo levu i desnu stranu

$$\int ye^{y^2}dy = \int xe^{x^2}dx.$$

Ako uvedemo smenu $t = x^2$, tada je $dt = 2x\,dx$, odnosno $\frac{dt}{2} = x\,dx$. Sledi da je

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + \frac{C}{2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{C}{2}\,.$$

Znači

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{C}{2}.$$

Nakon množenja sa 2 poslednje jednačine, dobijamo

$$e^{y^2} = e^{x^2} + C \Rightarrow \ln(e^{y^2}) = \ln(e^{x^2}+C) \Rightarrow y^2 = \ln(e^{x^2}+C)\,.$$

■

Primer 14.2.3 Rešiti Košijev problem

$$(3+2y)dx-(3-x)dy=0\,,\quad y(0)=1\,.$$

Rešenje. Prvo ćemo da razdvojimo promenljive

$$(3+2y)dx=(3-x)dy \Rightarrow \frac{dx}{3-x}=\frac{dy}{3+2y}\,.$$

Sada integralimo

$$\int\frac{dx}{3-x}=\int\frac{dy}{3+2y} \Rightarrow -\ln|3-x|+C=\frac{1}{2}\ln|3+2y|\,.$$

Dalje je

$$C=\ln(\sqrt{3+2y}(3-x)) \Rightarrow e^C=\sqrt{3+2y}(3-x) \Rightarrow C_1=\sqrt{3+2y}(3-x)\,.$$

To je opšte rešenje. Iskoristimo sada početni uslov $y(0)=1$.

$$C_1=\sqrt{3+2\cdot 1}(3-0) \Rightarrow C_1=3\sqrt{5}\,.$$

Partikularno rešenje je

$$(3-x)\sqrt{3+2y}=3\sqrt{5}\,.$$

■

Primer 14.2.4 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'=(2x+y)^2\,.$$

Rešenje. Sada moramo uvesti smenu $u(x)=2x+y(x)$, odnosno $u=2x+y$ pa je $u'=2+y'$ te je

$$u'-2=u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=u^2+2 \Rightarrow \frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2}=dx\,.$$

Nakon integraljenja

$$\int\frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2}=\int dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}=x+\frac{C}{\sqrt{2}}\,.$$

Nakon množenja sa $\sqrt{2}$ imamo

$$\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}x+C \Rightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}})=\operatorname{tg}(\sqrt{2}x+C),$$

odnosno

$$\frac{u}{\sqrt{2}}=\operatorname{tg}(\sqrt{2}x+C) \Rightarrow \frac{2x+y}{\sqrt{2}}=\operatorname{tg}(\sqrt{2}x+C) \Rightarrow y=\sqrt{2}\operatorname{tg}(\sqrt{2}x+C)-2x\,.$$

■

14.2.2 Homogene diferencijalne jednačine

Diferencijalna jednačina

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{14.6}$$

je homogena diferencijalna jednačina na domenu D ako za svako $\lambda > 0$ i za svako $(x,y) \in D$ važi

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x,y), \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x,y)$$

gde n realan broj. Tada se jednačina (14.6) može svesti na oblik

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{14.7}$$

gde je f funkcija neprekidna na nekom intervalu (a,b). Uvođenjem smene

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \ \text{(krače } u = \frac{y}{x}\text{)},$$

jednačina (14.7) postaje jednačina kod koje se mogu razdvojiti promenljive. Naime, sada je $y = ux$ i $y' = u'x + ux' = u'x + u$ i nakon vraćanja u (14.7), imaćemo

$$u'x + u = f(u) \Rightarrow u'x = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{dx}x = f(u) - u\,.$$

Sada imamo tri moguća slučaja:

- Ako je $f(u) - u = 0$, za svako $u \in (a,b)$, to znači da je
$$f(u) = u \Rightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$
na osnovu (14.7). Dobijena je jednačina koja razdvaja promenljive.

- Ako je $f(u) - u = 0$, za neko $u_0 \in (a,b)$, to znači da je $f(u_0) = u_0$. Tada je i $y' = f(u_0) = u_0$, pa je $y = u_0 x + C$.

- Ako je $f(u) - u \neq 0$, za svako $u \in (a,b)$, tada je
$$\frac{du}{dx}x = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$
i nakon integraljenja dobijamo
$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{C}\right| = \int \frac{du}{f(u) - u} \Rightarrow x = Ce^{\int \frac{du}{f(u)-u}}\,.$$
Posle integraljenja potrebno je vratiti smenu $u = y/x$.

Primer 14.2.5 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\,.$$

Rešenje. Uvodimo smenu $u = y/x$ i $y' = u'x + u$. Tada je

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \Rightarrow u'x + u = e^u + u \Rightarrow u'x = e^u\,.$$

Dalje je

$$\frac{du}{dx}x = e^u \Rightarrow e^{-u}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x}$$

pa je

$$-e^{-u} = \ln|xC| \Rightarrow -e^{-\frac{y}{x}} = \ln|xC| \Rightarrow e^{-\frac{y}{x}} = -\ln|xC| \Rightarrow e^{-\frac{y}{x}} = \ln\left|\frac{1}{xC}\right| .$$

Nakon logaritmovanja obe strane jednačine, imaćemo

$$-\frac{y}{x} = \ln\left|\ln\left|\frac{1}{xC}\right|\right| \Rightarrow y = -x\ln\left|\ln\left|\frac{1}{xC}\right|\right| .$$

■

Primer 14.2.6 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{x+y}{x-y} .$$

Rešenje. Prvo ćemo podeliti i brojilac i imenilac sa x. Dobićemo

$$y' = \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x-y}{x}} \Rightarrow y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} ,$$

a nakon uvođenja smene $u = y/x$ i $y' = u'x + u$ dobijamo

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow u'x = \frac{1+u^2}{1-u} .$$

Sada ćemo da razdvojimo promenljive

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x} .$$

Jasno je da je

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|xC| .$$

Rešimo sada integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-u}{1+u^2}du &= \int \frac{1}{1+u^2}du - \int \frac{u}{1+u^2}du \\
&= \operatorname{arctg} u - \left\{t = 1+u^2,\ dt = 2udu\right\} \\
&= \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt \\
&= \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| + C
\end{aligned}$$

Sada je, dakle,

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = \ln|xC| ,$$

odnosno

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln|xC|.$$

■

Primer 14.2.7 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy\,.$$

Rešenje. Proverimo prvo da li je ovo homogena ODJ prvog reda. Stavimo da je $x=\lambda x$ i $y=\lambda y$ i ispitajmo da li jednačina ne zavisi od λ.

$$(3(\lambda y)^2+3\lambda x\lambda y+(\lambda x)^2)dx=((\lambda x)^2+2\lambda x\lambda y)dy\,.$$

Sledi da je

$$\lambda^2(3y^2+3xy+x^2)dx=\lambda^2(x^2+2xy)dy$$

i nakon deljenja sa λ^2 dobijamo početnu jednačinu. Dakle, jeste homogena prvog reda. Sada bi trebalo da napišemo jednačinu tako da se u njoj pojavljuju samo funkcije od y/x i konstante.

$$\begin{aligned}(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy\quad&\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2+3xy+x^2}{x^2+2xy}\\&\Rightarrow\quad y'=\frac{\frac{3y^2+3xy+x^2}{x^2}}{\frac{x^2+2xy}{x^2}}\\&\Rightarrow\quad y'=\frac{3\frac{y^2}{x^2}+3\frac{y}{x}+1}{1+2\frac{y}{x}}\end{aligned}$$

Sada uvodimo smenu $u=y/x$ i $y'=u'x+u$ pa je

$$\begin{aligned}u'x+u=\frac{3u^2+3u+1}{1+2u}\quad&\Rightarrow\quad u'x=\frac{3u^2+3u+1}{1+2u}-u\\&\Rightarrow\quad\frac{du}{dx}x=\frac{u^2+2u+1}{1+2u}\\&\Rightarrow\quad\frac{1+2u}{u^2+2u+1}du=\frac{1}{x}dx\\&\Rightarrow\quad\int\frac{1+2u}{u^2+2u+1}du=\int\frac{1}{x}dx\end{aligned}\tag{14.8}$$

Rešimo sada integral sa leve strane jednakosti.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+2u}{u^2+2u+1}du &= \int \frac{1+2u}{(u+1)^2}du \\
&= \{t=u+1,\ dt=du,\ u=t-1\} \\
&= \int \frac{1+2(t-1)}{t^2}dt \\
&= \int \frac{2t-1}{t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t}dt - \int \frac{1}{t^2}dt \\
&= 2\ln|t| + \frac{1}{t} + C \\
&= 2\ln|u+1| + \frac{1}{u+1} + C
\end{aligned}$$

Konačno, iz (14.8) dobijamo

$$2\ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = \ln|xC| \Rightarrow 2\ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = \ln|xC|\,.$$

■

Primer 14.2.8 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Rešenje. Podelimo jednačinu sa x. Tada je

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\,.$$

Sada je

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,.$$

Uvodimo smenu $u = y/x$ odakle je $y' = u'x + u$. Sledi

$$u'x + u = u + \sqrt{1+u^2} \Rightarrow u'x = \sqrt{1+u^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}\,.$$

Sada ćemo da razdvojimo promenljive i integralimo obe strane jednačine

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x}\,.$$

Sledi da je

$$\ln|u + \sqrt{1+u^2}| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow \ln|u + \sqrt{1+u^2}| = \ln|Cx| \Rightarrow u + \sqrt{1+u^2} = Cx\,.$$

Nakon vraćanja smene $u = y/x$ dobijamo

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx\,,$$

a nakon množenja sa x, dobijamo opšte rešenje

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$$

$\blacksquare$

14.2.3 Diferencijalne jednačine koje se svode na homogene

Neka je data diferencijalna jednačina

$$y' = f\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right) \tag{14.9}$$

gde je f neprekidna funkcija na intervalu (a, b). Neka važi $A_1 \cdot B_1 \cdot A_2 \cdot B_2 \neq 0$. Razlikujemo dva slučaja:

I slučaj: Ako je

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

tada postoji $k \in \mathbb{R}$ tako da je $A_1 = kA_2$ i $B_1 = kB_2$. Sada je

$$y' = f\left(\frac{kA_2x + kB_2y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right) \Rightarrow y' = f\left(\frac{k(A_2x + B_2y) + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right)$$

i uvodimo smenu $u = A_2x + B_2y$ iz koje sledi $u' = A_2 + B_2y'$. Jednačina postaje

$$\frac{1}{B_2}u' - \frac{A_2}{B_2} = f\left(\frac{ku + C_1}{u + C_2}\right)$$

i kod nje se mogu razdvojiti promenljive.

II slučaj: Neka je sada

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Uvodimo smene $x = X + x_0$ i $y = Y + y_0$, gde je $Y = Y(X)$, a x_0 i y_0 konstante. Postupak njihovog određivanja sledi dalje u tekstu. Kako je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(Y + y_0)}{dx} = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dX}\cdot\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dX}\cdot 1 = \frac{dY}{dX} = Y'$$

početna jednačina (14.9) postaje

$$Y' = f\left(\frac{A_1(X + x_0) + B_1(Y + y_0) + C_1}{A_2(X + x_0) + B_2(Y + y_0) + C_2}\right)$$

odnosno

$$Y' = f\left(\frac{A_1X + B_1Y + A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{A_2X + B_2Y + A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}\right) \tag{14.10}$$

Konstante x_0 i y_0 biramo tako da važi

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 &= 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Sada (14.10) postaje

$$Y' = f\left(\frac{A_1X + B_1Y}{A_2X + B_2Y}\right) \Rightarrow Y' = f\left(\frac{A_1 + B_1\frac{Y}{X}}{A_2 + B_2\frac{Y}{X}}\right) \tag{14.11}$$

Jednačina u (14.11) je homogena ODJ prvog reda i ako je njeno rešenje je $Y = Y(X, C)$, tada je rešenje jednačine (14.9) zapravo $y - y_0 = Y(x - x_0, C)$.

Primer 14.2.9 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{x - 3y + 2}{-2x + 6y + 8}\,.$$

Rešenje. Pošto je

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

jednačinu pišemo u obliku

$$y' = \frac{x - 3y + 2}{-2(x - 3y) + 8} \tag{14.12}$$

i uvodimo smenu $u = x - 3y$, odakle je $u' = 1 - 3y'$, pa je $y' = (1 - u')/3$. Sada je (14.12) u stvari

$$\begin{aligned} \frac{1 - u'}{3} = \frac{u + 2}{-2u + 8} \quad &\Rightarrow \quad u' = \frac{-5u + 2}{-2u + 8} \\ &\Rightarrow \quad \frac{-2u + 8}{-5u + 2}du = dx \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{-2u + 8}{-5u + 2}du = \int dx\,. \end{aligned}$$

Rešimo sada intagral sa leve strane.

$$\int \frac{-2u + 8}{-5u + 2}du = \{t = -5u + 2,\ \ dt = -5du\} = \int \frac{-2 \cdot \frac{2-t}{5} + 8}{t} \cdot \frac{dt}{-5}\,.$$

Nakon sređivanja, dobijamo:

$$\frac{2}{25}\int \frac{-t - 18}{t}dt = -\frac{2}{25}\left(\int dt + 18\int \frac{dt}{t}\right) = -\frac{2}{25}\left(t + 18\ln|t|\right) + C\,.$$

Sada je

$$-\frac{2}{25}\left(t + 18\ln|t|\right) + C = -\frac{2}{25}\left(-5u + 2 + 18\ln|-5u + 2|\right) + C\,.$$

Zaključujemo da važi

$$\int \frac{-2u+8}{-5u+2} du = \int dx \Rightarrow -\frac{2}{25}\left(-5u+2+18\ln|-5u+2|\right) = x+C\,.$$

Opšte rešenje dobijamo kada uvrstimo $u = x - 3y$ u prethodnu jednakost, tj.

$$-\frac{2}{25}\left(-5(x-3y)+2+18\ln|-5(x-3y)+2|\right) = x+C,$$

odnosno

$$-\frac{2}{25}\left(-5x+15y+2+18\ln|-5x+15y+2|\right) = x+C\,.$$

■

Primer 14.2.10 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}\,.$$

Rešenje. Ako napišemo jednačinu u obliku

$$y' = \frac{-x+2y-5}{2x-y+4}$$

tada možemo proveriti vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3 \neq 0.$$

Sada ćemo uvesti smenu $x = X + x_0$ i $y = Y + y_0$. Kako je $y' = Y'$ sledi

$$Y' = \frac{-(X+x_0)+2(Y+y_0)-5}{2(X+x_0)-(Y+y_0)+4} \Rightarrow Y' = \frac{-X+2Y-x_0+2y_0-5}{2X-Y+2x_0-y_0+4}\,.$$

Konstante x_0 i y_0 biramo tako da je

$$\begin{aligned} -x_0+2y_0-5 &= 0 \\ 2x_0-y_0+4 &= 0, \end{aligned}$$

pa je rešenje tog sistema $(x_0, y_0) = (-1, 2)$. Znači, smena je $x = X - 1$ i $y = Y + 2$. Preostalo je da rešimo jednačinu

$$Y' = \frac{-X+2Y}{2X-Y} \Rightarrow Y' = \frac{-1+2\frac{Y}{X}}{2-\frac{Y}{X}}$$

uvođenjem smene $U(X) = Y(X)/X$, tj. $U = Y/X$. Kako je $Y' = U'X + U$ dobijamo

$$U'X+U = \frac{-1+2U}{2-U} \Rightarrow U'X = \frac{U^2-1}{2-U} \Rightarrow \frac{2-U}{U^2-1}dU = \frac{1}{X}dX\,.$$

Sada je potrebno integraliti poslednju jednačinu

$$\int \frac{2-U}{U^2-1}dU = \int \frac{1}{X}dX \Rightarrow \int \frac{2-U}{U^2-1}dU = \ln|XC|\,. \tag{14.13}$$

Rešimo sada integral sa leve strane poslednje jednakosti.

$$\int \frac{2-U}{U^2-1}dU = \int \frac{2-U}{(U-1)(U+1)}dU$$

Podintegralna funkcija se rastavlja na elementarne racionalne funkcije

$$\frac{2-U}{(U-1)(U+1)} = \frac{A}{U-1} + \frac{B}{U+1} = \frac{A(U+1)+B(U-1)}{(U-1)(U+1)} = \frac{(A+B)U+(A-B)}{(U-1)(U+1)}.$$

Jasno je da je sada $A+B=-1$ i $A-B=2$, te je $(A,B)=(1/2,-3/2)$. Dakle,

$$\int \frac{2-U}{(U-1)(U+1)}dU = \int \frac{\frac{1}{2}}{U-1}dU + \int \frac{-\frac{3}{2}}{U+1}dU = \frac{1}{2}\ln|U-1| - \frac{3}{2}\ln|U+1| + C.$$

Dobijeno rešenje možemo napisati i kao

$$\frac{1}{2}\ln|U-1| - \frac{3}{2}\ln|U+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{U-1}{(U+1)^3}\right| + C.$$

Vratimo se sada na (14.13):

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{U-1}{(U+1)^3}\right| = \ln|XC|.$$

Nakon množenja sa 2, imaćemo

$$\ln\left|\frac{U-1}{(U+1)^3}\right| = 2\ln|XC| \Rightarrow \frac{U-1}{(U+1)^3} = (XC)^2.$$

Sada ćemo vratiti da je $U=Y/X$ i da je $Y=y-2$ i $X=x+1$. Dakle,

$$\frac{\frac{Y}{X}-1}{(\frac{Y}{X}+1)^3} = (XC)^2 \Rightarrow \frac{\frac{y-2}{x+1}-1}{(\frac{y-2}{x+1}+1)^3} = ((x+1)C)^2$$

i dobijeno je opšte rešenje. ■

14.2.4 Linearne diferencijalne jednačine

Linearna ODJ prvog reda oblika je

$$y' + p(x)y = q(x),$$

gde su p i q date neprekidne funkcije. Pri rešavanju uvodi se smena $y(x)=u(x)v(x)$, ili kraće $y=uv$. Pošto se jedna funkcija y, menja sa dve funkcije u i v, to nam dozvoljava da, recimo v, biramo kako nam odgovara u jednom momentu. Kako je $y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, tj. $y'=u'v+uv'$, uvrštavanjem u početnu jednačinu, dobijamo

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Rightarrow u'v + u\underbrace{(v'+p(x)v)}_{0} = q(x). \tag{14.14}$$

Sada je momenat da biramo v tako da $v'+p(x)v=0$ i da v bude što jednostavnija funkcija.

$$v' + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int p(x)dx.$$

Iz poslednje jednačine imamo

$$\ln|v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx} + C \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx},$$

kada za C izaberemo da bude nula. Vratimo sada v u (14.14).

