

Polinomi

1. Svesti slične članove sledećih polinoma:

a) $3x^3 - 2x^2 + 5x - a + 4x^2 - 5x + 2a - 3x$

Rešenje. $3x^3 - 2x^2 + 5x - a + 4x^2 - 5x + 2a - 3x = 3x^3 + 2x^2 - 3x + a$

b) $3x^a + 6a^x - x^a + (-5a^x) - 2x^a$

Rešenje. a^x

v) $12xy^2 + 14x^2y - x^2y^2 + xy^2 - 15x^2y + 2x^2y^2$

Rešenje. $13xy^2 - x^2y + x^2y^2$

g) $6x - 7a^2 + 3x^2 - 3x + 5a^2 - x^2$

Rešenje. $2x^2 + 3x - 2a^2$

2. Izračunati zbir i razliku sledećih polinoma:

a) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x + 9$, $Q(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 7$

Rešenje. Saberimo prvo dva polinoma:

$$P(x) + Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x + 9 + x^4 + 5x^3 - x^2 - 7 = x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 5x + 2.$$

A sada ih oduzmimo:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= 2x^3 - 7x^2 + 5x + 9 - (x^4 + 5x^3 - x^2 - 7) \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 5x + 9 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 7 \\ &= -x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x + 16. \end{aligned}$$

b) $P(x) = -4x^2 + 9x - 1$, $Q(x) = 2x^2 - 6x + 13$

Rešenje.

$$P(x) + Q(x) = -2x^2 + 3x + 12.$$

$$P(x) - Q(x) = -6x^2 + 15x - 14.$$

v) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2$, $Q(x) = -5x^4 + 2x^3 - 8x^2 + x + 4$

Rešenje.

$$P(x) + Q(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 5x^2 + x + 2.$$

$$P(x) - Q(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 11x^2 - x - 6.$$

3. Odrediti $P(x) \cdot Q(x)$:

a) $P(x) = x^2 - 2x + 5$, $Q(x) = x - 3$

Rešenje.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^2 - 2x + 5)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + 6x + 5x - 15 \\ &= x^3 - 5x^2 + 11x - 15. \end{aligned}$$

b) $P(x) = x^3 - 3x + 2$, $Q(x) = x^4 + x^3 + 4x - 1$

Rešenje.

$$P(x) \cdot Q(x) = x^7 + x^6 - 3x^5 + 3x^4 + x^3 - 12x^2 + 11x - 2$$

v) $P(x) = 7x^3 - 4x^2 + 8x - 6$, $Q(x) = 5x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 8$

Rešenje.

$$P(x) \cdot Q(x) = 35x^7 - 6x^6 + 25x^5 + 11x^4 + 24x^3 - 2x^2 + 46x - 48$$

4. Odrediti $P(x) : Q(x)$ ako su dati polinomi:

a) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$, $Q(x) = x + 2$

Rešenje. Podelimo polinome $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$ i $Q(x) = x + 2$.

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x + 10) : (x + 2) = x^2 - 3x + 5 \\ \hline - \\ \hline x^3 + 2x^2 \\ \hline - 3x^2 - x + 10 \\ \hline - \\ \hline - 3x^2 - 6x \\ \hline 5x + 10 \\ \hline - \\ \hline 5x + 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

pa je tada

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x + 2} = x^2 - 3x + 5 + \frac{0}{x + 2} = x^2 - 3x + 5.$$

b) $P(x) = x^5 - 7x^4 + 12x^3 - 10x^2 + x - 3$, $Q(x) = x^4 + x^3 + 4x - 1$

Rešenje.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x - 8 + \frac{20x^3 - 14x^2 + 34x - 11}{x^4 + x^3 + 4x - 1}$$

v) $P(x) = x^2 - 3x + 7$, $Q(x) = x - 1$

Rešenje.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x - 2 + \frac{5}{x - 1}$$

5. Rastaviti na činioce sledeće polinome:

a) $P(x) = 20x^3 - 5xy^2z^4$

Rešenje.

$$P(x) = 5x(4x^2 - y^2z^4) = 5x((2x)^2 - (yz^2)^2) = 5x(2x - yz^2)(2x + yz^2)$$

b) $P(x) = x^3y - 125y^4$

Rešenje. $P(x) = y(x - 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2)$

v) $P(x) = x^2 - x - 6$

Rešenje. $P(x) = (x + 2)(x - 3)$

g) $P(x) = x^2 + 12x + 35$

Rešenje. $P(x) = (x + 5)(x + 7)$

d) $P(x) = x^2 + 6x + 8$

Rešenje. $P(x) = (x + 2)(x + 4)$

đ) $P(x) = 9x^2 - 6x(y - z) + (y - z)^2$

Rešenje. $P(x) = (3x - (y - z))^2$

e) $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Rešenje. $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

ž) $P(x) = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

Rešenje. $P(x) = (a + 2b)^3$

6. Rastaviti na činioce sledeće polinome:

a) $P(x) = m^2x - n^2x + m^2y - n^2y$

Rešenje.

$$P(x) = x(m^2 - n^2) + y(m^2 - n^2) = (m^2 - n^2)(x + y) = (m - n)(m + n)(x + y)$$

b) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x$

Rešenje. $P(x) = x(x + 3)(2x - 1)$

v) $P(x) = 12x^3 + 4x^2 - x$

Rešenje. $P(x) = x(2x + 1)(6x - 1)$

g) $P(x) = x^5 - x$

Rešenje. $P(x) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

d) $P(x) = (2x + 1)(x + 1) + 4x^2 - 1 + (2x + 1)^2$

Rešenje. $P(x) = (2x + 1)(5x + 1)$

d) $P(x) = (x - a)^2 + b^2 - 2b(x - a) - a^2$

Rešenje. $P(x) = (b - x)(2a + b - x)$

e) $P(x) = ax^3y^3 - 3ax^2y^2 + 3axy - a$

Rešenje. $P(x) = a(xy - 1)^3$

ž) $P(x) = 125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$

Rešenje. $P(x) = (5a + 2b)^3$

z) $P(x) = x^2 - 4x + 4 - 4y^2 + 12yz - 9z^2$

Rešenje. $P(x) = (x - 2 + 2y - 3z)(x - 2 - 2y + 3z)$

i) $P(x) = a^3 + 10a^4 + 25a^5$

Rešenje. $P(x) = a^3(1 + 5a)^2$

Skraćivanje i operacije sa razlomcima

7. Izračunati vrednost izraza:

a) $\left(-2\frac{1}{2}\right) + 5\frac{3}{4} - 3\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 6\frac{1}{2}$

Rešenje.

$$-\frac{5}{2} + \frac{23}{4} - \frac{15}{4} + \frac{1}{2} - \frac{13}{2} = -\frac{17}{2} + \frac{8}{4} = \frac{-34 + 8}{4} = -\frac{26}{4} = -\frac{13}{2}$$

b) $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

Rešenje. 32/45

v) $\frac{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 1\frac{1}{2} - 4 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2}{2 \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$

Rešenje. 17/7

g) $\frac{1}{7} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}$

Rešenje. 9/14

d) $3 : \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5} : 2\right) + 5 \cdot \left[0, 4 - \frac{2}{5} : (-2)\right] + (-2) : (-1)$

Rešenje. 2/5

8. Skratiti razlomke i zapisati uslove pod kojima dobijene jednakosti važe:

a) $\frac{(x+1)(x^2-4)}{(x+2)(x^2-1)}$

Rešenje. $x \neq \pm 1, x \neq -2$

$$\frac{(x+1)(x^2-4)}{(x+2)(x^2-1)} = \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x-1}$$

b) $\frac{a^2 - 8a + 16}{b(a^2 - 4a)}$

Rešenje. $a \neq 0, a \neq 4, b \neq 0$

$$\frac{a^2 - 8a + 16}{b(a^2 - 4a)} = \frac{a-4}{ab}$$

$$\text{v) } \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

Rešenje. $x \neq \pm 3$

$$x + \frac{9}{3+x}$$

$$\text{g) } \frac{a^2 + ab + a + b}{a^2 + 2ab + b^2}$$

Rešenje. $a \neq -b$

$$\frac{a+1}{a+b}$$

$$\text{d) } \frac{ab + ac - c^2 - bc}{bc + c^2 + 2ab + 2ac}$$

Rešenje. $b \neq -c, c \neq -2a$

$$\frac{a-c}{c+2a}$$

$$\text{đ) } \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - 4x - 21}$$

Rešenje. $x \neq -3, x \neq 7$

$$\frac{x+5}{x-7}$$

$$\text{e) } \frac{a^6 + a^4 - a^2 - 1}{a^8 - a^6 + a^2 - 1}$$

Rešenje. $a \neq \pm 1$

$$\frac{a^2 + 1}{a^4 - a^2 + 1}$$

$$\check{z}) \frac{(x^2 + xy)^2 - (xy + y^2)^2}{(x^2 - xy)^2 - (xy - y^2)^2}$$

Rešenje. $x \neq \pm y$

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$$

$$\text{z) } \frac{12x^3y^2 - 12x^2y^3 + 3xy^4}{8x^4y - 2x^2y^3}$$

Rešenje. $x \neq \pm y, x \neq 0, y \neq 0$

$$\frac{3y(2x-y)^2}{2x(x^2-y^2)}$$

$$\text{i) } \frac{4a^2 - 20a + 25}{8a^3 - 60a^2 + 150a - 125}$$

Rešenje. $a \neq 5/2$

$$\frac{1}{2a-5}$$

9. Izvršiti naznačene operacije sa razlomcima:

a) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2y}{x}$

Rešenje.

$$\begin{aligned}\frac{x^2(x+y) + xy(x-y) - 2y(x-y)(x+y)}{x(x-y)(x+y)} &= \frac{x^3 + x^2y + x^2y - xy^2 - 2x^2y + 2y^3}{x(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^3 - xy^2 + 2y^3}{x(x-y)(x+y)}\end{aligned}$$

b) $\frac{x+2y}{x^3+y^3} - \frac{x-y}{x^2y-x\cdot y^2+y^3} - \frac{1}{x\cdot y+x^2}$

Rešenje. $-\frac{x^3 - 4xy^2 + y^3}{xy(x^3 + y^3)}$

v) $\frac{16x-x^2}{x^2-4} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2}$

Rešenje. $\frac{1}{x+2}$

g) $\frac{4x^2}{10xy-25y^2} - \frac{4x^2+25y^2}{10xy} - \frac{25y^2}{4x^2-10xy}$

Rešenje. 1

d) $\frac{1}{a^2-b^2} + \frac{1}{a^2-2ab+b^2}$

Rešenje. $\frac{2a}{(a-b)^2(a+b)}$

đ) $\frac{x^2+7x-30}{x^2-x-12} \cdot \frac{24-2x-x^2}{30-7x-x^2}$

Rešenje. $\frac{x+6}{x+3}$

e) $\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{b}\right) \cdot \frac{27}{4b^2-9a^2} : \frac{1}{2b+3a}$

Rešenje. $\frac{27}{ab}$

ž) $\left(\frac{x^3}{y^3} + 1\right) : \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1\right)$

Rešenje. $\frac{x+y}{y}$

z) $\frac{3-y}{3+y} : \frac{y^3-27}{y^3+27}$

Rešenje. $-\frac{y^2-3y+9}{y^2+3y+9}$

$$\text{i) } \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1 \right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$\text{Rešenje. } \frac{a+b}{a-b}$$

$$\text{j) } \frac{x^2 - 10x + 25}{2x+2} \cdot \frac{3x-15}{x^2+2x+1}$$

$$\text{Rešenje. } \frac{1}{6}(x-5)(x+1)$$

$$\text{k) } \left(\frac{1}{a-b} - \frac{a+b}{a^2-ab} + \frac{a-2b}{2ab} \right) : \frac{a-3b}{2ab-2b^2}$$

$$\text{Rešenje. } 1$$

Procentni račun

- 10.** Na 38000 dinara banka uzima 8% provizije. Koliko dinara provizije uzima banka?

Rešenje. 8% od 38000 je

$$\frac{8}{100} \cdot 38000 = 3040.$$

- 11.** Koliko je poskupela roba ako je cena porasla sa 1400 na 1800 dinara?

Rešenje. Ako podelimo 1800 sa 1400 dobijamo 1.2857. Tada je poskupljenje

$$(1.2857 - 1) \cdot 100 = 28.57\%.$$

- 12.** Plata direktora preduzeća iznosi 100000 dinara. Za koliko dinara mu je manja plata ako mora 15% od plate dati za socijalno osiguranje i 5% za doprinose?

Rešenje. Ukupno mora da izdvoji 20% od 100000 dinara pa je to

$$\frac{20}{100} \cdot 100000 = 20000 \text{ dinara.}$$

- 13.** Cena čilima je snižena za 20%, pa je povećana za 20%. Za koliko procenata se promenila prvobitna cena?

Rešenje. Ako sa x obeležimo početnu cenu čilima, tada je nova cena

$$x \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = x \cdot 1.2 \cdot 0.8 = x \cdot 0.96.$$

Dakle x se smanjilo za $(1 - 0.96) \cdot 100 = 4\%$.

- 14.** Posle sniženja od 40% cena robe iznosi 360 dinara. Za koliko procenata treba povećati sadašnju cenu da bi se roba prodavala po ceni pre sniženja.

Rešenje. Obeležimo sa x cenu pre sniženja. Tada je

$$x \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 360 \Rightarrow x \cdot 0.6 = 360 \Rightarrow x = 600.$$

Sadašnja cena je 360, a početna je 600. Ako 600 podelimo sa 360, dobijamo 1.667 pa je procenat povećanja $(1.667 - 1) \cdot 100 = 66.7\%$.

- 15.** Cena robe je smanjena za 25%. Za koliko procenata treba sniziti novu cenu da bi cena na kraju bila duplo jeftinija od početne cene?

Rešenje. Neka je x početna cena robe. Nakon sniženja od 25%, nova cena je $x \cdot 0.75$. Sada tu cenu treba smanjiti za $p\%$ da bismo na kraju imali $0.5 \cdot x$. Dakle

$$x \cdot 0.75 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 0.5 \cdot x \Rightarrow 1 - \frac{p}{100} = \frac{2}{3} \Rightarrow p = 33.3\%.$$

16. Cena neke robe je prvo poskupela za 15%, a zatim od nove cene još za 30%. Koliko iznosi poskupljenje u odnosu na prvobitnu cenu?

Rešenje. Neka je x početna cena robe. Nakon dva poskupljenja imaćemo

$$x \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{30}{100}\right) = x \cdot 1.15 \cdot 1.3 = x \cdot 1.495.$$

Dakle, ukupno povećanje je $(1.495 - 1) \cdot 100 = 49.5\%$.

17. Na prolećnom sniženju, cena knjige je snižena tri puta: prvo za 20%, zatim još za 20%, pa još jednom za 20% (svaki put od trenutne cene). Koliko je ukupno sniženje cene knjige?

Rešenje. Ako je x početna cena, tada je

$$x \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = x \cdot 0.8^3 = x \cdot 0.512.$$

Ukupno sniženje je $(1 - 0.512) \cdot 100 = 48.8\%$.

18. Ako jednu stranicu pravougaona njive povećamo za 8%, a drugu smanjimo za 3%, za koliko procenata će se promeniti površina njive?

Rešenje. Neka je jedna stranica pravougaone njive obeležena sa a , a druga sa b . Tada je njena površina $P_1 = a \cdot b$. Ako stranicu a povećamo za 8%, nova dužina stranice je $a \cdot (1+8/100) = a \cdot 1.08$. Ako sada smanjimo drugu stranicu za 3%, nova dužina druge stranice je $b \cdot (1 - 3/100) = b \cdot 0.97$. Površina tako dobijene njive je

$$P_2 = (a \cdot 1.08) \cdot (b \cdot 0.97) = a \cdot b \cdot 1.0476 = P_1 \cdot 1.0476,$$

a to znači da je P_1 povećano za $(1.0476 - 1) \cdot 100 = 4.76\%$.

19. Bankar je prebacio normu za 12% obradivši ukupno 280 zahteva za kredit. Za koliko procenata je normu prebacio drugi bankar koji je u istom vremenskom periodu obradio 310 zahteva?

Rešenje. Ako sa n obeležimo normu, tada je

$$n \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 280 \Rightarrow n = \frac{280}{1.12} = 250.$$

20. Povećati 15000 za 250%, a zatim smanjiti za 75%.

Rešenje.

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) = 15000 \cdot 3.5 \cdot 0.25 = 13125.$$

Proporcionalnost veličina i primene

21. Odrediti x iz proporcije:

$$a) 4\frac{4}{5} : \left(6\frac{3}{4} \cdot x\right) = 9\frac{1}{6} : 51\frac{9}{6}$$

Rešenje.

$$\frac{24}{5} : \left(\frac{27}{4} \cdot x\right) = \frac{55}{6} : \frac{315}{6} \Rightarrow \frac{8}{5} : \left(\frac{9}{4} \cdot x\right) = 11 : 63 \Rightarrow \frac{8}{5} \cdot 7 = \frac{11}{4} \cdot x \Rightarrow x = \frac{224}{55}$$

$$b) (0.4 \cdot x) : 0.35 = 0.72 : 0.07$$

Rešenje. $x = 9$

$$v) 0.5 : 2\frac{3}{4} = 2\frac{2}{3} : x$$

Rešenje. $x = \frac{44}{3}$

$$g) (a+b) : (a-b) = x : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Rešenje. $x = \frac{a+b}{ab}$

$$d) (x+2a) : x = (x+b) : (x-b)$$

Rešenje. $x = \frac{ab}{a-b}$

$$d) \left(a + \frac{ab}{a-b}\right) : x = a^3b : \left(b - \frac{ab}{a+b}\right)$$

Rešenje. $x = \frac{b}{a(a^2-b^2)}$

22. Iz jednog bureta napunjeno je 160 boca ulja od $3/4$ litara. Koliko će se boca napuniti iz istog bureta, ako one sadrže 0.8 litara?

Rešenje. Ako pomnožimo broj boca ulja i zapreminu boce dobijamo $160 \cdot 3/4 = 120$ litara ulja. Ako to sada želimo da sipamo u boce od 0.8 litara, potreban broj takvih boca je $120/0.8 = 150$.

23. Za 12 litara vina plaćeno je 1560 dinara. Koliko se litara vina može kupiti za 6500 dinara?

Rešenje. Litra ulja je tada $1560/12 = 130$ dinara. Za 6500 dinara možemo kupiti $6500/130 = 50$ litara vina.

24. Jedan posao tri radnika obave za 36 dana. Koliko je radnika potrebno da urade taj isti posao za 9 dana?

Rešenje. Pošto se broj radnih dana smanjio 4 puta, potrebno je povećati broj radnika za 4 puta. Potreban broj radnika je 12.

25. Od 100 kg brašna ispeče se 4000 komada kifli od 30 g. Koliko će se kifli od 50 g dobiti od 650 kg brašna?

Rešenje. Na jednu kiflu od 30 g potroši se $100/4000 = 0.025$ kg, odnosno 25 g brašna. Ako je kifla teška 50 g, tada je potrebna količina brašna $25 \cdot 50/30 = 41,6$ grama. Ukupan broj kifli je $650000/41,6 = 15600$ komada.

26. Mačka i po uhvati miša i po za dan i po. Koliko miševa uhvati pet mačaka za šest dana?

Rešenje. 20 miševa.

27. Cena jednog proizvoda podignuta je za 10%, a zatim snižena za 10%. Za koliko procenata se promenila cena u odnosu na prvobitnu?

Rešenje. Opala je za 1%.

28. Grad je uništio 75% sadnica u jednom rasadniku i to iznosi 120 sadnica. Koliko je sadnica bilo u tom rasadniku?

Rešenje. Bilo je 160 sadnica.

29. Imamo dva rastvora kiselina. Jeden (x) je od 36%, a drugi (y) od 96%. Po koliko litara treba da se uzme od svakog rastvora da se dobije 120 litara novog rastvora od 80%?

Rešenje. Tada je $x : y = (96 - 80) : (80 - 36)$, pa je $x = 16K$ i $y = 44K$. Pošto je $x + y = 120$, sledi da je $K = 2$. Dakle $x = 32$ i $y = 88$ litara.

30. Uglovi trougla se odnose kao $2 : 3 : 4$. Koliki je najveći ugao?

Rešenje. Neka su uglovi trougla α , β i γ . Tada je $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$, te je $\alpha = 2K$, $\beta = 3K$ i $\gamma = 4K$. Kako je $\alpha + \beta + \gamma = 9K = 180^\circ$ sledi da je $K = 20$, pa je $\gamma = 80^\circ$ najveći ugao.

31. 16 radnika mogu da urade jedan nasip za 15 dana. Posle 4 dana, razbole se dva radnika. Za koliko dana će, zbog toga, zakasniti izgradnja nasipa?

Rešenje. Posle 4 dana ostalo je da 16 radnika rade još 11 dana. Kako se broj radnika smanjio na 14, broj dana da se uradi posao se povećava na 12,57. Dakle, izgrada nasipa će kasniti 1,57 dana.

32. Jeden brod može da stigne do morske obale za 8 dana ako prelazi dnevno 168 morskih milja. Koliko morskih milja mora da prelazi dnevno da bi na obalu stigao jedan dan ranije?

Rešenje. 192 morske milje.

Linearne jednačine sa jednom nepoznatom

33. Rešiti jednačine:

a) $2(7 - 2x) - 4(x + 5) - 16 = 3(x + 1) - 9$

Rešenje.

$$14 - 4x - 4x - 20 - 16 = 3x + 3 - 9 \Rightarrow -8x - 22 = 3x - 6 \Rightarrow -11x = 16 \Rightarrow x = -\frac{16}{11}$$

b) $3.2x - 6.5 = 4.9x - 12.4$

Rešenje. $x = 59/17$

v) $7 - 2x - \frac{1 - 3x}{7} = 2 - \frac{2x - 1}{3}$

Rešenje. $x = 109/47$

g) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{5x + 2}{12} = \frac{x - 3}{4} + 1$

Rešenje. $x \in \{\}$

d) $\frac{4x - 1}{3} = \frac{4x - 8}{6} + 1$

Rešenje. $x = 0$

đ) $8 - 4x - \frac{2 + 3x}{6} = 3 - \frac{10x + 5}{3}$

Rešenje. $x = 38/7$

e) $\frac{x}{x + 2} - \frac{5}{x + 3} = \frac{10x}{x^2 + 5x + 6} + \frac{2}{x + 2} + \frac{x}{x + 3}$

Rešenje. $x = -1$

ž) $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x + 3} + \frac{4}{x^2 + 2x - 3} = 0$

Rešenje. $x = -3$ nije rešenje jer $x \neq -3$ i $x \neq 1$

z) $\frac{x - 4}{x + 4} + \frac{x + 5}{x - 5} = \frac{2x(x + 5)}{x^2 - x - 20}$

Rešenje. $x = 4$

$$\text{i)} \frac{\frac{1}{x+5} - \frac{2}{x-5}}{\frac{3}{x-5} + \frac{4}{x+5}} = -\frac{2}{3}$$

Rešenje. $x = 5$ nije rešenje jer mora važiti $x \neq \pm 5$

$$\text{j)} (2x-1)^2 + (x+7)^2 = 5x^2 - 9x + 1$$

Rešenje. $x = -49/19$

$$\text{k)} (x+2)^2 - (x-3)^2 + (x+4)^2 - (x+1)^2 = 0$$

Rešenje. $x = -5/8$

34. Za koje vrednosti parametra m su sledeće jednačine moguće:

$$\text{a)} mx - 3m = 1 + 5x$$

Rešenje. Iz jednačine sledi

$$mx - 5x = 1 + 3m \Rightarrow x(m-5) = 3m + 1 \Rightarrow x = \frac{3m+1}{m-5}$$

za $m \neq 5$.

$$\text{b)} mx + x = 3m + 2 - x$$

Rešenje. $m \neq -2$

$$\text{v)} 4mx - 7 = m + 3x$$

Rešenje. $m \neq 3/4$

35. Rešiti po x i diskutovati sledeće jednačine:

$$\text{a)} \frac{x-2a}{x+2a} = \frac{x-a}{x+7a}$$

Rešenje. Za $x \neq -2a$ i $x \neq -7a$ imaćemo

$$(x-2a)(x+7a) = (x-a)(x+2a) \Rightarrow 4ax = 12a^2 \Rightarrow x = 3a$$

za $a \neq 0$. Za $a = 0$ dobijamo $1 = 1$ pa tada jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, tj. $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{b)} \frac{x-6a}{x+6a} + \frac{x+6a}{x-6a} = \frac{2x(x+4a)}{x^2 - 36a^2}$$

Rešenje. Za $x \neq \pm 6a$ i $x \neq 0$ je $x = 9a$. Za $a = 0$ imaćemo da je $2 = 2$ pa tada jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, tj. $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{v)} \frac{a+x}{ax} = \frac{1}{a} + \frac{a}{a+x}$$

Rešenje. Za $a = 1$ jednačina nema rešenja. Za $a \neq 0$ i $a \neq 1$ rešenje je $x = a/(a-1)$.

$$\text{g)} \frac{1}{x^2 - 4ax + 4a^2} + \frac{a}{x-2a} = 0$$

Rešenje. Za $a = 0$ jednačina nema rešenja. Za $a \neq 0$, rešenje je $x = (2a-1)/a$.

Linearna funkcija

36. Data je linerarna funkcija $y = 2x - 4$. Za koliko se poveća vrednost od y kad vrednost x poraste:

- a) od -1 do 1

Rešenje. Za $x = -1$, $y = -6$, dok je za $x = 1$, $y = -2$. Dakle y je poraslo za 4 .

- b) od 1 do 2

Rešenje. y je poraslo za 2

- v) od 5 do 6

Rešenje. y je poraslo za 2

37. Odrediti vrednost parametra a ako je poznato da grafik funkcije $y = ax + 2$ prolazi kroz tačku $A(-7, -12)$.

Rešenje.

$$-12 = -7a + 2 \Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = 2$$

38. Odrediti vrednost parametra b ako je poznato da grafik funkcije $y = -3x + b$ prolazi kroz tačku $A(-2, -4)$.

Rešenje. $b = -10$

39. U funkcijama $y = (a - 3)x + (a - 2)$ i $y = (2a + 1)x - (3a - 1)$ odrediti parametar a tako da grafici budu paralelni.

Rešenje.

$$a - 3 = 2a + 1 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

40. U funkciji $y = (2m - 3)x + m - 1$ odrediti parametar m tako da grafik funkcije sa x -osom gradi:

- a) oštar ugao

Rešenje. $2m - 3 > 0$ pa je $m > 3/2$

- b) ugao od 0°

Rešenje. $2m - 3 = 0$ pa je $m = 3/2$

- v) tup ugao

Rešenje. $2m - 3 < 0$ pa je $m < 3/2$

41. Odrediti parametar k tako da sledeće funkcije budu rastuće:

a) $y = \frac{3k-1}{k-2}x + 2k - 1$

Rešenje.

$$\frac{3k-1}{k-2} > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, 1/3) \cup (2, +\infty)$$

b) $y = \frac{-k+1}{2k-3}x - k - 1$

Rešenje.

$$\frac{-k+1}{2k-3} > 0 \Rightarrow k \in (1, 3/2)$$

42. U funkciji $y = (4k - 1)x - k + 3$ odrediti parametar k tako da funkcija bude opadajuća i da njen grafik seče pozitivni deo y -ose.

Rešenje. Da bi bila opadajuća mora važiti $4k - 1 < 0$, a da bi grafik sekao pozitivni deo y -ose, tada je $3 - k > 0$. Dakle, $k \in (-\infty, 1/4)$.

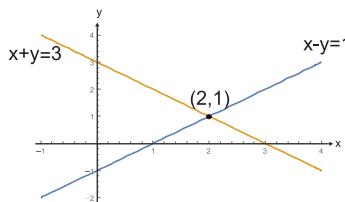
43. U funkciji $y = (3k + 6)x + k - 7$ odrediti parametar k tako da funkcija bude rastuća i da njen grafik seče negativni deo y -ose.