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Znači

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta. Kako je $y = uv$, opšte rešenje je

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) e^{-\int p(x)dx}. \tag{14.15}$$

Primer 14.2.11 Rešiti diferencijalnu jednačinu primenom formule (14.15).

$$y' + y + x = 0\,.$$

Rešenje. Jednačinu ćemo napisati u obliku

$$y' + y = -x$$

i onda je $p(x) = 1$, a $q(x) = -x$. Sledi da je

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int dx} = e^{x+C} = e^x,$$

za $C = 0$. Dalje je

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = -\int xe^x dx = -(xe^x - e^x) + C = -xe^x + e^x,$$

za $C = 0$. Iz (14.15) sledi

$$y = (-xe^x + e^x + C)\, e^{-x} = -x + 1 + Ce^{-x}\,.$$

■

Primer 14.2.12 Rešiti diferencijalnu jednačinu bez primene formule (14.15).

$$y' + y + x = 0\,.$$

Rešenje. Prvo, uvedimo smenu $y = uv$, gde je $y' = u'v + uv'$. Tada početna jednačina postaje

$$u'v + uv' + uv + x = 0 \Rightarrow u'v + u\underbrace{(v' + v)}_{0} + x = 0\,. \tag{14.16}$$

Potrebno je sada rešiti jednačinu

$$v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int dx \Rightarrow \ln|v| = -x \Rightarrow v = e^{-x}\,.$$

Uvrstimo sada $v = e^{-x}$ u (14.16). Dobijamo

$$u'e^{-x} + x = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -xe^x \Rightarrow \int du = -\int xe^x\,dx \Rightarrow u = -(xe^x - e^x) + C\,.$$

Pošto je $y = u\,v$ imaćemo

$$y = (-xe^x + e^x + C)e^{-x} \Rightarrow y = -x + 1 + Ce^{-x}\,.$$

■

Primer 14.2.13 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}\,.$$

Rešenje. Uvodimo smenu $y = uv$, gde je $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + 2xuv = 2x^2e^{-x^2} \Rightarrow u'v + u\underbrace{(v' + 2xv)}_{0} = 2x^2e^{-x^2}\,. \tag{14.17}$$

Sada rešavamo $v' + 2xv = 0$.

$$\frac{dv}{dx} = -2xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2xdx \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -2\int xdx \Rightarrow \ln|v| = -x^2 \Rightarrow v = e^{-x^2}\,.$$

Vratimo se na poslednju jednačinu u (14.17).

$$u'e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x^2 \Rightarrow du = 2x^2dx \Rightarrow \int du = 2\int x^2dx\,.$$

Sledi da je

$$u = \frac{2}{3}x^3 + C\,.$$

Odredimo sada koliko je y:

$$y = uv = \left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)e^{-x^2} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^3e^{-x^2} + Ce^{-x^2}\,.$$

■

Primer 14.2.14 Koristeći smenu $s(x) = \sin y(x)$, tj. $s = \sin y$, rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' - \operatorname{tg} y = e^x\frac{1}{\cos y}.$$

Rešenje. Pomnožimo datu jednačinu sa $\cos y$.

$$y'\cos y - \sin y = e^x.$$

Koristeći datu smenu, $s' = \cos y \cdot y'$, tako da poslednja jednačina postaje

$$s' - s = e^x,$$

a ona je linearna po s. Uvodimo smenu $s = uv$, $s' = u'v + uv'$, te je

$$u'v + uv' - uv = e^x \Rightarrow u'v + u\underbrace{(v' - v)}_{0} = e^x.$$

Pošto je

$$v' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int dx \Rightarrow \ln|v| = x \Rightarrow v = e^x,$$

sledi

$$u'e^x = e^x \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = x + C.$$

Vratimo se sada na $s = uv$, odnosno

$$s = (x + C)e^x \Rightarrow \sin y = (x + C)e^x \Rightarrow y = \arcsin((x + C)e^x).$$

■

14.2.5 Bernulijeva diferencijalna jednačina

Bernulijeva diferencijalna jednačina je oblika

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

gde su p i q date neprekidne funkcije, a $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$. Za $\alpha = 0$ jednačina bi bila linearna, a za $\alpha = 1$ je jednačina koja razdvaja promenljive. Nakon množenja sa $y^{-\alpha}$, dobijamo

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \tag{14.18}$$

Uvodimo smenu $z(x) = z = y^{1-\alpha}$. Tada je

$$z' = (1-\alpha)y^{1-\alpha-1}y' \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} = y^{-\alpha}y'$$

Jednačina (14.18) postaje

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x) \Rightarrow z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x),$$

a to je linearna jednačina po z.

Primer 14.2.15 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

Rešenje. Podelimo jednačinu sa $\sqrt{y}$. Tada je

$$\frac{1}{\sqrt{y}}y' + \frac{2y}{x\sqrt{y}} = \frac{2}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}y' + \frac{2\sqrt{y}}{x} = \frac{2}{\cos^2 x}. \tag{14.19}$$

Uvedimo sada smenu $z(x) = \sqrt{y(x)}$, tj. $z = \sqrt{y}$. Sledi

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y' \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}y' = 2z'$$

Uvrstimo sada u poslednju jednačinu u (14.19) dobijene izraze:

$$2z' + \frac{2z}{x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

i nakon deljenja cele jednačine sa 2, imaćemo

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Ovo je sada linearna ODJ prvog reda po z. Smena je $z = uv$, a važi i $z' = u'v + uv'$. Uvrštavanjem u gornju jednačinu, dobijamo

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{v}{x}\right)}_{0} = \frac{1}{\cos^2 x}\,. \tag{14.20}$$

Rešavamo sada

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x}$$

Vratimo se sada u (14.20).

$$u'\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow du = \frac{x}{\cos^2 x}dx \Rightarrow \int du = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx \Rightarrow u = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx\,.$$

Rešimo sada poslednji integral metodom parcijalnog integraljenja

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} U = x, & dU = dx \\ dV = \frac{1}{\cos^2 x}dx, & V = \operatorname{tg} x \end{array} \right\} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

Pošto je $z = uv$, dobijamo

$$z = \frac{1}{x}(x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{x}\ln|\cos x| + \frac{C}{x}$$

Kako je $z = \sqrt{y}$, sledi da je

$$\sqrt{y} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{x}\ln|\cos x| + \frac{C}{x} \Rightarrow y = \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{x}\ln|\cos x| + \frac{C}{x}\right)^2$$

■

Primer 14.2.16 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'x^3 \sin y = xy' - 2y$$

Rešenje. Prvo ćemo ovu jednačinu da transformišemo da bismo uvideli o kom tipu jednačine se radi.

$$y'x^3 \sin y = xy' - 2y \Rightarrow y'(x^3 \sin y - x) = -2y \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x - x^3 \sin y) = 2y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x - x^3 \sin y}.$$

Za $y \neq 0$, iz poslednje jednačine dobijamo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - x^3 \sin y}{2y} \Rightarrow x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y}x^3. \tag{14.21}$$

što je Bernulijeva diferencijalna jednačina, nepoznata funkcija je $x = x(y)$. Podelimo poslednju jednačinu u (14.21) sa x^3. Tada je

$$\frac{1}{x^3}x' - \frac{1}{2y} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y}$$

i uvodimo smenu $z(y) = z = \frac{1}{x^2}$, a tada je $z' = \frac{-2}{x^3}x'$, odnosno $-\frac{1}{2}z' = \frac{1}{x^3}x'$. Sada poslednja jednačina postaje

$$-\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2y}z = -\frac{\sin y}{2y}$$

i nakon množenja sa -2, dobijamo

$$z' + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}.$$

Dobijena je linearna diferencijalna jednačina po z. Uvodimo smenu $z = uv$, pa je $z' = u'v + uv'$. Sledi

$$u'v + uv' + \frac{1}{y}uv = \frac{\sin y}{y} \Rightarrow u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{1}{y}v\right)}_{0} = \frac{\sin y}{y}. \tag{14.22}$$

Rešavamo dalje

$$v' + \frac{1}{y}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y}.$$

Znači da je $\ln|v| = -\ln|y|$, odnosno $v = \frac{1}{y}$. Vratimo se u (14.22).

$$u'\frac{1}{y} = \frac{\sin y}{y} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \sin y \Rightarrow \int du = \int \sin y dy \Rightarrow u = -\cos y + C.$$

Pošto je $z = uv$, a i $z = \frac{1}{x^2}$, imaćemo

$$\frac{1}{x^2} = (-\cos y + C)\frac{1}{y} \Rightarrow x^2 = \frac{y}{-\cos y + C}.$$

To je opšte rešenje za $y \neq 0$. Ako je $y = 0$, tada početna jednačina postaje $0 \cdot x^3 \sin 0 = x \cdot 0 - 2 \cdot 0 \Rightarrow 0 = 0$, pa je i $y = 0$ rešenje jednačine. ■

14.2.6 Rikatijeva diferencijalna jednačina

Rikatijeva diferencijalna jednačina je oblika

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x),$$

gde su p, q i r date neprekidne funkcije. Da bismo rešili ovu jednačinu, uvodimo smenu $y(x) = \frac{1}{z(x)} + y_p$, tj. $y = \frac{1}{z} + y_p$, gde je z nova zavisna promenljiva, a y_p dato partikularno rešenje polazne jednačine. Sada je $y' = -\frac{1}{z^2}z' + y_p'$ i početna jednačina postaje

$$-\frac{1}{z^2}z' + y_p' + p(x)(\frac{1}{z} + y_p) + q(x)(\frac{1}{z} + y_p)^2 = r(x),$$

odnosno

$$-\frac{1}{z^2}z' + y_p' + p(x)\frac{1}{z} + p(x)y_p + q(x)\frac{1}{z^2} + 2q(x)\frac{1}{z}y_p + q(x)y_p^2 = r(x)$$

ili

$$-\frac{1}{z^2}z' + p(x)\frac{1}{z} + q(x)\frac{1}{z^2} + 2q(x)\frac{1}{z}y_p + y_p' + p(x)y_p + q(x)y_p^2 = r(x)$$

nakon sređivanja. Pošto je y_p rešenje početne jednačine, sledi da je $y_p' + p(x)y_p + q(x)y_p^2 = r(x)$, te dobijamo

$$-\frac{1}{z^2}z' + p(x)\frac{1}{z} + q(x)\frac{1}{z^2} + 2q(x)\frac{1}{z}y_p = 0 \Rightarrow z' - (p(x) + 2q(x)y_p)z = q(x),$$

nakon množenja sa $-z^2$, što je linearna ODJ prvog reda po z.

Primer 14.2.17 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' + y + y^2 = 2\,.$$

ako je jedno njeno rešenje $y_p(x) = a$, gde je a konstanta koju treba odrediti.

Rešenje. Pošto je $y_p' = 0$, dobijamo

$$0 + a + a^2 = 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \wedge a = -2.$$

Neka je $a = 1$. Uvodimo smenu $y = \frac{1}{z} + 1$, pa je $y' = -\frac{1}{z^2}z'$. Uvrštavanjem u početnu jednačinu, dobijamo

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{z} + 1 + \left(\frac{1}{z} + 1\right)^2 = 2,$$

odnosno

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 1 = 2.$$

Nakon potiranja suprotnih sabiraka, imaćemo

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Ako sada dobijeni izraz pomnožimo sa $-z^2$, dobijamo linearni ODJ prvog reda po z, ali i koja razdvaja promenljive, u ovom slučaju

$$z' - 3z - 1 = 0. \tag{14.23}$$

Dakle,

$$\frac{dz}{dx} = 3z + 1 \Rightarrow \frac{dz}{3z+1} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{3z+1} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{3} \ln|3z+1| = x + \frac{C}{3}.$$

Ako poslednju jednačinu pomnožimo sa 3, dobijamo

$$\ln|3z+1| = 3x + C \Rightarrow 3z + 1 = e^{3x+C} \Rightarrow z = \frac{1}{3}\left(e^{3x+C} - 1\right)$$

Pošto je $y = \frac{1}{z} + 1$, imaćemo

$$y = \frac{3}{e^{3x+C} - 1} + 1 \Rightarrow y = \frac{e^{3x+C} + 2}{e^{3x+C} - 1}$$

Ako je $a = -2$, ponoviti postupak radi vežbe. ■

Primer 14.2.18 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$$

ako je partikularno rešenje oblika $y_p = \frac{a}{x}$, gde je a konstanta koju treba odrediti.

Rešenje. Sada je $y_p' = -\frac{a}{x^2}$ i nakon uvrštavanja u početnu jednačinu, dobijamo

$$-3\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = 2.$$

Uradićemo zadatak za $a = 2$. Tada je $y_p = \frac{2}{x}$, pa je smena $y = \frac{1}{z} + \frac{2}{x}$, $y' = -\frac{1}{z^2}z' - \frac{2}{x^2}$. Sada je početna jednačina oblika

$$-\frac{3}{z^2}z' - \frac{6}{x^2} + \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right)^2 + \frac{2}{x^2} = 0,$$

a nakon sređivanja dobijamo

$$-\frac{3}{z^2}z' + \frac{4}{zx} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Pomnožimo dobijenu jednačinu sa z^2 i dobijamo jednačinu

$$-3z' + \frac{4}{x}z + 1 = 0,$$

koja je linearna po z i rešava se smenom $z = uv$. Dobro poznatim postupkom, dobijaju se v i u koji iznose

$$v = \sqrt[3]{x^4},\ u = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + C.$$

Zaključujemo

$$z = \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + C\right)\sqrt[3]{x^4} = -x + C\sqrt[3]{x^4},$$

odnosno opšte rešenje početne jednačine je

$$y = \frac{1}{-x + C\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x}.$$

■

14.2.7 Parametarske jednačine

Postoje nekoliko posebnih slučajeva diferencijalnih jednačina prvog reda

$$f(x, y, y') = 0, \tag{14.24}$$

a koje se rešavaju uvođenjem parametara. Mi ćemo ovde obraditi Klerovu i Lagranžovu jednačinu.

Kleroova diferencijalna jednačina

Opšti oblik Klerove diferencijalne jednačine je

$$y = xy' + K(y'), \tag{14.25}$$

gde je K data funkcija koja zavisi samo od konstanti i y'. Sada se y' zamenjuje parametrom p, tj. $p = y'$, i dobijamo

$$y = xp + K(p) \tag{14.26}$$

što nakon diferenciranja po promenljivoj x daje

$$y' = (xp)' + (K(p))' \Rightarrow p = x'p + xp' + K'(p)p' \Rightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} + K'(p)\frac{dp}{dx}\,.$$

Sada se p potire i dobijamo

$$x\frac{dp}{dx} + K'(p)\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \big(x + K'(p)\big)\,\frac{dp}{dx} = 0\,.$$

Nastavljamo sa rešavanjem gde imamo dva slučaja:

(i) Ako je $dp/dx = 0$, to znači da je $p = C$. Uvrštavanjem u (14.26) dobijamo *opšte rešenje* Klerove jednačine
$$y = Cx + K(C)\,.$$

(ii) Ako je $x + K'(p) = 0$ i ako se ona može rešiti po p, tj. ako postoji funkcija $\psi(x)$ tako je je $p = \psi(x)$, tada uvršavanjem u (14.26) dobijamo *singularno rešenje* Klerove diferencijalne jednačine
$$y = x\psi(x) + K(\psi(x))\,.$$

Primer 14.2.19 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y = xy' - (y')^2\,.$$

Rešenje. Neka je $y' = p$, tada je

$$y = xy' - (y')^2 \Rightarrow y = xp - p^2 \tag{14.27}$$

i nakon diferenciranja po x imaćemo

$$p = p + xp' - 2pp' \Rightarrow (x - 2p)p' = 0 \Rightarrow x - 2p = 0 \vee p' = 0\,.$$

Ako je $p' = 0$, sledi da je $p = C$ i uvrštavanjem u (14.27) dobijamo opšte rešenje

$$y = Cx - C^2 .$$

Ako je $x - 2p = 0$, tada je

$$x - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{x}{2} .$$

Uvrstimo u (14.27)

$$y = x \cdot \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$

i dobijamo singularno rešenje. ■

Primer 14.2.20 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2} .$$

Rešenje. Za $y' = p$, tada je

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2} \Rightarrow y = xp + \sqrt{1 + p^2} \tag{14.28}$$

i nakon diferenciranja po x imaćemo

$$p = p + xp' + \frac{2p}{2\sqrt{1 + p^2}}p' \Rightarrow \left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) p' = 0 \Rightarrow x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0 \vee p' = 0 .$$

Ako je $p' = 0$, sledi da je $p = C$ i uvrštavanjem u (14.28) dobijamo opšte rešenje

$$y = xC + \sqrt{1 + C^2} .$$

Ako je $x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, tada je

$$x = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} .$$

Uvrstimo u (14.28)

$$y = -\frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2}} + \sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$$

i dobijamo singularno rešenje koje je dato parametarski. Lako se proverava da je $x^2 + y^2 = 1$, za $y > 0$, pa je to singularno rešenje ako se eliminiše parametar p. ■

Lagranžova diferencijalna jednačina

Opšti oblik Lagranžove diferencijalne jednačine je

$$y = xL_1(y') + L_2(y'), \tag{14.29}$$

gde su L_1 i L_2 funkcije koje zavise od y' i konstanti. Ako se uvede parametar p kao $y' = p$, dobijamo

$$y = xL_1(p) + L_2(p). \tag{14.30}$$

Ako sada diferenciramo (14.30) po x dobijamo

$$y' = (xL_1(p))' + (L_2(p))' \quad \Rightarrow \quad y' = x'L_1(p) + xL_1'(p)p' + L_2'(p)p'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = L_1(p) + xL_1'(p)\frac{dp}{dx} + L_2'(p)\frac{dp}{dx}$$

Ako poslednju jednačinu pomnožimo sa dx i iskoristimo da je $dy = pdx$, dobijamo

$$pdx = L_1(p)dx + xL_1'(p)dp + L_2'(p)dp,$$

odnosno

$$(p - L_1(p))dx = (xL_1'(p) + L_2'(p))dp.$$

Sada razlikujemo tri slučaja:

(i) Neka je $p - L_1(p) \neq 0$. Tada je

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xL_1'(p) + L_2'(p)}{p - L_1(p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{L_1'(p)}{p - L_1(p)}x + \frac{L_2'(p)}{p - L_1(p)},$$

a to je linearna ODJ prvog reda po x. Ako pogledamo oblik opšteg rešenja linearne ODJ prvog reda, zaključujemo da se za proizvoljnu konstantu C, $x(p)$ može zapisati u obliku

$$x(p) = CA(p) + B(p)$$

gde su A i B funkcije koje se određuju prilikom rešavanja linearne jednačine. Zamenom u (14.30) dobijamo

$$y = (CA(p) + B(p))L_1(p) + L_2(p). \tag{14.31}$$

(ii) Ako je za neko $p = p_0$ tačno $p - L_1(p) = 0$, tada je pored opšteg rešenja (14.31) za $p \neq p_0$, singularno rešenje jednačine (14.30) oblika

$$y = xL_1(p_0) + L_2(p_0)\,.$$

(iii) Ako je $p - L_1(p) \equiv 0$, tada je (14.30) već opisana Klerova diferencijalna jednačina.

Primer 14.2.21 Naći sva rešenja diferencijalne jednačine

$$y = x(y')^2 + \ln y'\,.$$

Rešenje. Neka je $p = y'$. Zbog funkcije $\ln y'$, sledi da mora biti $p > 0$. Diferencirajmo jednačinu po x:

$$y = x(y')^2 + \ln y' \Rightarrow y = xp^2 + \ln p \Rightarrow y' = (xp^2)' + (\ln p)' \Rightarrow p = p^2 + 2xpp' + \frac{1}{p}p'.$$

Pomnožimo poslednju jednačinu sa dx.

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx} \Rightarrow (p - p^2)dx = \left(2xp + \frac{1}{p}\right)dp.$$

Sada imamo dva slučaja:

(i) Neka je $p - p^2 \neq 0$, tj. $p \neq 0$ i $p \neq 1$. Tada je

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2xp + \frac{1}{p}}{p - p^2} \Rightarrow x' = \frac{2p}{p(1-p)}\,x + \frac{\frac{1}{p}}{p - p^2} \Rightarrow x' = \frac{2}{1-p}\,x + \frac{\frac{1}{p}}{p - p^2} \tag{14.32}$$

Ovo je sada linearna ODJ prvog reda po funkciji $x(p)$. Uvodimo smenu $x(p) = u(p)v(p)$ ili kraće $x = uv$. Tada je $x' = u'v + uv'$ i ubacujući u (14.32), dobijamo

$$u'v + uv' - \frac{2}{1-p}uv = \frac{\frac{1}{p}}{p - p^2}.$$

Pratimo uobičajeni postupak za rešavanje jednačina ovog tipa. Iz prethodne jednačine dobijamo

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{2}{1-p}v\right)}_{0} = \frac{\frac{1}{p}}{p - p^2} \tag{14.33}$$

i sada treba prvo rešiti

$$v' - \frac{2}{1-p}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dp} = \frac{2}{1-p}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{1-p}dp \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2}{1-p}dp. \tag{14.34}$$

Odredimo desni integral u (14.34).

$$\int \frac{2}{1-p}dp = \{t = 1-p,\ dt = -dp\} = -2\int \frac{dt}{t} = -2\ln|t| + C = -2\ln|1-p| + C.$$

Rešenje se može zapisati i kao

$$\int \frac{2}{1-p}dp = -2\ln|1-p| + \ln|C| = \ln\frac{1}{(1-p)^2} + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{(1-p)^2}\right|.$$

Sada se vraćamo na poslednju jednačinu u (14.34) (umesto C pišemo 1).

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2}{1-p}dp \Rightarrow \ln|v| = \ln\frac{1}{(1-p)^2} \Rightarrow v = \frac{1}{(1-p)^2}\,.$$

Sada, na osnovu (14.33) dobijamo

$$u'\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{\frac{1}{p}}{p(1-p)} \Rightarrow u'\frac{1}{(1-p)} = \frac{1}{p^2}$$

nakon množenja jednačine sa $1-p$. Dalje je

$$\frac{du}{dp}\cdot\frac{1}{(1-p)} = \frac{1}{p^2} \Rightarrow du = \frac{1-p}{p^2}dp \Rightarrow \int du = \int \frac{1-p}{p^2}dp \Rightarrow u = \int \frac{1-p}{p^2}dp\,.$$

Rešimo sada preostali integral.

$$\int \frac{1-p}{p^2}dp = \int \frac{1}{p^2}dp - \int \frac{1}{p}dp = -\frac{1}{p} - \ln|p| + C = u$$

Pošto je $x = uv$, sledi

$$x = \left(-\frac{1}{p} - \ln|p| + C\right)\cdot\frac{1}{(1-p)^2}\,.$$

Da bismo našli y, potrebno je u početnu jednačinu uvrstiti dobijeni izraz za x.

$$y = \left(-\frac{1}{p} - \ln|p| + C\right)\cdot\frac{1}{(1-p)^2}\cdot p^2 + \ln p\,.$$

(ii) Pošto p mora biti pozitivno, preostalo je da nađemo singularno rešenje za $p = 1$. Uvrštavanjem u početnu jednačinu $p = y' = 1$, dobijamo

$$y = x \cdot 1^2 + \ln(1) \Rightarrow y = x.$$

Ovim je zadatak urađen. ∎

Primer 14.2.22 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y = x(1 + y') + (y')^2 .$$

Rešenje. Uvedimo smenu $y' = p$, a odatle sledi da je $dy = pdx$. Dobijamo

$$y = x(1 + p) + p^2.$$

Nakon diferenciranja po promenljivoj x imaćemo

$$p = (1 + p) + xp' + 2pp'.$$

Pošto je $p' = dp/dx$, nakon množenja prethodne jednačine sa dx, imaćemo

$$0 = dx + xdp + 2pdp \Rightarrow -dx = (x + 2p)dp \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -x - 2p \Rightarrow x' + x = -2p,$$

a to je linearna diferencijalna jednačina po $x = x(p)$. Uvodimo smenu $x(p) = u(p)v(p)$ ili kraće $x = uv$. Tada je $x' = u'v + uv'$ i

$$u'v + uv' + uv = -2p \Rightarrow u'v + u\underbrace{(v' + v)}_{0} = -2p.$$

Rešimo sada $v' + v = 0$.

$$v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dp} = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dp \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int dp \Rightarrow \ln|v| = -p \Rightarrow v = e^{-p}.$$

Sada je

$$u'e^{-p} = -2p \Rightarrow du = -2pe^{p}dp \Rightarrow u = -2\int pe^{p}dp \Rightarrow u = -2(pe^{p} - e^{p}) + C,$$

nakon parcijalnog integraljenja. Opšte rešenje je

$$x = uv = (-2(pe^{p} - e^{p}) + C)e^{-p} = -2(p - 1) + Ce^{-p} = 2 - 2p + Ce^{-p},$$

a y je

$$y = x(1 + p) + p^2 \Rightarrow y = (2 - 2p + Ce^{-p})(1 + p) + p^2 = Ce^{-p}(1 + p) + 2 - p^2.$$

Dakle, rešenje je dato u parametarskom obliku. ∎

14.3 ODJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Neka su a_0, a_1, a_2 konstante, a f funkcija od x sa domenom D. Tada se diferencijalna jednačina oblika

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \tag{14.35}$$

zove *linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima* za $a_2 \neq 0$. Ako je u (14.35) $f(x)$ identički jednaka nuli, tada dobijamo jednačinu

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{14.36}$$

koja se zove *homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima* za $a_2 \neq 0$. Ako je $f(x) \neq 0$, tada za (14.35) kažemo da je *nehomogena.*

Za diferencijalnu jednačinu (14.35) na intervalu (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$, rešenje tražimo u skupu dva puta neprekidno diferencijabilnih funkcija koji se označava $C^2(a, b)$. Sada navodimo teoremu koja daje uslove postojanja i jedinstvenosti rešenja Košijevog problema za diferencijalnu jednačinu (14.35).

Teorema 14.3.1 *Neka je f u (14.35) neprekidna na intervalu (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$, i neka su dati brojevi $x_0 \in (a, b)$, t_0 i t_1. Tada jednačina (14.35) ima jedinstveno rešenje $y = y(x)$ u skupu $C^2(a, b)$, koje zadovoljava početne uslove*

$$y(x_0) = t_0,\ y'(x_0) = t_1\,. \tag{14.37}$$

U daljem tekstu će nam biti potrebni pojmovi linearne nezavisnosti dve funkcije. Funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ su linearno nezavisne na domenu D ako ne postoje konstante C_1 i C_2, od kojih je bar jedna različita od nule, takve da je nad domenom D tačno

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0.$$

U suprotnom kažemo da su funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno zavisne.

Teorema 14.3.2 *Neka su funkcije y_1 i y_2 rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine (14.36). Potreban i dovoljan uslov za linearnu nezavisnost funkcija y_1 i y_2 je da je za svako $x \in (a, b)$ njihova determinanta Vronskog, koja se definiše kao*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

različita od nule.

Teorema 14.3.3 *Postoje dva linearno nezavisna rešenja jednačine (14.36).*

Dokaz. Neka je $x_0 \in (a, b)$. Na osnovu teoreme 14.3.1 sledi da postoje rešenja y_1 i y_2 jednačine (14.36) koja zadovoljavaju sledeće početne uslove:

$$\begin{array}{ll} y_1(x_0) = 1 & y_1'(x_0) = 0 \\ y_2(x_0) = 0 & y_2'(x_0) = 1\,. \end{array}$$

Tada je vrednost determinante Vronskog u tački x_0 jednaka

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

■

Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno nezavisna rešenja jednačine (14.36), tada je opšte rešenje jednačine (14.36) dato sa

$$y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{14.38}$$

jer važi

$$\begin{aligned}
&a_2y_h''(x) + a_1y_h'(x) + a_0y_h(x)\\
&= a_2(C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x)) + a_1(C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)) + a_0(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))\\
&= C_1(a_2y_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_0y_1(x)) + C_2(a_2y_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_0y_1(x))\\
&= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Rešenje jednačine (14.36) tražimo u obliku $y(x) = e^{rx}$, gde je r realan ili kompleksan broj. Kako je $y'(x) = re^{rx}$ i $y''(x) = r^2e^{rx}$, uvrštavajući u (14.36) dobijamo

$$a_2r^2e^{rx} + a_1re^{rx} + a_0e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(a_2r^2 + a_1r + a_0) = 0 \Rightarrow a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0. \tag{14.39}$$

Poslednja jednačina naziva se *karakteristična jednačina*, a njena rešenja, r_1 i r_2, su *karakteristični koreni*. Sada,

- ako je $r_1 \neq r_2$ i $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, tada je $y_h(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$,
- ako je $r_1 = r_2$ i $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, tada je $y_h(x) = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x}$ i
- ako je $r_1 = a + bi$, a $r_2 = a - bi$, $b \neq 0$, tada je $y_h(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Primer 14.3.4 Odrediti opšta rešenja sledećih homogenih diferencijalnih jednačina:

(*i*) $y'' - 4y' + 3y = 0$,

(*ii*) $y'' - 9y' = 0$,

(*iii*) $y'' + 6y' + 9y = 0$,

(*iv*) $y'' + 10y' + 29y = 0$.

Rešenje. (*i*) Karakteristična jednačina je

$$r^2 - 4r + 3 = 0,$$

čija su rešenja

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 3.$$

Dakle, opšte rešenje je

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

(*ii*) Sada je karakteristična jednačina $r^2 - 9r = 0$, odakle sledi da je $r(r-9) = 0$, pa je $r_1 = 0$ i $r_2 = 9$. Jasno je da je opšte rešenje

$$y(x) = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{9x} = C_1 + C_2e^{9x}.$$

(*iii*) U ovom slučaju je karakteristična jednačina $r^2 + 6r + 9 = 0$, te je $r_1 = r_2 = -3$. Opšte rešenje je

$$y(x) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}.$$

(iv) Rešimo prvo karakterističnu jednačinu $r^2 + 10r + 29 = 0$.

$$r_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 116}}{2} = \frac{-10 \pm 4i}{2} = -5 \pm 2i.$$

Sada je opšte rešenje

$$y_h(x) = e^{-5x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

■

Primer 14.3.5 Rešiti početni problem $2y'' - 3y' - 5y = 0$, ako je $y(0) = y'(0) = 2$.

Rešenje. Karakteristična jednačina je $2r^2 - 3r - 5 = 0$ čija su rešenja

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow r_1 = \frac{5}{2},\ r_2 = -1.$$

Zaključujemo da je opšte rešenje

$$y(x) = C_1 e^{\frac{5x}{2}} + C_2 e^{-x}.$$

Iskoristimo sada početne uslove.

$$y(0) = 2 \Rightarrow C_1 e^{\frac{5 \cdot 0}{2}} + C_2 e^{-0} = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2.$$

Kako je $y'(x) = \frac{5}{2} C_1 e^{\frac{5x}{2}} - C_2 e^{-x}$, sada važi

$$y'(0) = 2 \Rightarrow \frac{5}{2} C_1 - C_2 = 2.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} C_1 & + & C_2 & = & 2 \\ \frac{5}{2} C_1 & - & C_2 & = & 2 \end{array}$$

dobijamo da je $C_1 = 8/7$ i $C_2 = 6/7$, pa je rešenje početnog problema

$$y(x) = \frac{8}{7} e^{\frac{5x}{2}} + \frac{6}{7} e^{-x}.$$

■

Opšte rešenje jednačine (14.35) je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

gde je $y_h(x)$ opšte rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine oblika (14.38), dok je $y_p(x)$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine (14.35), koje se određuje na osnovu funkcije $f(x)$ sa desne strane jednačine (14.35). U ovoj knjizi biće prikazan metod neodređenih koeficijenata pomoću kojeg se određuje partikularno rešenje.

14.3.1 Metod neodređenih koeficijenata

Posmatrajmo jednačinu (14.35) i neka je:

1. funkcija f oblika
$$f(x) = e^{lx} P_n(x),$$
gde je $l \in \mathbb{R}$ i P_n polinom n-tog stepena. Neka su r_1 i r_2 karakteristični koreni poslednje jednačine u (14.39). Tada:

   a) ako je $l = r_1 = r_2$, partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = x^2 e^{lx} Q_n(x),$$
gde je Q_n opšti polinom n-tog stepena (tj. ima neodređene koeficijente),

   b) ako je tačna jedna od naredne dve jednakosti $l = r_1$, $l = r_2$, partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = x e^{lx} Q_n(x),$$
gde je Q_n opšti polinom n-tog stepena,

   c) ako je $l \neq r_1$ i $l \neq r_2$, partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = e^{lx} Q_n(x),$$
gde je Q_n opšti polinom n-tog stepena.

2. funkcija f oblika
$$f(x) = e^{lx}(P_s(x)\cos bx + Q_t(x)\sin bx),$$
gde je $l \in \mathbb{R}$, a P_s i Q_t polinomi s-tog, odnosno t-tog stepena, redom. Neka su, opet, r_1 i r_2 karakteristični koreni poslednje jednačine u (14.39). Neka je $n = \max\{s, t\}$. Tada:

   a) ako je $l + bi = r_1$ i $l - bi = r_2$, partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = x e^{lx}(R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx),$$
gde su R_n i S_n opšti polinomi n-tog stepena (imaju neodređene koeficijente),

   b) ako je $l \pm bi \neq r_1$ i $l \pm bi \neq r_2$, partikularno rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = e^{lx}(R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx),$$
gde R_n i S_n opšti polinomi n-tog stepena.

Ako je u (14.35) funkcija f oblika
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x),$$
gde su f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, funkcije jednog od oblika iz pravila 1. i 2., tada se određuju partikularna rešenja y_{p_i} iz jednačine
$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, k.$$
Partikularno rešenje jednačine (14.35) je tada
$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}.$$

Primer 14.3.6 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 2y' + y = 9x + 4$.

Rešenje. Nađimo prvo homogeni deo opšteg rešenja polazne jednačine, odnosno rešimo jednačinu

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Pošto je karakteristična jednačina $r^2+2r+1 = 0$ i kako su njena rešenja $r_1 = r_2 = -1$, rešenje homogene jednačine je

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}.$$

Potražimo sada i partikularno rešenje. Desna strana polazne jednačine je oblika $f(x) = (9x + 4)e^{0x}$, a pošto je $r_1 \neq 0$ i $r_2 \neq 0$, partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = (Ax + B)e^{0x} = Ax + B,$$

jer je $9x + 4$ polinom prvog stepena, a opšti polinom prvog stepena (sa neodređenim koeficijentima) tada je oblika $Ax + B$. Sada je $y_p' = (Ax + B)' = A$ i $y_p'' = (A)' = 0$ i iz $y_p'' + 2y_p' + y_p = 9x + 4$ sledi

$$\begin{aligned} 0 + 2A + Ax + B = 9x + 4 \quad &\Rightarrow Ax + (2A + B) = 9x + 4 \\ &\Rightarrow A = 9,\ 2A + B = 4 \\ &\Rightarrow A = 9,\ B = -14. \end{aligned}$$

Kako je $y_p = 9x - 14$, opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 9x - 14\,.$$

■

Primer 14.3.7 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + y' + y = x^3 + 4x + 2$.