Rešenje. Da bi bila rastuća mora važiti $3k + 6 > 0$, a da bi grafik sekao negativni deo y -ose, tada je $k - 7 < 0$. Dakle, $k \in (-2, 7)$.

44. Grafički rešiti sledeće sisteme jednačina:

a) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$

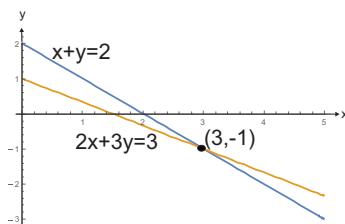
Rešenje.



Slika 1: Rešenje sistema je $(x, y) = (2, 1)$.

b) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 3y &= 3 \end{aligned}$

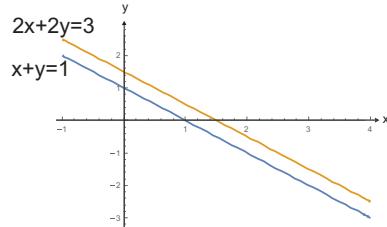
Rešenje.



Slika 2: Rešenje sistema je $(x, y) = (3, -1)$.

v) $x + y = 1$
 $2x + 2y = 3$

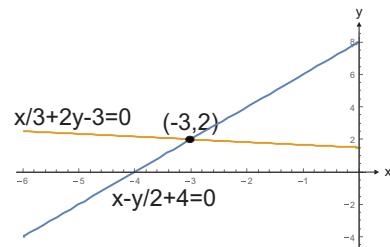
Rešenje.



Slika 3: Sistem nema rešenja.

g) $\frac{x}{3} + 2y - 3 = 0$
 $x - \frac{y}{2} + 4 = 0$

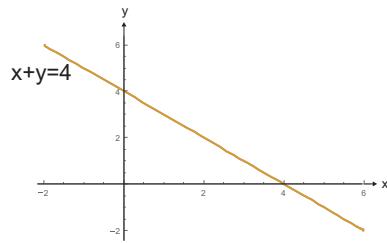
Rešenje.



Slika 4: Rešenje sistema je $(x, y) = (-3, 2)$.

d) $x + y = 4$
 $2x + 2y = 8$

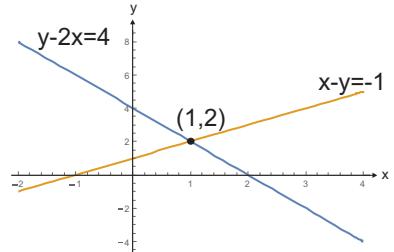
Rešenje.



Slika 5: Rešenje sistema je $(x, y) = (t, 4 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{d)} \quad \begin{aligned} y - 2x &= 4 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

Rešenje.



Slika 6: Rešenje sistema je $(x, y) = (1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate

45. Rešiti sisteme jednačina:

a) $\begin{aligned} 5x - 3y &= 17 \\ 2x + 3y &= 11 \end{aligned}$

Rešenje. Ako saberemo obe jednačine dobijamo $7x = 28$, odnosno $x = 4$. Ako sada uvrstimo $x = 4$ u bilo koju jednačinu, dobijamo rešenje sistema $(x, y) = (4, 1)$.

b) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 23 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned}$

Rešenje. $(x, y) = (7, 3)$

v) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$

Rešenje. $(x, y) = (t, 2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$

g) $\begin{aligned} \frac{x}{15} + \frac{y}{10} - 4 &= 0 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{5} - 1 &= 0 \end{aligned}$

Rešenje. $(x, y) = (30, 20)$

d) $\begin{aligned} \frac{2x-3}{6} + \frac{y+5}{3} &= \frac{1}{2} \\ \frac{x+4}{8} + \frac{2y+1}{3} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$

Rešenje. $(x, y) = (0, -2)$

đ) $\begin{aligned} y : x &= 3 : 5 \\ 8x - 9y &= 26 \end{aligned}$

Rešenje. $(x, y) = (10, 6)$

e) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 2x + 5y &= 26 \end{aligned}$

Rešenje. $(x, y) = (3, 4)$

ž) $\begin{aligned} 3(x - y) &= 2(x + 3) - 7 \\ x - 2y + 1 &= 2(x - y) - 4 \end{aligned}$

Rešenje. $(x, y) = (5, 2)$

z) $x : y = 1 : 2$
 $5x - 7y = -36$

Rešenje. $(x, y) = (4, 8)$

i) $\frac{x-6}{y-4} + \frac{10}{y^2-16} = \frac{x+6}{y+4}$
 $\frac{5}{y^2-3y} + \frac{2}{3x-xy} = \frac{10}{xy}$

Rešenje. $(x, y) = (20/3, 95/18)$

j) $\frac{3x-1}{5y+1} = \frac{3x-4}{5y-2}$
 $\frac{x+3}{y+3} = \frac{x-4}{y-4}$

Rešenje. $(x, y) = (-1, -1)$

k) $\frac{2}{5}x + \frac{5}{6}y = 35$
 $\frac{3}{5}x - \frac{7}{12}y = 3,5$

Rešenje. $(x, y) = (35, 30)$

46. Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sisteme jednačina:

a) $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 16$
 $\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 4$

Rešenje. $(x, y) = (1/2, 1/2)$

b) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-4} = 5$
 $\frac{4}{x-1} - \frac{1}{y-4} = 3$

Rešenje. $(x, y) = (2, 5)$

v) $\frac{1}{x-y+2} + \frac{1}{1-x-y} = 0,1$
 $\frac{1}{x-y+2} + \frac{1}{x+y-1} = 0,3$

Rešenje. $(x, y) = (7, 4)$

47. Diskutovati sisteme jednačina u zavisnosti od realnog parametra m :

a) $(m+1)x + (m-3)y = 10$
 $3x + 5y = 13$

Rešenje. Određen za $m \neq -7$, a za $m = -7$ je nemoguć.

b) $(m+3)x + 8y = 7$
 $(m-2)x + 3y = 4$

Rešenje. Određen za $m \neq 5$, a za $m = 5$ je nemoguć.

v) $(m-3)x + 6y = 3$
 $2x + 4y = 5$

Rešenje. Određen za $m \neq 6$, a za $m = 6$ je nemoguć.

g) $(3m-1)x + (3-9m)y = 5m+2$
 $(2m+2)x - (6m+1)y = 1$

Rešenje. Određen za $m \neq 1/3$, a za $m = 1/3$ je nemoguć.

d)
$$\begin{aligned}x + y &= 5 \\ mx + y &= m\end{aligned}$$

Rešenje. Određen za $m \neq 1$, a za $m = 1$ je nemoguć.

đ)
$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\ x - my &= 5\end{aligned}$$

Rešenje. Određen za $m \neq 1$, a za $m = 1$ je nemoguć.

48. Zbir dva broja je 108, a njihov količnik je $5 : 7$. Koji su to brojevi?

Rešenje. Neka su x i y ti brojevi. Tada je $x+y = 108$ i $x:y = 5:7 \Rightarrow 7x = 5y$. Ako prvu jednačinu pomnožimo sa 5, imaćemo $5x + 5y = 540 \Rightarrow 5x + 7x = 540 \Rightarrow x = 45 \Rightarrow y = 108 - 45 = 63$.

49. Ako se neki broj podeli drugim, dobiće se količnik 2 i ostatak 3, a ako se njihov zbir podeli njihovom razlikom, dobiće se količnik 2 i ostatak 9. Koji su to brojevi?

Rešenje. Neka su x i y ti brojevi. Dobijamo sistem od dve jednačine

$$\frac{x}{y} = 2 + \frac{3}{y}, \quad \frac{x+y}{x-y} = 2 + \frac{9}{x-y}$$

čije je rešenje $(x, y) = (27, 12)$.

50. Pre četiri godine otac je bio 6 puta stariji od sina, a posle 5 godina biće 3 puta stariji od sina. Koliko sada ima godina otac, a koliko sin?

Rešenje. Neka su x i y sadašnje godine oca i sina, redom. Dobijamo sistem od dve jednačine

$$x - 4 = 6(y - 4), \quad x + 5 = 3(y + 5)$$

čije je rešenje $(x, y) = (40, 10)$.

51. Obim jednakokrakog trougla je 30 cm, a razlika kraka i osnovice je 3 cm. Izračunati osnovicu i krak.

Rešenje. Neka je a osnovica, a b krak. Dobijamo sistem od dve jednačine

$$a + 2b = 30, \quad b - a = 3$$

čije je rešenje $(a, b) = (8, 11)$.

52. Radeći zajedno, dva traktora različitih snaga poorali su zadružno polje za 8 dana. Kada bi polovinu ovog polja poorao jedan traktor, a drugu polovinu oba, rad bi se završio za 9 dana. Za koliko dana bi mogao svaki traktor sam da uzore celokupno polje?

Rešenje. Neka je s veličina polja u hektarima. Neka je x broj dana za koje bi prvi traktor poorao s hektara, a y broj dana za koje bi drugi traktor poorao s hektara. Veličina s/x je broj pooranih hektara za 1 dan prvog traktora, a s/y broj pooranih hektara za 1 dan drugog traktora. Dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}\frac{s}{\frac{s}{x} + \frac{s}{y}} &= 8 \\ \frac{\frac{s}{2}}{\frac{s}{x} + \frac{s}{y}} + \frac{\frac{s}{2}}{\frac{s}{x} + \frac{s}{y}} &= 9,\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} &= 8 \\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} &= 9.\end{aligned}$$

Druga jednačina postaje

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}} + 4 = 9 \Rightarrow \frac{x}{2} = 5 \Rightarrow x = 10.$$

Sada prva jednačina postaje

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}.$$

Ako je pomnožimo sa $40y$ dobijamo

$$4y + 40 = 5y \Rightarrow y = 40.$$

Linearne nejednačine sa jednom nepoznatom

53. Rešiti nejednačine:

a) $9x - 7 > 3(2 + 3x)$

Rešenje.

$$9x - 7 > 6 + 9x \Rightarrow -7 > 6$$

tako da nejednačina nema rešenja.

b) $(x + 1) \cdot (x + 2) < (x - 1)^2$

Rešenje.

$$x^2 + 3x + 2 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 5x < -1 \Rightarrow x < -1/5$$

v) $\frac{2x - 8}{5} \geq 7$

Rešenje. $x \geq 43/2$

g) $\frac{1-x}{2} + \frac{2-x}{3} \geq x + \frac{1}{2}$

Rešenje. $x \leq 11/4$

d) $(x - 1)^2 + 7 > (x + 4)^2$

Rešenje. $x < -4/5$

đ) $\frac{3x - 2}{3} < x$

Rešenje. $x \in \mathbb{R}$

e) $\frac{2x + 7}{3} - \frac{x + 8}{7} > 1$

Rešenje. $x > -4/11$

ž) $3(x - 1) + (x - 4)(x + 3) > (x - 2)(x + 6)$

Rešenje. $x < -3/2$

54. Rešiti sisteme nejednačina:

a) $\begin{aligned} x + 2 &> 0 \\ 2x - 3 &\leq 0 \end{aligned}$

Rešenje. $-2 < x \leq 3/2$

$$\text{b) } \frac{\frac{3(1-x)}{5}}{19x+7} \geq 1 - x$$
$$19x + 7 \geq 20x + 6$$

Rešenje. $x = 1$

$$\text{v) } (x-1)(2x+3) \leq (2x-5)(x+4)$$
$$(4x+2)(x-1) > (2x-5)(2x+1)$$

Rešenje. $x \geq 17/2$

$$\text{g) } \begin{aligned} x+5 &< 0 \\ x-7 &> 5 \end{aligned}$$

Rešenje. $x \in \{ \}$

$$\text{d) } \begin{aligned} 2(x-3)-2 &> 4+(x-4) \\ 2(x-6)+4 &< 3(x-5)-2 \end{aligned}$$

Rešenje. $x > 9$

55. Rešiti nejednačine:

$$\text{a) } \frac{x-2}{2x+1} > 0$$

Rešenje. $x \in (-\infty, -1/2) \cup (2, +\infty)$

$$\text{b) } \frac{3x+5}{x} > 0$$

Rešenje. $x \in (-\infty, -5/3) \cup (0, +\infty)$

$$\text{v) } \frac{x-2}{2} + \frac{3}{x-5} > 0$$

Rešenje. $x > 5$

$$\text{g) } \frac{x-3}{7} > \frac{5}{2x+3}$$

Rešenje. $x \in (-4, -3/2) \cup (11/2, +\infty)$

$$\text{d) } \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} < 0$$

Rešenje. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3)$

$$\text{đ) } \frac{x^2-25}{(x-4)(x-3)} < 8$$

Rešenje. $x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$

$$\text{e) } \frac{x-2}{x+1} \leq 3$$

Rešenje. $x \in (-\infty, -5/2] \cup (-1, +\infty)$

$$\text{ž) } \frac{x^2-9}{(x-1)(x-2)} < 2$$

Rešenje. $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

z) $(x - 3)(x + 2) > 0$

Rešenje. $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

i) $(x - 3)(x + 2) < 0$.

Rešenje. $x \in (-2, 3)$

j) $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \leq 0$.

Rešenje. $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, 2]$

Stepenovanje i korenovanje

56. Izvršiti naznačene operacije i uprostiti izraze:

a) $\left(\frac{3a^{-1}x^2}{5b^{-2}y^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{10ax^{-3}}{9by^{-2}}\right)^{-3}$

Rešenje. Sada je

$$\frac{3^{-2}a^2x^{-4}}{5^{-2}b^4y^{-6}} \cdot \frac{10^{-3}a^{-3}x^9}{9^{-3}b^{-3}y^6} = \frac{3^{-2}2^{-3}5^{-3}x^5}{5^{-2}3^{-6}ab} = \frac{3^4x^5}{5 \cdot 2^3ab} = \frac{81x^5}{40ab}$$

b) $(a^2)^{-3} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-2}$

Rešenje. $\frac{1}{a^2b^4}$

v) $(a^6b^8)^3 \left(\frac{ab^{12}}{c^4}\right)^{-3}$

Rešenje. $\frac{a^{15}c^{12}}{b^{12}}$

g) $\left(a^2(a^2+b)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{a^2+b}\right) \cdot 2^{-1} : \frac{a+\sqrt{a^2+b}}{a(a^2+b)^{-\frac{1}{2}}+1}$

Rešenje. $\frac{2a^2+b}{2(a^2+b^2)}$

d) $\left(\frac{b^3}{a^2}\right)^{-4} : (a^2b^4)^{-3}$

Rešenje. a^{14}

đ) $\frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{(a(a-b))^2}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{(a-b)^{\frac{1}{3}}}$

Rešenje. $a^2 + ab + b^2$

e) $\left(\frac{a^2b}{2cd^4}\right)^2 : 4 \left(\frac{a^4b^5}{c^{-2}}\right)^{-1}$

Rešenje. $\frac{a^8b^7}{16d^8}$

$$\check{z}) \sqrt[5]{8ax^3} \cdot \sqrt[6]{4a^2x} \cdot \sqrt[15]{2a^7x^4}$$

$$Rešenje. 2ax \sqrt[15]{2^{11}a^{13}x^{14}}$$

$$z) \left(\sqrt[5]{\frac{x^4y^4}{z}} : \sqrt[10]{\frac{x^9y^9}{z^8}} \right) : \sqrt[15]{\frac{x^{-4}y^{-6}}{z^{-9}}}$$

$$Rešenje. \sqrt[15]{\frac{z^4}{x^2}}$$

57. Uprostiti izraze:

$$a) \left(\frac{a^{-1}x^3}{b^{-3}y^4} \right)^{-2} : \left(\frac{ax^{-3}}{by^{-2}} \right)^{-4}$$

$$Rešenje. \frac{a^6y^{16}}{b^{10}x^{18}}$$

$$b) \left(\frac{(2x^2y^{-3}z^{-6})^2}{5x^4y^{-3}} \right)^{-3} : \frac{(2xy^2)^{-1}}{xy^{-4}}$$

$$Rešenje. \frac{125}{32}x^2y^7z^36$$

$$v) \left(\left(\frac{2a^{-2}}{3ab^{-1}} \right)^{-4} : \left(\frac{4a^{-2}}{3b^{-4}} \right)^{-3} \right) \cdot \frac{1}{12a^5b^{-2}}$$

$$Rešenje. ab^{10}$$

$$g) \frac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^x + a^{-x}} : \frac{a^x - a^{-x}}{1 - a^{-x}}$$

$$Rešenje. 1 - a^{-x}$$

58. Izračunati:

$$a) 16^{-2} \cdot 8^3 \cdot 9^{-5} \cdot 27^4$$

$$Rešenje. 2^{-8} \cdot 2^9 \cdot 3^{-10} \cdot 3^{12} = 2 \cdot 3^2 = 18$$

$$b) (20^0 : 20^{-3}) \cdot (125^{-6} : 25^{-7})$$

$$Rešenje. 64/5$$

$$v) \frac{2^{-23}}{4^{-7} \cdot 4^{-8}}$$

$$Rešenje. 128$$

$$g) \frac{4^{-2} \cdot 8^{-7}}{2^{-24}}$$

$$Rešenje. 1/2$$

$$d) \frac{(-5)^{-4} \cdot 25^{14}}{125^6}$$

$$Rešenje. 5^6$$

$$\text{d)} \frac{3^{-12} \cdot 9^8}{(-3)^4}$$

Rešenje. 1

59. Uprostiti izraze:

$$\text{a)} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{4}}$$

Rešenje.

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4^4}} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt[5]{4^4}}{4} = \frac{\sqrt{2}\sqrt[5]{2^8}}{2} = \frac{\sqrt[10]{2^5 \cdot 2^{16}}}{2} = \frac{\sqrt[10]{2^{20} \cdot 2}}{2} = \frac{2^2 \sqrt[10]{2}}{2} = 2 \sqrt[10]{2}$$

$$\text{b)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$$

Rešenje. 133/8

$$\text{v)} \sqrt[6]{128 \cdot 7^8}$$

Rešenje. $14\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{7}$

$$\text{g)} (-2)^{-2} (-5)^{-2} (-7)^0 : (-6)^{-1}$$

Rešenje. $-3/50$

$$\text{d)} \left(\frac{2^8 3^{-12}}{4^3} \cdot \frac{2^{-2}}{5^{-4}}\right) : \left(\frac{3^6 5^{-5}}{4^{-1}} \cdot \frac{2^{10} 4^{-9}}{3^2 5^{-5}}\right)^{-4}$$

Rešenje. $\frac{3^4 5^4}{2^{24}}$

60. Izračunati:

$$\text{a)} \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^4}$$

Rešenje. $x^{9/5}$

$$\text{b)} \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[8]{x^7}$$

Rešenje. $x^{61/24}$

$$\text{v)} \sqrt{x} \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$$

Rešenje. $x^{19/12}$

$$\text{g)} \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5 b} \cdot \sqrt[12]{a^7 b^{11}}$$

Rešenje. $a^{25/15} b^{13/12}$

$$\text{d)} \left(a^{\frac{2}{3}} - 3b^{-1}\right) \left(3b^{-1} + a^{\frac{2}{3}}\right)$$

Rešenje. $a^{4/3} - 9/b^2$

$$\text{d)} \sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b^5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^5}{a^5}}$$

$$\text{Rešenje. } \frac{\sqrt[12]{b}}{\sqrt[12]{a}}$$

61. Racionalisati izraze:

$$\text{a)} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

Rešenje.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{3}$$

$$\text{b)} \frac{\sqrt{7}}{2 - \sqrt{3}}$$

Rešenje. $2\sqrt{7} + \sqrt{21}$

$$\text{v)} \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Rešenje. $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$

$$\text{g)} \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4}$$

Rešenje. -

$$\text{d)} \frac{x - y}{x + y + 2\sqrt{xy}}$$

$$\text{Rešenje. } \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - y}$$

$$\text{đ)} \frac{12 + 7\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

Rešenje. $2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

$$\text{e)} \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$$

$$\text{Rešenje. } \frac{73 + 12\sqrt{35}}{17}$$

$$\check{z}) \frac{54\sqrt{15}}{27\sqrt{3}}$$

Rešenje. $2\sqrt{5}$

$$\text{z)} \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{11}}{2\sqrt{7} - 3\sqrt{11}}$$

$$\text{Rešenje. } \frac{-80 - 7\sqrt{77}}{71}$$

$$\text{i)} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$$

Rešenje. $\sqrt{6}/6$

$$\text{j)} \frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$$

Rešenje. $\frac{7\sqrt{2}}{12}$

$$\text{k)} \frac{-39 \cdot \sqrt[4]{3}}{24 \cdot \sqrt[4]{2}}$$

Rešenje.

$$\frac{-39 \cdot \sqrt[4]{3}}{24 \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{-39 \cdot \sqrt[4]{3}}{24 \cdot \sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{-39 \cdot \sqrt[4]{3} \sqrt[4]{2^3}}{24 \cdot 2} = \frac{-39 \cdot \sqrt[4]{24}}{48}$$

$$\text{l)} \frac{8\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}$$

Rešenje. $\frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{9}$

$$\text{lj)} \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Rešenje. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2}{4}$

$$\text{m)} \frac{18 \cdot \sqrt[3]{3}}{-12 \cdot \sqrt[3]{32}}$$

Rešenje. $-\frac{3}{64} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 32^2}$

$$\text{n)} \frac{-8}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

Rešenje. $\frac{4(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})}{3}$

Kompleksni brojevi

62. Izračunati:

a) $5i^{37} + i^2 - 8i^5 + 6i - 2i^{26} - i^{17}$

Rešenje. $i^{37} = i^{4 \cdot 9 + 1} = i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^5 = i$, $i^{26} = i^2 = -1$, $i^{17} = i$, pa je dati izraz jednak $1 + 2i$.

b) $i^{135} + i^{235}$

Rešenje. $-2i$

v) $i^{21} - i^{17} + i^{36} - i^{42}$

Rešenje. 2

g) $7i^2 + 2i + i^{33} + 9i^{12} - 4i^{30}$

Rešenje. $6 + 3i$

d) $i^{1511} + i^{-5}$

Rešenje. $-2i$

đ) $2i^{39} + i^3 + 12i^{91} - 6i^{79}$

Rešenje. $-9i$

63. Izvršiti naznačene operacije:

a) $(4 + 7i) + (2 - 5i)$

Rešenje. $6 + 2i$

b) $(-4 - i) - (6 + 5i)$

Rešenje. $-10 - 6i$

v) $(6 - i)(-3 + 7i)$

Rešenje. $-11 + 45i$

g) $(0.5 - 4.2i)(0.3 - 0.6i)$

Rešenje. $-2.37 - 1.56i$

d) $\frac{4+i}{2-3i}$

Rešenje.

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{4+i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{2^2 + 3^2} = \frac{8+12i+2i-3}{13} = \frac{5+14i}{13}$$

d) $(2 - 5i)^{-1}$

Rešenje. $(2 + 5i)/29$

e) $-\frac{1}{-1 + 3i}$

Rešenje. $(1 + 3i)/10$

ž) $\frac{6}{2 + 3i}$

Rešenje. $(12 - 18i)/13$

z) $\frac{i}{1+i}$

Rešenje. $(1 + i)/2$

i) $\frac{1-i}{2+3i}$

Rešenje. $(-1 - 5i)/13$

j) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

Rešenje. -1

k) $\frac{1 - \sqrt{3} \cdot i}{\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot i}$

Rešenje. $\frac{\sqrt{2} - 3 - i(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{5}$

64. Naći realni i imaginarni deo kompleksnog broja z , moduo, kao i \bar{z} :

a) $z = \frac{1+2i}{3-4i} + (1-i)(i+2)$

Rešenje. $z = \frac{14}{5} - \frac{3}{5}i$, te je $Re(z) = \frac{14}{5}$, $Im(z) = -\frac{3}{5}$, $|z| = \sqrt{\frac{41}{5}}$, $\bar{z} = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

b) $z = \frac{3-3i}{4-i} - \frac{(i+2)}{2i}$

Rešenje. $z = \frac{13}{34} + \frac{8}{17}i$, pa je $Re(z) = \frac{13}{34}$, $Im(z) = \frac{8}{17}$, $|z| = \frac{5}{2\sqrt{17}}$, $\bar{z} = \frac{13}{34} - \frac{8}{17}i$

v) $z = \left(\frac{4}{2+2i}\right)^{2001}$

Rešenje. $z = 2^{1000} - 2^{1000}i$, pa je $Re(z) = 2^{1000}$, $Im(z) = -2^{1000}$, $|z| = 2^{1000}\sqrt{2}$, $\bar{z} = 2^{1000} + 2^{1000}i$

g) $z = (3 - 3i)^{1892}$

Rešenje. $z = -2^{946} \cdot 3^{1892}$, pa je $Re(z) = -2^{946} \cdot 3^{1892}$, $Im(z) = 0$, $|z| = 2^{946} \cdot 3^{1892}$, $\bar{z} = -2^{946} \cdot 3^{1892}$

65. Izračunati vrednost izraza:

a) $\frac{z^2}{z+1}$ ako je $z = 5 + 2i$

Rešenje. $\frac{83+39i}{20}$

b) $\frac{\bar{z}}{z-2}$ gde je $z = 3 - 5i$

Rešenje. $\frac{-11+10i}{13}$

v) $\frac{\bar{z}-3}{z+5}$ ako je $z = -6 + i$

Rešenje. $4 + 5i$

g) $\frac{z \cdot \bar{z}}{2i+z^2}$ gde je $z = 3i$

Rešenje. $\frac{-81-18i}{85}$

66. Izračunati x i y iz jednačina:

a) $4x + xi - 3y = yi - i - 2$

Rešenje.

$$(4x - 3y) + xi = -2 + (y - 1)i \Rightarrow 4x - 3y = -2 \wedge x = y - 1 \Rightarrow (x, y) = (1, 2)$$

b) $(x + yi)(3 + i) = -9 + 7i$

Rešenje. $(x, y) = (-2, 3)$

v) $(x + 1) + i(y - 3) = (1 + i)(5 + 3i)$

Rešenje. $(x, y) = (1, 11)$

g) $(3 + i)(x + yi) + 2(x + yi) - 5 = 9 + 8i$

Rešenje. $(x, y) = (3, 1)$

Kvadratne jednačine

67. Rešiti sledeće jednačine:

a) $x^2 = 36$

Rešenje. $x = \pm 6$

b) $x^2 - \frac{2}{7} = 0$

Rešenje. $x = \pm\sqrt{2/7}$

v) $x^2 + 25 = 0$

Rešenje. $x = \pm 5i$

g) $x^2 = 4 - 3x$

Rešenje. $x = -4, x = 1$

d) $x(x - 6) = 13$

Rešenje. $x = 3 - \sqrt{22}, x = 3 + \sqrt{22}$

đ) $(x - 1)(x - 2) = 3$

Rešenje. $x = (3 - \sqrt{13})/2, x = (3 + \sqrt{13})/2$

e) $(x - 2)(x - 3) = x$

Rešenje. $x = 3 - \sqrt{3}, x = 3 + \sqrt{3}$

ž) $x(2 - 3x) = x^2 + 7x - 4$

Rešenje. $x = (-5 - \sqrt{89})/8, x = (-5 + \sqrt{89})/8$

z) $\frac{x - 7}{2x + 1} = \frac{3x + 2}{3}$

Rešenje. $x = (-2 - i\sqrt{134})/6, x = (-2 + i\sqrt{134})/6$

i) $16x^2 - 16x + 1 = 0$

Rešenje. $x = (2 - \sqrt{3})/4, x = (2 + \sqrt{3})/4$

j) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

Rešenje. $x = -\sqrt{2} + \sqrt{3}, x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

k) $\frac{2x-4}{3x-6} = 100x$

Rešenje. $x = 1/150$

68. Rešiti sledeće jednačine:

a) $(5x+2)(3x+1) - (4x-5)(4x+5) = 37$

Rešenje. $x = 1, x = 10$

b) $\frac{4x}{x+3} - \frac{4x}{x^2-5x+3} = 0$

Rešenje. $x = 0, x = 6$

v) $\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{x^2-81} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9}$

Rešenje. $x = -13, x = -5$

g) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{10}{3}$

Rešenje. $x = 5 - \sqrt{13}, x = 5 + \sqrt{13}$

69. Sastaviti jednu kvadratnu jednačinu:

a) $x_1 = -\frac{5}{6}, x_2 = \frac{7}{3}$

Rešenje. $18x^2 - 27x - 35 = 0$

b) $x_1 = \frac{a+b}{a-b}, x_2 = \frac{a-b}{a+b}$

Rešenje. $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$

v) $x_1 = 3, x_2 = -10$

Rešenje. $x^2 + 7x - 30 = 0$

g) $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i$

Rešenje. $x^2 - 4x + 13 = 0$

d) $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$

Rešenje. $x^2 - 2x - 1 = 0$

đ) $x_1 = \frac{5}{6}, x_2 = 0$

Rešenje. $6x^2 - 5x = 0$

e) $x_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Rešenje. $x^2 - x + 1 = 0$

ž) $x_1 = 2 - \sqrt{5}, x_2 = 2 + \sqrt{5}$

Rešenje. $x^2 - 4x - 1 = 0$

z) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$

Rešenje. $x^2 + 4x - 5 = 0$

70. Rešiti na linearne činioce:

a) $x^2 - 5x + 4$

Rešenje. $(x - 1)(x - 4)$

b) $x^2 - 6x - 7$

Rešenje. $(x + 1)(x - 7)$

v) $3x^2 + 4x - 7$

Rešenje. $3(x + \frac{7}{3})(x - 1)$

g) $-3x^2 + 5x - 2$

Rešenje. $-3(x - \frac{2}{3})(x - 1)$

d) $-4x^2 + 4x - 1$

Rešenje. $-4(x - \frac{1}{2})^2$

đ) $x^2 - 5x + 6$

Rešenje. $(x - 2)(x - 3)$

71. Skratiti razlomke:

a) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

Rešenje.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 2}{x + 1}$$

b) $\frac{x^2 - 22x + 40}{x^2 - 5x + 6}$

Rešenje.

$$\frac{x^2 - 22x + 40}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 2)(x - 20)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x - 20}{x - 3}$$

v) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x}$

Rešenje.