Rešenje. Rešavamo jednačinu $y'' + y' + y = 0$. Karakteristična jednačina je $r^2 + r + 1 = 0$ čiji su koreni

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

odakle sledi da je

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Pošto je $f(x) = (x^3+4x+2)e^{0x}$ i $0 \neq r_1$, $0 \neq r_2$, partikularno rešenje tražimo u obliku opšteg polinoma trećeg stepena, tj.

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,\ y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C,\ y_p'' = 6Ax + 2B.$$

Uvrštavanjem u $y_p'' + y_p' + y_p = x^3 + 4x + 2$ dobijamo

$$Ax^3 + (3A + B)x^2 + (6A + 2B + C)x + (2B + C + D) = x^3 + 4x + 2,$$

pa bi trebalo rešiti sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} A & & & & & & & = & 1 \\ 3A & + & B & & & & & = & 0 \\ 6A & + & 2B & + & C & & & = & 4 \\ & & 2B & + & C & + & D & = & 2. \end{array}$$

Rešenje je $(A,B,C,D) = (1,-3,4,4)$, tako da je

$$y_p = x^3 - 3x^2 + 4x + 4.$$

Opšte rešenje je zbir rešenja homogene i nehomogene jednačine, tj.

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^3 - 3x^2 + 4x + 4.$$

■

Primer 14.3.8 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 4y' + 3y = xe^{3x}$.

Rešenje. Karakteristična jednačina za $y'' - 4y' + 3y = 0$ je

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 3,$$

pa je $y_h = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Pošto je $f(x) = xe^{3x}$ i $r_2 = 3$ (a broj 3 je u eksponentu od e^{3x}), partikularno rešenje tražimu u obliku

$$y_p = (Ax + B)\,x\,e^{3x} = (Ax^2 + Bx)\,e^{3x}.$$

Sada je $y_p' = e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B)$ i $y_p'' = e^{3x}(9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 2A + 6C)$. Uvrštavanjem u jednačinu $y_p'' - 4y_p' + 3y_p = xe^{3x}$, dobijamo

$$(4Ax + 2A + 2B)e^{3x} = xe^{3x} \Rightarrow 4Ax + 2A + 2B = x \Rightarrow 4A = 1,\ 2A + 2B = 0,$$

i tada je $A = 1/4$ i $B = -1/4$. Dakle, $y_p = (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)\,e^{3x}$ i opšte rešenje je

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)\,e^{3x}.$$

■

Primer 14.3.9 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 4y' + 3y = 4e^{2x}$.

Rešenje. Rešavamo $y'' - 4y' + 3y = 0$. Njena karakteristična jednačina je $r^2 - 4r + 3 = 0$, pa je $r_1 = 1$ i $r_2 = 3$. Homogeno rešenje je

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

Pošto je $f(x) = 4e^{2x}$, a $l = 2 \neq r_1$ i $l = 2 \neq r_2$, partikularno rešenje tražimo kao

$$y_p = Ae^{2x} \Rightarrow y_p' = 2Ae^{2x} \Rightarrow y_p'' = 4Ae^{2x}.$$

Uvrštavanjem u $y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 4e^{2x}$, dobijamo

$$-Ae^{2x} = 4e^{2x} \Rightarrow A = -4.$$

Opšte rešenje je

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 4e^{2x}\,.$$

■

Primer 14.3.10 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 3y' - 4y = -2xe^{-2x}$.

Rešenje. Karakteristična jednačina homogene jednačine $y'' - 3y' - 4y = 0$ je $r^2 - 3r - 4 = 0$ sa resenjima $r_1 = -1$, $r_2 = 4$. Sledi da je

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Kako je $l = -2$ u $f(x) = -2xe^{-2x}$ i kako je $r_1 \neq l$ i $r_2 \neq l$, partikularno rešenje tražimo kao

$$y_p = (Ax + B)e^{-2x},$$

odakle je $y_p' = e^{-2x}(-2Ax + A - 2B)$ i $y_p'' = e^{-2x}(4Ax - 4A + 4B)$. Uvrštavanjem u

$$y_p'' - 3y_p' - 4y_p = -2xe^{-2x},$$

dobijamo

$$6Ax + (-7A + 6B) = -2x \Rightarrow 6A = -2,\ -7A + 6B = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{3},\ B = -\frac{7}{18}\,.$$

Partikularno rešenje je $y_p = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{7}{18}\right)e^{-2x}$, a opšte je

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{7}{18}\right)e^{-2x}\,.$$

■

Primer 14.3.11 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + y = \cos x$.

Rešenje. Homogena jednačina je $y'' + y = 0$, a njena karakteristična jednačina

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0 + 1 \cdot i,\ r_2 = 0 - 1 \cdot i,$$

odakle sledi da je

$$y_h = e^{0x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Desna strana polazne jednačine je oblika

$$f(x) = e^{0x}(1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x),$$

a pošto je $l + bi = 0 + 1i = r_1$ i $r_2 = 0 - 1i$, partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = e^{0x}x(A\cos x + B\sin x) = x(A\cos x + B\sin x).$$

Sada je $y_p' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$ i $y_p'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$. Uvrštavanjem u $y_p'' + y_p = \cos x$ dobijamo

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x \Rightarrow A = 0,\ B = \frac{1}{2}\,.$$

Kako je $y_p = \frac{1}{2}x\sin x$, opšte rešenje je

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x\sin x\,.$$

■

Primer 14.3.12 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 4y = x \sin x$.

Rešenje. Karakteristična jednačina homogene jednačine $y'' + 4y = 0$ je

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 0 + 2i, \; r_2 = 0 - 2i,$$

pa je

$$y_h = e^{0x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\,.$$

Pošto je

$$f(x) = e^{0x}(0 \cdot \cos x + x \sin x)$$

i $r_1 \neq 0 + 1i$ i $r_2 \neq 0 + 1i$, partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Tada je $y_p' = (Cx + A + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x$ i $y_p'' = (-Ax - B + 2C)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x$ i uvrštavanjem u

$$y_p'' + 4y_p = x \sin x$$

dobijamo

$$(3Ax + 3B + 2C)\cos x + (3Cx + 3D - 2A)\sin x = x \sin x,$$

odakle je $3A = 0$, $3B + 2C = 0$, $3C = 1$ i $3D - 2A = 0$. Rešenje sistema je $(A, B, C, D) = (0, -2/9, 1/3, 0)$, pa je

$$y_p = -\frac{2}{9}\cos x + \frac{1}{3} x \sin x.$$

Opšte rešenje je

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{2}{9}\cos x + \frac{1}{3} x \sin x\,.$$

■

Primer 14.3.13 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' + 3y = x^2 + 4\cos x$.

Rešenje. Rešimo prvo homogenu jednačinu

$$y'' - 2y' + 3y = 0.$$

Pošto je njena karakteristična jednačina

$$r^2 - 2r + 3 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\, i,$$

rešenje homogene jednačine je

$$y_h = e^x(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x).$$

Ako posmatramo samo $f_1(x) = x^2 e^{0x}$, a kako je $r_1 \neq 0$ i $r_2 \neq 0$, partikularno rešenje y_{p_1} tražimo u obliku $y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C$, pa je $y_{p_1}' = 2Ax + B$, $y_{p_1}'' = 2A$. Uvrštavanjem u

$$y_{p_1}'' - 2y_{p_1}' + 3y_{p_1} = x^2,$$

dobijamo

$$3Ax^2 + (3B - 4A)x + (2A - 2B + 3C) = x^2\,.$$

Sledi da je $3A = 1$, $3B - 4A = 0$ i $2A - 2B + 3C = 0$, odakle se dobija da je $A = 1/3$, $B = 4/9$ i $C = 2/27$. Zaključujemo da je

$$y_{p_1} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{2}{27}\,.$$

Neka je $f_2(x) = 4\cos x = e^{0x}(4\cos x + 0\sin x)$. Kako je $r_1 \neq 0 + 1i$ i $r_2 \neq 0 + 1i$, partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_{p_2} = A\cos x + B\sin x,$$

pa je $y'_{p_2} = -A\sin x + B\cos x$ i $y''_{p_2} = -A\cos x - B\sin x$ i uvrštavanjem u

$$y''_{p_2} - 2y'_{p_2} + 3y_{p_2} = 4\cos x,$$

dobijamo

$$(2A - 2B)\cos x + (2A + 2B)\sin x = 4\cos x \Rightarrow 2A - 2B = 4,\ 2A + 2B = 0.$$

Kako je $A = 1$ i $B = -1$, sledi da je $y_{p_2} = \cos x - \sin x$, te je

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = e^x(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x) + \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{2}{27} + \cos x - \sin x\,.$$

■

14.4 Primena ODJ u biologiji i fitomedicini

Mnogi biološki procesi se odvijaju neprekidno tokom vremena. Recimo promena koncentracije leka u krvotoku pacijenta ili povećanje mase pojedinačnih organizama. Čak i dinamika populacije mnogih vrsta, od veličine kolonije bakterija do veličine ljudske populacije, ponekad se najbolje modeluje pod pretpostavkom da se veličina populacije neprekidno menja u vremenu. Kao što ćemo videti u ovom poglavlju, diferncijalne jednačine pružaju zgodan i prirodan način da se konstruišu takvi modeli.

Primer 14.4.1 Jedna hemikalija se rastvara u vodi brzinom koja je proporcionalna proizvodu nerastvorene količine i razlike između koncetracije u zasićenom rastvoru i postojećem rastvoru. Poznato je da je u 100 grama zasićenog rastvora rastvoreno tačno 60 grama. Ako je poznato da je 40 grama te hemikalije stavljeno u 100 grama vode i da se posle 2 sata rastvorilo 10 grama, koliko će biti rastvoreno posle 6 sati?

Rešenje. Neka je $H = H(t)$ količina nerastvorene hemikalije u gramima u vremenu t. Ako je k koeficijent proporcionalnosti, tada je

$$\frac{dH(t)}{dt} = kH(t)\left(\frac{60}{100} - \frac{40 - H(t)}{100}\right),$$

uz uslove $H(0) = 40$ i $H(2) = 40 - 10 = 30$. Nakon sređivanja, početna jednačina postaje

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{k}{100}H(t)\,(20 + H(t))\,,$$

odnosno

$$\frac{dH(t)}{H(t)\,(20+H(t))}=\frac{k}{100}\,dt \Rightarrow \underbrace{\int \frac{dH(t)}{H(t)\,(20+H(t))}}_{I_1}=\frac{k}{100}\underbrace{\int dt}_{I_2}.$$

Kako je

$$\frac{1}{H\,(20+H)}=\frac{A}{H}+\frac{B}{20+H}\ \Big/\cdot H\,(20+H)$$

dobijamo

$$1=A(20+H)+BH \Rightarrow 1=(A+B)H+20A$$

i sledi $A+B=0$, $20A=1$, odnosno $A=1/20$ i $B=-1/20$. Dakle

$$I_1=\frac{1}{20}\int\frac{dH}{H}-\frac{1}{20}\int\frac{dH}{20+H}=\frac{1}{20}\ln|H|-\frac{1}{20}\ln|H+20|+C=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{H}{H+20}\right|+C_1.$$

Kako je $I_2=t+C_2$, iz $I_1=\frac{k}{100}I_2$ dobijamo

$$\frac{1}{20}\ln\left|\frac{H}{H+20}\right|+C_1=\frac{k}{100}\left(t+C_2\right),$$

odnosno

$$\ln\left|\frac{H}{H+20}\right|=\frac{k}{5}\,t+\ln C\,.$$

Ovde smo uzeli da je $\ln C=kC_2/5-20C_1$ radi kasnijeg lepšeg rešenja. Sada je

$$\frac{H}{H+20}=e^{\frac{k}{5}\,t+\ln C}\Rightarrow H=(H+20)C\,e^{\frac{k}{5}t}\Rightarrow H=\frac{20C\,e^{\frac{k}{5}t}}{1-C\,e^{\frac{k}{5}t}}\,.$$

Pošto je $H(0)=40$, imaćemo

$$H(0)=\frac{20C\,e^{\frac{k}{5}\cdot 0}}{1-C\,e^{\frac{k}{5}\cdot 0}}\Rightarrow 40=\frac{20C}{1-C}\Rightarrow C=\frac{2}{3}\,.$$

Sada je

$$H=\frac{20\cdot\frac{2}{3}\,e^{\frac{k}{5}t}}{1-\frac{2}{3}\,e^{\frac{k}{5}t}}\,.$$

Koeficijent proporcionalnosti k određujemo iz uslova $H(2)=30$:

$$\begin{aligned}
H(2)=\tfrac{20\cdot\frac{2}{3}\,e^{\frac{2k}{5}}}{1-\frac{2}{3}\,e^{\frac{2k}{5}}} \quad &\Rightarrow 30\left(1-\tfrac{2}{3}\,e^{\frac{2k}{5}}\right)=\tfrac{40}{3}\,e^{\frac{2k}{5}}\\
&\Rightarrow 3-2\,e^{\frac{2k}{5}}=\tfrac{4}{3}\,e^{\frac{2k}{5}}\\
&\Rightarrow 3=\tfrac{10}{3}\,e^{\frac{2k}{5}}\\
&\Rightarrow e^{\frac{2k}{5}}=\tfrac{9}{10}\\
&\Rightarrow \tfrac{2k}{5}=\ln\tfrac{9}{10}\\
&\Rightarrow \tfrac{k}{5}=\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{9}{10}\\
&\Rightarrow k=\tfrac{5}{2}\ln\tfrac{9}{10}\,.
\end{aligned}$$

Sada je

$$H=\frac{20\cdot\frac{2}{3}\,e^{\frac{1}{2}t\ln\frac{9}{10}}}{1-\frac{2}{3}\,e^{\frac{1}{2}t\ln\frac{9}{10}}}=\frac{20\cdot\frac{2}{3}\,e^{t\ln\sqrt{\frac{9}{10}}}}{1-\frac{2}{3}\,e^{t\ln\sqrt{\frac{9}{10}}}}=\frac{\frac{40}{3}\left(\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^t}{1-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^t}=\frac{\frac{40}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^t}{1-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^t}.$$

Nakon 6 sati, rastvoreno će biti

$$40-H(6)=40-\frac{\frac{40}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^6}{1-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^6}=40-\frac{\frac{40}{3}\cdot\frac{729}{1000}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{729}{1000}}=40-\frac{40\cdot 729}{1542}\approx 21.09\,\text{grama}.$$

■

Primer 14.4.2 Neka je dat model rasta populacije

$$\frac{dN}{dt}=1.2N\left(1-\frac{N}{4200}\right),$$

gde je $N(t)$ broj individua u vremenu t koje je izraženo u danima. Za koje vrednosti N će populacija rasti, a za koje opadati? Rešiti jednačinu za $N(0)=2100$ i $N(0)=8400$.

Rešenje. Vidimo da ako je $0<N<4200$ da je $\frac{dN}{dt}>0$ i tada će populacija rasti u vremenu. Ako je $N>4200$, populacija će opadati. Nađimo sada $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt}=\frac{1.2}{4200}N\left(4200-N\right)\Rightarrow\underbrace{\int\frac{dN}{N\left(4200-N\right)}}_{I_1}=\frac{1.2}{4200}\underbrace{\int dt}_{I_2}.$$

Rešavamo integral I_1. Podintegralnu funkciju moramo rastaviti na zbir dve elementarne racionalne funkcije kao što sledi:

$$\frac{1}{N\left(4200-N\right)}=\frac{A}{N}+\frac{B}{4200-N}\ \Big/\cdot N\left(4200-N\right)$$

te je

$$1=A(4200-N)+B\,N\Rightarrow 1=(B-A)N+4200\,A\Rightarrow B-A=0,\ \ 4200\,A=1.$$

Zaključujemo da je $A=B=1/4200$. Integral I_1 sada postaje

$$I_1=\frac{1}{4200}\int\frac{dN}{N}+\frac{1}{4200}\int\frac{dN}{4200-N}=\frac{1}{4200}\left(\ln|N|-\ln|4200-N|\right)+C_1=\frac{1}{4200}\ln\left|\frac{N}{4200-N}\right|+C_1.$$

Ako sada primenimo da je $I_1=\frac{1.2}{4200}I_2$ dobijamo (za $\ln C=1.2C_2-4200C_1$)

$$\frac{1}{4200}\ln\left|\frac{N}{4200-N}\right|=\frac{1.2}{4200}\,t+\frac{\ln C}{4200}$$

ili, nakon množenja cele jednačine sa 4200,

$$\ln\left|\frac{N}{4200-N}\right|=1.2\,t+\ln C.$$

Sada je, za $0 < N < 4200$,

$$\frac{N}{4200 - N} = e^{1.2\,t + \ln C} \Rightarrow \frac{N}{4200 - N} = C\, e^{1.2\,t},$$

pa je

$$N = 4200\, \frac{Ce^{1.2\,t}}{1 + Ce^{1.2\,t}}\,.$$

Kako je $N(0) = 2100$ imaćemo

$$N(0) = 4200\, \frac{Ce^{0}}{1 + Ce^{0}} \Rightarrow 2100 = 4200 \cdot \frac{C}{1 + C},$$

a to znači da je

$$\frac{C}{1 + C} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2C = 1 + C \Rightarrow C = 1.$$

Rešenje početnog problema je

$$N(t) = N = 4200\, \frac{e^{1.2\,t}}{1 + e^{1.2\,t}}\,.$$

Sličan postupak se može uraditi i za $N > 4200$. ■

Primer 14.4.3 Jedna od jednačina dinamike koncentracije leka je i

$$\frac{dc}{dt} = k(c_s - c)$$

gde su k i c_s pozitivne konstante i $c < c_s$. Ako je $c(0) = 0$, odredi količinu leka u $t = 2$.

Rešenje. Rešimo prvo datu jednačinu.

$$\frac{dc}{c_s - c} = k\, dt \Rightarrow \int \frac{dc}{c_s - c} = k \int dt \Rightarrow \ln(c_s - c) = k\,t + \ln C,$$

pa je tada

$$c_s - c = Ce^{k\,t} \Rightarrow c(t) = c_s - Ce^{k\,t}\,.$$

Kako je $c(0) = 0$ imaćemo $0 = c_s - Ce^0$, odakle sledi da je $C = c_s$. Rešenje postavljenog početnog problema je

$$c(t) = c_s - c_s e^{k\,t} \Rightarrow c(t) = c_s(1 - e^{k\,t}).$$

Količina leka u $t = 2$ je $c(2) = c_s(1 - e^{2k})$. ■

Primer 14.4.4 Lek se daje pacijentu intravenozno sa promenljivom brzinom $A(t) = 1 + \sin t$ miligrama po mililitru za jedan sat. On se metaboliše brzinom od $y(t)$ miligrama po mililitru za jedan sat, gde je $y(t)$ koncentracija u vremenu t (u jedinicama od mg/ml). Dakle, $y(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \sin t - y.$$

Odrediti $y(t)$ ako je $y(0) = 3/2$.

Rešenje. Odredimo prvo opšte rešenje dobijene diferencijalne jednačine. Uvodimo smenu $y = uv$ i $y' = u'v + uv'$, pa dobijamo

$$u'v + uv' + uv = 1 + \sin t \Rightarrow u'v + u\underbrace{(v' + v)}_{0} = 1 + \sin t\,.$$

Pošto iz $v' + v = 0$ sledi $v = e^{-t}$, imaćemo

$$u'e^{-t} = 1 + \sin t \Rightarrow du = (1 + \sin t)e^t\,dt \Rightarrow \int du = \int (1 + \sin t)e^t\,dt,$$

odnosno (pokazati da je $\int \sin t\, e^t\,dt = e^t(\sin t - \cos t)/2$)

$$u = e^t + \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C.$$

Sada je

$$y = (e^t + \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C)e^{-t} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + Ce^{-t}.$$

Odredimo sada C iz početnog uslova, tj.

$$y(0) = 1 + \frac{1}{2}(\sin 0 - \cos 0) + Ce^0 \Rightarrow \frac{3}{2} = 1 - \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 1\,.$$

Partikularno rešenje je

$$y = 1 + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + e^{-t}\,.$$

■

Primer 14.4.5 Temperatura nekog tela opadne u roku od 20 minuta od 100° do 60°. Temperatura okolnog vazduha iznosi 25°. Kroz koliko će vremena od momenta početka hlađenja tela njegova temperatura spasti na 30°?

Rešenje. Na osnovu Njutnovog zakona, brzina hlađenja tela proporcionalna je razlici temperature tela i sredine koja ga okružuje. Sa promenom razlike temperature u toku procesa, menja se i hlađenje tela. Diferencijalna jednačina hlađenja tela biće:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - t_s),$$

gde je T temperatura tela, t_s temperatura sredine, $k > 0$ koeficijent proporcionalnosti i t traženo vreme hlađenja. Iz uslova zadatka imamo $T(0) = 100^\circ$ i $T(20) = 60^\circ$ i da je $t_s = 25^\circ$. Znači da je potrebno rešiti jednačinu

$$\begin{aligned} \tfrac{dT}{dt} = -k(T-25) \quad & \Rightarrow \tfrac{dT}{T-25} = -kdt \\ & \Rightarrow \int \frac{dT}{T-25} = -\int kdt \\ & \Rightarrow \ln|T-25| = -k\,t + \ln C \\ & \Rightarrow T - 25 = e^{-k\,t + \ln C} \\ & \Rightarrow T = 25 + C\,e^{-k\,t}. \end{aligned}$$

Iz $T(0) = 100$ dobijamo konstantu C. Naime,

$$T(0) = 25 + C\,e^0 \Rightarrow 100 = 25 + C \Rightarrow C = 75.$$

Sada je

$$T = 25 + 75e^{-k\,t},$$

a koeficijent proporcionalnosti $k > 0$ se dobija iz uslova $T(20) = 60$ pa je

$$T(20) = 25 + 75e^{-20k} \Rightarrow 60 = 25 + 75e^{-20k} \Rightarrow \frac{7}{15} = e^{-20k} \Rightarrow e^{-k} = \sqrt[20]{\frac{7}{15}}.$$

Sada je $k = -\ln \sqrt[20]{\frac{7}{15}}$, a konačno rešenje jednačine je

$$T = 25 + 75\left(\sqrt[20]{\frac{7}{15}}\right)^t \Rightarrow T = 25 + 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Ako je $T = 30^\circ$, tada se t dobija iz

$$30 = 25 + 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow \ln\frac{1}{15} = \frac{t}{20}\ln\frac{7}{15} \Rightarrow t = 20\,\frac{\ln\frac{1}{15}}{\ln\frac{7}{15}} \approx 71 \text{ minut.}$$

■

Primer 14.4.6 Pri malim količinama radioaktivne materije, može se smatrati da je brzina raspadanja direktno proporcionalna količini radioaktivne materije. Naći masu radioaktivne materije u funkciji od vremena.

Rešenje. Ako sa $m(t)$ označimo masu radioaktivne materije u vremenu t, a kako ona treba da opada tokom vremena, tada njen izvod po vremenu t mora biti negativan i da zadovoljava

$$\frac{dm}{dt} = -k\,m,$$

gde je $k > 0$ koeficijent proporcionalnosti. Ako u $t = 0$ masa iznosi $m = m_0$, tada je rešenje jednačine

$$m = m_0\,e^{-k\,t}.$$

■

14.5 Zadaci za vežbu

Naći opšta rešenja sledećih diferencijalnih jednačina:

1. $yy' - x = 0.$

2. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y'}{x+1}.$

3. $(y')^2 + y^2 - 1 = 0.$

4. $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0.$

Naći partikularno rešenje sledeće diferencijalne jednačine:

5. $2\sqrt{x}\,dy = y\,dx, \quad y(4) = 1.$

Naći opšta rešenja sledećih diferencijalnih jednačina:

6. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$

7. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}.$

8. $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}.$

9. $1 + e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) y' = 0.$

Naći opšta rešenja sledećih diferencijalnih jednačina:

10. $y' = \dfrac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}.$

11. $x - y - 1 + (-x + y + 2)y' = 0.$

12. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

13. $y' = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}.$

Naći opšta rešenja sledećih diferencijalnih jednačina:

14. $y' - y = e^x.$

15. $y' + \dfrac{y}{1+x} + x^2 = 0.$

16. $y' + y\cos x = \sin x \cos x.$

17. $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$

Naći opšta rešenja sledećih diferencijalnih jednačina:

18. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$

19. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0.$

20. $xy' + y = y^2 \ln x.$

21. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$

22. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(x^3 - 1)y' = 2xy^2 - x^2y - 1$, ako je jedno njeno rešenje $y_p(x) = ax + b$, gde su a i b konstante koje treba odrediti.

23. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(x^2 + x)y' + y^2 + (1 - 2x)y - 2x = 0$, ako je jedno njeno rešenje $y_p(x) = a$, gde je a konstanta koju treba odrediti.

24. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(y')^3 - 4x^2y' = 0.$

25. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y = 2xy' - \ln y'.$

Odrediti opšta rešenja sledećih homogenih diferencijalnih jednačina:

26. $y'' - 3y' + 2y = 0.$

27. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

28. $y'' + 2y' + 3y = 0.$

29. $y'' + 4y' = 0.$

30. $y'' + 4y = 0.$

Odrediti opšta rešenja sledećih nehomogenih diferencijalnih jednačina:

31. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

32. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x).$

33. $y'' + y = \sin x.$

34. $y'' + y = e^{-x} + 2.$

35. Model za električni impuls u neuronu navodi da, u odsustvu efekata relaksacije, električni potencijal $v(t)$ u neuronu zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dv}{dt} = -v\left(v^2 - (1+a)v + a\right),$$

gde je a konstanta za koju važi $0 < a < 1$. Za koje vrednosti v je v rastuća, a za koje opadajuća funkcija? Za koje vrednosti v je $dv/dt = 0$?

36. Još jedna jednačina koja opisuje dinamiku koncentracije leka je

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k}{t^b}(c_s - c),$$

gde su k, c_s i b pozitivne konstante i $b < 1$. Da li je

$$c(t) = c_s\left(1 - e^{-\alpha t^{1-b}}\right)$$

rešenje date jednačine za $t \neq 0$ i $\alpha = k/(1-b)$?

37. Proveriti da li je funkcija

$$N(t) = \frac{0.55e^{0.55t}}{1 + 0.0026e^{0.55t}}$$

rešenje početnog problema

$$\frac{dN}{dt} = (0.55 - 0.0026N)N, \quad N(0) = \frac{0.55}{1.0026}\,.$$

38. Pretpostavimo da stopa rasta po glavi stanovnika u populaciji veličine N opada linearno od vrednosti r za $N = 0$ do 0 za $N = K$. Pokazati da je diferencijalna jednačina za N zapravo

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N\,.$$

GLAVA 15

Diferencne jednačine

U matematici je sve veća potreba za primenom diferencnih jednačina. Naime, diferencne jednačine se koriste u rešavanju različitih matematičkih zadataka i problema, kao što su: nalaženje opšteg člana numeričkog niza, određivanje vrednosti determinanata (višeg reda), određivanje n-tog ($n \in \mathbb{N}$) stepena matrice, izračunavanje integrala, itd.

15.1 Osnovni pojmovi i definicije

Aritmetički i geometrijski niz su primeri nizova zadatih rekurentnim vezama. U aritmetičkom nizu to je veza oblika:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15.1}$$

za $d \neq 0$, a kod geometrijskog

$$b_{n+1} = q\, b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15.2}$$

za $q \neq 0$, $q \neq 1$. U opštem slučaju, niz a_n određen je poznavanjem prvog člana a_1 i jednačinom oblika

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15.3}$$

Jednačine (15.1-15.3) su primeri diferencnih jednačina prvog reda i ona se, u opštem obliku, piše

$$F(n, a_n, a_{n+1}) = 0\,. \tag{15.4}$$

Na primer, diferencna jednačina drugog reda ima oblik

$$F(n, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) = 0\,. \tag{15.5}$$

Analogna, diferencna jednačina k-tog reda data je kao

$$F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0\,. \tag{15.6}$$

Dakle, opšte rešenje diferencne jednačine (15.6) je ono rešenje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čijom zamenom u (15.6) ta jednačina biva zadovoljena. One, u opštem slučaju, imaju beskonačno mnogo rešenja, a da bi se odredio jedan takav niz, potrebno je zadati prvi član, ili nekoliko članova, u zavisnosti od reda diferencne jednačine.

Primer 15.1.1 Naći prvih pet članova niza zadatog rekurentnom formulom

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$$

za $n \geq 1$.

Rešenje. Za $n = 1, 2, 3, 4$ imaćemo

$$\begin{aligned}
a_2 &= \tfrac{1}{2}(a_1 + 6) = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4, \\
a_3 &= \tfrac{1}{2}(a_2 + 6) = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5, \\
a_4 &= \tfrac{1}{2}(a_3 + 6) = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5.5, \\
a_5 &= \tfrac{1}{2}(a_4 + 6) = \tfrac{1}{2}(5.5 + 6) = 5.75,
\end{aligned}$$

pa je niz oblika

$$2,\ 4,\ 5,\ 5.5,\ 5.75, \ldots$$

■

Primer 15.1.2 Naći prvih deset članova Fibonačijevog niza zadatog rekurentnom formulom

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

za $n \geq 2$.

Rešenje. Za date F_1 i F_2 imaćemo

$$\begin{aligned}
F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \\
F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3, \\
F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5, \\
F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tako da je prvih deset članova Fibonačijevog niza

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55\,.$$

■

15.2 Linearne diferencne jednačine prvog reda

Jednačina oblika

$$a_{n+1} + f(n)a_n = g(n), \tag{15.7}$$

je linearna diferencna jednačina prvog reda, gde je a_n nepoznata veličina, a $f(n)$ i $g(n)$ su funkcije od n. Slično kao i kod linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda, neka je $a_n = u_n v_n$ rešenje jednačine (15.7), tada je

$$\begin{aligned}
u_{n+1}v_{n+1} + f(n)u_n v_n = g(n) \quad &\Rightarrow u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_{n+1} + u_n v_{n+1} + f(n)u_n v_n = g(n) \\
&\Rightarrow v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) + u_n(v_{n+1} + f(n)v_n) = g(n)\,.
\end{aligned} \tag{15.8}$$

Pošto je a_n izraženo preko u_n i v_n, možemo, na primer, da v_n izaberemo proizvoljno, pa neka je u (15.8)

$$v_{n+1} + f(n)v_n = 0\,. \tag{15.9}$$

Potražimo rešenje za (15.9). Za $n = 1, 2, \ldots,$ imaćemo

$$\begin{array}{ll}
n = 1: & v_2 + f(1)v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -f(1)v_1 \\
n = 2: & v_3 + f(2)v_2 = 0 \Rightarrow v_3 = -f(2)v_2 \Rightarrow v_3 = (-1)^2 f(2)f(1)v_1 \\
\vdots & \\
n = k: & v_{k+1} + f(k)v_k = 0 \Rightarrow v_{k+1} = (-1)^k f(k)\ldots f(2)f(1)v_1 \\
\vdots &
\end{array}$$

te zaključujemo da je rešenje za (15.9) oblika

$$v_{n+1} = (-1)^n f(n)\ldots f(2)f(1)v_1 = (-1)^n v_1 \prod_{k=1}^{n} f(k)\,. \tag{15.10}$$

Sada iz (15.8) sledi

$$u_{n+1} - u_n = \frac{g(n)}{v_{n+1}} = h(n), \tag{15.11}$$

pa rešimo i ovu jednačinu. Za $n = 1, 2, \ldots,$ imaćemo

$$\begin{array}{ll}
n = 1: & u_2 - u_1 = h(1) \Rightarrow u_2 = u_1 + h(1), \\
n = 2: & u_3 - u_2 = h(2) \Rightarrow u_3 = u_2 + h(2) \Rightarrow u_3 = u_1 + h(1) + h(2), \\
\vdots & \\
n = k: & u_{k+1} - u_k = h(k) \Rightarrow u_{k+1} = u_k + h(k) = u_1 + h(1) + h(2) + \cdots + h(k,) \\
\vdots &
\end{array}$$

pa zaključujemo da je rešenje za (15.11) oblika

$$u_{n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^{n} h(k)\,,$$

odnosno

$$u_{n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{v_{k+1}} = u_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{(-1)^k v_1 \prod_{s=1}^{k} f(s)}\,. \tag{15.12}$$

Dakle, opšte rešenje jednačine (15.7) je (za $n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
a_n = u_n v_n = &\ (-1)^{n-1} v_1 \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \left(u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{(-1)^k v_1 \prod_{s=1}^{k} f(s)} \right) \\
= &\ (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \left(u_1 v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{(-1)^k \prod_{s=1}^{k} f(s)} \right)\,.
\end{aligned}$$

Ako uzmemo da je $u_1 = C$ i $v_1 = D$, gde su C i D proizvoljne konstante, tada je $u_1 v_1 = C \cdot D =: C_1$, pa je opšte rešenje

$$a_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \left(C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{(-1)^k \prod_{s=1}^{k} f(s)} \right)\,. \tag{15.13}$$

Sada ćemo dati nekoliko primera linearnih diferencnih jednačina prvog reda. Krenućemo od jednostavnijih primera.

Primer 15.2.1 Naći opšte rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} - a_n = d$, gde je $d \neq 0$ data proizvoljna konstanta.

Rešenje. Za $n = 1, 2, \ldots$ važiće

$$\begin{aligned}
&a_2 - a_1 = d \\
&a_3 - a_2 = d \\
&a_4 - a_3 = d \\
&\vdots \\
&a_{n-1} - a_{n-2} = d \\
&a_n - a_{n-1} = d\,,
\end{aligned}$$

što nakon sabiranja ovih $n-1$ jednakosti daje

$$a_n - a_1 = (n-1)d \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = C_1 + (n-1)d$$

ako za a_1 uzmemo neku proizvoljnu konstantu C_1. ■

Primer 15.2.2 Naći opšte rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} = q\, a_n$, gde je $q \neq 0$, $q \neq 1$ data proizvoljna konstanta.

Rešenje. Sada za $n = 1, 2, \ldots$ važi

$$\begin{aligned}
&a_2 = q\, a_1 \\
&a_3 = q\, a_2 = q^2 a_1 \\
&a_4 = q\, a_3 = q^3 a_1 \\
&\vdots \\
&a_{n-1} = q\, a_{n-2} = q^{n-2} a_1 \\
&a_n = q\, a_{n-1} = q^{n-1} a_1\,.
\end{aligned}$$

■

Primer 15.2.3 Naći rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} - a_n = n$, ako je $a_1 = 1$.

Rešenje. Ponovo, za $n = 1, 2, \ldots$ važiće

$$\begin{aligned}
&a_2 - a_1 = 1 \\
&a_3 - a_2 = 2 \\
&a_4 - a_3 = 3 \\
&\vdots \\
&a_{n-1} - a_{n-2} = n - 2 \\
&a_n - a_{n-1} = n - 1\,,
\end{aligned}$$

što nakon sabiranja ovih $n-1$ jednakosti daje

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k \Rightarrow a_n = 1 + \frac{(n-1)n}{2}\,.$$

■

Primer 15.2.4 Naći rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} - 2a_n = 0$ za $a_1 = 2$.

Rešenje. Na osnovu urađenog primera 15.2.2, za $q = 2$ dobijamo

$$a_n = 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n .$$

■

Primer 15.2.5 Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} + n\, a_n = 1$.