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x} = \frac{(x - 2)(x + 4)}{x(x - 2)} = \frac{x + 4}{x}$$

72. Rešiti kvadratne nejednačine:

a) $x^2 > 9$

Rešenje. $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

b) $x^2 - 4x + 5 < 0$

Rešenje. $x \in \{\}$

v) $x^2 + 6x + 15 < 0$

Rešenje. $x \in \{\}$

g) $-5x^2 - 19x + 4 < 0$

Rešenje. $x \in (-\infty, -4) \cup (1/5, +\infty)$

d) $x^2 + 6x + 7 > 0$

Rešenje. $x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2}) \cup (-3 + \sqrt{2}, +\infty)$

đ) $\frac{3x+2}{3} < \frac{x-7}{2x+1}$

Rešenje. $x < -1/2$

73. Rešiti sledeće jednačine:

a) $\frac{2x^2 - 1}{4x + 5} < 0$

Rešenje. $x \in (-\infty, -5/4) \cup (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

b) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0$

Rešenje. $x \in (1, 2) \cup (3, +\infty)$

v) $\frac{x^2 + 6x - 16}{x^2 + x - 20} < 0$

Rešenje. $x \in (-\infty, -5) \cup (2, 4)$

g) $(x^2 - 5x - 6)(x^2 + x - 12) < 0$

Rešenje. $x \in (-4, -1) \cup (3, 6)$

d) $(x^2 + 4x + 3)(x^2 - 9x + 14) < 0$.

Rešenje. $x \in (-3, -1) \cup (2, 7)$

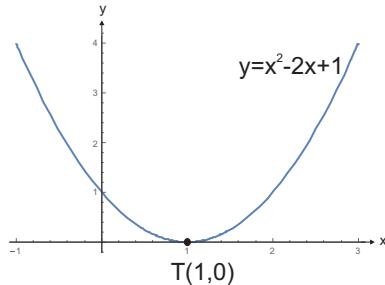
Kvadratna funkcija

Ako je $a \neq 0$, za funkciju $y = ax^2 + bx + c$, kanonički oblik je $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$. Teme parabole je $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Ako je $a > 0$, funkcija je konveksna, a ako je $a < 0$, funkcija je konkavna. Presek sa y -osom se dobija za $x = 0$ i tada je $y = c$. Nule kvadratne funkcije se dobijaju iz formule $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

74. Konstruisati grafike sledećih funkcija i dovesti ih na kanonički oblik:

a) $y = x^2 - 2x + 1$

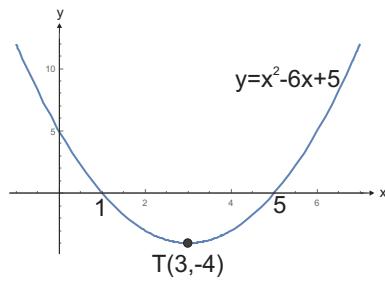
Rešenje. Kanonički oblik je $y = (x - 1)^2$, a grafik je



Slika 7: Grafik funkcije $y = x^2 - 2x + 1$.

b) $y = x^2 - 6x + 5$

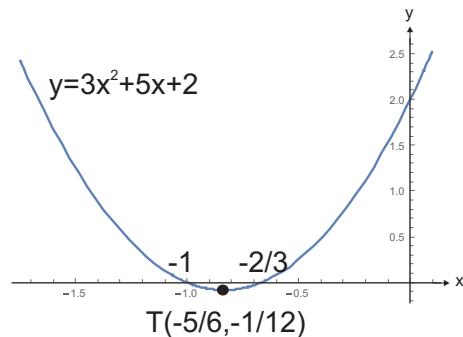
Rešenje. Kanonički oblik je $y = (x - 3)^2 - 4$, a grafik je



Slika 8: Grafik funkcije $y = x^2 - 6x + 5$.

v) $y = 3x^2 + 5x + 2$

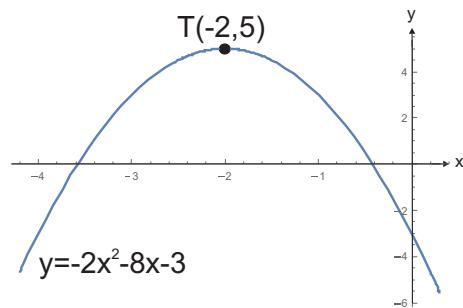
Rešenje. Kanonički oblik je $y = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$, a grafik je



Slika 9: Grafik funkcije $y = 3x^2 + 5x + 2$.

g) $y = -2x^2 - 8x - 3$

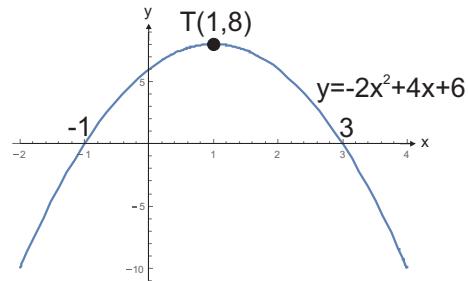
Rešenje. Kanonički oblik je $y = -2(x + 2)^2 + 5$, a grafik je



Slika 10: Grafik funkcije $y = -2x^2 - 8x - 3$.

d) $y = -2x^2 + 4x + 6$

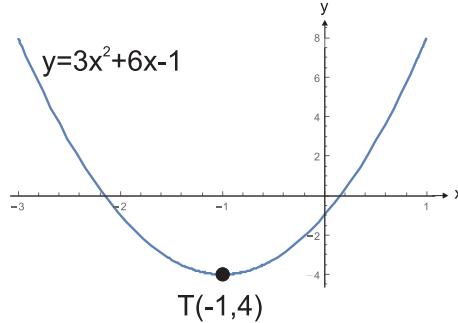
Rešenje. Kanonički oblik je $y = -2(x - 1)^2 + 8$, a grafik je



Slika 11: Grafik funkcije $y = -2x^2 + 4x + 6$.

d) $y = 3x^2 + 6x - 1$

Rešenje. Kanonički oblik je $y = 3(x + 1)^2 - 4$, a grafik je

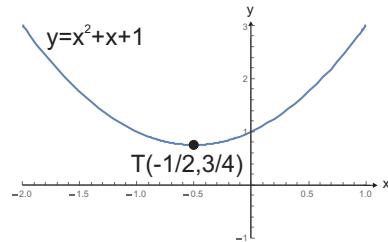


Slika 12: Grafik funkcije $y = 3x^2 + 6x - 1$.

75. Konstruisati grafike sledećih funkcija i dovesti ih na kanonički oblik:

a) $y = x^2 + x + 1$

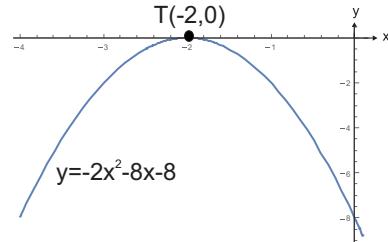
Rešenje. Kanonički oblik je $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, a grafik je



Slika 13: Grafik funkcije $y = x^2 + x + 1$.

b) $y = -2x^2 - 8x - 8$

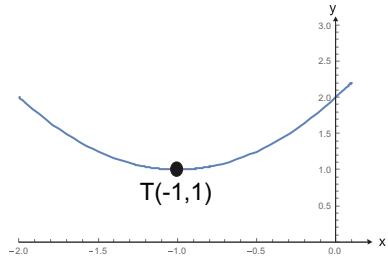
Rešenje. Kanonički oblik je $y = -2(x + 2)^2$, a grafik je



Slika 14: Grafik funkcije $y = -2x^2 - 8x + 8$.

v) $y = x^2 + 2x + 2$

Rešenje. Kanonički oblik je $y = (x + 1)^2 + 1$, a grafik je



Slika 15: Grafik funkcije $y = x^2 + 2x + 2$.

76. Za koje vrednosti parametra m funkcija $y = mx^2 + 2(m+2)x + 2m + 4$ negativna za svako x ?

Rešenje. $m < 0$ i diskriminanta treba da je manja od nule. Tada je $m < -2$.

77. Za koje vrednosti parametra m funkcija $y = (m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2$ pozitivna za svako x ?

Rešenje. $m^2 - 1 > 0$ i diskriminanta manja od nule. Sada je $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

78. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$. Odediti koeficijente a , b i c tako da funkcija ima nulu u $x = 3$, ekstremnu vrednost za $x = 1$ i da je $f(1) = -4$.

Rešenje. $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$

79. Odrediti stranicu najmanjeg kvadrata koji se može upisti u kvadrat stanice 6 cm.

Rešenje.

80. Od svih pravougaonika obima 20 cm odrediti onaj koji ima najveću površinu.

Rešenje. Ako su stranice pravougaonika a i b , tada je obim $2a + 2b = 20$, odnosno $a = 10 - b$. Površina je $P = a \cdot b = (10 - b)b = -b^2 + 10b$, a to je funkcija koja ima maksimum u $b = 5$, te je i $a = 5$ i u pitanju je kvadrat površine 25 cm^2 .

81. Broj 18 rastaviti na dva sabirka tako da njihov proizvod bude što veći.

Rešenje. Radi se slično kao i prethodni zadatak $18 = 9 + 9$.

Trigonometrija

82. Izračunati vrednost izraza:

a) $5 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \cos 0 - 3 \sin \frac{3\pi}{2} + \cos \pi$

Rešenje.

$$5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + (-1) = 11$$

b) $2 \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

Rešenje. $3/4 - \sqrt{2} - \sqrt{3}/2$

v) $\frac{2 \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}}{1 + \sin^2 \frac{\pi}{4}}$

Rešenje. $\sqrt{2}/3$

g) $\frac{5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}$

Rešenje. $-32/15$

83. Izračunati vrednost izraza:

a) $3 - \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}$

Rešenje.

$$3 - \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} = 3 - \frac{3}{4} + 2 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

b) $2 + \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$

Rešenje. $\frac{11 - \sqrt{3}}{4}$

v) $3 \sin^2 \frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2}$

Rešenje. $-\frac{13}{4}$

g) $\frac{\sin^2 \frac{\pi}{6} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}}{3 \cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{4}}$

Rešenje. $\frac{5}{7}$

84. Odrediti vrednosti ostale tri trigonometrijske funkcije ugla α ako je:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Rešenje. Pošto je $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i α je u prvom kvadrantu,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Dalje je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \quad \text{dok je} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3}.$$

b) $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Rešenje. $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$

v) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

Rešenje. Znači da je

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4},$$

a kako je ugao α u drugom kvadrantu, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sada je $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$.

g) $\operatorname{ctg} \alpha = -2.5$, $\left(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\right)$

Rešenje. $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{5}$

85. Odrediti vrednosti ostale tri trigonometrijske funkcije ugla α ako je:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

Rešenje. Pošto je $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i α je u drugom kvadrantu,

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Dalje je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \quad \text{dok je} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\left(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\right)$

Rešenje. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$

v) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$, $\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$

Rešenje. Znači da je

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{49}{32} \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{49}{32} \Rightarrow \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{49}{32} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{49}{32} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{32}{81},$$

a kako je ugao α u trećem kvadrantu, $\cos \alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Sada je $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{7}{9}$ i
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{7}$.

g) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Rešenje. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

86. Dokazati identitete:

a) $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = 1$

Rešenje.

$$\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$$

b) $\frac{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$

Rešenje.

$$\frac{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$$

v) $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Rešenje.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

g) $\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$

Rešenje.

$$\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha} = \frac{2}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$$

87. Pokazati da su tačne sledeće jednačine:

a) $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

Rešenje. Leva strana jednakosti postaje

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$$

b) $\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$

Rešenje.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

v) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$

Rešenje.

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

g) $(2 + \sin \alpha)(2 - \sin \alpha) + (2 + \cos \alpha)(2 - \cos \alpha) = 7$

Rešenje. Nakon množenja imaćemo

$$4 - \sin^2 \alpha + 4 - \cos^2 \alpha = 8 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 8 - 1 = 7$$

88. Skratiti razlomke:

a) $\frac{1 + \cos 80^\circ}{2 \cos^2 40^\circ}$

Rešenje.

$$\frac{1 + \cos 80^\circ}{2 \cos^2 40^\circ} = \frac{1 + \cos(2 \cdot 40^\circ)}{2 \cos^2 40^\circ} = \frac{\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ}{2 \cos^2 40^\circ} = 1$$

b) $\frac{2 \sin 25^\circ}{1 - \cos 50^\circ}$

Rešenje. $\frac{1}{\sin 25^\circ}$

v) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$

Rešenje. $\cos 18^\circ$

g) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$

Rešenje. $2 \cos 20^\circ$

d) $\frac{1 - \cos \frac{\pi}{7}}{\sin^2 \frac{\pi}{14}}$

Rešenje. 2

đ) $\frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$

Rešenje. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

89. Odrediti sva rešenja jednačina:

a) $\sin \alpha = -1$

Rešenje. $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Rešenje. $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

v) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

Rešenje. $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

g) $\cos \alpha = 1$

Rešenje. $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$

d) $\operatorname{tg} \alpha = 1$

Rešenje. $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

đ) $\operatorname{ctg} \alpha = -1$

Rešenje. $\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $\tan \alpha = -\sqrt{3}$

Rešenje. $\alpha = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ž) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$

Rešenje. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

90. Odrediti sve uglove α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ za koje je:

a) $\sin \alpha = \cos \alpha$

Rešenje. $\alpha = \frac{\pi}{4}, \alpha = \frac{5\pi}{4}$

b) $\sin \alpha = -\cos \alpha$

Rešenje. $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \alpha = \frac{7\pi}{4}$

v) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$

Rešenje. $\alpha = \frac{\pi}{4}, \alpha = \frac{3\pi}{4}, \alpha = \frac{5\pi}{4}, \alpha = \frac{7\pi}{4}$

g) $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} \alpha$

Rešenje. $\alpha = \{\}$

d) $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$

Rešenje. $\alpha = 0, \alpha = \pi, \alpha = 2\pi$

đ) $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha$.

Rešenje. $\alpha = \frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{3\pi}{2}$

91. Rešiti trougao ABC ako je poznato:

a) $a = 3, \alpha = 60^\circ, \gamma = 45^\circ$

Rešenje. Ako su a, b i c stranice trougla i α, β i γ naspramni uglovi datih stranica, redom, tada važe sinusna i kosinusna teorema. Sinusna teorema je

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

a kosinusna

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Pošto su data dva ugla, zaključujemo da je $\beta = 75^\circ$. Stranica c se dobija iz sinusne teoreme

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{3 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}$$

Stranicu b možemo dobiti, na primer, iz kosinusne teoreme

$$b^2 = 9 + 6 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cos 75^\circ \Rightarrow b = \sqrt{6 + 3\sqrt{3}}.$$

b) $a = 10, \beta = 30^\circ, \gamma = 70^\circ$

Rešenje. Sada je $\alpha = 80^\circ$ i ponovi se postupak pod a). Tada je $c = 9.54$ i

$$b^2 = 100 + 9.54^2 - 2 \cdot 10 \cdot 9.54 \cos 30^\circ \Rightarrow b = 5.08.$$

v) $b = 13, \alpha = 51^\circ, \gamma = 58^\circ$

Rešenje. Sada je $\beta = 71^\circ$ i analogno kao pod a) se uradi zadatak. Sada je $a = 10.69$, $c = 11.66$.

g) $a = 10, b = 8, \alpha = 48^\circ$

Rešenje. Nađimo prvo ugao β .

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = 0.59 \Rightarrow \beta = \arcsin 0.59 \Rightarrow \beta = 36^\circ 29'.$$

Sada je $\gamma = 95^\circ 31'$, a $c = 13.4$.

92. Rešiti trougao ABC ako je poznato:

a) $a = \frac{10\sqrt{3}}{3}, b = 10, \alpha = 30^\circ$

Rešenje. $\beta = 60^\circ, \gamma = 90^\circ, c = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

b) $a = 60, c = 80, \alpha = 30^\circ$

Rešenje. $\gamma = 41^\circ 49', \beta = 108^\circ 11', b = 114$

v) $a = 2, b = 4, \gamma = 120^\circ$

Rešenje. $c = 6, \beta = 35^\circ 16', \alpha = 24^\circ 44'$

g) $a = 2, b = 1, \gamma = 60^\circ$

Rešenje. $c = 1.73, \beta = 30^\circ, \alpha = 90^\circ$

d) $a = 3, b = 4, c = 5$

Rešenje. $\gamma = 90^\circ, \alpha = 36^\circ 52', \beta = 53^\circ 8'$

đ) $a = 10, b = 8, \gamma = 30^\circ$

Rešenje. $c = 5.04, \beta = 52^\circ 32', \alpha = 97^\circ 28'$

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

93. Rešiti sledeće jednačine:

a) $9^{-\frac{1}{x}} = 3$

Rešenje.

$$9^{-\frac{1}{x}} = (3^2)^{-\frac{1}{x}} = 3^{-\frac{2}{x}} \Rightarrow 3^{-\frac{2}{x}} = 3^1 \Rightarrow -\frac{2}{x} = 1 \Rightarrow x = -2$$

b) $\sqrt{a} = \frac{a^{\frac{3}{x}}}{a^x}$

Rešenje. $x = -2, x = 3/2$

v) $8^x = 7^{x-1} + 7^x$

Rešenje. $x = 1$

g) $9^x + 3^x = 12$

Rešenje. Ako uvedemo smenu $t = 3^x > 0$, dobijamo $t^2 + t - 12 = 0$ i onda je $t = 3$ i $t = -4$. Jedino rešenje je tada $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

d) $a^{x-9} = \frac{1}{a^{x-9}}$

Rešenje. $a^{x-9} = a^{-x+9} \Rightarrow x - 9 = -x + 9 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$

đ) $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$

Rešenje.

$$\frac{6-x}{4} = \frac{x+2}{3} \Rightarrow 18 - 3x = 4x + 8 \Rightarrow 10 = 7x \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

94. Rešiti jednačine:

a) $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{3x+2}{2}}$

Rešenje. $x = -9/4$

b) $\frac{(0,125)^{x-0.5}}{2\sqrt{2}} = 8 \cdot (0,25)^{1-x}$

Rešenje. $x = -1/5$

v) $100 \cdot 10^{2x-1} = 1000^{\frac{3}{4}}$

Rešenje. $x = 5/8$

$$g) \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 6$$

Rešenje. $x = -2$

$$d) 3 \cdot \sqrt[3]{81} - 10 \cdot \sqrt[3]{9} + 3 = 0$$

Rešenje. $x = 2$

95. Rešiti sledeće jednačine:

$$a) 21 \cdot 3^x - 5^{x+2} = 9 \cdot 3^{x+2} - 5^{x+3}$$

Rešenje. $x = -1$

$$b) 2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$$

Rešenje. $x = 1$

$$v) 2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$$

Rešenje. $x = -1/2, x = 3/2$

$$g) 3 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 3^x = -1$$

Rešenje. $x = -1, x = 0$

$$d) 5^{2x} - 3^x - 15 \cdot 25^x + 15 \cdot 3^x = 0$$

Rešenje. $x = 0$

$$đ) 4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$$

Rešenje. $x = 0$

96. Izračunati:

$$a) \log_3 243$$

Rešenje.

$$\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 \log_3 3 = 5$$

$$b) \log_5 125$$

Rešenje. 3

$$v) 4 \log_5 25 + 2 \log_3 27 - 6 \log_2 8$$

Rešenje. -4

$$g) \log_3 \frac{1}{3}$$

Rešenje. -1

$$d) \log_{1/2} 8$$

Rešenje. -3

$$đ) \log_{1/2} \sqrt{8}$$

Rešenje. -3/2

97. Izračunati:

a) $\log_{1/3} \sqrt[7]{27}$

Rešenje.

$$\log_{1/3} \sqrt[7]{27} = -\log_3 27^{\frac{1}{7}} = -\frac{1}{7} \log_3 3^3 = -\frac{3}{7} \log_3 3 = -\frac{3}{7}$$

b) $\log_2 32$

Rešenje.

$$\log_2 32 = x \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

v) $\log_2 8 \cdot \log_3 81 \cdot \log_2 \frac{1}{16} \cdot \log_3 \frac{1}{27}$

Rešenje. 144

g) $\log_3(\log_3 27)$

Rešenje. 1

d) $\log_{2/3} \frac{16}{81}$

Rešenje. 4

đ) $\log_3 81 + 5 \log_{1/2} 16 - 3 \log_2 \frac{1}{32}$

Rešenje. -1

e) $\log_{0,008} \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$

Rešenje. 1/9

ž) $2^{4-\log_2 11}$

Rešenje. 16/11

z) $\log_{0.25} \sqrt[4]{2^3}$

Rešenje. -3/8

98. Transformisati u zbir sledeće logaritme:

a) $\log_a 3(x+y)z$

Rešenje.

$$\log_a 3(x+y)z = \log_a 3 + \log_a(x+y) + \log_a z$$

b) $\log_a \left(\frac{x^8}{2} \cdot \sqrt[5]{\frac{(x-5)^4}{x^2+1}} \right)$

Rešenje.

$$8 \log_a x - \log_a 2 + \frac{4}{5} \log_a(x-5) - \frac{1}{5} \log_a(x^2+1)$$

v) $\log_a 3ab$

Rešenje.

$$\log_a 3ab = \log_a 3 + \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a 3 + \log_a b$$

g) $\log_a \sqrt[5]{\frac{3a^2}{8bc^3}}$

Rešenje.

$$\frac{1}{5} (\log_a 3 + 2 - \log_a 8 - \log_a b - 3 \log_a c)$$

d) $\log_a \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[6]{6}}}$

Rešenje.

$$\frac{1}{3} \left(\log_a 3 + \frac{1}{4} \left(\log_a 4 + \frac{1}{6} \log_a 6 \right) \right)$$

đ) $\log_a \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{P}}{3a^2 \cdot \sqrt[3]{b}}}$

Rešenje.

$$\frac{1}{2} \left(\log_a 2 + \log_a \pi + \frac{1}{2} \log_a P - \log_a 3 - 2 - \frac{1}{3} \log_a b \right)$$

e) $\log_a \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2y^2} \cdot \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{y}}} \cdot \frac{1}{z}$

Rešenje.

$$\frac{1}{3} \left(\log_a 3 + 2 \log_a x - \log_a 2 - 2 \log_a y + \frac{1}{2} \log_a(x+y) - \frac{1}{2} \log_a y - \log_a z \right)$$

ž) $\log_a (4a^3b \cdot \sqrt[7]{x^2y^5})$

Rešenje.

$$\log_a 4 + 3 + \log_a b + \frac{1}{7} (2 \log_a x + 5 \log_a y)$$

z) $\log_a \frac{a^6b^3}{4(a+b)^3}$

Rešenje.

$$6 + 3 \log_a b - \log_a 4 - 3 \log_a(a+b)$$

99. Svaki od sledećih izraza svesti na jedan logaritam:

a) $\log_a x + 2 \log_a y - \log_a \pi$

Rešenje.

$$\log_a x + 2 \log_a y - \log_a \pi = \log_a x + \log_a y^2 - \log_a \pi = \log_a \frac{xy^2}{\pi}$$

b) $\frac{1}{2} \log_a(x+y) - \frac{2}{3}(\log_a x + \log_a y)$

Rešenje.

$$\log_a \frac{\sqrt{x+y}}{(xy)^{2/3}}$$

v) $\log_x a + \frac{1}{3} (\log_x b + \frac{1}{4} (\log_x c + \frac{1}{5} \log_x (d+e)))$

Rešenje.

$$\log_x a \sqrt[3]{b \sqrt[4]{c \sqrt[5]{d+e}}}$$

g) $\log_a 7 + 3 \log_a \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_a 11^3$

Rešenje.

$$\log_a \frac{7 \cdot 5^{3/2}}{11^{3/2}}$$

100. Rešiti jednačine:

a) $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = 0$

Rešenje.

$$\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = 0 \Rightarrow \log x + \log(x-1) - \log 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$$

b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Rešenje. $x = 16$

v) $(\log_5 x)^2 + (\log_5 7)(\log_7 x) = 2$

Rešenje. $x = 5, x = 1/25$

g) $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$

Rešenje. $x = 6$

d) $\log 3 + \frac{1}{2} \log 4 + \log(5x-1) = \log(x+2) + \log 2^3$

Rešenje. $x = 1$

đ) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$

Rešenje. $x = 2, x = 3$

e) $\log(x+9) - \log(x-6) = \log 14$

Rešenje. $x = 93/13$

ž) $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$

Rešenje. $x = e$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУН 2019. (први термин)

1. (1B) Свести сличне чланове следећег полинома:

$$12xy^2 + 14x^2y - \cancel{x^2y^2} + \cancel{xy^2} - 15x^2y + 2x^2y^2.$$

$$13xy^2 - x^2y + x^2y^2 = xy(13y - x + xy)$$

2. (7a) Израчунати вредност израза: $-2\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4} - 3\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 6\frac{1}{2}$.

Решење: а) 7/2 б) -1/4 в) -13/2

$$-\frac{5}{2} + \frac{23}{4} - \frac{15}{4} + \frac{1}{2} - \frac{13}{2} = -\frac{17}{2} + \frac{8}{4} = \frac{-34+8}{4} = -\frac{26}{4} = -\frac{13}{2}$$

3. (15) Цена робе смањена је за 25%. За колико процената треба снизити нову цену да би цена на крају била дупло јефтинија од почетне цене?

Решење: а) 33,3% б) 25% в) 66,7%

X - цена робе

$$X \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right) = X \cdot 0,75$$

$$0,75 \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right) = 0,15$$

$$1 - \frac{P}{100} = \frac{0,15}{0,75}$$

$$\frac{P}{100} = 1 - \frac{0,15}{0,75}$$

$$\frac{P}{100} = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow P = \frac{100}{3} = 33,3$$

4. (31) 16 радника могу да ураде један насып за 15 дана. После 4 дана разболе се два радника. За колико ће, због тога, закаснити изградња насила?