Rešenje. Ovo je potpuna linearna diferencna jednačina data u (15.7) gde je $f(n) = n$ i $g(n) = 1$. Rešenje je, dakle,

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} k \left(C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(-1)^k \prod_{s=1}^{k} s} \right) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! \left(C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(-1)^k k!} \right) \end{aligned}$$

koristeći formulu za opšte rešenje linearne diferencne jednačine date u (15.13). ■

Primer 15.2.6 Rešiti diferencnu jednačinu $a_{n+1} + n\, a_n = 1$ bez korišćenja formule (15.13).

Rešenje. Neka je $a_n = u_n v_n$ rešenje date jednačine. Tada je

$$\begin{aligned} u_{n+1} v_{n+1} + n\, u_n v_n = 1 \quad &\Rightarrow u_{n+1} v_{n+1} - u_n v_{n+1} + u_n v_{n+1} + n\, u_n v_n = 1 \\ &\Rightarrow v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) + u_n(v_{n+1} + n\, v_n) = 1 . \end{aligned} \tag{15.14}$$

Pošto je a_n izraženo preko u_n i v_n, možemo, na primer, da v_n izaberemo proizvoljno, pa neka je u (15.14)

$$v_{n+1} + n\, v_n = 0 . \tag{15.15}$$

Potražimo rešenje za (15.15). Za $n = 1, 2, \ldots$, imaćemo

$$\begin{aligned} n = 1 :& \quad v_2 + 1 \cdot v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -1 \cdot v_1 \\ n = 2 :& \quad v_3 + 2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_3 = -2 \cdot v_2 \Rightarrow v_3 = (-1)^2 2!\, v_1 \\ &\vdots \\ n = k :& \quad v_{k+1} + k \cdot v_k = 0 \Rightarrow v_{k+1} = (-1)^k k!\, v_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

te zaključujemo da je rešenje za (15.15) oblika

$$v_{n+1} = (-1)^n n!\, v_1 . \tag{15.16}$$

Sada iz (15.14) sledi

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{(-1)^n n!\, v_1} , \tag{15.17}$$

pa rešimo i ovu jednačinu. Za $n = 1, 2, \ldots,$ imaćemo

$$\begin{array}{ll}
n=1: & u_2 - u_1 = \frac{1}{-v_1} \Rightarrow u_2 = u_1 + \frac{1}{-v_1} \\
n=2: & u_3 - u_2 = \frac{1}{2!\,v_1} \Rightarrow u_3 = u_2 + \frac{1}{2!\,v_1} \Rightarrow u_3 = u_1 + \frac{1}{-v_1} + \frac{1}{2!\,v_1} \\
\vdots & \\
n=k: & u_{k+1} - u_k = \frac{1}{(-1)^k k!\,v_1} \Rightarrow u_{k+1} = u_k + \frac{1}{(-1)^k k!\,v_1} = u_1 + \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{(-1)^s s!\,v_1} \\
\vdots &
\end{array}$$

pa zaključujemo da je rešenje za (15.17) oblika

$$u_{n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(-1)^k k!\,v_1}. \tag{15.18}$$

Dakle, opšte rešenje jednačine je (za $n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
a_n = u_n v_n = \;& (-1)^{n-1}(n-1)!\,v_1 \left(u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(-1)^k k!\,v_1} \right) \\
= \;& (-1)^{n-1}(n-1)! \left(u_1\, v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(-1)^k k!} \right).
\end{aligned}$$

Ako uzmemo da je $u_1 = C$ i $v_1 = D$, gde su C i D proizvoljne konstante, tada je $u_1 v_1 = C \cdot D = C_1$, pa je opšte rešenje

$$a_n = (-1)^{n-1}(n-1)! \left(C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(-1)^k k!} \right). \tag{15.19}$$

■

Primer 15.2.7 Rešiti diferencnu jednačinu $a_{n+1} - a_n = 2n - 2$ bez korišćenja formule (15.13) ako je $a_1 = 0$.

Rešenje. Neka je $a_n = u_n v_n$. Uvrštavanjem u diferencnu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned}
u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n = 2(n-1) \Rightarrow \;& u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_{n+1} + u_n v_{n+1} - u_n v_n = 2(n-1) \\
\Rightarrow \;& v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) + u_n(v_{n+1} - v_n) = 2(n-1).
\end{aligned}$$

Sada biramo da je $v_{n+1} - v_n = 0$ i odmah je rešavamo. Dobijamo $v_{n+1} = v_n = v_{n-1} = \cdots = v_1$. Dalje je

$$v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) + 0 = 2(n-1) \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2(n-1)}{v_1}.$$

Za $n = 1, 2, \ldots,$ imaćemo

$$\begin{array}{ll}
n=1: & u_2 - u_1 = \frac{2(1-1)}{v_1} \Rightarrow u_2 = u_1 \\
n=2: & u_3 - u_2 = \frac{2(2-1)}{v_1} \Rightarrow u_3 = u_2 + \frac{2\cdot 1}{v_1} = u_1 + \frac{2}{v_1}\cdot 1 \\
n=3: & u_4 - u_3 = \frac{2(3-1)}{v_1} \Rightarrow u_4 = u_3 + \frac{2\cdot 2}{v_1} = u_1 + \frac{2\cdot 1}{v_1} + \frac{2\cdot 2}{v_1} = u_1 + \frac{2}{v_1}(1+2) \\
\vdots & \\
n=k: & u_{k+1} - u_k = \frac{2(k-1)}{v_1} \Rightarrow u_{k+1} = u_k + \frac{2(k-1)}{v_1} = u_1 + \frac{2}{v_1}(1 + 2 + \cdots + (k-1)) \\
\vdots &
\end{array}$$

Pošto je suma prvih k prirodnih brojeva jednaka $1+2+\cdots+(k-1)=(k-1)k/2$, zaključujemo da je

$$u_{k+1}=u_1+\frac{2}{v_1}\cdot\frac{(k-1)k}{2}=u_1+\frac{(k-1)k}{v_1},$$

te je

$$u_{n+1}=u_1+\frac{(n-1)n}{v_1}\Rightarrow u_n=u_1+\frac{(n-2)(n-1)}{v_1}. \tag{15.20}$$

Dakle, koristeći (15.20) i $v_n=v_1$, opšte rešenje jednačine je (za $n\geq 2$)

$$a_n=u_nv_n=\left(u_1+\frac{(n-2)(n-1)}{v_1}\right)v_1=u_1v_1+(n-2)(n-1)=(n-2)(n-1),$$

jer je $a_1=u_1v_1=0$ po uslovu zadatka. ■

Primer 15.2.8 Odrediti matrice A^n ako je:

(i) $A=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$

(ii) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$.

Rešenje. *(i)* Neka je

$$A^0=\begin{bmatrix}a_{11}^0&a_{12}^0\\a_{21}^0&a_{22}^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\ \text{ i }\ A^1=\begin{bmatrix}a_{11}^1&a_{12}^1\\a_{21}^1&a_{22}^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}=A.$$

Ako je

$$A^n=\begin{bmatrix}a_{11}^n&a_{12}^n\\a_{21}^n&a_{22}^n\end{bmatrix}\ \text{ i }\ A^{n+1}=\begin{bmatrix}a_{11}^{n+1}&a_{12}^{n+1}\\a_{21}^{n+1}&a_{22}^{n+1}\end{bmatrix},$$

iz $A^{n+1}=A^n\cdot A$ sledi

$$\begin{bmatrix}a_{11}^{n+1}&a_{12}^{n+1}\\a_{21}^{n+1}&a_{22}^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}^n&a_{12}^n\\a_{21}^n&a_{22}^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}^n+3a_{12}^n&a_{12}^n\\a_{21}^n+3a_{22}^n&a_{22}^n\end{bmatrix}$$

i dobijamo četiri diferencne jednačine

$$a_{11}^{n+1}=a_{11}^n+3a_{12}^n,\ \ a_{12}^{n+1}=a_{12}^n,\ \ a_{21}^{n+1}=a_{21}^n+3a_{22}^n,\ \ a_{22}^{n+1}=a_{22}^n.$$

Rešimo prvo drugu i četvrtu. Pošto je

$$a_{12}^{n+1}=a_{12}^n=\cdots=a_{12}^1=a_{12}^0=0$$

i

$$a_{22}^{n+1}=a_{22}^n=\cdots=a_{22}^1=a_{22}^0=1,$$

prva i treća jedačina postaju

$$a_{11}^{n+1}=a_{11}^n,\ \ a_{21}^{n+1}=a_{21}^n+3.$$

Sada je

$$a_{11}^{n+1} = a_{11}^{n} = \cdots = a_{11}^{1} = a_{11}^{0} = 1$$

i

$$a_{21}^{n+1} = a_{21}^{n} + 3 = a_{21}^{n-1} + 3 \cdot 2 = a_{21}^{n-2} + 3 \cdot 3 = \cdots = a_{21}^{1} + 3 \cdot n = a_{21}^{0} + 3 \cdot (n+1) = 3 \cdot (n+1).$$

Kako je $a_{21}^{n} = 3n$, tada je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Neka je

$$A^0 = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } A^1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Označimo

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & a_{12}^n & a_{13}^n \\ a_{21}^n & a_{22}^n & a_{23}^n \\ a_{31}^n & a_{32}^n & a_{33}^n \end{bmatrix} = \text{ i } A^{n+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{n+1} & a_{12}^{n+1} & a_{13}^{n+1} \\ a_{21}^{n+1} & a_{22}^{n+1} & a_{23}^{n+1} \\ a_{31}^{n+1} & a_{32}^{n+1} & a_{33}^{n+1} \end{bmatrix},$$

te iz $A^{n+1} = A^n \cdot A$ sledi

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{n+1} & a_{12}^{n+1} & a_{13}^{n+1} \\ a_{21}^{n+1} & a_{22}^{n+1} & a_{23}^{n+1} \\ a_{31}^{n+1} & a_{32}^{n+1} & a_{33}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^n & a_{12}^n & a_{13}^n \\ a_{21}^n & a_{22}^n & a_{23}^n \\ a_{31}^n & a_{32}^n & a_{33}^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^n + 3a_{12}^n & a_{12}^n + 3a_{13}^n & a_{13}^n \\ a_{21}^n + 3a_{22}^n & a_{22}^n + 3a_{23}^n & a_{23}^n \\ a_{31}^n + 3a_{32}^n & a_{32}^n + 3a_{33}^n & a_{33}^n \end{bmatrix}$$

i dobijamo devet diferencnih jednačina. Prve tri su oblika

$$a_{13}^{n+1} = a_{13}^{n}, \quad a_{23}^{n+1} = a_{23}^{n}, \quad a_{33}^{n+1} = a_{33}^{n}.$$

Kao u prethodnom zadatku $a_{13}^{n+1} = a_{13}^{n} = \cdots = a_{13}^{0} = 0$, $a_{23}^{n+1} = a_{23}^{n} = \cdots = a_{23}^{0} = 0$, $a_{33}^{n+1} = a_{33}^{n} = \cdots = a_{33}^{0} = 1$. Naredne dve su oblika

$$a_{12}^{n+1} = a_{12}^{n} + 3a_{13}^{n} = a_{12}^{n} = \cdots = a_{12}^{0} = 0, \quad a_{22}^{n+1} = a_{22}^{n} + 3a_{23}^{n} = a_{22}^{n} = \cdots = a_{22}^{0} = 1.$$

Sada rešavamo i

$$a_{11}^{n+1} = a_{11}^{n} + 3a_{12}^{n} = a_{11}^{n} = \cdots = a_{11}^{0} = 1.$$

Sledeće dve koje rešavamo su

$$\begin{aligned} a_{21}^{n+1} &= a_{21}^{n} + 3a_{22}^{n} = a_{21}^{n} + 3 = \cdots = a_{21}^{0} + 3 \cdot (n+1) = 3(n+1), \\ a_{32}^{n+1} &= a_{32}^{n} + 3a_{33}^{n} = a_{32}^{n} + 3 = \cdots = a_{32}^{0} + 3 \cdot (n+1) = 3(n+1). \end{aligned}$$

Preostala je još jednačina $a_{31}^{n+1} = a_{31}^{n} + 3a_{32}^{n}$. Kako je $a_{32}^{n} = 3n$, dobijamo

$$a_{31}^{n+1} - a_{31}^{n} = 3 \cdot 3n,$$

odnosno za $n = 0, 1, 2, \ldots, k$ dobijamo

$$\begin{aligned} a_{31}^{1} - a_{31}^{0} &= 0, \\ a_{31}^{2} - a_{31}^{1} &= 3 \cdot 3 \cdot 1, \\ a_{31}^{3} - a_{31}^{2} &= 3 \cdot 3 \cdot 2, \\ &\vdots \\ a_{31}^{k+1} - a_{31}^{k} &= 3 \cdot 3 \cdot k. \end{aligned}$$

Sumiranjem svih jednakosti, dobijamo

$$a_{31}^{k+1} - a_{31}^{0} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow a_{31}^{k+1} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{k(k+1)}{2}$$

ili

$$a_{31}^{n} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2}.$$

Pošto je $a_{21}^n = 3n$, sledi

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3n & 1 & 0 \\ \frac{9}{2}(n-1)n & 3n & 1 \end{bmatrix}.$$

■

15.3 Linearne diferencne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Linearna diferencna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima oblika je

$$b_2 a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = g(n) \tag{15.21}$$

gde su b_2, b_1 i b_0 konstante, a $g(n)$ funkcija od n. Odgovarajuća homogena jednačina je

$$b_2 a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = 0\,. \tag{15.22}$$

Teorema 15.3.1 *Ako su a_n' i a_n'' dva linearno nezavisna rešenja jednačine (15.22), tada je*

$$a_n = C_1 a_n' + C_2 a_n'' \tag{15.23}$$

opšte rešenje jednačine (15.22).

Dokaz. Zamenom (15.23) u (15.22) dobijamo

$$\begin{aligned} b_2 a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n &= b_2(C_1 a_{n+2}' + C_2 a_{n+2}'') + b_1(C_1 a_{n+1}' + C_2 a_{n+1}'') + b_0(C_1 a_n' + C_2 a_n'') \\ &= C_1(b_2 a_{n+2}' + b_1 a_{n+1}' + b_0 a_n') + C_2(b_2 a_{n+2}'' + b_1 a_{n+1}'' + b_0 a_n'') \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

■

Rešenje homogene jednačine (15.22) tražimo u obliku $a_n = \lambda^n$. Tada je

$$b_2 \lambda^{n+2} + b_1 \lambda^{n+1} + b_0 \lambda^n = 0\,,$$

odnosno

$$\lambda^n (b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0) = 0 \Rightarrow b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0\,. \tag{15.24}$$

Druga jednačina u (15.24) naziva se karakteristična jednačina i njena rešenja su

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 b_2 b_0}}{2 b_2}$$

i sada razlikujemo tri slučaja:

- ako su λ_1 i λ_2 realna i različita rešenja, tada je opšte rešenje karakteristične jednačine (15.24)
$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n\,,$$
- ako su λ_1 i λ_2 realna i jednaka rešenja, tada je opšte rešenje karakteristične jednačine (15.24)
$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n\,,$$
- ako su $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ i $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ konjugovano-kompleksna rešenja, tada je potrebno prvo uraditi transformaciju
$$\alpha \pm i\beta = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$
pa je opšte rešenje karakteristične jednačine (15.24)
$$\begin{aligned} a_n = &\ C\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + D\rho^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) \\ = &\ (C\rho^n + D\rho^n)\cos n\varphi + i(C\rho^n - D\rho^n)\sin n\varphi \end{aligned}$$

Primer 15.3.2 Naći opšti član Fibonačijevog niza $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, za $a_1 = a_2 = 1$.

Rešenje. Potrebno je rešiti jednačinu $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. Ako rešenje potražimo u obliku $a_n = \lambda^n$, dobijamo
$$\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda^n(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$
te je opšte rešenje
$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
Pošto je $a_1 = a_2 = 1$, ubacivanjem u opšte rešenje, dobijamo sistem
$$\begin{array}{llllll} C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & + & C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = & 1 & /\cdot\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & + & C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 & = & 1 & \swarrow \\ \hline C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & + & C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = & 1 & \\ & + & C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & = & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \\ \hline \end{array}$$
Iz poslednje jednačine sledi
$$C_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot (-\sqrt{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$
Ako sada C_2 uvrstimo u prvu jednačinu sistema, dobijamo
$$C_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$
Znači, za $n \in \mathbb{N}$, opšti član Fibonačijevog niza je
$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

■

Primer 15.3.3 Odrediti opšte rešenje a_n jednačine $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$.

Rešenje. Rešenje tražimo u obliku $a_n = \lambda^n$, pa je početna jednačina sada oblika

$$\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} + \lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda^n(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0\,.$$

Dakle,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\,.$$

Opšte rešenje je oblika

$$a_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n,$$

pa je potrebno odrediti trigonometrijske i eksponencijalne oblike dobijenih kompleksnih brojeva zbog stepenovanja na n-ti stepen. Moduo od λ_1 jednak je $|\lambda_1| = \rho_1 = 1$, a važi i $|\lambda_2| = \rho_2 = 1$. Za λ_1 važi

$$\cos(\varphi_1) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} > 0, \quad \sin(\varphi_1) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Znači, $\varphi_1 = \pi/3$ pa je

$$\lambda_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{\varphi_1\, i},$$

tj.

$$\lambda_1 = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}\, i}.$$

Zbog toga je

$$\lambda_1^n = \left(e^{\frac{\pi}{3}\, i}\right)^n = e^{n\frac{\pi}{3}\, i} = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$

Slično, za λ_2 važi

$$\cos(\varphi_2) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} > 0, \quad \sin(\varphi_2) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Znači, $\varphi_2 = -\pi/3$ pa je

$$\lambda_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{3}\, i}.$$

Zbog toga je

$$\lambda_2^n = \left(e^{-\frac{\pi}{3}\, i}\right)^n = e^{-n\frac{\pi}{3}\, i} = \cos\left(-n\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),$$

jer je $\cos x$ parna, a $\sin x$ neparna funkcija. Vraćamo se sada na opšte rešenje a_n.

$$\begin{aligned} a_n &= C_1 \cdot \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\tfrac{\pi}{3}\right)\right) + C_2 \cdot \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(n\tfrac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= (C_1 + C_2) \cdot \cos\left(n\tfrac{\pi}{3}\right) + (C_1 - C_2)\, i \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

■

Primer 15.3.4 Odrediti a_n ako je $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, uz uslov da je $a_1 = 1$ i $a_2 = 12$.

Rešenje. Sada je karakteristična jednačina $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, čija su rešenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, te je opšte rešenje oblika

$$a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n \,.$$

Sada je $a_1 = 3C_1 + 3C_2 = 1$ i $a_2 = 9C_1 + 18C_2 = 12$. Rešavanjem nastalog sistema, dobijamo $C_1 = -2/3$ i $C_2 = 1$, pa je

$$a_n = -\frac{2}{3} \cdot 3^n + n \cdot 3^n \Rightarrow a_n = -2 \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n \,.$$

■

Primer 15.3.5 Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ ako je:

a) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,

b) $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

Rešenje. Odredimo prvo opšte rešenje date jednačine. Kako je

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0,$$

sledi da je njena karakteristična jednačina

$$\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - 2\lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda^{n+2}(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

čije su rešenja

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \;\; \lambda_2 = -1 \,.$$

Opšte rešenje polazne jednačine je

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n \,.$$

a) Neka je $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$. Tada važi

$$\begin{array}{lcccll} C_1 \cdot 1 & + & C_2 \cdot 1 & = & 0 & / \cdot 1 \\ C_1 \cdot 2 & - & C_2 \cdot 1 & = & 1 & \swarrow \\ \hline C_1 \cdot 1 & + & C_2 \cdot 1 & = & 0 & \\ C_1 \cdot 3 & & & = & 1 & \\ \hline \end{array}$$

odakle sledi da je $C_1 = 1/3$, i $C_2 = -1/3$. Znači, rešenje polazne jednačine je

$$a_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) \,.$$

b) Ako je $a_0 = 2$ i $a_1 = 1$, tada treba rešiti sistem

$$\begin{array}{lcccll} C_1 \cdot 1 & + & C_2 \cdot 1 & = & 2 & / \cdot 1 \\ C_1 \cdot 2 & - & C_2 \cdot 1 & = & 1 & \swarrow \\ \hline C_1 \cdot 1 & + & C_2 \cdot 1 & = & 2 & \\ C_1 \cdot 3 & & & = & 3 & \\ \hline \end{array}$$

Sada sledi da je $C_1 = 1$, i $C_2 = 1$, te je rešenje polazne jednačine

$$a_n = 2^n + (-1)^n .$$

■

Primer 15.3.6 Odrediti vrednost determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

gde je

$$D_1 = |5| = 5 \ \text{ i } \ D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19 .$$

Rešenje. Razvijanjem determinante D_n po prvoj koloni dobijamo

$$D_n = 5 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

gde su obe determinante sa desne strane jednakosti reda $n-1$. Razvijanjem druge determinante sa desne strane jednakosti po prvoj vrsti, imaćemo

$$D_n = 5 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} - 6 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} ,$$

odnosno $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$ ili $D_{n+2} = 5D_{n+1} - 6D_n$. Ako potražimo rešenje u obliku $D_n = \lambda^n$, dobijamo karakterističnu jednačinu

$$\lambda^{n+2} - 5\lambda^{n+1} + 6\lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda^n(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 .$$

Rešenja poslednje jednačine su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$, te je opšte rešenje $D_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$. Kako je $D_1 = 5$ i $D_2 = 19$, dobijamo da je $C_1 = -2$, $C_2 = 3$ i onda je vrednost determinante $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. ■

Teorema 15.3.7 *Rešenje nehomogene diferencne jednačine (15.21) je zbir rešenja homogene jednačine (15.22) i rešenja nehomogene jednačine dobijenog metodom neodređenih koeficijenata.*

Dokaz. Neka je a_n^h opšte rešenje homogene jednačine (15.22), a a_n^p rešenje jednačine (15.21). Tada je $a_n = a_n^h + a_n^p$ opšte rešenje jednačine (15.21), jer je

$$\begin{aligned}
&b_2(a_{n+2}^h + a_{n+2}^p) + b_1(a_{n+1}^h + a_{n+1}^p) + b_0(a_n^h + a_n^p) = g(n)\\
&\Rightarrow (b_2 a_{n+2}^h + b_1 a_{n+1}^h + b_0 a_n^h) + (b_2 a_{n+2}^p + b_1 a_{n+1}^p + b_0 a_n^p) = g(n)\\
&\Rightarrow 0 + g(n) = g(n),
\end{aligned}$$

što je tačno. ∎

Neka je u (15.21) funkcija $g(n)$ oblika

$$g(n) = P_k(n) \cdot c^n, \tag{15.25}$$

gde je $P_k(n)$ polinom k-tog stepena i c konstanta. Tada je opšte partikularno rešenje a_n^p oblika

$$a_n^p = Q_k(n) \cdot n^s \cdot c^n \tag{15.26}$$

gde je $Q_k(n)$ opšti polinom k-tog stepena i c konstanta. Broj s biramo na sledeći način:

- ako je $c \neq \lambda_1$ i $c \neq \lambda_2$, tada je $s = 0$,
- ako je $c = \lambda_1$ ili $c = \lambda_2$, tada je $s = 1$ i
- ako je $c = \lambda_1 = \lambda_2$, tada je $s = 2$.

Primer 15.3.8 Odrediti opšte rešenje diferencne jednačine $16a_{n+2} - 24a_{n+1} + 9a_n = 5$.

Rešenje. Prvo je potrebno rešiti homogenu jednačinu $16a_{n+2} - 24a_{n+1} + 9a_n = 0$. Karakteristična jednačina je

$$16\lambda^{n+2} - 24\lambda^n + 9\lambda^n = 0 \Rightarrow 16\lambda^2 - 24\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}\,.$$

Rešenje homogene jednačine je $a_n^h = C_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + C_2 \cdot n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Funkcija $g(n)$ se u formi (15.25) može zapisati kao $g(n) = 5 \cdot 1^n$, tj. polinom $P_k(n) = 5$, $k = 0$ pošto je konstanta polinom nultog stepena. Dalje je $c = 1$, a kako važi $c \neq \lambda_1$ i $c \neq \lambda_2$, tada je $s = 0$. Partikularno rešenje, na osnovu (15.26), tražimo u obliku

$$a_n^p = A \cdot n^0 \cdot 1^n = A.$$

Uvrštavanjem $a_{n+2}^p = a_{n+1}^p = a_n^p = A$ u $16a_{n+2}^p - 24a_{n+1}^p + 9a_n^p = 5$, dobijamo

$$16A - 24A + 9A = 5 \Rightarrow A = 5 \Rightarrow a_n^p = 5.$$

Opšte rešenje polazne jednačine je

$$a_n = a_n^h + a_n^p = C_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + C_2 \cdot n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 5\,.$$

∎

Primer 15.3.9 Odrediti opšte rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2n + 1$.

Rešenje. Homogeno rešenje dobija se rešavanjem jednačine

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0,$$

iz koje sledi

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2\,.$$

Zaključujemo da je homogeno rešenje oblika

$$a_n^h = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n.$$

Kako je sada $g(n) = 2n + 1 = (2n + 1) \cdot 1^n$, sledi da je $c = 1 = \lambda_1$ u (15.25), te da je $s = 1$ u (15.26), pa se partikularno rešenje traži u obliku

$$a_n^p = (An + B) \cdot n^1 \cdot 1^n = (An + B)n = An^2 + Bn.$$

Uvrštavanjem a_n^p u $a_{n+2}^p - 3a_{n+1}^p + 2a_n^p = 2n + 1$ dobijamo

$$A(n+2)^2 + B(n+2) - 3(A(n+1)^2 + B(n+1)) + 2(An^2 + Bn) = 2n + 1,$$

tj.

$$(-2A)n + (A - B) = 2n + 1 \Rightarrow A = -1,\ B = -2\,.$$

Opšte rešenje je

$$a_n = a_n^h + a_n^p = C_1 + C_2 \cdot 2^n - (n+2)n.$$

■

Primer 15.3.10 Odrediti opšte rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 36 \cdot 3^n$.

Rešenje. Rešenje homogene jednačine $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ je

$$a_n^h = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n$$

jer su $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ rešenja karakteristične jednačine $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. U (15.25) $P_k(n) = 36$ i $c = 3$, tako da je u (15.26) sada $s = 2$ jer je $c = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$ i zbog toga, partikularno rešenje tražimo u obliku

$$a_n^p = A \cdot 3^n \cdot n^2.$$

Uvrštavanjem a_n^p u $a_{n+2}^p - 6a_{n+1}^p + 9a_n^p = 36 \cdot 3^n$, dobijamo $18A = 36$, odakle sledi da je $A = 2$. Opšte rešenje diferencne jednačine je

$$a_n = a_n^h + a_n^p = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n + 2 \cdot n^2 \cdot 3^n.$$

■

Primer 15.3.11 Odrediti opšte rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n = (n + 1)^2$.

Rešenje. Jasno je da je homogeno rešnje

$$a_n^h = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot (-3)^n,$$

a da se partikularno rešenje traži u obliku proizvoljnog polinoma drugog stepena

$$a_n^p = An^2 + Bn + C,$$

jer je $g(n) = (n+1)^2$ polinom drugog stepena. Uvrštavanjem a_n^p u $a_{n+2}^p + 4a_{n+1}^p + 3a_n^p = (n+1)^2$ dobijamo

$$A(n+2)^2 + B(n+2) + C + 4(A(n+1)^2 + B(n+1) + C) + 3(An^2 + Bn + C) = (n+1)^2,$$

odakle sledi

$$8An^2 + (12A + 8B)n + (8A + 6B + 8C) = n^2 + 2n + 1,$$

pa je $A = 1/8$, $B = 1/16$ i $C = -3/64$. Konačno, opšte rešenje je

$$a_n = a_n^h + a_n^p = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot (-3)^n + \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n - \frac{3}{64}\,.$$

■

15.4 Primena diferencnih jednačina u biologiji i fitomedicini

Primer 15.4.1 Neka je populacija bakterija n sati od početka eksperimenta x_n miligrama. Pretpostavimo da je na početku bilo 4.3 miligrama bakterija i da je svakog sata povećanje bakterija iznosilo 25% u odnosu na broj bakterija u prethodnom satu. Naći formulu za broj bakterija u miligramima u satu n i odrediti broj bakterija nakon 25 sati.

Rešenje. Ako je x_n veličina populacije u n-tom satu, onda je $x_{n+1} - x_n$ promena populacije od trenutka n do trenutka $n+1$. Dakle, važiće

$$x_{n+1} - x_n = 0.25\,x_n$$

uz uslov da je $x_0 = 4.3$ mg. Odavde je

$$x_{n+1} = x_n + 0.25\,x_n = 1.25\,x_n\,.$$

Sada za $n = 0, 1, 2, \ldots$ biće

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1.25\,x_0\\
&x_2 = 1.25\,x_1 = (1.25)^2\,x_0\\
&x_3 = 1.25\,x_2 = (1.25)^3\,x_0\\
&x_4 = 1.25\,x_3 = (1.25)^3\,x_1\\
&\vdots\\
&x_n = (1.25)^n\,x_0
\end{aligned}$$

odnosno

$$x_n = (1.25)^n \cdot 4.3\,,$$

te je $x_{25} = (1.25)^{25} \cdot 4.3 = 1138.2$ mg. ■

Primer 15.4.2 Uzgajivač ribe ima 5000 somova u svom fondu. Taj broj se povećava 8% mesečno, dok 300 somova mesečno uzgajivač prodaje. Odrediti populaciju somova P_n nakon n meseci i koliki će biti broj somova nakon 6 meseci?

Rešenje. Neka je $a_0 = 5000$ početni broj somova u fondu. Broj somova $n+1$-om mesecu, a_{n+1}, dobije se tako što se broj somova u n-tom mesecu, a_n, poveća za 8% i umanji za 300. Znači

$$a_{n+1} = a_n \cdot 1.08 - 300, \; n \geq 0.$$

Uvedimo sada smenu $a_n = u_n v_n$. Tada je

$$\begin{aligned} u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n \cdot 1.08 - 300 \; &\Rightarrow \; u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_{n+1} = u_n v_n \cdot 1.08 - u_n v_{n+1} - 300 \\ &\Rightarrow \; v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) = u_n(v_n \cdot 1.08 - v_{n+1}) - 300. \end{aligned} \tag{15.27}$$

Biramo v_n tako da je $v_n \cdot 1.08 - v_{n+1} = 0$, odnosno $v_{n+1} = v_n \cdot 1.08 = v_{n-1} \cdot 1.08^2 = \cdots = v_0 \cdot 1.08^{n+1}$. Uvrštavajući u (15.27), imaćemo

$$v_0 \cdot 1.08^{n+1}(u_{n+1} - u_n) = -300 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{300}{v_0 \cdot 1.08^{n+1}}.$$

Za $n = 0, 1, 2, \ldots, k$, imaćemo

$$\begin{array}{ll} n = 0: & u_1 - u_0 = -\frac{300}{v_0 \cdot 1.08} \\ n = 1: & u_2 - u_1 = -\frac{300}{v_0 \cdot 1.08^2} \\ n = 2: & u_3 - u_2 = -\frac{300}{v_0 \cdot 1.08^3} \\ \vdots & \\ n = k: & u_{k+1} - u_k = -\frac{300}{v_0 \cdot 1.08^{k+1}} \end{array}$$

Sumirajući ove jednakosti, dobijamo

$$u_{k+1} - u_0 = -\frac{300}{v_0} \sum_{s=1}^{k+1} \frac{1}{1.08^s} \Rightarrow u_{k+1} - u_0 = -\frac{300}{v_0} \cdot \frac{1}{1.08} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.08}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{1.08} - 1}.$$

Iz poslednje implikacije sledi

$$u_{k+1} - u_0 = \frac{300}{v_0} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.08}\right)^{k+1} - 1}{0.08} \Rightarrow u_{k+1} = u_0 + \frac{300}{v_0} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.08}\right)^{k+1} - 1}{0.08}.$$

Znači

$$u_{n+1} = u_0 + \frac{300}{v_0} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.08}\right)^{n+1} - 1}{0.08},$$

i sada je

$$\begin{aligned} a_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} &= \left(u_0 + \tfrac{300}{v_0} \cdot \tfrac{\left(\frac{1}{1.08}\right)^{n+1} - 1}{0.08}\right)\left(v_0 \cdot 1.08^{n+1}\right) \\ &= u_0 v_0 \cdot 1.08^{n+1} + \tfrac{300}{0.08} \cdot \left(1 - 1.08^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Kako je $u_0 v_0 = a_0 = 5000$, dobijamo

$$a_{n+1} = 5000 \cdot 1.08^{n+1} + 3750 \cdot \left(1 - 1.08^{n+1}\right) = 1250 \cdot 1.08^{n+1} + 3750,$$

odnosno $a_n = 1250 \cdot 1.08^n + 3750$. Nakon 6 meseci broj somova će biti

$$a_6 = 1250 \cdot 1.08^6 + 3750 = 5733.59,$$

odnosno 5733 somova. ■

Primer 15.4.3 Pretpostavimo da je C_n koncentracija leka u krvotoku u vremenu n. Neka je A koncentracija leka koja se daje nakon svakog vremenskog perioda i neka je k deo leka koji se razgradi nakon svakog vremenskog perioda. Kako izgleda rekurzivni model promene koncentracije leka? Ako je početna koncetracija $C_0 = 120$ μg/ml i $A = 80$ μg/ml i $k = 1/2$, odrediti C_{10}.

Rešenje. Nakon prvog vremenskog perioda, koncentracija leka u krvi biće $C_1 = C_0 + A - k \cdot (C_0 + A) = (1-k)(C_0 + A)$. Nakon drugog vremenskog perioda, koncentracija leka biće $C_2 = (1-k)(C_1 + A)$, itd. Nakon n vremenskih perioda, koncetracija leka biće

$$C_n = (1-k)(C_{n-1} + A),\ n \in \mathbb{N}.$$

Dalje je

$$\begin{array}{rcl} C_n & = & (1-k)((1-k)(C_{n-2} + A) + A) \\ & = & (1-k)^2 C_{n-2} + (1-k)^2 A + (1-k)A \\ \cdots & & \\ & = & (1-k)^n C_0 + A \sum_{s=1}^{n} (1-k)^s \\ & = & (1-k)^n C_0 + A \cdot (1-k) \frac{(1-k)^n - 1}{1-k-1} \\ & = & (1-k)^n C_0 - A \cdot (1-k) \frac{(1-k)^n - 1}{k} \end{array}$$

Ako je $k = 1/2$, tada je

$$C_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n C_0 - A \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_0 - A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + A,$$

odnosno

$$C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (C_0 - A) + A\,.$$

Vidimo da kada $n \to +\infty$, koncentracija leka teži A. Sada je

$$C_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} (120 - 80) + 80 = 80.0391\ \mu\text{g/mL}\,.$$

Do opšteg rešenja se moglo doći i uvođenjem smene za linearne diferencne jednačine prvog reda. ■

Primer 15.4.4 Lek se daje pacijentu svakog dana u isto vreme. Pretpostavimo da je koncentracija leka, nakon date injekcije n-tog dana, jednaka C_n mg/ml. Pre injekcije, samo 30% leka je preostalo od prethodnog dana u krvotoku. Ako dnevna doza povećava koncentraciju za 0.2 mg/ml, odrediti koncentraciju nakon četvrtog dana.