Решење: а) 2 дана б) 1,57 дана в) 1,8 дана

$$\begin{array}{c} 16 \text{ р. } 15 \text{ д.} \\ \downarrow 16 \text{ р. } 11 \text{ д.} \\ 4 \text{ дана} \\ \hline 12 \text{ р. } x \end{array}$$

$$X : 11 = 16 : 15$$

$$X = \frac{11 \cdot 16}{15} = 12,57 \text{ дана}$$

$$12,57 - 11 = 1,57$$

5. (33д) Решити једначину: $\frac{4x-1}{3} = \frac{4x-8}{6} + 1$. / . 6

Решење: а) $x = -1$ б) $x = 0$ в) $x = 2$

$$\begin{aligned} 2(4x-1) &= 4x-8+6 \\ 8x-2 &= 4x-2 \\ 4x &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

6. (38) Одредити вредност параметра b ако је познато да график функције $y = -3x + b$ пролази кроз тачку $A(-2, -4)$.

Решење: а) $b = -6$ б) $b = -8$ в) $b = -10$

$$\begin{aligned} -4 &= -3 \cdot (-2) + b \\ \Rightarrow -4 &= 6 + b \\ \Rightarrow b &= -10 \end{aligned}$$

7. (45б) Решити систем једначина:

$$\begin{array}{l} 2x+3y=23 \\ x-2y=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \Rightarrow x=1+2y \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2(1+2y)+3y &= 23 \\ \Rightarrow 2+4y+3y &= 23 \\ \Rightarrow 7y &= 21 \\ \Rightarrow y &= 3 \Rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

8. (53а) Решити неједначину: $(x+1)(x+2) < (x-1)^2$.

Решење: а) $x < -1/5$ б) $x > 5/2$ в) $x < 3/4$

$$\begin{aligned} x^2+3x+2 &< x^2-2x+1 \\ 5x &< -1 \\ x &< -1/5 \end{aligned}$$

9. (55е) Решити неједначину: $\frac{x-2}{x+1} \leq 3$.

Решење: а) $x \in [-5/2, -1)$ б) $x \in \{\}$ в) $x \in (-\infty, -5/2] \cup (-1, +\infty)$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+1} - 3 &\leq 0 \Rightarrow \frac{x-2-3x-3}{x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x-5}{x+1} \leq 0 \\ -2x-5 & \quad \text{---} \quad -5/2 \quad -1 \quad \text{---} \quad \infty \\ x+1 & \quad \text{---} \quad \oplus \quad \ominus \quad \text{---} \quad \infty \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, -5/2] \cup (-1, +\infty)$

10. (61м) Рационалисати израз: $\frac{18 \cdot \sqrt[3]{3}}{-12 \cdot \sqrt[3]{32}}$.

Решење: а) $-\frac{3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{32}}{2}$ б) $-\frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{32^2}}$ в) $-\frac{3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{32^2}}{64}$

$$\frac{3 \cdot \sqrt[3]{3}}{-2 \cdot \sqrt[3]{8}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}} \cdot \frac{\sqrt[3]{32^2}}{\sqrt[3]{32^2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{32^2}}{32}$$

11. (62в) Израчунати: $i^{21} - i^{17} + i^{36} - i^{42}$. $= i - i + 1 - (-1) = 2$

Решење: а) i б) 2 в) -1

$$i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 \\ i^{17} = i^{4 \cdot 4 + 1} = i^1$$

$$i^{36} = i^{4 \cdot 9} = 1 \\ i^{42} = i^{4 \cdot 10 + 2} = i^2 = -1$$

12. (68б) Решити следећу једначину: $\frac{4x}{x+3} - \frac{4x}{x^2+4x+3} = 0$.

Решење: а) $x = 1/4$ б) $x = 1$ в) $x = 0$

$$0 = \frac{4x^{(x+1)}}{(x+3)^{(x+1)}} - \frac{4x}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x^2 + 4x - 4x}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x^2}{(x+1)(x+3)} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

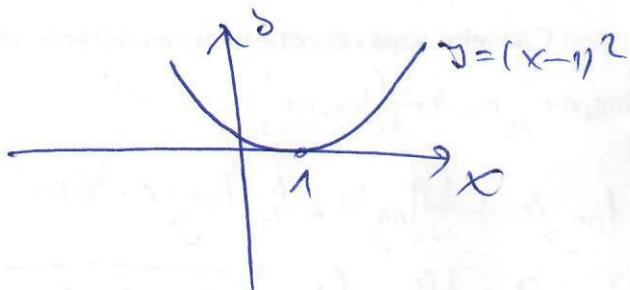
13. (72б) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (1, 3)$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x_1 = 3, x_2 = 1$$

14. (74а) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик: $y = x^2 - 2x + 1$.

$$y = (x-1)^2$$



15. (82a) Израчунати вредност израза: $5\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos 0 - 3\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi$.

Решење: а) -2 б) 12 в) 11

$$5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot \sin(-1) - 1 = 9 + 3 - 1 = 11$$

16. (85б) Одредити вредности остале три тригонометријске функције угла α ако

је $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\left(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\right)$.

$\angle \text{IV}$ квадрант

$\sin\alpha < 0$

$\tan\alpha < 0$

$\cot\alpha < 0$

$$\sin\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\tan\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\cot\alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

17. (94a) Решити следећу једначину: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{3x+2}{2}}$.

Решење: а) $x = 4/3$ б) $x = -4/9$ в) $x = -2/9$

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3x+2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3x+2}{2} \Rightarrow 2 = 9x + 6 \\ \Rightarrow -4 = 9x \Rightarrow x = -4/9$$

18. (95б) Решити једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 1$ в) $x = 0$

$$2^x \cdot (2+4-1) = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

19. (97д) Израчунати: $\log_{2/3} \frac{16}{81}$.

Решење: а) 4 б) 3/4 в) 1/4

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{2^4}{3^4} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 4 \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 4 \cdot 1 = 4$$

20. (99в) Следећи израз свести на један логаритам:

$$\log_x a + \frac{1}{3} \left(\log_x b + \frac{1}{4} \left(\log_x c + \frac{1}{5} \log_x (d+e) \right) \right).$$

$$= \log_x a + \frac{1}{3} \left(\log_x b + \frac{1}{4} \log_x (c \cdot \sqrt[4]{d+e}) \right) = \log_x a + \frac{1}{3} \left(\log_x b + \log_x^{\frac{1}{4}} c \cdot \sqrt[4]{d+e} \right) \\ = \log_x a + \frac{1}{3} \left(\log_x (b \cdot \sqrt[4]{c \cdot \sqrt[4]{d+e}}) \right) = \log_x (a \cdot \sqrt[3]{b \cdot \sqrt[4]{c \cdot \sqrt[4]{d+e}}})$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУН 2019. (други термин)

1. (3б) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је: $P(x) = x^3 - 3x + 2$, $Q(x) = x^4 + x^3 + 4x - 1$

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^3 + 4x - 1) \\ &= x^7 + x^6 + 4x^5 - x^3 - 3x^5 - 3x^4 - 12x^2 + 3x + 2x^4 + 2x^3 + 8x - 2 \\ &= x^7 + x^6 - 3x^5 + 3x^4 + x^3 - 12x^2 + 11x - 2 \end{aligned}$$

2. (9д) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 - 2ab + b^2}$.

$$\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{a-b + a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{2a}{(a-b)^2(a+b)}$$

\downarrow
 $(a-b)(a+b)$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%.

Решење: а) 9375 б) 13125 в) 14745

$$\begin{aligned} 15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \left(1 - \frac{75}{100}\right) &= 15000 \cdot 3,5 \cdot 0,25 \\ &= 13125 \end{aligned}$$

4. (31) 16 радника могу да ураде један насып за 15 дана. После 4 дана разболе се два радника. За колико ће, због тога, закаснити изградња насила?

Решење: а) 2 дана б) 1,57 дана в) 1,8 дана

$$\begin{array}{c} \text{16 радни. 15 дана} \\ \hline \text{16 радни. } \uparrow \text{11 дана} \\ \downarrow \text{14 радни. } \uparrow X \end{array}$$

$$\begin{aligned} X : 11 &= 16 : 15 \\ X &= \frac{11 \cdot 16}{15} = 12,57 \text{ дана} \\ 12,57 - 11 &= \underline{\underline{1,57 \text{ дана}}} \end{aligned}$$

5. (33j) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3}$. / . 6

Решење: а) $x = 3/8$ б) $x = 0$ в) $x = 38/7$

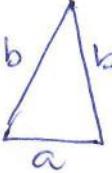
$$\begin{aligned} 8 - 24x - 2 - 3x &= 18 - 20x - 10 \\ 46 - 27x &= 8 - 20x \\ 38 = 7x &\Rightarrow x = 38/7 \end{aligned}$$

6. (42) У функцији $y = (4k-1)x - k + 3$ одредити параметар k тако да функција буде опадајућа и да њен график сече позитиван део y -осе.

Решење: а) $k < 1/4$ б) $k > 3$ в) $k < 3$

$$\begin{array}{l} 4k-1 < 0 \\ 3-k > 0 \\ \hline 4k < 1 \\ 3 > k \end{array} \quad \begin{array}{l} k < \frac{1}{4} \\ k < 3 \end{array} \Rightarrow k < 1/3$$

7. (51) Обим једнакокраког троугла је 30 см, а разлика крака и основице је 3 см. Израчунати основицу и крак троугла?



$$\begin{array}{l} a + 2b = 30 \\ b - a = 3 \\ \hline 3b = 33 \Rightarrow b = 11 \\ \Rightarrow a = 8 \end{array}$$

8. (53a) Решити неједначину: $(x+1)(x+2) < (x-1)^2$.

Решење: а) $x < -1/5$ б) $x > 5/2$ в) $x < 3/4$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + x + 2 &< x^2 - 2x + 1 \\ 3x + 2 &< -2x + 1 \\ 5x < -1 &\Rightarrow x < -1/5 \end{aligned}$$

9. (58g) Израчунати: $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-7}}{2^{-24}}$

Решење: а) $1/4$ б) 16 в) $1/2$

$$\frac{2^{-4} \cdot 2^{-21}}{2^{-24}} = \frac{1}{2^{-29} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-21}} = \frac{1}{2}$$

10. (61б) Рационалисати израз: $\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}}$.

$$\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}(2+\sqrt{3})}{4-3} = \sqrt{7}(2+\sqrt{3})$$

11. (65б) Израчунати вредност израза: $\frac{\bar{z}}{z-2}$ где је $z = 3 - 5i$.

Решење: а) $\frac{10 - 11i}{13}$ б) $\frac{-11 + 10i}{13}$ в) $\frac{10 + 11i}{13}$

$$\begin{aligned} z &= 3 + 5i \\ z - 2 &= 1 - 5i \end{aligned} \quad \frac{\bar{z}}{z-2} = \frac{3+5i}{1-5i} \cdot \frac{1+5i}{1+5i} = \frac{3+20i-25}{1+25} = \frac{-22+20i}{26} = \frac{-12+10i}{13}$$

12. (69в) Саставити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = 3, x_2 = -10$.

$$0 = (x-3)(x+10) = x^2 + 10x - 3x - 30 = x^2 + 7x - 30$$

13. (72б) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 5 < 0$.

Решење: а) $x \in (1,4)$ б) $x \in (-\infty,1) \cup (4,\infty)$ в) $x = \emptyset$

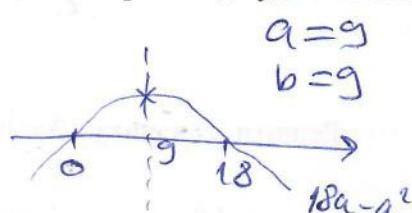
$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} \in \emptyset \end{aligned}$$

14. (81) Број 18 разставити на два сабирка тако да њихов производ буде што већи.

$$a+b=18 \Rightarrow b=18-a$$

$a \cdot b$ га бидејуше чаке.

$$a \cdot b = a \cdot (18-a) =$$



15. (82в) Израчунати вредност израза $\frac{2\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}}{1 + \sin^2\frac{\pi}{4}}$.

Решење: а) $\sqrt{2}$ б) 1

в) $\sqrt{2}/3$

$$\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

16. (84a) Одредити вредности остале три тригонометријске функције угла α ако је $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

$$\cos \alpha > 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha > 0$$

$$\operatorname{ctg} \alpha > 0$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} > 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3}$$

17. (93d) Решити следећу једначину: $a^{x-9} = \frac{1}{a^{x-9}}$.

Решење: a) $x = 9$ б) $x = 18$ в) $x = 0$

$$a^{x-9} = a^{-x+9} \Rightarrow x-9 = -x+9 \\ \Rightarrow 2x = 18 \\ \Rightarrow x = 9$$

18. (95h) Решити једначину: $2 \cdot 4^x + 6^x = 9^x$.

Решење: а) $x = \log_{3/2} 2$ б) $x = 0$ в) $x = \log_2 \frac{3}{2}$

$$2 \cdot 2^x \cdot 2^x + 2^x \cdot 3^x = 3^x \cdot 3^x / : (3^x \cdot 3^x)$$

$$2 \cdot \frac{2^x}{3^x} + \frac{2^x}{3^x} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0$$

$$2t^2 + t - 1 = 0 \\ t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}$$

$$= \log_{3/2} 2$$

19. (97k) Израчунати: $2^{4-\log_2 11}$.

Решење: а) 11/4 б) 16/11 в) 7/4

$$2^4 \cdot 2^{-\log_2 11} = 16 \cdot \frac{1}{2^{\log_2 11}} = \frac{16}{11}$$

20. (100k) Решити једначину: $4 - \log_{10} x = 3\sqrt{\log_{10} x}$.

Решење: а) $x = 10$ б) $x = 1$ в) $x = 1/10$

$$t = \sqrt{\log_{10} x} \geq 0$$

$$4 - t^2 = 3t$$

$$\Rightarrow 0 = t^2 + 3t - 4$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -4 < 0 \perp$$

$$\log_{10} x \geq 0 \\ \Rightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{\log_{10} x} = 1 \Rightarrow \log_{10} x = 1 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow x = 10$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2019.

1. (4a) Одредити $P(x):Q(x)$ ако је: $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$, $Q(x) = x + 2$.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - x^2 - x + 10) : (x + 2) = x^2 - 3x + 5 \\
 - x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 - 3x^2 - x + 10 \\
 - 3x^2 - 6x \\
 \hline
 - 5x + 10 \\
 - 5x - 10 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

2. (9b) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{16x - x^2}{x^2 - 4} + \frac{3 + 2x}{2 - x} - \frac{2 - 3x}{x + 2}$.

Решење: а) $\frac{4x + 3}{x^2 - 4}$

б) $\frac{5x - 2}{x^2 - 4}$

в) $\frac{1}{x + 2}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{16x - x^2 - (3+2x)(x+2) - (2-3x)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{16x - x^2 - 6 - 3x - 2x^2 - 4x + 4 + 3x^2 - 6x}{x^2 - 4} \\
 & = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}
 \end{aligned}$$

3. (18) Ако једну страницу правоугаоне њиве повећамо за 8%, а другу смањимо за 3%, за колико ће се проценити површина њиве?

Решење: а) повећаће се за 4,76% б) повећаће се за 5% в) без промене

$\boxed{a} \rightarrow P_1 = a \cdot b$

$(1,0476 - 1) \cdot 100 = 4,76\%$
изгубљено

$\boxed{b} \rightarrow P_2 = a \cdot b \cdot (1 + \frac{3}{100})$

$P_2 = a \cdot b \cdot 1,08 \cdot 0,97 = a \cdot b \cdot 1,0476$

4. (21б) Одредити x из пропорције: $(0,4x):0,35 = 0,72:0,07$.

$$\frac{4}{10}x \cdot \frac{7}{100} = \frac{35}{100} \cdot \frac{72}{100}$$

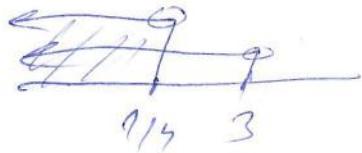
$$4x \cdot 7 \cdot 100 = 35 \cdot 72 \cdot 10 \Rightarrow x = \frac{35 \cdot 72 \cdot 10}{4 \cdot 7 \cdot 100} = 9$$

5. (33б) У функцији $y = (4k-1)x - k + 3$ одредити параметар k тако да функција буде опадајућа и да њен график сече позитиван део y -осе.

Решење: а) $k > 3$ б) $k < 1/4$ в) $k < 2/3$

$$4k-1 < 0 \Rightarrow k < \frac{1}{4}$$

$$3-k > 0 \Rightarrow k < 3 \Rightarrow k < \frac{1}{4}$$



6. (42) У функцији $y = (4k-1)x - k + 3$ одредити параметар k тако да функција буде опадајућа и да њен график сече позитиван део y -осе.

Решење: а) $k < 1/4$ б) $k < 3$ в) $1/4 < k < 3$

7. (48) Збир два броја је 108, а њихов количник је 5:7. Који су то бројеви?

$$x+y=108 \Rightarrow x=108-y$$

$$\underline{x:y=5:7} \Rightarrow 7x=5y \Rightarrow 7(108-y)=5y$$

$$\Rightarrow 756-7y=5y \Rightarrow 12y=756$$

$$\Rightarrow y=63$$

$$\Rightarrow x=45$$

8. (58г) Израчунати: $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-7}}{2^{-24}}$.

Решење: а) $1/2$ б) 4 в) 2

$$\frac{(2^2)^{-2}(2^3)^{-7}}{2^{-24}} = \frac{2^{-4} \cdot 2^{-21}}{2^{-24}} = \frac{2^{-25}}{2^{-24}} = \frac{1}{2^{25-24}} = \frac{1}{2}$$

9. (61а) Рационалисати израз: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Решење: а) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ б) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$ в) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{5-2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$$

10. (61н) Рационалисати израз: $\frac{-8}{2\sqrt{3}+6}$.

Решење: а) $\frac{2\sqrt{3}-6}{3}$ б) $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$ в) $\frac{4\sqrt{3}-2}{3}$

$$\frac{-8}{2\sqrt{3}+6} \cdot \frac{2\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}-6} = \frac{-16\sqrt{3}+48}{4 \cdot 3 - 36} = \frac{-16(\sqrt{3}-3)}{-24} = \frac{2(\sqrt{3}-3)}{3} = \frac{2\sqrt{3}-6}{3}$$

11. (65в) Израчунати вредност израза: $\frac{\bar{z}-3}{z+5}$ где је $z = -6+i$.

Решење: а) $\frac{1+4i}{5}$ б) $5-4i$ в) $4+5i$

$$\begin{aligned} z &= -6-i \\ z-3 &= -9-i \\ z+5 &= -1+i \end{aligned} \quad \frac{z-3}{z+5} = \frac{-9-i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{9+9i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{8+10i}{2} = 4+5i$$

12. (72б) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (1, 3)$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad x_1 = 1, x_2 = 3 \quad \text{--- --- ---} \quad x \notin (1, 3)$$

13. (81) Број 18 разставити на два сабирка тако да њихов производ буде што већи.

$$\begin{aligned} x+y &= 18 \Rightarrow x = 18-y \\ x \cdot y &= (18-y) \cdot y \\ &\text{--- --- ---} \quad x \cdot y \text{ је макс.} \\ &\text{за } y=9 \Rightarrow x=9 \end{aligned}$$

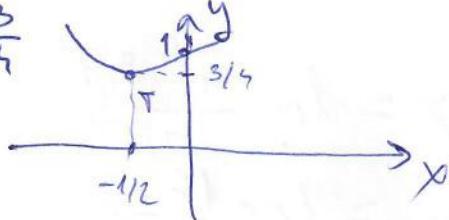
14. (80) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик:

$$y = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$T\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$



15. (82в) Израчунати вредност израза $\frac{2\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}}{1 + \sin^2\frac{\pi}{4}}$.

Решење: а) $\sqrt{3}/2$ б) $\sqrt{2}/3$ в) $2\sqrt{2}/3$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

16. (86а) Доказати идентитет: $\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - 1} = 1$.

$$\frac{1 - 2(1 - \sin^2\alpha)}{2\sin^2\alpha - 1} = \frac{1 - 2 + 2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha - 1} = \frac{2\sin^2\alpha - 1}{2\sin^2\alpha - 1} = 1$$

17. (93б) Решити следећу једначину: $21 \cdot 3^x - 5^{x+2} = 9 \cdot 3^{x+2} - 5^{x+3}$

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 0$ в) $x = -1$

$$21 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^2 \cdot 3^x = 5^x \cdot 5^2 - 5^x \cdot 5^3$$

$$21 \cdot 3^x - 81 \cdot 3^x = 25 \cdot 5^x - 125 \cdot 5^x$$

18. (95д) Решити следећу једначину: $5^{2x} - 3^x - 15 \cdot 25^x + 15 \cdot 3^x = 0$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 3$ в) $x = 1$

$$25^x - 3^x - 15 \cdot 25^x + 15 \cdot 3^x = 0 \\ -14 \cdot 25^x = -14 \cdot 3^x \Rightarrow 25^x = 3^x \Rightarrow x = 0$$

19. (97д) Израчунати: $\log_{2/3} \frac{16}{81}$.

Решење: а) 4 б) 3/4 в) 1/4

$$\log_{2/3} \frac{2^4}{3^4} = \log_{2/3} \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 4 \log_{2/3} \frac{2}{3} = 4 \cdot (-1) = -4$$

20. (100г) Решити једначину: $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$.

Решење: а) $x = 1/6$ б) $x = 6$ в) $x = 1$

$$\log x = \log \frac{4^2 \cdot 3\sqrt{27}}{\sqrt[3]{64}} \\ = \log \frac{16 \cdot 3}{8}$$

$$\log x = \log \frac{2 \cdot 3}{4} \\ x = \frac{3}{4}$$

Смер:



Име и презиме:

Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, СЕПТЕМБАР 2019.

1. (6e) Раставити на чиниоце следећи полином: $ax^3y^3 - 3ax^2y^2 + 3axy - a$.

Решење: а) $a(1 - xy)^3$ б) $a(xy - 1)^3$ в) $a(xy + 1)^3$

$$ax^3y^3 - 3ax^2y^2 + 3axy - a = a(x^3y^3 - 3x^2y^2 + 3xy - 1) \\ = a(xy - 1)^3$$

2. (9a) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2y}{x}$.

$$\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2y}{x} = \frac{x(x+y) + y(x-y) - 2y(x-y)}{(x-y)(x+y)x} = \frac{x^2 + xy + xy - y^2 - 2xy}{(x-y)(x+y)x} \\ = \frac{x^2 - xy^2 + 2y^3}{(x-y)(x+y)x}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%.

Решење: а) 9375 б) 13125 в) 14745

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) = 15000 \cdot 3,5 \cdot 0,25 = 13125$$

4. (21б) Одредити x из пропорције: $(0,4x) : 0,35 = 0,72 : 0,07$.

$$0,4x \cdot 0,07 = 0,72 \cdot 0,35 \Rightarrow \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{100} x = \frac{72}{100} \cdot \frac{35}{100} \\ \Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{90}{100} \Rightarrow x = 9$$

5. (33к) Решити једначину: $(x+2)^2 - (x-3)^2 + (x+4)^2 - (x+1)^2 = 0$.

Решење: а) $x = -5/8$ б) $x = 7/3$ в) $x = 3/4$

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 + 6x - 9 + x^2 + 8x + 16 - x^2 - 2x - 1 = 0 \\ 16x = 10 \Rightarrow x = \frac{-10}{16} = -\frac{5}{8}$$

6. (43) У функцији $y = (3k+6)x + k - 7$ одредити параметар k тако да функција буде растућа и да њен график сече негативни део y -осе.

Решење: а) $k > 7$ б) $-2 < k < 7$ в) $k < -2$

Раслијутај: $\frac{3k+6 > 0}{k-7 < 0} \Rightarrow \frac{3k > -6}{k < 7} \Rightarrow \frac{k > -2}{k < 7} \Rightarrow -2 < k < 7$

7. (54д) Решити систем неједначина:
- $$\begin{aligned} 2(x-3)-2 &> x \\ 2(x-6)+4 &> 3(x-5)-2 \end{aligned}$$

Решење: а) $x < 9$ б) $8 < x < 9$ в) $x > 8$

$$\begin{aligned} 2x-6-2 &> x & x &> 8 \\ 2x-12+4 &> 3x-15-2 & -x &> -9 \\ x &> 8 & x &< 9 \end{aligned} \Rightarrow 8 < x < 9$$

8. (60б) Израчунати: $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[8]{x^7}$.

Решење: а) $x^{11/24}$ б) $x^{61/24}$ в) $x^{19/24}$

$$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{8}} \cdot x^{\frac{7}{8}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8}} = x^{\frac{16+24+21}{24}} = x^{\frac{61}{24}}$$

9. (60г) Израчунати: $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} \cdot \sqrt[12]{a^7b^{11}}$.

Решење: а) $\sqrt[12]{a \cdot b^2}$ б) $a \cdot b \cdot \sqrt[12]{a^2 \cdot b}$ в) $a^2 \cdot b \cdot \sqrt[12]{a \cdot b}$

$$\sqrt[12]{a^8 a^{10} b^2 a^7 b^{11}} = \sqrt[12]{a^{25} b^{13}} = \sqrt[12]{a^9 \cdot a \cdot b^{12} \cdot b} = a^{\frac{9}{12}} b^{\frac{12}{12}} \sqrt[12]{ab}$$

10. (61ј) Рационалисати израз: $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$.

Решење: а) $\frac{7(\sqrt{32} + \sqrt{8})}{40}$ б) $\frac{7\sqrt{2}}{12}$ в) $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$

$$\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{32} - \sqrt{8}} = \frac{7(\sqrt{32} - \sqrt{8})}{32 - 8} = \frac{7(\sqrt{32} - \sqrt{8})}{24} = \frac{7(2\sqrt{8} - \sqrt{8})}{24} = \frac{7 \cdot 2\sqrt{8}}{24} = \frac{7\sqrt{8}}{12}$$

11. (69г) Саставити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2 - 3i$.

$$(x - (2+3i))(x - (2-3i))$$

$$= x^2 - x(2+3i) - x(2-3i) + (2+3i)(2-3i)$$

$$= x^2 - 2x + 3xi - 2x - 3xi + 4 + 9 = x^2 - 4x + 13.$$

12. (726) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (1, 3)$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

$$x \in (1, 3)$$

13. (70a) Раставити на линеарне чиниоце: $x^2 - 5x + 4$.

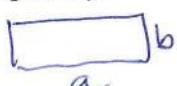
Решење: а) $(x+1)(x-4)$ б) $(x-1)(x-4)$ в) $(x-1)(x+4)$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 4$$

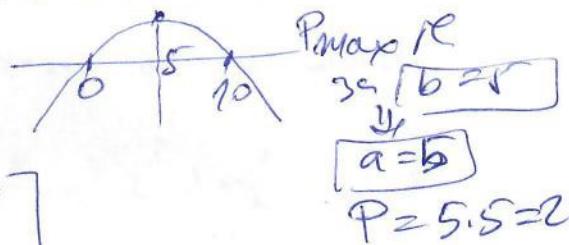
$$x^2 - 5x + 4 = 1 \cdot (x-1)(x-4)$$

14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онај који има највећу површину.



$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow a = 10 - b$$

$$P = a \cdot b \Rightarrow P = (10 - b) \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0 \quad b = 10$$



15. (82г) Израчунати вредност израза $\frac{5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}$.