Rešenje. Pre nove doze, koncentracija leka se smanjuje na 30% od prethodnog dana, a to je $0.3C_n$. Sa novom dozom, koncentracija se poveća za 0.2 mg/ml, tako da dobijamo jednačinu

$$C_{n+1} = 0.3\,C_n + 0.2\,.$$

Iz nje dalje sledi

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= 0.3(0.3\,C_{n-1} + 0.2) + 0.2 = 0.3^2\,C_{n-1} + 0.2(0.3 + 1) \\ &= 0.3^2\,(0.3\,C_{n-2} + 0.2) + 0.2(0.3 + 1) = 0.3^3\,C_{n-2} + 0.2(0.3^2 + 0.3 + 1) \\ &\cdots \\ &= 0.3^{n+1}\,C_0 + 0.2(0.3^n + 0.3^{n-1} + \cdots + 0.3 + 1) \\ &= 0.3^{n+1}\,C_0 + 0.2 \cdot \frac{1 - 0.3^{n+1}}{1 - 0.3} = 0.3^{n+1}\,C_0 + \frac{0.2}{0.7} \cdot (1 - 0.3^{n+1}), \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je

$$C_n = 0.3^n\, C_0 + \frac{2}{7} \cdot (1 - 0.3^n)$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Ako uzmemo da je $C_0 = 0$, tada je

$$C_n = \frac{2}{7} \cdot (1 - 0.3^n)$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Odavde sledi

$$C_4 = \frac{2}{7} \cdot (1 - 0.3^4) = 0.2834 \text{ mg/ml}.$$

Prometimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \dfrac{2}{7} \approx 0.2857$ mg/ml ako bi se injekcija davala bez prekida. ■

Primer 15.4.5 Doktor je prepisao da se 100 mg antibiotika u tabletama uzima na svakih osam sati. Pre uzimanja nove doze, 20% leka je preostalo u krvotoku. Ako je Q_n količina antibiotika odmah nakon uzimanja n-te tablete, odrediti Q_n. Kolika je količina leka nakon treće tablete?

Rešenje. Sada je

$$Q_{n+1} = 0.2\, Q_n + 100,$$

pa se za $Q_0 = 0$, sličnim postupkom kao u prethodnom zadatku dobija

$$Q_n = 125(1 - 0.2^n), \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Odavde je

$$Q_3 = 125(1 - 0.2^3) = 125(1 - 0.008) = 124 \text{ mg}.$$

■

15.5 Sistemi diferencnih jednačina i primena - matrični modeli

U ovom poglavlju će isključivo biti akcenat na primeni sistema diferencnih jednačina i formiranje matričnih modela.

Primer 15.5.1 Pretpostavimo da želimo da modelujemo veličinu populacije u kojoj ima i odraslih i mladih jedinki. Svaka odrasla jedinka proizvede dve mlade jedinke u jednom vremenskom koraku, a tri četvrtine mladih preživi i postanu odrasli. Konačno, polovina odraslih preživi od jednog vremenskog koraka do drugog. Ako je y_t broj mladih u vremenu t, a a_t broj odraslih u vremenu t, i ako je $a_0 = 16$ i $y_0 = 0$, odrediti broj odraslih a_6 i mladih jedinki y_6.

Rešenje. Svaka odrasla osoba proizvede dva mlada u jednom vremenskom koraku, tj. $y_{t+1} = 2a_t$. Ako tri četvrtine mladih preživi i postanu odrasli, a polovina odraslih preživi od jednog vremenskog koraka do drugog, tada je broj odraslih jedinki u narednom vremenskom koraku $a_{t+1} = \frac{3}{4}y_t + \frac{1}{2}a_t$. Tako dobijamo sistem diferencnih jednačina

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= 2a_t \\ a_{t+1} &= \tfrac{3}{4}y_t + \tfrac{1}{2}a_t \end{aligned}$$

koji se u matričnom zapisu svodi na

$$\begin{bmatrix} y_{t+1} \\ a_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ a_t \end{bmatrix}.$$

Lako se pokazuje da je

$$\begin{bmatrix} y_{t+1} \\ a_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{t+1} \begin{bmatrix} y_0 \\ a_0 \end{bmatrix}, \tag{15.28}$$

tako da je preostalo da se izračuna

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{t+1}.$$

Karakteristični koreni matrice $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ su $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ i $\lambda_2 = -1$, dok su odgovarajući karakteristični vektori $v^1 = [4 \;\; 3]^T$ i $v^2 = [-2 \;\; 1]^T$, redom, čije je dobijanje objašnjeno u poglavlju 4.4. Na osnovu (4.4) važi

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

odnosno, na osnovu (4.5),

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{t+1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{t+1} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Pošto je

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

sledi

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{t+1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Uvrštavajući u (15.28) dobijamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ a_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ a_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} & -2 \cdot (-1)^{t+1} \\ 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} & (-1)^{t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ a_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} + \frac{3}{5} \cdot (-1)^{t+1} & \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} - \frac{4}{5} \cdot (-1)^{t+1} \\ \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} - \frac{3}{10} \cdot (-1)^{t+1} & \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} + \frac{2}{5} \cdot (-1)^{t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ a_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Za $t = 5$ imaćemo

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_6 \\ a_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^6 + \frac{3}{5}\cdot(-1)^6 & \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^6 - \frac{4}{5}\cdot(-1)^6 \\ \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^6 - \frac{3}{10}\cdot(-1)^6 & \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^6 + \frac{2}{5}\cdot(-1)^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ a_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{165}{32} & \frac{133}{16} \\ \frac{399}{128} & \frac{463}{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{133}{16}\cdot 16 \\ \frac{463}{64}\cdot 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133 \\ \frac{463}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133 \\ 115.75 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Broj mladih je 133, a odraslih skoro 116. ■

Primer 15.5.2 Populacija vilinih konjica zauzima dve bare. Svakoga dana 20% individua iz bare A odleti u baru B i 30% individua iz bare B odleti u baru A. Ako su A_t i B_t brojevi individua u barama A i B, redom, u vremenu t, napisati sistem diferencnih jednačina koji opisuje ovu pojavu. Koliko će biti vilinih konjica za $t = 7$, ako je $A_0 = B_0 = 1000$?

Rešenje. U vremenu $t + 1$ u bari A ostaće 80% jedinki koje su postojale u vremenu t plus 30% jedinki iz bare B. Dakle $A_{t+1} = 0.8A_t + 0.3B_t$. Slično, u vremenu $t + 1$, u bari B biće 70% jedinki iz vremena t koje su tada bile u bari B i još 20% iz bare A. Zaključujemo $B_{t+1} = 0.7B_t + 0.2A_t$. Ovim smo dobili sistem diferencnih jednačina

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= 0.8A_t + 0.3B_t \\ B_{t+1} &= 0.2A_t + 0.7B_t \end{aligned}$$

koji u matričnom zapisu ima sledeći oblik

$$\begin{bmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_t \\ B_t \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$\begin{bmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}^{t+1} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$$

i moramo odrediti koliko je

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}^{t+1}.$$

Prvo, potrebno je odrediti karakteristične korene i vektore matrice $V = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$.

$$0 = |\lambda I - V| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.8 & -0.3 \\ -0.2 & \lambda - 0.7 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.8)(\lambda - 0.7) - 0.06 = \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5$$

odakle dobijamo da je $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 0.5$. Odgovarajući karakteristični vektori su $v^1 = [3\ \ 2]^T$ i $v^2 = [-1\ \ 1]^T$. Imaćemo da je

$$V = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

odnosno

$$V=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ -0.4 & 0.6\end{bmatrix}.$$

Konačno

$$V^{t+1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{t+1} & 0\\ 0 & 0.5^{t+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ -0.4 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6+0.4\cdot 0.5^{t+1} & 0.6-0.6\cdot 0.5^{t+1}\\ 0.4-0.4\cdot 0.5^{t+1} & 0.4+0.6\cdot 0.5^{t+1}\end{bmatrix}$$

Sada je

$$\begin{bmatrix}A_{t+1}\\ B_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6+0.4\cdot 0.5^{t+1} & 0.6-0.6\cdot 0.5^{t+1}\\ 0.4-0.4\cdot 0.5^{t+1} & 0.4+0.6\cdot 0.5^{t+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_0\\ B_0\end{bmatrix},$$

pa je za $t=7$ i date početne uslove

$$\begin{bmatrix}A_8\\ B_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6+0.4\cdot 0.5^8 & 0.6-0.6\cdot 0.5^8\\ 0.4-0.4\cdot 0.5^8 & 0.4+0.6\cdot 0.5^8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1000\\ 1000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1199.22\\ 800.78\end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da u bari A ima skoro 1200 jedinki, a u bari B 800. ■

Primer 15.5.3 U svakoj generaciji 5% individua nosi alel X koji mutira u alel Y. Ako su X_t i Y_t brojevi individua koji nose alele X i Y, redom, u vremenu t, odrediti broj alela za $t=4$ ako je $X_0=100$ i $Y_0=80$.

Rešenje. Dobija se sistem diferencnih jednačina oblika

$$\begin{aligned}X_{t+1} &= 0.95X_t\\ Y_{t+1} &= 0.05X_t + Y_t\end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix}X_{t+1}\\ Y_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.95 & 0\\ 0.05 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_t\\ Y_t\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}0.95 & 0\\ 0.05 & 1\end{bmatrix}^{t+1}\begin{bmatrix}X_0\\ Y_0\end{bmatrix}.$$

Pošto su karakteristični koreni matrice $\begin{bmatrix}0.95 & 0\\ 0.05 & 1\end{bmatrix}$ jednaki $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=0.95$, a odgovarajući karakteristični vektori $v^1=[0\ \ 1]^T$ i $v^2=[-1\ \ 1]^T$, redom, tada je

$$\begin{bmatrix}0.95 & 0\\ 0.05 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix}0.95 & 0\\ 0.05 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je

$$\begin{bmatrix}0.95 & 0\\ 0.05 & 1\end{bmatrix}^{t+1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{t+1} & 0\\ 0 & 0.95^{t+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{19}{20}\right)^{t+1} & 0\\ 1-\left(\frac{19}{20}\right)^{t+1} & 1\end{bmatrix}.$$

Sada je

$$\begin{bmatrix}X_{t+1}\\ Y_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{19}{20}\right)^{t+1} & 0\\ 1-\left(\frac{19}{20}\right)^{t+1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_0\\ Y_0\end{bmatrix},$$

pa je za $t = 4$ i date početne uslove

$$\begin{bmatrix} X_5 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{19}{20}\right)^5 & 0 \\ 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.38 \\ 102.62 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je broj jedinki sa alelom X 77, a sa alelom Y skoro 103. ■

Primer 15.5.4 Matrični modeli se često koriste za modeliranje veličine starosno strukturisanih populacija. Razmotrićemo pojednostavljeni model za populaciju lososa. Jedinke se izlegu iz jaja u rekama na zapadnoj obali Severne Amerike i migriraju u jezero pa u okean. Kada napuni tri godine, losos iz mora migrira nazad u jezero, razmnožavaju se i umiru. Neka su $n_{1,t}$, $n_{2,t}$ i $n_{3,t}$ brojevi jedinki u svakoj starosnoj klasi u vremenu t koje se meri u godinama. Neka samo 10% jedinki preživi i napusti reku i stigne do jezera. Iz jezera 50% jedinki stigne do mora. Sve jedinke u moru nakon 3 godine se vraćaju u reku i svaka da 10 novih jedinki pre smrti. Napraviti matematički model.

Rešenje. Model bi bio

$$\begin{aligned} n_{1,t+1} &= 10\, n_{3,t} \\ n_{2,t+1} &= 0.1\, n_{1,t} \\ n_{3,t+1} &= 0.5\, n_{2,t} \end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} n_{1,t+1} \\ n_{2,t+1} \\ n_{3,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1,t} \\ n_{2,t} \\ n_{3,t} \end{bmatrix}.$$

■

15.6 Zadaci za vežbu

1. Naći prvih pet članova niza $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Naći prvih pet članova niza $a_n = \dfrac{3^n}{1+2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Naći prvih pet članova niza $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Naći prvih pet članova niza $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Odrediti opšti član niza ako je dato nekoliko njegovih članova: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

6. Odrediti opšti član niza ako je dato nekoliko njegovih članova: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

7. Odrediti opšti član niza ako je dato nekoliko njegovih članova: $-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots$

8. Odrediti opšti član niza ako je dato nekoliko njegovih članova: $5, 8, 11, 14, 17, \ldots$

9. Odrediti opšti član niza ako je dato nekoliko njegovih članova: $\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots$

10. Odrediti opšti član niza ako je dato nekoliko njegovih članova: 1, 0, −1, 0, 1, 0, −1, 0, ...

11. Odrediti prvih šest članova rekurentnog niza: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n - 3$, $n \in \mathbb{N}$.

12. Odrediti prvih devet članova rekurentnog niza: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_{n+2} = -a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} - 5a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Odrediti matrice A^n ako je: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

15. Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$.

16. Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$.

17. Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 8$.

18. Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = (24n + 48) \cdot 2^n$.

19. Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} + a_n = 0$.

20. Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} + a_n = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

21. Bakterije se često uzgajaju na agarnim pločama i stvaraju kružne kolonije. Područje kolonije proporcionalno je broju bakterija koje se u njoj nalaze. Agar (želatinozna masa dobijena iz crvenih algi) je resurs koji bakterije koriste za razmnožavanje, tako da samo one bakterije na rubu kolonije mogu stvoriti novo potomstvo. Zbog toga se populacija menja prema jednačini $N_{t+1} = N_t + I$, gde je I unos novih jedinki i proporcionalan je obimu kolonije, s konstantom proporcionalnosti R. Odrediti rekurzivnu formulu za veličinu populacije.

22. Pacijent dobija injekcije na svakih 12 sati. Pre nove injekcije, nivo leka je 10%, a nova doza povećava koncentraciju leka za 1.5 mg/ml. Odrediti C_n, odnosno koncentraciju leka nakon n-te doze leka.

23. Nakon primljene D doze insulina, koncentracija insulina u telu pacijenta opada eksponencijalno i može se zapisati kao $D\,e^{-a\,t}$ gde je t vreme u satima, a a neka pozitivna konstatnta. Ako se doza D daje na svakih T sati, napisati formulu za koncentraciju insulina koja se nalazi u telu pacijenta pre davanja n-te doze.

24. Lek uzet oralno iz stomaka odlazi u krvotok. Neka je s_t količina leka u stomaku u vremenu t i b_t količina koja je apsorbovana u krvotok. U svakom vremenskom koraku, 50% leka se apsorbuje iz želuca u krvotok i 80% leka u krvotoku se metaboliše. Ako je $s_0 = 2$ i $b_0 = 1$, odrediti količinu leka u stomaku i krvotoku za $t = 5$.

25. Zdravlje svakog pojedinca se može iskazati kao jedno od tri stanja: (1) zdrav, (2) rani stadijum prehlade, ili (3) prehlada u kasnoj fazi. Svake godine 0.2% od zdravih osoba razvijaju prehladu u ranoj fazi, a ostali ostaju zdravi. Isto tako, 65% osoba u ranoj fazi prehlade se oporavi kroz lečenje, a 35% razvije prehladu u kasnoj fazi. Konačno, 10% pojedinaca se od kasne faze prehlade vraća u ranu fazu prehlade po simptomima, dok ostale ostaju u kasnoj fazi. Ako su h_t, e_t i l_t brojevi osoba sa navedenim stanjima, redom, u vremenu t, koliki je broj osoba u svakom od stanja za $t = 7$ ako je $h_0 = e_0 = l_0 = 400$?

Literatura

[1] Agarwal P. Ravi, Sen K. Suman, *Creators of Mathematical and Computational Sciences*, Springer International Publishing, Switzerland, 2014.

[2] Bell T. Eric, *Veliki matematičari*, Nakladni zavod Znanje, Zagreb, Hrvatska, 1972.

[3] Berman N. G, *Zbirka zadataka iz matematičke analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[4] Dedović Nebojša, *Matematika*, Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad, Srbija, 2019.

[5] Došenović Tatjana, Takači Aleksandar, *Matematika I za studente Tehnološkog fakulteta*, Univerzitet u Novom Sadu, Tehnološki fakultet, Novi Sad, Srbija, 2013.

[6] Došenović Tatjana, Takači Aleksandar, Rakić Dušan, Brdar Mirjana, *Zbirka zadataka iz Matematike 1 za studente Tehnološkog fakulteta*, Univerzitet u Novom Sadu, Tehnološki fakultet, Novi Sad, Srbija, 2008.

[7] Đorđević B. Gospava, Đorđević S. Snežana, *Diferencne jednačine*, Matematika i informatika 1, (1-2), 15-28, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Srbija, 2008.

[8] Hadžić Olga, Takači Đurđica, *Matematika: za studente prirodnih nauka*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, Srbija, 1998.

[9] Kline Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times - Volume 1*, Oxford University Press, Inc. 198 Madison Avenue, New York, New York, USA, 1990.

[10] Konjik Sanja, Dedović Nebojša, *Matematika - zbirka zadataka za studente Poljoprivrednog fakulteta*, Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad, Srbija, 2011.

[11] Matić Kekić Snežana, *Matematika 1 za studente tehničkih smerova Poljoprivrednog fakulteta*, Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad, Srbija, 2011.

[12] Miličić M. Pavle, Uščumlić P. Momčilo, *Zbirka zadataka iz više matematike 1*, IP Nauka, Beograd, Srbija, 1996.

[13] Milić Svetozar, *Elementi algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, Novi Sad, Srbija, 1984.

[14] Petković S. Miodrag, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 2009.

[15] Snieder Roel, *A Guide Tour of Mathematical Physics*, Samizdat Press, Utrecht University, Utrecht, Netherands, 1994.

[16] Stewart James, *Calculus: Concepts and Contexts*, Fourth Edition, Brooks/Cole, Cengage learning, 2010.

[17] Stewart James, Day Troy, *Biocalculus - Calculus for the Life Sciences*, Cengage learning, Boston, USA, 2015.

[18] William F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Pearson Education, San Antonio, Texax, USA, 2009.

Indeks