Решење: а) $-64/7$ б) $-32/15$ в) $18/13$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1;$$

$$\frac{5 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \cdot 1^2} = \frac{5 \cdot \frac{1}{3} + 1}{\frac{3}{4} - 2} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{32}{15}$$

16. (86а) Доказати идентитет: $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = 1$.

$$\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$$

17. (94а) Решити једначину: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{3x+2}{2}}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -4/9$ в) $x = 1/3$

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3x+2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3x+2}{2} \Rightarrow 2 = 9x + 6 \Rightarrow -4 = 9x \Rightarrow x = -\frac{4}{9}$$

18. (95б) Решити следећу једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 1$ б) $x = 4$ в) $x = 0$

$$2^x \cdot (2+4-1) = 10 \Rightarrow 2^x \cdot 5 = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

19. (98ж) Трансформисати у збир следећи израз: $\log_a(4a^3b \cdot \sqrt[7]{x^2y^5})$.

$$\begin{aligned} &= \log_a 4 + 3 \log_a a + \log_a b + \frac{1}{7} \log_a(x^2y^5) \\ &= \log_a 4 + 3 \log_a a^{\cancel{1}} + \log_a b + \frac{1}{7}(2 \log_a x + 5 \log_a y) \end{aligned}$$

20. (100г) Решити једначину: $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$.

Решење: а) $x = 1/6$ б) $x = 6$ в) $x = 1$

$$\begin{aligned} \log x &= \log 4^2 + \log \sqrt[3]{27} - \log \sqrt{64} \\ &= \log \frac{16 \cdot 3}{8} = \log 6 \Rightarrow x = 6 \end{aligned}$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ОКТОБАР 2019.

1. (6e) Раставити на чиниоце следећи полином: $ax^3y^3 - 3ax^2y^2 + 3axy - a$.

Решење: а) $a(1 - xy)^3$ б) $a(xy - 1)^3$ в) $a(xy + 1)^3$

$$a((xy)^3 - 3(xy)^2 \cdot 1 + 3(xy) \cdot 1^2 - 1^3) = a(xy - 1)^3$$

2. (9a) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2y}{x}$.

$$\frac{x(x+y)x + y(x-y)x - 2y(x^2 - y^2)}{(x-y)(x+y)x} = \frac{x^3 + x^2y + xy^2 - xy^2 - 2x^2y + 2y^3}{x(x-y)(x+y)} \\ = \frac{x^3 - x^2y + 2y^3}{x(x-y)(x+y)}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%. Добиће се?

Решење: а) 9375 б) 13125 в) 39375

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) \\ = 15000 \cdot 3,5 \cdot 0,25 = 13125$$

4. (30) Углови троугла односе се као 2:3:4. Колики је највећи угао?

$$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$$

$$\gamma = 4 \cdot k = 80^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta = 3 \cdot k = 60^\circ$$

$$\Rightarrow 2k + 3k + 4k = 180^\circ \Rightarrow 9k = 180^\circ \Rightarrow k = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{k = 20}$$

5. (33к) Решити једначину: $(x+2)^2 - (x-3)^2 + (x+4)^2 - (x+1)^2 = 0$.

Решење: а) $x = -5/8$ б) $x = 7/3$ в) $x = 3/4$

$$\cancel{x^2 + 4x + 4} - \cancel{x^2 + 6x - 9} + \cancel{x^2 + 8x + 16} - \cancel{x^2 - 2x - 1} = 0$$

$$16x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

6. (43) У функцији $y = (3k+6)x + k - 7$ одредити параметар k тако да функција буде растућа и да њен график сече негативни део y -осе.

Решење: а) $k > 7$ б) $-2 < k < 7$ в) $k < -2$

$$\begin{array}{l} 3k+6 > 0 \\ k-7 < 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3k > -6 \\ k < 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} k > -2 \\ k < 7 \end{array} \Rightarrow -2 < k < 7$$

7. (51) Обим једнакокраког троугла је 30 см, а разлика крака и основице је 3 см.
Израчунати основицу и крак.

$$\begin{aligned} a + 2b &= 30 \\ b - a &= 3 \\ 3b &= 33 \\ b &= 11 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 8 \\ b = 11 \end{array} \right.$$

8. (55з) Решити неједначину: $(x-3)(x+2) > 0$.

Решење: а) $x \in (-2, 3)$ б) $x \in (-3, 2) \cup (2, \infty)$ в) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

9. (60г) Израчунати: $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} \cdot \sqrt[12]{a^7b^{11}}$.

Решење: а) $\sqrt[12]{a \cdot b^2}$ б) $a \cdot b \cdot \sqrt[12]{a^2 \cdot b}$ в) $a^2 \cdot b \cdot \sqrt[12]{a \cdot b}$

$$\sqrt[12]{a^8 \cdot a^{10}b^2 \cdot a^7b^{11}} = \sqrt[12]{a^{25} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b} = a^2b \cdot \sqrt[12]{ab}$$

10. (61j) Рационалисати израз: $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$.

Решење: а) $\frac{7(\sqrt{32} + \sqrt{8})}{40}$ б) $\frac{7\sqrt{2}}{12}$ в) $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$

$$\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}} = \frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{7 \cdot \sqrt{8}}{3 \cdot 8} = \frac{7 \cdot 2\sqrt{2}}{3 \cdot 8} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

11. (65g) Израчунати вредност израза: $\frac{z \cdot \bar{z}}{2i + z^2}$ где је $z = 3i$.

$$\frac{3i \cdot (-3i)}{2i - 9} = \frac{-9i^2}{-9 + 2i} = \frac{9}{-9 + 2i} \cdot \frac{-9 - 2i}{-9 - 2i} = \frac{-81 - 18i}{81 + 4} = \frac{-81 - 18i}{85}$$

12. (69h) Составити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = 0$.

Решење: а) $x^2 + 5x = 0$ б) $6x^2 + 5x = 0$ в) $6x^2 - 5x = 0$

$$(x-0)(x-\frac{5}{6})=0 \quad x(6x-5)=0$$

$$x(x-\frac{5}{6})=0 / \cdot 6 \quad \Rightarrow 6x^2 - 5x = 0$$

13. (72d) Решити квадратну неједначину: $x^2 + 6x + 7 > 0$.

Решење: а) $x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2}) \cup (-3 + \sqrt{2}, \infty)$ б) $x \in (-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2})$ в) $x \in \{\}$

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

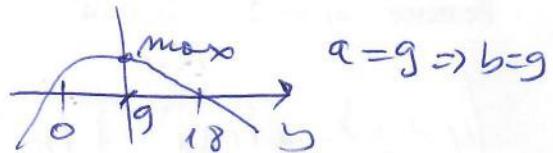
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$$

$$x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2}) \cup (-3 + \sqrt{2}, \infty)$$

14. (81) Број 18 разставити на два сабирка тако да њихов производ буде што већи.

$$a+b=18 \Rightarrow b=18-a$$

$$a \cdot b = a \cdot (18-a) = y$$



15. (83b) Израчунати вредност израза. $3 \sin^2 \frac{\pi}{2} - 4 \tan^2 \frac{\pi}{4} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 3 \cot^2 \frac{\pi}{2}$

Решење: а) $-25/4$ б) $-13/4$ в) $11/4$

$$3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \cdot 0 = -1 - 3 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{13}{4}$$

16. (89a) Одредити сва решења једначине: $\sin \alpha = -1$.

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

17. (93b) Решити следећу једначину: $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$.

Решење: а) $x = 10/7$ б) $x = 2$ в) $x = 3/5$

$$5^{\frac{6-x}{4}} = 5^{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow \frac{6-x}{4} = \frac{x+2}{3} \Rightarrow x = 10/7$$
$$\Rightarrow 18 - 3x = 4x + 8$$

18. (95a) Решити следећу једначину: $21 \cdot 3^x - 5^{x+2} = 9 \cdot 3^{x+2} - 5^{x+3}$

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 0$ в) $x = -1$

$$21 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^2 \cdot 3^x = 5^x \cdot 25 - 5^x \cdot 125 -$$
$$- 60 \cdot 3^x = - 100 \cdot 5^x$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = -1$$

19. (97b) Израчунати: $\log_2 8 \cdot \log_3 81 \cdot \log_2 \frac{1}{16} \cdot \log_3 \frac{1}{27}$.

Решење: а) 1 б) 144 в) 12

$$\log_2 2^3 \cdot \log_3 3^4 \cdot \log_2 2^5 \cdot \log_3 3^{-3} = 3 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-3) = 144$$

20. (100б) Решити једначину: $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 4$ в) $x = 16$

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 7$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7 \Rightarrow 1.5$$

$$1 \log_2 x + 2 \log_2 x + 4 \log_2 x = 28$$

$$7 \log_2 x = 28 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4$$
$$\Rightarrow x = 16$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУН 2017. (први термин)

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (3a) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је $P(x) = x^2 - 2x + 5$ и $Q(x) = x - 3$.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 5)(x - 3) &= x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + 5x - 15 \\ &= x^3 - 5x^2 + 11x - 15 \end{aligned}$$

2. (9б) Извршити назначене операције са разломцима:

$$\frac{x-2y}{x^3+y^3} - \frac{x-y}{x^2y-xy^2+y^3} - \frac{1}{xy+x^2}.$$

Решење: а) $-\frac{x^3+y^3}{xy}$ б) $-\frac{1}{xy}$ в) $-\frac{1}{x^3+y^3}$ $-y(x^2-xy+y^2)$

$$\begin{aligned} \frac{x-2y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} - \frac{x-y}{y(x^2-xy+y^2)} - \frac{1}{x(y+x)} &= \frac{(x-2y)xy - (x-y)x(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)xy} \\ &= \frac{-x^3+2x^2y-x^3+xy^2+x^2y-xy^2-y^3}{xy(x^3+y^3)} = -\frac{(x^3+y^3)}{xy(x^3+y^3)} = -\frac{1}{xy} \end{aligned}$$

3. (15) Цена робе смањена је за 25%. За колико процената треба снизити нову цену да би цена на крају била дупло јефтинија од почетне цене?

Решење: а) 33,3% б) 25% в) 66,7%

$$\begin{aligned} x \cdot 0,75 \cdot p &= x \cdot 0,5 \Rightarrow p = 0,667 \\ (1-0,667) \cdot 100 &= 33,3 \% \end{aligned}$$

4. (21б) Одредити x из пропорције: $(0,4x) : 0,35 = 0,72 : 0,07$.

$$\frac{4}{10}x \cdot \frac{7}{100} = \frac{18}{100} \cdot \frac{5}{35}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{90}{100} \Rightarrow x = 9$$

5. (33д) Решити једначину: $\frac{4x-1}{3} = \frac{4x-8}{6} + 1$. /·6

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -1$ в) $x = 1/2$

$$2(4x-1) = 4x-8+6$$

$$8x-2 = 4x-2 \Rightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0$$

6. (45б) Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 23 \\ x-2y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(1+2y)+3y &= 23 \\ \Rightarrow 2+4y+3y &= 23 \\ \Rightarrow 7y &= 21 \Rightarrow y=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1+2y \\ x &= 7 \end{aligned}$$

7. (39) У функцијама $y=(a-3)x+a-2$ и $y=(2a+1)x-(3a-1)$ одредити параметар a тако да графици функција буду паралелни.

Решење: а) $a = \frac{1}{2}$ б) $a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$ в) $a = -4$

$$\begin{aligned} a-3 &= 2a+1 \\ -a &= 4 \Rightarrow a = -4 \end{aligned}$$

8. (59в) Упростити израз: $\sqrt[6]{128 \cdot 7^8}$.

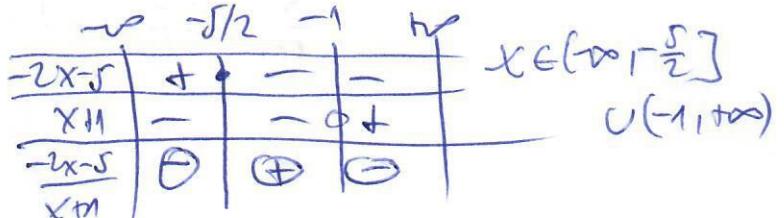
$$\sqrt[6]{7^2 \cdot 7^6 \cdot 2^6 \cdot 2} = 7 \cdot 2 \cdot \sqrt[6]{7^2 \cdot 2} = 14 \cdot \sqrt[6]{98}$$

9. (55е) Решити неједначину: $\frac{x-2}{x+1} \leq 3$.

Решење: а) $x \in [-5/2, -1)$ б) $x \in \{\}$ в) $x \in (-\infty, -5/2] \cup (-1, +\infty)$

$$\frac{x-2}{x+1} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{x-2-3x-3}{x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x-5}{x+1} \leq 0$$

$$\begin{aligned} -2x-5 &= 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \\ x+1 &> 0 \Rightarrow x > -1 \end{aligned}$$



10. (61б) Рационалисати израз: $\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}}$.

Решење: а) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ б) $\frac{\sqrt{7}}{2+\sqrt{3}}$ в) $2\sqrt{7} + \sqrt{21}$

$$\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}(2+\sqrt{3})}{4-3} = 2\sqrt{7} + \sqrt{21}$$

11. (65в) Израчунати вредност израза: $\frac{\bar{z}-3}{z+5}$ где је $z = -6+i$.

Решење: а) $\frac{1+4i}{5}$ б) $5-4i$ в) $4+5i$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= -6-i \\ \bar{z}-3 &= -9-i \\ z+5 &= -1+i \end{aligned} \quad \frac{-9-i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{9+10i-1}{1+1} = \frac{8+10i}{2} = 4+5i$$

12. (68б) Решити следећу једначину: $\frac{4x}{x+3} - \frac{4x}{x^2+4x+3} = 0$.

Решење: а) $x = 1/4$

б) $x = 1$

в) $x = 0$

$$0 = \frac{4x}{x+3} - \frac{4x}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x(x+1)-4x}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x \cdot (x+1-1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x^2}{(x+1)(x+3)}$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

13. (72г) Решити квадратну неједначину: $-5x^2 - 19x + 4 < 0$.

$$x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{1}{5}, +\infty)$$

Решење: а) $x \in (-4, 1/5)$ б) $x \in (-\infty, -4) \cup (1/5, +\infty)$ в) $x \in \{ \}$

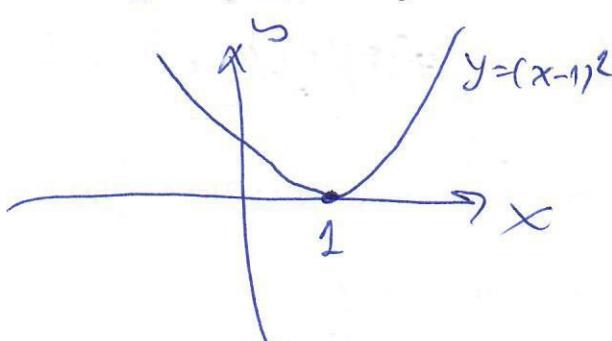
$$\begin{aligned} -5x^2 - 19x + 4 &> 0 \\ x_{1,2} &= \frac{19 \pm \sqrt{361+80}}{-10} = \frac{19 \pm 21}{-10} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow x_2 = \frac{40}{-10} = -4$$

14. (74а) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик:

$$y = x^2 - 2x + 1.$$

$$y = (x-1)^2$$



15. (82в) Израчунати вредност израза $\frac{2\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}}{1 + \sin^2\frac{\pi}{4}}$.

Решење: а) $\sqrt{3}/2$ б) $\sqrt{2}/3$ в) $2\sqrt{2}/3$

$$\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

16. (86а) Доказати идентитет: $\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - 1} = 1$.

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = 1$$

17. (93б) Решити једначину: $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -2/7$ в) $x = 10/7$

$$5^{\frac{6-x}{4}} = 5^{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow \frac{6-x}{4} = \frac{x+2}{3} \Rightarrow 18 - 3x = 4x + 8 \\ 10 = 7x \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

18. (95б) Решити једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 1$ в) $x = 0$

$$2^x(2+4-1) = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

19. (97д) Израчунати: $\log_{2/3} \frac{16}{81}$.

Решење: а) 4 б) 3/4 в) 1/4

$$\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 4 \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 4 \cdot 1 = 4$$

20. (100г) Решити једначину: $\log x = 2\log 4 + \frac{1}{3}\log 27 - \frac{1}{2}\log 64$.

Решење: а) $x = 1/6$ б) $x = 6$ в) $x = 1$

$$\log x = \log \left(\frac{4^2 \cdot 3 \sqrt[3]{27}}{\sqrt[6]{64}} \right) \Rightarrow \log x = \log \frac{18 \cdot 3}{8} \\ \Rightarrow \log x = \log 6 \Rightarrow x = 6$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУН 2017. (други термин)

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (4a) Одредити $P(x) : Q(x)$ ако је: $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$, $Q(x) = x + 2$.

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - x + 10) : (x+2) = x^2 - 3x + 5 \\ - \frac{x^3 + 2x^2}{-3x^2 - x + 10} \\ - \frac{-3x^2 - 6x}{5x + 10} \end{array}$$

2. (8d) Скратити разломак: $\frac{ab + ac - c^2 - bc}{bc + c^2 + 2ab + 2ac}$.

$$\frac{a(b+c) - c(c+b)}{c(b+c) + 2a(b+c)} = \frac{(c+a)(a-c)}{(c+b)(c+2a)} = \frac{a-c}{c+2a}$$

3. (18) Ако једну страницу правоугаоне њиве повећамо за 8%, а другу смањимо за 3%, за колико ће се процената променити површина њиве?

Решење: а) повећаће се за 4,76% б) повећаће се за 5% в) без промене

$$P_1 = a \cdot b \quad \boxed{a}$$

$$P_2 = \boxed{b} \cdot 0,97$$

$$(1,0476 - 1) \cdot 100 = 4,76\% \quad P_2 = a \cdot b \cdot 1,08 \cdot 0,97 = a \cdot b \cdot 1,0476$$

4. (31) 16 радника могу да ураде један насып за 15 дана. После 4 дана разболе се два радника. За колико ће, због тога, закаснити изградња насыпа?

Решење: а) 2 дана б) 1,57 дана в) 1,8 дана

$$12,57 - 11 = 1,57$$

$$\begin{aligned} & \frac{16 \text{ р. } 15 \text{ д.}}{16 \text{ р. } 11 \text{ д.}} - 4 \text{ дена} \\ & \underline{14 \text{ р. } 11 \text{ д.}} \quad X : 11 = 16 : 14 \\ & X = \frac{11 \cdot 16}{14} = 12,57 \end{aligned}$$

5. (33b) Решити једначину: $3,2x - 7,3 = 4,9x - 12,4$.

Решење: а) $x = 3$ б) $x = 59/17$ в) $x = 41/17$

$$\begin{aligned} 3,2x - 4,9x &= 7,3 - 12,4 \\ -1,7x &= -5,1 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

6. (43) У функцији $y = (3k+6)x + k - 7$ одредити параметар k тако да функција буде растућа и да њен график сече негативни део y -осе.

Решење: а) $k > 7$ б) $k < -2$ в) $-2 < k < 7$

$$\begin{aligned} 3k+6 > 0 &\Rightarrow k > -2 \\ k-7 < 0 &\Rightarrow k < 7 \end{aligned} \Rightarrow -2 < k < 7$$

7. (48) Збир два броја је 108, а њихов количник је 5:7. Који су то бројеви?

$$\begin{aligned} x+y = 108 &\Rightarrow x = 108-y \\ \underline{x:y = 5:7} &\Rightarrow 7x \neq 5y \Rightarrow 7(108-y) = 5y \\ &\Rightarrow 756 - 7y = 5y \\ &\Rightarrow 756 = 12y \Rightarrow y = 63, x = 45 \end{aligned}$$

8. (53a) Решити неједначину: $(x+1)(x+2) < (x-1)^2$.

Решење: а) $x < -1/5$ б) $x > 5/2$ в) $x < 3/4$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &< x^2 - 2x + 1 \\ 5x < -1 &\Rightarrow x < -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

9. (60б) Израчунати: $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[8]{x^7}$.

Решење: а) $x^{11/24}$ б) $x^{61/24}$ в) $x^{19/24}$

$$x^{\frac{120}{120}} \cdot \sqrt[8]{x^{80} \cdot x^{7+15}} = x \cdot \sqrt[120]{x^{185}} = x \cdot x^{\frac{120}{120} \sqrt[120]{x^{65}}} = x^2 \cdot x^{\frac{65}{120}} = x^2 \cdot x^{\frac{13}{24}} = x^{\frac{61}{24}}$$

10. (61j) Рационалисати израз: $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$.

Решење: а) $\frac{7\sqrt{2}}{12}$ б) $\frac{7\sqrt{2}}{24}$ в) $\frac{7\sqrt{8}}{6}$

$$\frac{7}{2\sqrt{8}+\sqrt{8}} = \frac{7}{3\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{7 \cdot 2\sqrt{2}}{3 \cdot 8} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

11. (63ж) Израчунати: $\frac{6}{2+3i}$.

Решење: а) $\frac{2+3i}{6}$ б) $\frac{12-18i}{13}$ в) $\frac{11+3i}{5}$

$$\frac{6}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{12-18i}{4+9} = \frac{12-18i}{13}$$

12. (69b) Саставити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = 3, x_2 = -10$.

$$0 = (x-3)(x+10) \Rightarrow x^2 + 10x - 3x - 30 = 0$$

13. (72b) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (1, 3)$

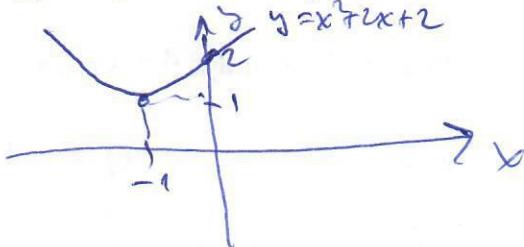
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$


14. (75b) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик: $y = x^2 + 2x + 2$.

$$y = (x+1)^2 + 1$$

$$T(-1, 1)$$



15. (83a) Израчунати вредност израза: $3 - \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}$.

Решење: а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ в) $\frac{7}{12}$

$$3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \cdot 0 - 5 \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = 3 - \frac{3}{4} + 0 - \frac{5}{3} = \frac{36 - 9 - 20}{12} = \frac{7}{12}$$

16. (84a) Одредити вредности остале три тригонометријске функције угла α ако је

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\alpha \in I$$

$$\cos \alpha > 0$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha > 0$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$$

17. (94a) Решити следећу једначину: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{3x+2}{2}}$.

Решење: а) $x = 4/3$ б) $x = -4/9$ в) $x = -2/9$

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3x+2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3x+2}{2} \Rightarrow 2 = 9x + 6$$

$$\Rightarrow -4 = 9x$$

$$\Rightarrow x = -4/9$$

18. (95в) Решити следећу једначину: $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$.

Решење: а) $x_1 = 0, x_2 = 1/2$ б) $x_1 = -1/2, x_2 = 3/2$ в) $x_1 = 1, x_2 = 2$

$$t = 4^x > 0$$

$$2t^2 - 17t + 8 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = 8 \\ x_2 = 1/2 \end{array}$$

19. (97б) Израчунати: $\log_3 81 + 5 \log_{1/2} 16 - 3 \log_2 \frac{1}{32}$.

$$4^x = 2^3 \Rightarrow 2^x = 2^3$$

$$\Rightarrow 2x = 3$$

Решење: а) 1 б) 0 в) -1

$$\begin{aligned} \log_3 3^4 + \log_{1/2} 16^5 + \log_2 32^3 &= 4 + 5 \log_2 2^4 + 3 \cdot 5 \\ &= 4 - 5 \cdot 4 + 15 = -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 3/2$$

20. (100ж) Решити једначину: $4 - \log_{10} x = 3\sqrt{\log_{10} x}$.

$$2^{-1} = 2 \Rightarrow -1 = 2$$

$$\Rightarrow x = -1/2$$

Решење: а) $x = 10$ б) $x = 1$ в) $x = 1/10$

$$t = \sqrt{\log_{10} x} \geq 0$$

$$4 - t = 3t^2$$

$$t^2 = \log_{10} x$$

$$0 = 3t^2 + t - 4$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \end{array}$$

$$\sqrt{\log_{10} x} = 1 \Rightarrow \log_{10} x = 1 \Rightarrow x = 10$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, СЕПТЕМБАР 2017.**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (3a) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је $P(x) = x^2 - 2x + 5$ и $Q(x) = x - 3$.

$$(x^2 - 2x + 5)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + 5x - 15 \\ = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$$

2. (7б) Израчунати вредност израза: $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

Решење: а) $32/45$

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{15} + \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{45} = \frac{32}{45}$$

3. (18) Ако једну страницу правоугаоне њиве повећамо за 8%, а другу смањимо за 3%, за колико ће се процената променити површина њиве?

Решење: а) повећаће се за 4,76% б) повећаће се за 5% в) без промене

$$P_1 = a \cdot b$$

$$P_2 = a \cdot 1,08 \cdot b \cdot 0,97$$

4. (21б) Одредити x из пропорције: $(0,4x) : 0,35 = 0,72 : 0,07$.

$$\frac{4}{10} \cdot x \cdot \frac{72}{100} = \frac{35}{100} \cdot \frac{72}{100} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{90}{100} \Rightarrow (1,0476 - 1) \cdot 100 \\ \Rightarrow x = 9 \quad = 4,76\%$$

5. (33б) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3}$. / · 6

Решење: а) $x = 25/7$ б) $x = 9/7$ в) $x = 38/7$

$$48 - 24x - 2 - 3x = 18 - 20x - 10 \\ 46 - 27x = 8 - 20x \Rightarrow 38 = 7x \Rightarrow x = \frac{38}{7}$$

6. (45h) Решити систем једначина: $y : x = 3 : 5$
 $\underbrace{8x - 9y = 26}_{}$

Решење: а) $(x,y) = (15,9)$ б) $(x,y) = (5,3)$ в) $(x,y) = (10,6)$

$$\begin{aligned} 5y &= 3x \Rightarrow 5y = x \\ 8x - 9y &= 26 \Rightarrow 8 \cdot \frac{5y}{3} - 9y = 26 / \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40y - 27y &= 26 \cdot 3 \\ 13y &= 13 \cdot 3 \\ y &= 6 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 6}{3} = 10 \\ (x,y) &= (10,6) \end{aligned}$$

7. (53a) Решити неједначину: $(x+1)(x+2) < (x-1)^2$.

Решење: а) $x < -1/5$ б) $x > 5/2$ в) $x < 3/4$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &< x^2 - 2x + 1 \\ 5x &< -1 \Rightarrow x = -1/5 \end{aligned}$$

8. (58g) Израчунати: $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-7}}{2^{-24}}$.

Решење: а) $1/2$ б) 4 в) 2

$$\frac{2^{-4} \cdot 2^{-21}}{2^{-24}} = \frac{2^{-25}}{2^{-24}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

9. (61e) Рационалисати израз: $\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$.

$$\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}} \cdot \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}} = \frac{(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7})^2}{9 \cdot 5 - 4 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 5 + 12\sqrt{35} + 4 \cdot 7}{45 - 28} = \frac{73 + 12\sqrt{35}}{17}$$

10. (63z) Извршити назначене операције: $\frac{i}{1+i}$.

Решење: а) $\frac{-1 - 2i}{2}$ б) $-1 + i$ в) $\frac{1+i}{2}$

$$\frac{i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{i - i^2}{1+i} = \frac{i+1}{2}$$

11. (67n) Решити следећу једначину: $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \cdot (4x \cdot 1) + 1^2 \\ &= (4x - 1)^2 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

12. (72б) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (1, 3)$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

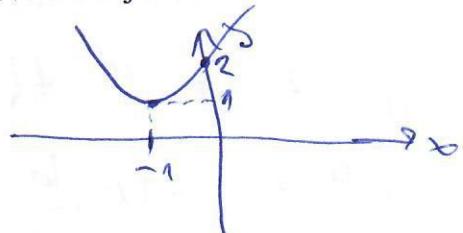
$$x_1 = 1, x_2 = 3$$



13. (75в) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик: $y = x^2 + 2x + 2$.

$$y = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$$

$$\mathcal{T}(-1, 1)$$

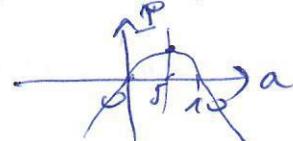


14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онај који има највећу површину.

$$\boxed{a} \quad \boxed{b} \quad 0 = 2a + 2b = 20$$

$$\boxed{a+b=10}$$

$$P = a \cdot b = a(10-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=10 \end{cases}$$



$$P_{\max} \text{ при } \underline{a=5} \quad \underline{b=5}$$

15. (83в) Израчунати вредност израза: $3 \sin^2 \frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2}$.

$$3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \cdot 0 = 3 - 4 - 3 \cdot \frac{3}{4}$$

$$= -1 - \frac{9}{4} = -\frac{13}{4}$$

16. (86а) Доказати идентитет: $\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1} = 1$.

$$\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = 1$$

17. (93в) Решити следећу једначину: $8^x = 7^{x-1} + 7^x$. $\therefore 7^x$

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 1$ в) $x = -1$

$$\frac{8^x}{7^x} = 7^{-1} + 1 \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^x = \frac{1}{7} + 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^x = \frac{8}{7} \Rightarrow x = 1$$

18. (95б) Решити једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 1$ в) $x = 0$

$$2^x \cdot (2+4-1) = 10 \Rightarrow 2^x \cdot 5 = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

19. (98ж) Трансформисати у збир следећи израз: $\log_a(4a^3b \cdot \sqrt[7]{x^2y^5})$.

$$\begin{aligned} & \log_a 4 + \log_a a^3 + \log_a b + \log_a \sqrt[7]{x^2y^5} \\ &= \log_a 4 + 3 + \log_a b + \frac{1}{7}(2\log_a x + 5\log_a y) \end{aligned}$$

20. (100г) Решити једначину: $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$.

Решење: а) $x = 1/6$ б) $x = 6$ в) $x = 1$

$$\begin{aligned} \log x &= \log 4^2 + \log \sqrt[3]{27} - \log \sqrt{64} \\ &= \log \frac{4^2 \cdot 3}{8} = \log 6 \Rightarrow x = 6 \end{aligned}$$

Смер:



Име и презиме:

Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ОКТОБАР 2017.**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (6a) Раставити на чиниоце следећи полином: $m^2x - n^2x + m^2y - n^2y$.

Решење: а) $(m^2 + n^2)(x + y)$ б) $(m - n)(m + n)(x + y)$ в) $(m^2 - n^2)(x - y)$

$$\begin{aligned} x(m^2 - n^2) + y(m^2 - n^2) &= (m^2 - n^2)(x + y) \\ &= (m - n)(m + n)(x + y) \end{aligned}$$

2. (7б) Израчунати вредност израза: $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

Решење: а) 32/45 б) 17/15 в) 23/12

$$\frac{6^2}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{15} + \frac{4}{9} = \frac{12+20}{45} = \frac{32}{45}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%.

Решење: а) 14250 б) 15255 в) 13125

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) = 15000 \cdot 3,5 \cdot 0,25 = 13125.$$

4. (27) Цена једног производа повећана је за 10%, а затим снижена за 10%. За колико процената се променила цена у односу на првобитну?

Решење: а) није се променила б) смањила се за 1% в) повећала се за 1%

$$\begin{aligned} x \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) &= x \cdot 1,1 \cdot 0,9 \\ &= x \cdot 0,99 \\ (1 - 0,99) \cdot 100 &= 1\% \text{ се смањило} \end{aligned}$$

5. (33h) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3}$. / 6

Решење: а) $x = 25/7$ б) $x = 9/7$ в) $x = 38/7$

$$48 - 24x - 2 - 3x = 18 - 20x - 10$$

$$46 - 27x = 8 - 20x \Rightarrow 38 = 7x \Rightarrow x = \frac{38}{7}$$

6. (41a) Одредити параметар k тако да следећа функција буде растућа:

$$y = \frac{3k-1}{k-2} x + 2k-1.$$

Решење: а) $k \in (-\infty, 1/3) \cup (2, +\infty)$ б) $k \in (1/3, 2)$ в) $k \in \{\}$

$$\frac{3k-1}{k-2} > 0$$

$$\begin{array}{c} -1/3 \\ \hline - \quad + \quad + \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \hline - \quad + \quad + \end{array} \quad \begin{array}{c} 3k-1 \\ k-2 \end{array} \quad x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (2, +\infty)$$

$$(-3k+1)/(k-2)$$

$$y : x = 3 : 5$$

7. (45h) Решити систем једначина: $\begin{cases} y = 3x \\ 8x - 9y = 26 \end{cases}$

Решење: а) $(x, y) = (15, 9)$ б) $(x, y) = (5, 3)$ в) $(x, y) = (10, 6)$

$$(x, y) = (10, 6)$$

$$y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

$$8x - 9y = 26 \Rightarrow 8 \cdot \frac{y}{3} - 9y = 26 \Rightarrow 40y - 27y = 78 \Rightarrow 13y = 78$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow y = 6 \\ \Rightarrow x = 10 \end{array}$$

8. (54d) Решити систем неједначина:

$$\begin{cases} 2(x-3) - 2 > x \\ 2(x-6) + 4 > 3(x-5) - 2 \end{cases}$$

Решење: а) $x < 9$ б) $8 < x < 9$ в) $x > 8$

$$\begin{array}{l} 2x - 6 - 2 > x \\ 2x - 12 + 4 > 3x - 15 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x > 8 \\ -x > -9 \Rightarrow x < 9 \end{array} \Rightarrow 8 < x < 9$$

9. (58h) Израчунати: $\frac{3^{-12} \cdot 9^8}{(-3)^4}$.

Решење: а) $1/2$ б) 1 в) 2

$$\frac{3^{-12} \cdot 3^{16}}{3^4} = \frac{3^4}{3^4} = 1$$

10. (61e) Рационалисати израз: $\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$.

$$\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}} \cdot \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}} = \frac{9\cdot 5 + 12\sqrt{35} + 28}{9\cdot 5 - 4\cdot 7} = \frac{73 + 12\sqrt{35}}{17}$$

11. (63ж) Извршити назначене операције: $\frac{i}{1+i}$.

Решење: а) $\frac{-1-2i}{2}$ б) $-1+i$ в) $\frac{1+i}{2}$

$$\frac{i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{i-i^2}{1+i} = \frac{i+1}{2}$$

12. (67и) Решити следећу једначину: $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

$$16x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$(4x-1)^2 = 0 \Rightarrow 4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

13. (72в) Решити квадратну неједначину: $x^2 + 6x + 5 < 0$.

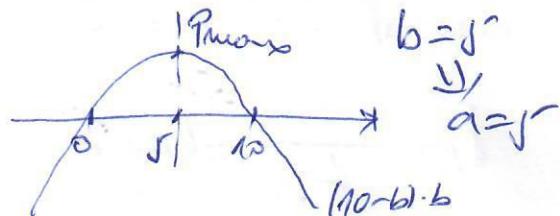
Решење: а) $x \in (-5, -1)$ б) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ в) $x \in \{\}$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \\ x_1 = -1, x_2 = -5 \\ \begin{array}{c} + \\ -5 \\ -1 \\ + \end{array} \rightarrow x \in (-5, -1)$$

14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онај који има највећу површину.

$$P = a \cdot b = (10-b) \cdot b = 0$$

$$2(a+b) = 20 \Rightarrow a+b = 10 \\ \Rightarrow a = 10-b$$



15. (83б) Израчунати вредност израза: $2 + \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2\cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = (17 - \sqrt{3})/4$ в) $x = (11 - \sqrt{3})/4$

$$2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{8+3-\sqrt{3}}{4}$$

16. (86a) Доказати идентитет: $\frac{1-2\cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha - 1} = 1$.

$$\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$$

17. (93ж) Решити једначину: $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 10 / 7$ в) $x = 5 / 4$

$$5^{\frac{6-x}{4}} = 5^{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow \frac{6-x}{4} = \frac{x+2}{3} \Rightarrow 18 - 3x = 4x + 8 \Rightarrow 10 = 7x \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

18. (95в) Решити једначину: $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$.

Решење: а) $x_1 = -1/2$
б) $x_2 = 3/2$

а) $x_1 = 1/2$
б) $x_2 = -3/2$

а) $x_1 = 1/3$
б) $x_2 = -2/3$

$$\begin{aligned} 4^x &= 8 & \frac{1}{2} &= 4^x \\ 2^{2x} &= 2^3 & 2^{-1} &= 2^{2x} \\ 2x &= 3 & -1 &= 2x \\ x &= \frac{3}{2} & x &= -1/2 \end{aligned}$$

$$t = 4^x > 0, \quad 2 \cdot t^2 - 17t + 8 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4} \Rightarrow t_1 = 8, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

19. (98ж) Трансформисати у збир следећи израз: $\log_a(4a^3b \cdot \sqrt[7]{x^2y^5})$.

$$\begin{aligned} &= \log_a 4 + \log_a a^3 + \log_a b + \log_a (x^2y^5)^{\frac{1}{7}} \\ &= \log_a 4 + 3 + \log_a b + \frac{1}{7}(2\log_a x + 5\log_a y) \end{aligned}$$

20. (100а) Решити једначину: $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = 0$.

Решење: а) $x = -1$ б) $x = 4$ в) $x = 2$

$$\log \frac{x}{\frac{1}{x-1}} = \log 2$$

$$\log x \Rightarrow x > 0!$$

$$\log \frac{1}{x-1} \Rightarrow x \geq 1$$

$$\log x(x-1) = \log 2 \Rightarrow x^2 - x = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 \neq -1, \quad x_2 = 2$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2016. (први термин)**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (3a) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је $P(x) = x^2 - 2x + 5$ и $Q(x) = x - 3$.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 5)(x - 3) &= x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 5x + 6x - 15 \\ &= x^3 - 5x^2 + 11x - 15 \end{aligned}$$

2. (8d) Скратити разломак: $\frac{ab + ac - c^2 - bc}{bc + c^2 + 2ab + 2ac}$.

$$\frac{a(b+c) - c(c+a)}{c(b+c) + 2a(b+c)} = \frac{(b+c)(a-c)}{(b+c)(c+2a)} = \frac{a-c}{c+2a}$$

3. (15) Цена робе смањена је за 25%. За колико процената треба снизити нову цену да би цена на крају била дупло јефтинија од почетне цене?

Решење: а) 33,3% б) 25% в) 66,7%

$$X \cdot 0,75 \cdot p = 0,5 \cdot X \Rightarrow p = \frac{0,5}{0,75} = 0,667 \quad (1 - 0,667) \cdot 100 = 33,3\%$$

4. (31) 16 радника могу да ураде један насып за 15 дана. После 4 дана разболе се два радника. За колико ће, због тога, закаснити изградња насыпа?

Решење: а) 2 дана б) 1,57 дана в) 1,8 дана

$$\begin{array}{c} \frac{16 \text{ р. } 15 \text{ г.}}{16 \text{ р. } 11 \text{ г.}} - 4 \text{ дана} \\ \downarrow \frac{14 \text{ р. } X}{11} \end{array} \quad X : 11 = 16 : 15$$

5. (33d) Решити једначину: $\frac{4x-1}{3} = \frac{4x-8}{6} + 1$.

$$X = \frac{11 \cdot 16}{15}$$

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -1$ в) $x = 1/2$

$$\begin{aligned} 8x - 2 &= 4x - 8 + 6 \\ 4x &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$12,57 - 11 = 1,57$$

6. (43) У функцији $y = (3k+6)x + k - 7$ одредити параметар k тако да функција буде растућа и да њен график сече негативни део y -осе.

Решење: а) $k > 7$ б) $k < -2$ в) $-2 < k < 7$

$$(3k+6) > 0 \Rightarrow 3k > -6 \Rightarrow k > -2$$

$$k - 7 < 0 \Rightarrow k < 7$$

$$\Rightarrow -2 < k < 7$$

7. (45б) Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 23 \\ x - 2y &= 1 \\ 2x + 3y &= 23 \\ x = 1 + 2y & \\ 2 + 4y + 3y &= 23 \Rightarrow 7y = 21 \Rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

$$(x, y) = (7, 3)$$

$$x = 7$$

8. (53а) Решити неједначину: $(x+1)(x+2) < (x-1)^2$.

Решење: а) $x < -1/5$ б) $x > 5/2$ в) $x < 3/4$

$$x^2 + 3x + 2 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 5x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{5}$$

9. (59в) Упростити израз: $\sqrt[6]{128 \cdot 7^8}$.

$$\sqrt[6]{2^6 \cdot 2 \cdot 7^6 \cdot 7^2} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt[6]{2 \cdot 7^2} = 14 \cdot \sqrt[6]{49}$$

10. (61б) Рационалисати израз: $\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}}$.

Решење: а) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ б) $\frac{\sqrt{7}}{2+\sqrt{3}}$ в) $2\sqrt{7} + \sqrt{21}$

$$\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}(2+\sqrt{3})}{4-3} = \sqrt{7}(2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{7} + \sqrt{21}$$

11. (63ж) Израчунати: $\frac{6}{2+3i}$.

Решење: а) $\frac{2+3i}{6}$ б) $\frac{12-18i}{13}$ в) $\frac{11+3i}{5}$

$$\frac{6}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{12-18i}{4+9} = \frac{12-18i}{13}$$

12. (68б) Решити следећу једначину: $\frac{4x}{x+3} - \frac{4x}{x^2 + 4x + 3} = 0$.

Решење: а) $x = 1/4$ б) $x = 1$ в) $x = 0$

$$0 = 4x \cdot \left(\frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x+3)(x+1)} \right) = 4x \cdot \frac{x+1-1}{(x+3)(x+1)} = \frac{4x^2}{(x+3)(x+1)} \Rightarrow x=0$$

13. (72б) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

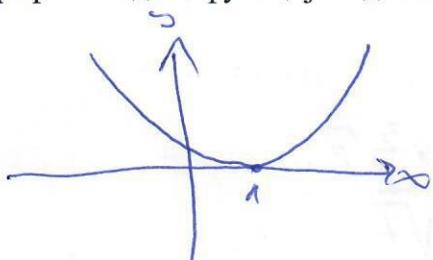
Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (1, 3)$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ x_1=1, x_2=3 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \quad x \in (1, 3)$$

14. (74а) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик:

$$y = x^2 - 2x + 1.$$

$$y = (x-1)^2$$



15. (83а) Израчунати вредност израза: $3 - \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}$.

Решење: а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ в) $\frac{7}{12}$

$$3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3 - \frac{3}{4} - 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{36-9-20}{12} = \frac{7}{12}$$

16. (84а) Одредити вредности остале три тригонометријске функције угла α ако

$$\text{је } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

$\cos \alpha > 0$ $\angle \alpha$ квадрант

$\operatorname{tg} \alpha > 0$

$\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$$

17. (94а) Решити следећу једначину: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{3x+2}{2}}$.

Решење: а) $x = 4/3$ б) $x = -4/9$ в) $x = -2/9$

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3x+2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3x+2}{2} \Rightarrow x = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 2 = 9x + 6 \Rightarrow -4 = 9x$$

18. (95б) Решити једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 1$ в) $x = 0$

$$2^x(2+4-1)=10 \Rightarrow 2^x \cdot 5=10 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$$

19. (97б) Израчунати: $\log_3 81 + 5 \log_{1/2} 16 - 3 \log_2 \frac{1}{32}$.

Решење: а) 1 б) 0 в) -1

$$\log_3 3^4 + 5 \log_2 2^4 - 3 \log_2 2^{-5} = 4 - 20 + 15 = -1$$

20. (100г) Решити једначину: $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$.

Решење: а) $x = 1/6$ б) $x = 6$ в) $x = 1$

$$\log x = \log \frac{4^2 \cdot \sqrt[3]{27}}{\sqrt{64}}$$

$$= \log \frac{16 \cdot 3}{8}$$

$$= \log (2 \cdot 3) \Rightarrow x = 6$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2016. (други термин)**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (6a) Раставити на чиниоце следећи полином: $m^2x - n^2x + m^2y - n^2y$.

Решење: а) $(m^2 + n^2)(x + y)$ б) $(m - n)(m + n)(x + y)$ в) $(m^2 - n^2)(x - y)$

$$x(m^2 - n^2) + y(m^2 - n^2) = (m^2 - n^2)(x + y) \\ = (m - n)(m + n)(x + y)$$

2. (7б) Израчунати вредност израза: $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

Решење: а) $32/45$ б) $17/15$ в) $23/12$

$$\frac{15}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{15} + \frac{4}{9} = \frac{12+20}{45} = \frac{32}{45}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%.

Решење: а) 14250 б) 15255 в) 13125

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) = 15000 \cdot 3,5 \cdot 0,25 = 13125$$

4. (27) Цена једног производа повећена је за 10%, а затим снижена за 10%. За колико процената се променила цена у односу на првобитну?

Решење: а) није се променила б) смањила се за 1% в) повећала се за 1%

$$x \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = x \cdot 1,1 \cdot 0,9 = x \cdot 0,99$$

$$(1-0,99) \cdot 100\% \Rightarrow 1\%$$

5. (33б) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3}$.

Решење: а) $x = 25/7$ б) $x = 9/7$ в) $x = 38/7$

$$8 - 24x - 2 - 3x = 18 - 20x - 10$$

$$46 - 27x = 8 - 20x$$

$$38 = 7x \Rightarrow x = \frac{38}{7}$$

6. (41a) Одредити параметар k тако да следећа функција буде растућа:

$$y = \frac{3k-1}{k-2}x + 2k - 1.$$

$$k \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (2, +\infty)$$

Решење: а) $k \in (-\infty, 1/3) \cup (2, +\infty)$ б) $k \in (1/3, 2)$ в) $k \in \{\}$

$$\frac{3k-1}{k-2} > 0$$

$$3k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \infty & 1/3 & 2 & & + \\ & - & - & + & + & + & \\ \frac{3k-1}{k-2} & - & - & + & + & + & \\ \oplus & & \oplus & \oplus & \oplus & & \end{array}$$

$$y : x = 3 : 5$$

7. (45h) Решити систем једначина: $8x - 9y = 26$.

Решење: а) $(x, y) = (15, 9)$ б) $(x, y) = (5, 3)$ в) $(x, y) = (10, 6)$

$$\begin{aligned} 5y &= 3x \Rightarrow \frac{5y}{3} = x \\ 8x - 9y &= 26 \Rightarrow 8\left(\frac{5y}{3}\right) - 9y = 26/3 \Rightarrow 40y - 27y = 78 \\ &\quad 13y = 78 \\ &\quad y = 6 \end{aligned}$$

8. (54d) Решити систем неједначина: $2(x-3) - 2 > x$
 $2(x-6) + 4 > 3(x-5) - 2$.

Решење: а) $x < 9$ б) $8 < x < 9$ в) $x > 8$

$$\begin{aligned} 2x - 6 - 2 &> x \Rightarrow x > 8 \\ 2x - 12 + 4 &> 3x - 15 - 2 \Rightarrow -x > -9 \Rightarrow x < 9 \end{aligned} \Rightarrow 8 < x < 9$$

9. (58g) Израчунати: $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-7}}{2^{-24}}$.

$$\begin{aligned} \frac{(2^2)^{-2} \cdot (2^3)^{-7}}{2^{-24}} &= \frac{2^{-4} \cdot 2^{-21}}{2^{-24}} \\ &= \frac{2^{-25}}{2^{-24}} = \frac{1}{2^1} \end{aligned}$$

10. (61e) Рационалисати израз: $\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$.

$$\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}} \cdot \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}} = \frac{9 \cdot 5 + 12\sqrt{35} + 4 \cdot 7}{9 \cdot 5 - 4 \cdot 7} = \frac{73 + 12\sqrt{35}}{17}$$

11. (63z) Извршити назначене операције: $\frac{i}{1+i}$.

Решење: а) $\frac{-1 - 2i}{2}$ б) $-1 + i$ в) $\frac{1+i}{2}$

$$\frac{i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{i - i^2}{1+1} = \frac{i+1}{2}$$

12. (67и) Решити следећу једначину: $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

$$0 = 16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \\ \Rightarrow 4x = 1 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

13. (72в) Решити квадратну неједначину: $x^2 + 6x + 5 < 0$.

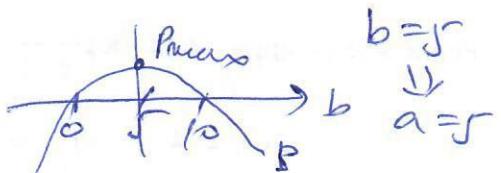
Решење: а) $x \in (-5, -1)$ б) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ в) $x \in \{\}$

$$x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5)$$

$$x \in (-5, -1)$$

14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онај који има највећу површину.

$$\Phi = a \cdot b = (10 - b) \cdot b \\ 2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \\ \Rightarrow a = 10 - b$$



15. (83в) Израчунати вредност израза: $3 \sin^2 \frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2}$.

$$3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \cdot 0 \\ = 3 - 4 - 3 \cdot \frac{3}{4} = -1 - \frac{9}{4} = -\frac{13}{4}$$

16. (86а) Доказати идентитет: $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = 1$.

$$\frac{1 - 2(1 - \sin^2 \alpha)}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{1 - 2 + 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{2 \sin^2 \alpha - 1}$$

17. (93в) Решити следећу једначину: $8^x = 7^{x-1} + 7^x$. / : 7^x

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 1$ в) $x = -1$

$$\frac{8^x}{7^x} = \frac{7^{x-1}}{7^x} + \frac{7^x}{7^x} \\ \left(\frac{8}{7}\right)^x = \frac{1}{7} + 1 \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^x = \frac{8}{7} \\ \Rightarrow x = 1$$

18. (95в) Решити једначину: $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{4}$$

Решење: а) $x_1 = -1/2$ б) $x_1 = 1/2$ в) $x_1 = 1/3$
б) $x_2 = 3/2$ в) $x_2 = -3/2$ в) $x_2 = -2/3$

$$= \frac{17 \pm 15}{4}$$

$$0 < t = 4^x, t^2 = 4^{2x}, 2t^2 - 17t + 8 = 0 \\ 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow x = 3/2 ; 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow x = -1/2$$

19. (98ж) Трансформисати у збир следећи израз: $\log_a(4a^3b \cdot \sqrt[7]{x^2y^5})$.

$$\log_a^4 + \log_a a^3 + \log_a b + \frac{1}{7}(2\log_a x + 5\log_a y) \\ = \log_a^4 + 3 + \log_a b + \frac{1}{7}(2\log_a x + 5\log_a y)$$

20. (100а) Решити једначину: $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = 0$.

Решење: а) $x = -1$ б) $x = 4$ в) $x = 2$

$$\log x \Rightarrow x > 0$$

$$\log \frac{1}{x-1} \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 1}$$

$$\log x = \log \frac{1}{x-1} + \log 2$$

$$\log x = \log \frac{2}{x-1}$$

$$x = \frac{2}{x-1} \Rightarrow x(x-1) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ x_1 \neq -1 \quad \boxed{x_2 = 2} \end{array}$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, СЕПТЕМБАР 2016.**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (4a) Одредити $P(x):Q(x)$ ако је: $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$, $Q(x) = x + 2$.

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - x + 10) : (x + 2) = x^2 - 3x + 5 \\ \underline{- x^3 - 2x^2} \\ \hline -3x^2 - x + 10 \\ \underline{- 3x^2 - 6x} \\ \hline 5x + 10 \\ \underline{5x} \quad \underline{10} \end{array}$$

2. (9б) Извршити назначене операције са разломцима:

$$\frac{x-2y}{x^3+y^3} - \frac{x-y}{x^2y-xy^2+y^3} - \frac{1}{xy+x^2} = \frac{(x-2y)xy - (x-y)(x+y) - y(x^2-x^2y+y^2)}{(x+y)(x^2-x^2y+y^2)xy}$$

$$\text{Решење: } a) -\frac{x^3+y^3}{xy} \quad b) -\frac{1}{xy} \quad v) -\frac{1}{x^3+y^3}$$

$$= \frac{x^2y - 2xy^2 - x^3 + xy^2 - yx^2 + xy^2 - y^3}{(x+y)(x^2-x^2y+y^2)xy} = \frac{-(x^3+y^3)}{(x^3+y^3)xy} = -\frac{1}{xy}$$

3. (18) Ако једну страницу правоугаоне њиве повећамо за 8%, а другу смањимо за 3%, за колико ће се процената променити површина њиве?

Решење: а) повећаће се за 4,76% б) повећаће се за 5% в) без промене

$$\boxed{\frac{a}{a}} b \quad P_1 = a \cdot b \quad \boxed{\frac{b}{a \cdot 1,08}} \quad b \cdot 0,97 \quad P_2 = a \cdot b \cdot 1,08 \cdot 0,97 = a \cdot b \cdot 1,0476$$

4. (21б) Одредити x из пропорције: $(0,4x):0,35 = 0,72:0,07$.

$$\frac{4}{10}x \cdot \frac{7}{100} = \frac{35}{100} \cdot \frac{72}{100} / \cdot 10000$$

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot x = \frac{5}{35} - \frac{18}{72}$$

$$10x = 5 \cdot 18$$

$$x = 9$$

$$(1,0476 - 1) \cdot 100 = 4,76\%$$

5. (33б) Решити једначину: $3,2x - 7,3 = 4,9x - 12,4$.

Решење: а) $x = 3$ б) $x = 59/17$ в) $x = 41/17$

$$12,4 - 7,3 = 4,9x - 3,2x \Rightarrow 5,1 = 1,7x \Rightarrow x = 3$$

6. (39) У функцијама $y = (a-3)x + a - 2$ и $y = (2a+1)x - (3a-1)$ одредити параметар a тако да графици функција буду паралелни.

Решење: а) $a = \frac{1}{2}$ б) $a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$ в) $a = -4$

$$a-3 = 2a+1$$

$$-4 = a$$

7. (48) Збир два броја је 108, а њихов количник је 5:7. Који су то бројеви?

$$x+y=108 \Rightarrow x=108-y \quad (x, y) = (45, 63)$$

$$\underline{x:y = 5:7} \Rightarrow 7x = 5y \Rightarrow 7(108-y) = 5y$$

$$\Rightarrow 756 - 7y = 5y$$

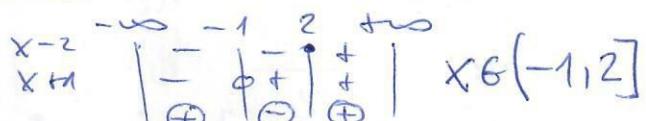
$$\Rightarrow 756 = 12y \Rightarrow y = 63 \Rightarrow x = 45$$

8. (55б) Решити неједначину: $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$.

Решење: а) $x \in [-5/2, -1)$ б) $x \in (-\infty, -5/2] \cup (-1, +\infty)$

$$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$



9. (60б) Израчунати: $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[8]{x^7}$.

Решење: а) $x^{11/24}$ б) $x^{61/24}$ в) $x^{19/24}$

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot x \cdot \sqrt[8]{x^7} = x^{\frac{2}{3}} \sqrt[24]{x^{16} \cdot x^{21}} = x^{\frac{2}{3}} \sqrt[24]{x^{37}} = x \cdot x \cdot \sqrt[24]{x^{13}} = x^2 \cdot x^{\frac{13}{24}} = x^{\frac{61}{24}}$$

10. (61j) Рационалисати израз: $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$.

Решење: а) $\frac{7\sqrt{2}}{12}$ б) $\frac{7\sqrt{2}}{24}$ в) $\frac{7\sqrt{8}}{6}$

$$\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}} = \frac{7}{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = \frac{7}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6 \cdot 2} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

11. (65в) Израчунати вредност израза: $\frac{\bar{z}-3}{z+5}$ где је $z = -6+i$.

Решење: а) $\frac{1+4i}{5}$ б) $5-4i$ в) $4+5i$

12. (69в) Саставити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = 3, x_2 = -10$.

$$\begin{aligned} O &= (x-3)(x+10) \\ \Rightarrow O &= x^2 + 10x - 3x - 30 \\ \Rightarrow O &= x^2 + 7x - 30 \end{aligned}$$

13. (72г) Решити квадратну неједначину: $-5x^2 - 19x + 4 < 0$.

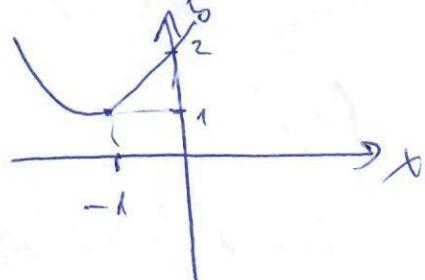
Решење: а) $x \in (-4, 1/5)$ б) $x \in (-\infty, -4) \cup (1/5, +\infty)$ в) $x \in \{\}$

$$-5x^2 - 19x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{381+80}}{-10} = \frac{19 \pm 21}{-10} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = \frac{1}{5}$$

14. (75в) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик:
 $y = x^2 + 2x + 2$.

$$y = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$$

$\Gamma(-1, 1)$



15. (82в) Израчунати вредност израза $\frac{2\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}}{1 + \sin^2\frac{\pi}{4}}$.

Решење: а) $\sqrt{3}/2$ б) $\sqrt{2}/3$ в) $2\sqrt{2}/3$

$$\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

16. (89в) Одредити сва решења једначине: $\cos \alpha = -1/2$.

$$\alpha \in \text{II} \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \alpha &\in \text{III} \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

17. (93б) Решити једначину: $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -2 / 7$ в) $x = 10 / 7$

$$5^{\frac{6-x}{4}} = 5^{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow \frac{6-x}{4} = \frac{x+2}{3} \Rightarrow 18 - 3x = 4x + 8 \\ 10 = 7x \Rightarrow x = 10 / 7$$

18. (95в) Решити следећу једначину: $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$.

Решење: а) $x_1 = 0, x_2 = 1 / 2$ б) $x_1 = -1 / 2, x_2 = 3 / 2$ в) $x_1 = 1, x_2 = 2$

$$t = 4^x, t^2 = 4^{2x} \quad 2t^2 - 17t + 8 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4}$$

19. (97д) Израчунати: $\log_{2/3} \frac{16}{81}$.

Решење: а) 4 б) 3/4 в) 1/4

$$\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 4 \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 4 \cdot 1 = 4$$

20. (100ж) Решити једначину: $4 - \log_{10} x = 3\sqrt{\log_{10} x}$.

Решење: а) $x = 10$ б) $x = 1$ в) $x = 1 / 10$

$$t = \sqrt{\log_{10} x} \geq 0, x > 0$$

$$t^2 = \log_{10} x$$

$$4 - t^2 = 3t \Rightarrow 0 = t^2 + 3t - 4$$

$$\Rightarrow t_1 = 1, t_2 \neq -4$$

$$\sqrt{\log_{10} x} = 1$$

$$\log_{10} x = 1$$

$$x = 10^1 = 10$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ОКТОБАР 2016.**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (3a) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је $P(x) = x^2 - 2x + 5$ и $Q(x) = x - 3$.

$$(x^2 - 2x + 5)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + 5x - 15 \\ = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$$

2. (7б) Израчунати вредност израза: $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

Решење: а) $32/45$ б) $17/15$ в) $23/12$

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{15} + \frac{4}{9} = \frac{12+20}{45} = \frac{32}{45}$$

3. (18) Ако једну страницу правоугаоне њиве повећамо за 8%, а другу смањимо за 3%, за колико ће се процената променити површина њиве?

Решење: а) повећаће се за 4,76% б) повећаће се за 5% в) без промене

$$\boxed{\frac{a}{a+b}} b \quad P_1 = a \cdot b \quad \boxed{\frac{a \cdot 1,08}{a+1,08} \cdot b \cdot 0,97} \quad P_2 = a \cdot 1,08 \cdot b \cdot 0,97 \\ = a \cdot b \cdot 1,0476$$

4. (21б) Одредити x из пропорције: $(0,4x):0,35 = 0,72:0,07$.

$$\frac{4}{10} x \cdot \frac{7}{100} = \frac{35}{100} \cdot \frac{72}{100}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{9}{100} \Rightarrow x = \frac{900}{100} = 9$$

5. (33б) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3}$. / . C

Решење: а) $x = 25/7$ б) $x = 9/7$ в) $x = 38/7$

$$8 - 24x - 3x = 18 - 20x - 10 \Rightarrow 46 - 27x = 8 - 20x$$

$$y:x = 3:5$$

$$\Rightarrow 38 = 7x \Rightarrow x = 38/7$$

6. (45б) Решити систем једначина: $8x - 9y = 26$.

Решење: а) $(x,y) = (15,9)$ б) $(x,y) = (5,3)$ в) $(x,y) = (10,6)$

$$x=10, y=6$$

$$y=3k, x=5k \Rightarrow 8 \cdot 5k - 9 \cdot 3k = 26$$

$$\Rightarrow 40k - 27k = 26 \Rightarrow 13k = 26 \Rightarrow k = 2$$

7. (53a) Решити неједначину: $(x+1)(x+2) < (x-1)^2$.

Решење: а) $x < -1/5$ б) $x > 5/2$ в) $x < 3/4$

$$x^2 + 3x + 2 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 5x < -1 \Rightarrow x < -1/5$$

8. (60б) Израчунати: $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[8]{x^7}$.

Решење: а) $x^{11/24}$ б) $x^{61/24}$ в) $x^{19/24}$

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot x \cdot \sqrt[8]{x^7} = x \cdot \sqrt[24]{x^{16} \cdot x^{21}} = x \cdot \sqrt[24]{x^{37}} = x \cdot x^{\frac{37}{24}} = x^{\frac{61}{24}}$$

9. (61e) Рационалисати израз: $\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$.

$$\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}} \cdot \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}} = \frac{(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7})^2}{9 \cdot 5 - 4 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 5 + 12\sqrt{35} + 4 \cdot 7}{45 - 28} = \frac{73 + 12\sqrt{35}}{17}$$

$$10. (63ж) Израчунати: \frac{6}{2+3i}. \quad \frac{6}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{12-18i}{4+9} = \frac{12-18i}{13}$$

Решење: а) $\frac{2+3i}{6}$ б) $\frac{12-18i}{13}$ в) $\frac{11+3i}{5}$

11. (67и) Решити следећу једначину: $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

$$0 = 16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \\ \Rightarrow 4x = 1 \\ \Rightarrow x = 1/4$$

12. (72б) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (1, 3)$ $x \notin (1, 3)$

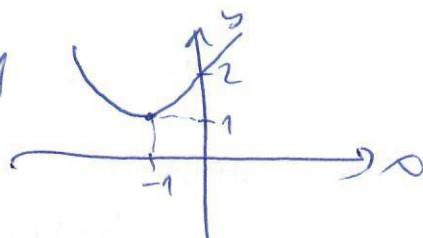
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$



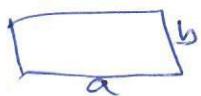
13. (75в) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик: $y = x^2 + 2x + 2$.

$$y = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$$

$$T(-1, 1)$$



14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 cm одредити онај који има највећу површину.

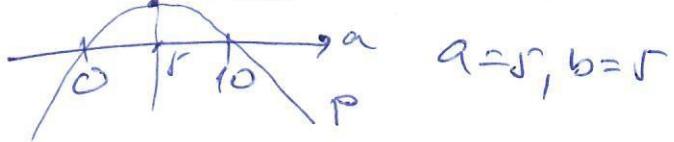


$$O = 2a + 2b = 20$$

$$a+b=10$$

$$b=10-a$$

$$P=a \cdot b = a(10-a) \stackrel{\text{Приказ}}{=} 0 \quad a=0, a=10$$



$$a=5, b=5$$

15. (83a) Израчунати вредност израза: $3 - \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}$.

Решење: а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ в) $\frac{7}{12}$

$$3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = 3 - \frac{3}{4} - 5 \cdot \frac{4}{3} = 3 - \frac{3}{4} - 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{36-9-20}{12} = \frac{7}{12}$$

16. (86a) Доказати идентитет: $\frac{1-2(1-\sin^2 x)}{2\sin^2 x - 1} = \frac{1-2+2\sin^2 x}{2\sin^2 x - 1} = 1$.

$$\frac{1-2(1-\sin^2 x)}{2\sin^2 x - 1} = \frac{1-2+2\sin^2 x}{2\sin^2 x - 1} = \frac{2\sin^2 x - 1}{2\sin^2 x - 1} = 1$$

17. (93б) Решити једначину: $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -2/7$ в) $x = 10/7$

$$5^{\frac{6-x}{4}} = 5^{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow \frac{6-x}{4} = \frac{x+2}{3} \Rightarrow 18-3x = 4x+8 \\ 10 = 7x \Rightarrow x = 10/7$$

18. (95б) Решити једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 1$ в) $x = 0$

$$2^x(2+4-1)=10 \Rightarrow 2^x \cdot 5 = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

19. (98ж) Трансформисати у збир следећи израз: $\log_a(4a^3b \cdot \sqrt[7]{x^2y^5})$.

$$\begin{aligned} & \log_a^4 + \log_a^3 + \log_a^b + \frac{1}{7}(2\log_a x + 5\log_a y) \\ & = \log_a^4 + 3 + \log_a^b + \frac{1}{7}(2\log_a x + 5\log_a y) \end{aligned}$$

20. (100г) Решити једначину: $\log x = 2\log 4 + \frac{1}{3}\log 27 - \frac{1}{2}\log 64$.

Решење: а) $x = 1/6$ б) $x = 6$ в) $x = 1$

$$\log x = \log \frac{4^2 \cdot \sqrt[3]{27}}{\sqrt[6]{64}} \Rightarrow \log x = \log \frac{16 \cdot 3}{8} \Rightarrow \log x = \log 6 \Rightarrow x = 6$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2015. (први термин)

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (3a) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је $P(x) = x^2 - 2x + 5$ и $Q(x) = x - 3$.

$$(x^2 - 2x + 5)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 5x + 6x - 15 \\ = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$$

2. (8d) Скратити разломак: $\frac{ab + ac - c^2 - bc}{bc + c^2 + 2ab + 2ac}$.

$$\frac{a(b+c) - c(a+b)}{c(b+c) + 2a(b+c)} = \frac{(b+c)(a-c)}{(b+c)(c+2a)} = \frac{a-c}{c+2a}$$

3. (15) Цена робе смањена је за 25%. За колико процената треба снизити нову цену да би цена на крају била дупло јефтинија од почетне цене?

Решење: а) 33,3% б) 25% в) 66,7%

$$x \cdot 0,75 \cdot p = x \cdot 0,5 \Rightarrow p = \frac{0,5}{0,75} = 0,667 \\ (1 - 0,667) \cdot 100 = 33,3\%$$

4. (31) 16 радника могу да ураде један насып за 15 дана. После 4 дана разболе се два радника. За колико ће, због тога, закаснити изградња насила?

Решење: а) 2 дана б) 1,57 дана в) 1,8 дана

$$x : 11 = 16 : 14 \\ x = \frac{11 \cdot 16}{14} = 12,57 \text{ дана}$$

$$\begin{array}{r} 16 \text{ р. } 15 \text{ г.} \\ 16 \text{ р. } 11 \text{ г.} \\ \hline 14 \text{ р. } x \end{array} \quad \text{- 4 дана}$$

5. (33d) Решити једначину: $\frac{4x-1}{3} = \frac{4x-8}{6} + 1$. / .6 $12,57 - 1 = \underline{\underline{1,57}}$

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -1$ в) $x = 1/2$

$$8x - 2 = 4x - 8 + 6 \\ 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

6. (43) У функцији $y = (3k + 6)x + k - 7$ одредити параметар k тако да функција буде растућа и да њен график сече негативни део y -осе.

Решење: а) $k > 7$ б) $k < -2$ в) $-2 < k < 7$

$$\begin{array}{l} 3k+6 > 0 \\ k-7 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} k > -2 \\ k < 7 \end{array} \Rightarrow -2 < k < 7$$

7. (45б) Решити систем једначина:

$$\begin{array}{l} 2x+3y=23 \\ x-2y=1 \end{array} \cdot \Rightarrow \boxed{x=1+2y}$$

$$\begin{aligned} 2(1+2y)+3y &= 23 \\ \Rightarrow 2+4y+3y &= 23 \\ \Rightarrow 7y &= 21 \\ \Rightarrow y &= 3 \Rightarrow \boxed{x=7} \end{aligned} \quad (x,y) = (7,3)$$

8. (53а) Решити неједначину: $(x+1)(x+2) < (x-1)^2$.

Решење: а) $x < -1/5$ б) $x > 5/2$ в) $x < 3/4$

$$x^2+3x+2 < x^2-2x+1 \\ \boxed{x < -1} \Rightarrow x < -1/5$$

9. (59в) Упростити израз: $\sqrt[6]{128 \cdot 7^8}$.

$$\sqrt[6]{2^7 \cdot 7^8} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2 \cdot 7^6 \cdot 7^2} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt[6]{2 \cdot 7^2} = 14 \cdot \sqrt[6]{98}$$

10. (61б) Рационалисати израз: $\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}}$.

Решење: а) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ б) $\frac{\sqrt{7}}{2+\sqrt{3}}$ в) $2\sqrt{7} + \sqrt{21}$

$$\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}+\sqrt{21}}{4-3} = 2\sqrt{7} + \sqrt{21}$$

11. (63ж) Израчунати: $\frac{6}{2+3i}$.

Решење: а) $\frac{2+3i}{6}$ б) $\frac{12-18i}{13}$ в) $\frac{11+3i}{5}$

$$\frac{6}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{12-18i}{4+9} = \frac{12-18i}{13}$$

12. (68б) Решити следећу једначину: $\frac{4x}{x+3} - \frac{4x}{x^2 + 4x + 3} = 0$.

Решење: а) $x = 1/4$

б) $x = 1$

в) $x = 0$

$$0 = \frac{4x}{x+3} - \frac{4x}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x(x+1) - 4x}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x(x+1-1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{4x^2}{(x+1)(x+3)} \Rightarrow x=0$$

13. (72б) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

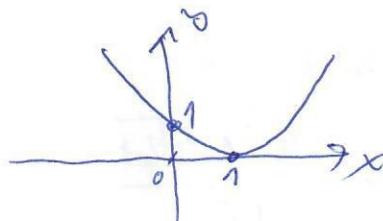
Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (1, 3)$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x_1 = 1, x_2 = 3$$

14. (74а) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик:

$$y = x^2 - 2x + 1.$$

$$y = (x-1)^2 \\ T(1, 0)$$



15. (83а) Израчунати вредност израза: $3 - \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}$.

Решење: а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ в) $\frac{7}{12}$ = $\frac{38-9-20}{42} = \frac{7}{12}$

$$3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3 - \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 3 - \frac{3}{4} - \frac{5}{3}$$

16. (84а) Одредити вредности остале три тригонометријске функције угла α ако

је $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

$\cos \alpha > 0 \quad \alpha \in \mathbb{I}$

$\operatorname{tg} \alpha > 0$

$\operatorname{ctg} \alpha > 0$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 4/3$$

17. (94а) Решити следећу једначину: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{3x+2}{2}}$.

Решење: а) $x = 4/3$ б) $x = -4/9$ в) $x = -2/9$

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3x+2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3x+2}{2} \Rightarrow 2 = 9x + 6 \\ \Rightarrow 9x = -4 \Rightarrow x = -4/9$$

18. (956) Решити једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 1$ в) $x = 0$

$$2^x(2+4-1) = 10 \Rightarrow 2^x \cdot 5 = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

19. (97h) Израчунати: $\log_3 81 + 5 \log_{1/2} 16 - 3 \log_2 \frac{1}{32}$.

Решење: а) 1 б) 0 в) -1

$$\log_3 3^4 + 5 \log_2 2^4 - 3 \log_2 3^5 = 4 - 5 \cdot 4 - 3 \cdot (-5) = -1$$

20. (100g) Решити једначину: $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$.

Решење: а) $x = 1/6$ б) $x = 6$ в) $x = 1$

$$\begin{aligned}\log x &= \log \frac{4^2 \cdot 3\sqrt[3]{27}}{\sqrt{64}} \\ &= \log \frac{16 \cdot 3}{8} \\ &= \log 6 \Rightarrow x = 6\end{aligned}$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2015. (други термин)**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (6a) Раставити на чиниоце следећи полином: $m^2x - n^2x + m^2y - n^2y$.

Решење: а) $(m^2 + n^2)(x + y)$ б) $(m - n)(m + n)(x + y)$ в) $(m^2 - n^2)(x - y)$

$$x(m^2-n^2)+y(m^2-n^2)=(m^2-n^2)(x+y) \\ = (m-n)(m+n)(x+y)$$

2. (7б) Израчунати вредност израза: $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

Решење: а) $32/45$ б) $17/15$ в) $23/12$

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{15} + \frac{4}{9} = \frac{12+20}{45} = \frac{32}{45}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%.

Решење: а) 14250 б) 15255 в) 13125

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) = (15000 \cdot 3,5 \cdot 0,25) = 13125$$

4. (27) Цена једног производа повећана је за 10%, а затим снижена за 10%. За колико процената се променила цена у односу на првобитну?

Решење: а) није се променила б) смањила се за 1% в) повећала се за 1%

$$x \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = x \cdot 1,1 \cdot 0,9 = x \cdot 0,99 \quad (1-0,99) \cdot 100 \\ = 1\% \downarrow$$

5. (33б) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3}$. /·6

Решење: а) $x = 25/7$ б) $x = 9/7$ в) $x = 38/7$

$$48 - 24x - 2 - 3x = 18 - 20x - 10$$

$$46 - 27x = 8 - 20x$$

$$38 = 7x \Rightarrow x = 38/7$$

6. (41a) Одредити параметар k тако да следећа функција буде растућа:

$$y = \frac{3k-1}{k-2}x + 2k - 1.$$

$$k \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (2, +\infty)$$

Решење: а) $k \in (-\infty, 1/3) \cup (2, +\infty)$ б) $k \in (1/3, 2)$ в) $k \in \{\}$

$$\frac{3k-1}{k-2} > 0$$

$$3k-1=0 \Rightarrow k=1/3 \\ k-2=0 \Rightarrow k=2$$

$$\begin{array}{c} -\infty & 1/3 & 2 & +\infty \\ \leftarrow & | & | & | \\ \oplus & \ominus & \oplus & \ominus \end{array}$$

$$y : x = 3 : 5$$

7. (45б) Решити систем једначина: $y : x = 3 : 5$
 $8x - 9y = 26$.

Решење: а) $(x, y) = (15, 9)$

б) $(x, y) = (5, 3)$

в) $(x, y) = (10, 6)$

$$\begin{array}{l} 5y = 3x \\ 8x - 9y = 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1/5 \\ 45y = 27x \\ 40x - 45y = 130 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 45y &= 270 \Rightarrow y = \frac{270}{45} = 6 \\ 40x - 27x &= 130 \Rightarrow 40x - 27x = 130 \Rightarrow x = 10 \\ (x, y) &= (10, 6) \end{aligned}$$

8. (54д) Решити систем неједначина:
 $2(x-3) - 2 > x$
 $2(x-6) + 4 > 3(x-5) - 2$.

Решење: а) $x < 9$

б) $8 < x < 9$

в) $x > 8$

$$\begin{array}{l} 2x - 8 > x \\ 2x - 8 > 3x - 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x > 8 \\ 9 > x \end{array} \Rightarrow 8 < x < 9$$

9. (58г) Израчунати: $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-7}}{2^{-24}}$.

$$\begin{aligned} \frac{(2^2)^{-2} \cdot (2^3)^{-7}}{2^{-24}} &= \frac{2^{-4} \cdot 2^{-21}}{2^{-24}} = \frac{2^{-25}}{2^{-24}} \\ &= \frac{1}{2^1} \end{aligned}$$

Решење: а) $1/2$ б) 4 в) 2

10. (61е) Рационалисати израз: $\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}} \cdot \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}} &= \frac{(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7})^2}{9 \cdot 5 - 4 \cdot 7} = \frac{9\sqrt{5} + 12\sqrt{35} + 4\sqrt{7}}{45 - 28} = \\ &= \frac{4\sqrt{5} + 28 + 12\sqrt{35}}{17} = \frac{73 + 12\sqrt{35}}{17} \end{aligned}$$

11. (63з) Извршити назначене операције: $\frac{i}{1+i}$.

Решење: а) $\frac{-1 - 2i}{2}$ б) $-1 + i$ в) $\frac{1+i}{2}$

$$\frac{i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{i - i^2}{1+i} = \frac{i+1}{2}$$

12. (67и) Решити следећу једначину: $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

$$0 = 16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

13. (72в) Решити квадратну неједначину: $x^2 + 6x + 5 < 0$.

Решење: а) $x \in (-5, -1)$ б) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ в) $x \in \{\}$

$$x^2 + 6x + 5 < 0 \\ x_1 = -1, x_2 = -5 \\ \text{---} \quad -5 \quad -1 \quad x \in (-5, -1)$$

14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онај који има највећу површину.



$$P = a \cdot b = b \cdot (10 - b) = 0 \quad b = 0 \\ P_{\max} \quad b = 10 \\ b = 5 \\ a = 5$$

$$0 = 2a + 2b = 20 \\ a + b = 10 \\ a = 10 - b$$

15. (83в) Израчунати вредност израза: $3 \sin^2 \frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2}$.

$$3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \cdot 0 \\ = 3 - 4 - 3 \cdot \frac{3}{4} = -1 - \frac{9}{4} = -\frac{13}{4}$$

16. (86а) Доказати идентитет: $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = 1$.

$$\frac{1 - 2(1 - \sin^2 \alpha)}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{1 - 2 + 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{2 \sin^2 \alpha - 1} = 1$$

17. (93в) Решити следећу једначину: $8^x = 7^{x-1} + 7^x$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 1$ в) $x = -1$

$$8^x = 7^x \cdot \frac{1}{7} + 7^x \\ 8^x = 7^x \left(\frac{1}{7} + 1\right) \\ \frac{8^x}{7^x} = \frac{8}{7} \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^x = \frac{8}{7} \Rightarrow x = 1$$

$$4^x = 2^{2x}$$

$$\begin{aligned}6^x &= 8 \Rightarrow 2^3 = 2^{2x} \\x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

18. (95в) Решити једначину: $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$.

Решење: а) $x_1 = -1/2$
б) $x_2 = 3/2$

б) $x_1 = 1/2$
 $x_2 = -3/2$

в) $x_1 = 1/3$
 $x_2 = -2/3$

$$\begin{aligned}t_2 &= 2^{-1} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{2x} \\x &= -1/2\end{aligned}$$

$$t = 4^x > 0$$

$$2t^2 - 17t + 8 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{389 - 64}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4}$$

19. (98ж) Трансформисати у збир следећи израз: $\log_a(4a^3b \cdot \sqrt[7]{x^2y^5})$.

$$\begin{aligned}&\log_a^4 + \log_a a^3 + \log_a b + \frac{1}{7}(\log_a x + 5 \log_a y) \\&= \log_a^4 + 3 + \log_a b + \frac{1}{7}(2 \log_a x + 5 \log_a y)\end{aligned}$$

20. (100а) Решити једначину: $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = 0$.

Решење: а) $x = -1$ б) $x = 4$ в) $x = 2$

$$\log x + \log(x-1) = \log 2$$

$$\begin{aligned}x &> 0 \quad (\log x) \\x &> 1 \quad (\log(x-1))\end{aligned}$$

$$\log(x(x-1)) = \log 2$$

$$x^2 - x = 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1, \boxed{x_2 = 2}$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, СЕПТЕМБАР 2015.

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (4B) Одредити $P(x):Q(x)$ ако је: $P(x) = x^2 - 3x + 7$, $Q(x) = x - 1$.

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 7) : (x-1) = x - 2 \\ \underline{-x-x} \\ -2x + 7 \\ \underline{-2x+2} \\ 5 \end{array}$$

2. (9B) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{16x - x^2}{x^2 - 4} + \frac{3 + 2x}{2 - x} - \frac{2 - 3x}{x + 2}$.

Решење: а) $\frac{4x + 3}{x^2 - 4}$ б) $\frac{5x - 2}{x^2 - 4}$ в) $\frac{1}{x + 2}$

$$\frac{16x - x^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{3 + 2x}{x-2} + \frac{2 - 3x}{x+2} = \frac{16x - x^2 - (3 + 2x)(x+2) - (2 - 3x)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{16x - x^2 - 6 - 7x - 2x^2 + 4 + 3x^2 - 8x}{(x-2)(x+2)}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%.

Решење: а) 9375 б) 13125 в) 14745

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) = 13125$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

4. (21a) Одредити x из пропорције: $4\frac{4}{5} : \left(6\frac{3}{4} \cdot x\right) = 9\frac{1}{6} : 51\frac{9}{6}$.

$$\frac{24}{5} : \left(\frac{27}{4} \cdot x\right) = \frac{55}{6} : \frac{315}{6}$$

$$\frac{24}{5} \cdot \frac{315}{6} = 55 \cdot \frac{27}{4} \cdot x$$

$$4 \cdot \frac{24}{6} \cdot \frac{315}{61} = 8 \cdot 55 \cdot \frac{27}{4} \cdot x$$

$$4 \cdot 8 \cdot 61 = 55 \cdot 9 \cdot x$$

$$x = \frac{1952}{495}$$

5. (33k) Решити једначину: $(x+2)^2 - (x-3)^2 + (x+4)^2 - (x+1)^2 = 0$.

Решење: а) $x = 1$ б) $x = -5/8$ в) $x = 9/19$

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 + 6x - 9 + x^2 + 8x + 16 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$16x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

6. (42) У функцији $y = (4k-1)x - k + 3$ одредити параметар k тако да функција буде опадајућа и да њен график сече позитиван део y -осе.

Решење: а) $k < 1/4$ б) $k < 3$ в) $1/4 < k < 3$

$$\begin{aligned} 4k-1 &< 0 \Rightarrow k < 1/4 \\ 3-k &> 0 \Rightarrow k < 3 \end{aligned}$$

7. (50) Пре четири године, отац је био 6 пута старији од сина, а после 5 година биће 3 пута старији од сина. Колико сада има година отац, а колико син?

x -отац пре 4 године
 y -син пре 4 године

$$(x-4) = 6(y-4)$$

$$(x+5) = 3(y+5)$$

$$\frac{x-4}{x+5} = \frac{6y-24}{3y+15}$$

$$\frac{x-4}{x+5} = \frac{3y+10}{3y+15}$$

$$\frac{3x+5}{x} > 0$$

$$x-6y = -20$$

$$x-3y = 10$$

$$x = -20 + 6y$$

$$x-3y = 10$$

$$-20 + 6y - 3y = 10$$

$$3y = 30$$

$$\sqrt{3y} = 10$$

$$x = -20 + 6 \cdot 10$$

$$x = 40$$

8. (55б) Решити неједначину:

Решење: а) $x \in (-5/3, 0)$ б) $x \in \{\}$ в) $x \in (-\infty, -5/3) \cup (0, +\infty)$

$$\begin{array}{ccccccc} 3x+5 & = & 0 & & & & \\ 3x+5 & & -\infty & -5/3 & 0 & + & + \\ x & & \textcircled{-} & \textcircled{-} & \textcircled{+} & \textcircled{+} & \textcircled{+} \end{array}$$

$$x \in (-\infty, -5/3) \cup (0, +\infty)$$

9. (60в) Израчунати: $\sqrt[2]{x} \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$.

Решење: а) $x^{3/12}$

б) $x^{19/12}$

в) $x^{39/24}$

$$\sqrt[24]{x^{12} \cdot x^6 \cdot x^20} = \sqrt[24]{x^{38}} = x^{\frac{38}{24}} = x^{\frac{19}{12}} = x^{\frac{7}{12} + 1} = x^{\frac{19}{12}}$$

10. (61н) Рационалисати израз: $\frac{-8}{2\sqrt{3} + 6}$.

Решење: а) $\frac{2\sqrt{3} - 6}{3}$

б) $\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$

в) $\frac{4\sqrt{3} - 2}{3}$

$$\frac{-8}{2\sqrt{3} + 6} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 6}{2\sqrt{3} - 6} = \frac{-16\sqrt{3} + 48}{4 \cdot 3 - 36} = \frac{48 - 16\sqrt{3}}{-24} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{-3} = \frac{2\sqrt{3} - 6}{3}$$

11. (65а) Израчунати вредност израза: $\frac{z^2}{z+1}$ где је $z = 5 + 2i$.

Решење: а) $\frac{17-i}{20}$

б) $\frac{62+19i}{10}$

в) $\frac{83+39i}{20}$

$$z^2 = (5+2i)^2 = 25 + 20i - 4 = 21 + 20i$$

$$= \frac{166+78i}{40} = \frac{83+39i}{20}$$

$$z+i = 6+2i \quad \frac{z^2}{z+i} = \frac{21+20i}{6+2i} \cdot \frac{6-2i}{6-2i} = \frac{126-42i+120i+40i^2}{36+4}$$

12. (69г) Саставити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2 - 3i$.

$$\Delta = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{aligned} &= (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) \\ &= (x - 2)^2 - (3i)^2 = x^2 - 4x + 4 - 9i^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + 9 \Rightarrow x^2 - 4x + 13 = 0 \end{aligned}$$

13. (72д) Решити квадратну неједначину: $x^2 + 6x + 10 > 0$.

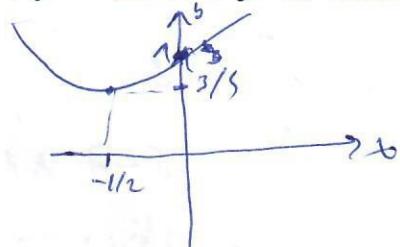
Решење: а) $x \in (2, 5)$ б) $x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ в) $x \in (-\infty, +\infty)$

$$x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1 > 0$$

$$x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

14. (75а) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик: $y = x^2 + x + 1$.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 + 1 - (\frac{1}{2})^2 \\ &= (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \\ &T(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \end{aligned}$$



15. (82г) Израчунати вредност израза $\frac{5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}$.

Решење: а) $-64/7$ б) $-32/15$ в) $18/13$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} & \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5 \cdot \frac{1}{3} + 1}{\frac{3}{4} - 2 \cdot 1} &= \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{32}{15} \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} &= 1 & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} &= 1 & \end{aligned}$$

16. (89г) Одредити сва решења једначине: $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &> 0 \\ \alpha &\in \text{I quadrant} \quad \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ k.e.g. } \\ \alpha &\in \text{II quadrant} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ k.e.g. } \\ &\pi - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

17. (94в) Решити једначину: $100 \cdot 10^{2x-1} = 1000^{3/4}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 5/8$ в) $x = 13/8$

$$10^2 \cdot 10^{2x-1} = 10^{3 \cdot \frac{3}{4}} \Rightarrow 2 + 2x - 1 = \frac{9}{4} \Rightarrow 2x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

18. (95д) Решити следећу једначину: $5^{2x} - 3^x - 15 \cdot 25^x + 15 \cdot 3^x = 0$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 3$ в) $x = 1$

19. (973) Израчунати: $\log_{0.25} \sqrt[4]{2^3}$.

Решење: а) $-3/8$ б) $3/2$ в) $-3/2$

$$\log_{\frac{1}{4}} 2^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log_2 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \log_2 2 = -\frac{3}{8}$$

20. (100h) Решити једначину: $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$.

Решење: а) $x_1 = 1, x_2 = 2$ б) $x_1 = 1, x_2 = 3$ в) $x_1 = 2, x_2 = 3$

$$\log(35-x^3) = 3 \cdot \log(5-x)$$

$$35-x^3 = (5-x)^3$$

$$35-x^3 = 125-75x+45x^2-x^3$$

$$0 = 15x^2 - 75x + 90 / :15$$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$0 = (x-2)(x-3)$$

↓

$$x_1=2, x_2=3$$

$$35-2^3 > 0 \quad 35-3^3 > 0$$

$$5-2 > 0$$

$$5-3 > 0$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ОКТОБАР 2015.**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (3a) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је $P(x) = x^2 - 2x + 5$ и $Q(x) = x - 3$.

$$(x^2 - 2x + 5) \cdot (x - 3) = x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + 5x - 15 \\ = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$$

2. (76) Израчунати вредност израза: $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

Решење: а) 32/45 б) 17/15 в) 23/12

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{15} + \frac{4}{9} = \frac{12+20}{45} = \frac{32}{45}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%.

Решење: а) 9375 б) 13125 в) 14745

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) = 15000 \cdot 3,5 \cdot 0,25 = 13125$$

4. (31) 16 радника могу да ураде један насып за 15 дана. После 4 дана разболе се два радника. За колико ће, због тога, закаснити изградња насила?

Решење: а) 2 дана б) 1,57 дана в) 1,8 дана

$$\frac{16 \text{ р. } 15 \text{ д.}}{4 \text{ дана}} \quad \downarrow \begin{array}{l} 16 \text{ р. } \uparrow 1 \text{ д.} \\ \hline 14 \text{ р. } x \end{array} \quad \begin{array}{l} x : 11 = 16 : 14 \\ x = \frac{11 \cdot 16}{14} = 12,57 \text{ дана} \\ 12,57 - 11 = 1,57 \end{array}$$

5. (33b) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3}$. / · 6

Решење: а) $x = 25/7$ б) $x = 9/7$ в) $x = 38/7$

$$48 - 24x - 2 - 3x = 18 - 20x - 10$$

$$46 - 27x = 8 - 20x$$

$$38 = 7x \Rightarrow x = 38/7$$

6. (45б) Решити систем једначина: $\begin{cases} 2x+3y=23 \\ x-2y=1 \end{cases}$

Решење: а) $(x, y) = (7, 3)$ б) $(x, y) = (1, 7)$ в) $(x, y) = (9, 4)$ $(x, y) = (7, 3)$

$$\begin{aligned} 2(1+2y)+3y &= 23 \\ \Rightarrow 2+4y+3y &= 23 \Rightarrow 7y=21 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=7 \end{aligned}$$

7. (54д) Решити систем неједначина: $\begin{cases} 2(x-3)-2 > x \\ 2(x-6)+4 > 3(x-5)-2 \end{cases}$

Решење: а) $x < 9$ б) $8 < x < 9$ в) $x > 8$

$$\begin{aligned} 2x-8 &> x \\ 2x-8 &> 3x-17 \\ \hline x &> 8 \\ 9 &> x \Rightarrow 8 < x < 9 \end{aligned}$$

8. (60в) Израчунати: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$.

Решење: а) $x^{9/12}$ б) $x^{19/12}$ в) $x^{39/24}$

$$\begin{aligned} \sqrt[24]{x^{12} \cdot x^6 \cdot x^{20}} &= \sqrt[24]{x^{38}} = \sqrt[24]{x \cdot x^{37}} = x \cdot \sqrt[24]{x^{19}} = x \cdot x^{\frac{19}{24}} = x \cdot x^{\frac{7}{12}} \\ &= x^{\frac{19}{12}} \end{aligned}$$

9. (61е) Рационалисати израз: $\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}} \cdot \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}} &= \frac{(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})^2}{9 \cdot 5 - 4 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 5 + 12\sqrt{35} + 4 \cdot 7}{45 - 28} \\ &= \frac{45 + 28 + 12\sqrt{35}}{17} = \frac{73 + 12\sqrt{35}}{17} \end{aligned}$$

10. (63ж) Израчунати: $\frac{6}{2+3i}$.

Решење: а) $\frac{2+3i}{6}$ б) $\frac{12-18i}{13}$ в) $\frac{11+3i}{5}$

$$\frac{6}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{12-18i}{4+9} = \frac{12-18i}{13}$$

11. (69г) Саставити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = 2+3i, x_2 = 2-3i$.

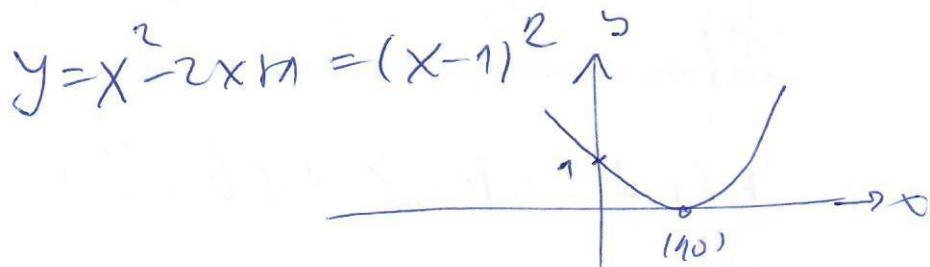
$$\begin{aligned} ① &= (x-(2+3i))(x-(2-3i)) \\ &= (x-2-3i)(x-2+3i) \\ &= (x-2)^2 - (3i)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 9(i^2) = x^2 - 4x + 13 \end{aligned}$$

12. (72b) Решити квадратну неједначину: $x^2 + 6x + 5 < 0$.

Решење: а) $x \in (-5, -1)$ б) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ в) $x \in \{ \}$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 &= x^2 + x + 5x + 5 \\ &= x(x+1) + 5(x+1) \\ &= (x+1)(x+5) = 0 \\ x_1 &= -1, x_2 = -5 \quad x \in (-5, -1) \end{aligned}$$

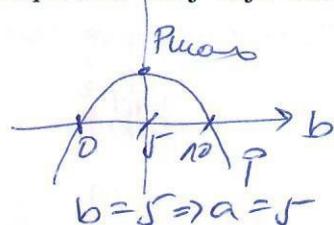
13. (74a) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик: $y = x^2 - 2x + 1$.



14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онај који има највећу површину.

$$\boxed{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}} \quad P = a \cdot b = (10-b) \cdot b$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2a + 2b = 20 \\ a+b &= 10 \\ a &= 10-b \end{aligned}$$



15. (82r) Израчунати вредност израза $\frac{5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}$.

Решење: а) $-64/7$ б) $-32/15$ в) $18/13$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{5 \cdot \frac{1}{3} + 1}{\frac{3}{4} - 2 \cdot 1} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{32}{15}$$

16. (86a) Доказати идентитет: $\frac{1 - 2(\alpha - \sin \alpha)}{2 \sin^2 \alpha - 1} = 1$.

$$\frac{1 - 2(\alpha - \sin \alpha)}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{1 - 2 + 2 \sin \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin \alpha - 1}{2 \sin^2 \alpha - 1} = 1$$

17. (94в) Решити једначину: $100 \cdot 10^{2x-1} = 1000^{3/4}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 5/8$ в) $x = 13/8$

$$10^{2+2x-1} = 10^3 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow 1 + 2x = \frac{9}{4} \Rightarrow 2x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

18. (95в) Решити једначину: $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$. $t = 4^x > 0$, $t^2 = 4^{2x}$

Решење: а) $x_1 = -1/2$ б) $x_1 = 1/2$ в) $x_1 = 1/3$
 а) $x_2 = 3/2$ б) $x_2 = -3/2$ в) $x_2 = -2/3$

$$2t^2 - 17t + 8 = 0, \quad t_1 = 8 = 2^3 = 2^{2x} \Rightarrow x = 3/2 \\ t_2 = 2^{-1} = 2^{-2x} \Rightarrow x = -1/2$$

19. (98ж) Трансформисати у збир следећи израз: $\log_a(4a^3b \cdot \sqrt[7]{x^2y^5})$.

$$\log_a^4 + 3 + \log_a b + \frac{1}{7}(2\log_a x + 5\log_a y)$$

20. (100г) Решити једначину: $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$.

Решење: а) $x = 1/6$ б) $x = 6$ в) $x = 1$

$$\log x = \log \frac{4^2 \cdot 3\sqrt{27}}{\sqrt{64}}$$

$$= \log \frac{4^2 \cdot 3}{8}$$

$$= \log \frac{16 \cdot 3}{8}$$

$$= \log 6 \Rightarrow x = 6$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2014 (први термин)
 - исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (1r) Свести сличне чланове следећег полинома:

$$\underline{6x} - \underline{7a^2} + \underline{3x^2} - \underline{3x} + \underline{5a^2} - \underline{x^2}$$

$$3x - 2a^2 + 2x^2$$

2. (7a) Израчунати вредност израза: $-2\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4} - 3\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 6\frac{1}{2}$.

Решење: а) 7/2 б) -1/4 в) -13/2

$$-\underline{\frac{5}{2}} + \underline{\frac{23}{4}} - \underline{\frac{15}{4}} + \underline{\frac{1}{2}} - \underline{\frac{13}{2}} = -\frac{17}{2} + \frac{8}{4} = -\frac{26}{4} = -\frac{13}{2}$$

3. (13) Цена ћилима је снижена за 20%, па је повећана за 20%. За колико процената се променила првобитна цена?

Решење: а) 4% б) 96% в) 8%

$$\begin{aligned} X \cdot 0,80 \cdot 1,20 &= X \cdot 0,96 \\ (1 - 0,96) \cdot 100 &= 4\% \end{aligned}$$

4. (30) Углови троугла односе се као 2:3:4. Колико износи највећи угао?

Решење: а) 60° б) 80° в) 100°

$$\alpha = 40^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 80^\circ$$

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= 2 : 3 : 4 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2k + 3k + 4k = 180^\circ \\ \Rightarrow 9k &= 180^\circ \Rightarrow k = 20 \end{aligned}$$

5. (33b) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3}$.

1.6

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 4/5$ в) $x = 38/7$

$$48 - 24x - 2 - 3x = 18 - 20x - 10$$

$$46 - 27x = 8 - 20x$$

$$38 = 7x$$

$$x = 38/7$$

6. (38) Одредити вредност параметра b ако је познато да график функције $y = -3x + b$ пролази кроз тачку $A(-2, -4)$.

Решење: а) $b = -6$ б) $b = -8$ в) $b = -10$

$$\begin{aligned} -4 &= -3 \cdot (-2) + b \\ -4 &= 6 + b \\ \Rightarrow b &= -10 \end{aligned}$$

7. (453) Решити систем једначина: $x : y = 1 : 2$
 $5x - 7y = -36$

$$(x, y) = (4, 8)$$

$$\begin{aligned} 2x &= y \Rightarrow y = 2x \\ 5x - 7y &= -36 \Rightarrow 5x - 14x = -36 \\ &\Rightarrow -9x = -36 \\ &\Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

8. (53в) Решити неједначину: $\frac{2x-8}{5} \geq 7$.

Решење: а) $x \geq 43/2$ б) $x \geq 27/2$ в) $x \leq 4$

$$\begin{aligned} 2x-8 &\geq 35 \\ 2x &\geq 43 \\ x &\geq \frac{43}{2} \end{aligned}$$

9. (58б) Израчунати: $\frac{3^{-12} \cdot 9^8}{(-3)^4}$.

$$\frac{3^{-12} \cdot 3^{16}}{3^4} = \frac{3^4}{3^4} = 1$$

10. (61н) Рационалисати израз: $\frac{-8}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

Решење: а) $\frac{-8\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3}$ б) $\frac{8}{-2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$ в) $\frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{6}}{18}$

$$\frac{-8}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}} \cdot \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2\sqrt{3} - \sqrt{6}} = \frac{-16\sqrt{3} + 8\sqrt{6}}{4 \cdot 3 - 6} = \frac{2(-8\sqrt{3} + 4\sqrt{6})}{6} = \frac{-8\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3}$$

11. (62в) Израчунати: $i^{21} - i^{17} + i^{36} - i^{42}$.

Решење: а) i б) 2 в) -1

$$i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1$$

$$i^{17} = i^{4 \cdot 4 + 1} = i^1$$

$$i^{36} = 1, i^{42} = i^{4 \cdot 10 + 2} = i^2 = -1$$

$$i - i + 1 - (-1) = 2$$

12. (67e) Решити следећу једначину: $(x-2)(x-3)=x$.

Решење: а) $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ б) $x_1 = 2$ в) $x_1 = 2 - 3i$
 б) $x_2 = 3 + \sqrt{3}$ б) $x_2 = 3$ в) $x_2 = 2 + 3i$

$$x^2 - 5x + 6 - x = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 3 \Rightarrow x-3 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$$

13. (72a) Решити квадратну неједначину: $x^2 > 9$.

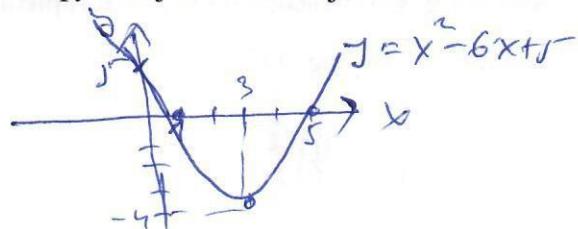
Решење: а) $x \in \{ \}$ б) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in (-3, 3)$

$$x^2 - 9 > 0 \quad \text{---} \quad x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

14. (74б) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик:

$$y = x^2 - 6x + 5.$$

$$y = (x-3)^2 - 4 \\ T(3, -4)$$



15. (83б) Израчунати вредност израза: $2 + \sin^2 \frac{\pi}{3} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}$.

Решење: а) $\frac{2 - 9\sqrt{3}}{4}$ б) $\frac{\sqrt{3} + 21}{18}$ в) $\frac{11 - \sqrt{3}}{4}$

16. (85б) Одредити вредности остале три тригонометријске функције угла α ако

$$\text{је } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \left(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \right).$$

17. (93б) Решити следећу једначину: $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$.

Решење: а) $x = -5 / 4$ б) $x = 10 / 7$ в) $x = 4 / 3$

18. (95в) Решити једначину: $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$.

Решење: а) $x_1 = 2$ б) $x_1 = -1/2$ в) $x_1 = 0$
 а) $x_2 = \sqrt{2}$ б) $x_2 = 3/2$ в) $x_2 = 1$

19. (97д) Израчунати: $\log_{2/3} \frac{16}{81}$.

Решење: а) 1 б) 4 в) 2

20. (99г) Следећи израз свести на један логаритам:

$$\log_a 7 + 3 \log_a \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_a 11^3.$$

Смер:



Име и презиме:

Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2014 (други термин)
 - исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (3a) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је: $P(x) = x^2 - 2x + 5$, $Q(x) = x - 3$.

Решење: а) $x^3 - 3x^2 + 4x - 15$ б) $x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ в) $x^3 - 3x^2 + 2x - 15$

$$(x^2 - 2x + 5) \cdot (x - 3) = x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + 5x - 15 = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$$

2. (9d) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 - 2ab + b^2}$.

$$\frac{1}{(a+b)(a+b)} + \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{a-b+a+b}{(a-b)^2(a+b)} = \frac{2a}{(a-b)^2(a+b)}$$

3. (18) Ако једну страницу правоугаоне њиве повећамо за 8%, а другу смањимо за 3%, за колико процената ће се променити површина њиве?

Решење: а) 4,76% б) 95,24% в) 5%

$$\boxed{a} \quad \boxed{b} \quad P_1 = a \cdot b$$

$$\boxed{a \cdot 1,08} \quad \boxed{b \cdot 0,97} \quad P_2 = a \cdot b \cdot 1,08 \cdot 0,97 = a \cdot b \cdot 1,0476$$

↑
↑
избачено

4. (32) Један брод може да стигне до обале за 8 дана ако прелази дневно 168 морских миља. Колико морских миља мора да прелази дневно да би на обалу стигао један дан раније?

Решење: а) 147 б) 174 в) 192

$$\downarrow 7 \text{ дана} \uparrow 168 \text{ миља/д.} \quad x : 168 = 8 : 7 \quad \Rightarrow x = \frac{168 \cdot 7}{7} = 192 \text{ миље.}$$

5. (336) Решити једначину: $3,2x - 6,5 = 4,9x - 12,4$.

Решење: а) $x = 4/7$ б) $x = 59/17$ в) $x = -12/5$

$$3,2x - 4,9x = 6,5 - 12,4$$

$$-1,7x = -5,9 \\ x = \frac{59}{17}$$

6. (42) У функцији $y = (4k-1)x - k + 3$ одредити параметар k тако да функција буде опадајућа и да њен график сече позитиван део y -осе.

Решење: а) $k < 1/4$ б) $k > 3$ в) $k < 3$

$$\begin{aligned} 4k-1 < 0 \\ 3-k > 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 4k < 1 \\ k < 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} k < \frac{1}{4} \\ k < 3 \end{aligned} \Rightarrow k < \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{15} + \frac{y}{10} - 4 = 0 \quad | \cdot 30$$

7. (45г) Решити систем једначина:

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{5} - 1 = 0 \quad | \cdot 30$$

Решење: а) $(x,y) = (30,20)$ б) $(x,y) = (10,40)$ в) $(x,y) = (-20,15)$

$$\begin{aligned} 2x+3y = 120 & \quad | \cdot 2 \\ 5x-6y = 30 & \quad | + \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2x+3y = 120 & \Rightarrow 3y = 120 - 2x \Rightarrow 3y = 60 \\ 9x = 270 & \Rightarrow x = 30 \quad \Rightarrow y = 20 \\ (x,y) = (30,20) \end{aligned}$$

8. (54а) Решити систем неједначина:

$$\begin{aligned} x+2 > 0 \\ 2x-3 \leq 0 \end{aligned}$$

Решење: а) $x \geq 3/2$ б) $x < -2$ в) $-2 < x \leq 3/2$

$$\begin{aligned} x > -2 \\ x \leq 3/2 \end{aligned} \Rightarrow -2 < x \leq \frac{3}{2}$$

9. (58д) Израчунати: $\frac{(-5)^{-4} \cdot 25^{14}}{125^6}$.

$$\frac{5^{-4} \cdot (5^2)^{14}}{(5^3)^6} = \frac{5^{-4} \cdot 5^{28}}{5^{18}} = 5^{-4+10} = 5^6$$

Решење: а) 5^{10} б) 5^6 в) 5^{-2}

10. (61б) Рационалисати израз: $\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}}$.

$$\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7} + \sqrt{21}}{4-3} = 2\sqrt{7} + \sqrt{21}$$

11. (63и) Извршити назначене операције: $\frac{1-i}{2+3i}$.

Решење: а) $\frac{-1-5i}{13}$ б) $\frac{1+2i}{13}$ в) $\frac{2-3i}{13}$

$$\frac{1-i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i-2i+3i^2}{2^2+3^2} = \frac{-1-5i}{13}$$

12. (67г) Решити следећу једначину: $x^2 = 4 - 3x$.

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$$

13. (72г) Решити квадратну неједначину: $-5x^2 - 19x + 4 < 0$.

Решење: а) $x \in (-4, 1/5)$ б) $x \in (-\infty, -4) \cup (1/5, +\infty)$ в) $x \in \{\}$

$$-5x^2 - 19x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -4, x_2 = \frac{1}{5}$$

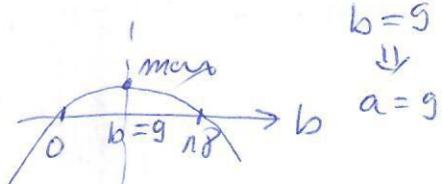
$$x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{1}{5}, +\infty)$$

14. (81) Број 18 разставити на два сабирка тако да њихов производ буде што већи.

$$18 = a + b \Rightarrow a = 18 - b$$

$a \cdot b$ буде максимум.

$$\Rightarrow a \cdot b = (18 - b) \cdot b$$



15. (82а) Израчунати вредност израза: $5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos 0 - 3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos \pi$.

$$= 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + (-1)$$

$$= 9 + 3 - 1 = 11$$

16. (86в) Доказати идентитет: $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

17. (93а) Решити следећу једначину: $9^{-\frac{1}{x}} = 3$.

Решење: а) $x = 3$ б) $x = 1/2$ в) $x = -2$

$$9^{-\frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow (3^2)^{-\frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow 3^{-\frac{2}{x}} = 3^1$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{x} = 1$$

$$\Rightarrow x = -2$$

18. (95б) Решити једначину: $2 \cdot 4^x + 6^x = 9^x$.

Решење: а) $x = \log_{3/2} 2$ б) $x = 0$ в) $x = \log_2 \frac{3}{2}$

$$2 \cdot 2^x \cdot 2^x + 2^x \cdot 3^x = 3^x \cdot 3^x \quad / : (2^x \cdot 2^x)$$
$$\Rightarrow 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad , \quad t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$$

19. (97г) Израчунати: $\log_3(\log_3 27)$.

Решење: а) -1 б) 0 в) 1

$$= \log_3(\log_3(3^3)) = \log_3(3 \log_3 3) = \log_3(3 \cdot 1) = \log_3 3 = 1$$

20. (100б) Решити једначину: $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Решење: а) $x = 4$ б) $x = 16$ в) $x = 1$

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7 \quad | \cdot 4$$

$$\log_2 x + 2 \log_2 x + 4 \log_2 x = 28$$

$$7 \log_2 x = 28 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, СЕПТЕМБАР 2014**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (4B) Одредити $P(x)$: $Q(x)$ ако је: $P(x) = x^2 - 3x + 7$, $Q(x) = x - 1$.

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x + 7) &= x^2 - x - 2x + 2 + 5 \\ \Rightarrow x^2 - 3x + 7 &= x(x-1) - 2(x-1) + 5 \quad / : (x-1) \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 7}{x-1} &= x - 2 + \frac{5}{x-1} \end{aligned}$$

2. (9B) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{16x - x^2}{x^2 - 4} + \frac{3 + 2x}{2 - x} - \frac{2 - 3x}{x + 2}$.

Решење: а) $\frac{4x + 3}{x^2 - 4}$ б) $\frac{5x - 2}{x^2 - 4}$ в) $\frac{1}{x + 2}$

$$\frac{16x - x^2 - (3 + 2x)(x+2) - (2 - 3x)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{16x - x^2 - 3x - 6 - 2x^2 - 4x + 4 - 2x + 3x - 6x}{(x-2)(x+2)}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%. $= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$

Решење: а) 9375 б) 13125 в) 14745

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{75}{100}\right) = 15000 \cdot 3,5 \cdot 0,25 = 13125$$

4. (21B) Одредити x из пропорције: $0,5 : 2\frac{3}{4} = 2\frac{2}{3} : x$.

$$\frac{5}{10} : x = \frac{11}{4} \cdot \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{11}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3}$$

5. (33j) Решити једначину: $(2x - 1)^2 + (x + 7)^2 = 5x^2 - 9x + 1$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = 17/19$ в) $x = -49/19$

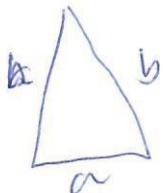
$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 14x + 49 &= 5x^2 - 9x + 1 \\ 10x + 50 &= -9x + 1 \\ 19x = -49 &\Rightarrow x = -\frac{49}{19} \end{aligned}$$

6. (43) У функцији $y = (3k+6)x + k - 7$ одредити параметар k тако да функција буде растућа и да њен график сече негативни део y -осе.

Решење: а) $-2 < k < 7$ б) $k < -2$ в) $k > 7$

$$\begin{array}{l} 3k+6 > 0 \\ k-7 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} k > -2 \\ k < 7 \end{array} \Rightarrow -2 < k < 7$$

7. (51) Обим једнакокраког троугла је 30 cm, а разлика крака и основице је 3 cm. Израчунати основицу и крак троугла?



$$\begin{aligned} a+2b &= 30 \\ b-a &= 3 \Rightarrow b = 3+a \\ a+6+2a &= 30 \\ \Rightarrow 3a &= 24 \Rightarrow a = 8 \end{aligned}$$

$$b = 11$$

8. (55e) Решити неједначину: $\frac{x-2}{x+1} \leq 3$.

Решење: а) $x \in (-\infty, -5/2] \cup (-1, +\infty)$ б) $x \in \{\}$ в) $x \in [-5/2, -1)$

$$\frac{x-2}{x+1} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{x-2-3x-3}{x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x-5}{x+1} \leq 0$$

$$\begin{aligned} -2x-5 &= 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2} \\ x+1 &= 0 \Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

9. (60б) Израчунати: $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[8]{x^7}$.

$$\begin{array}{c} -2x-5 \\ x+1 \\ \hline -2x-5 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -5/2 \\ + \\ -1 \\ \hline - \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} -1 \\ + \\ + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ \hline \end{array} \quad x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, +\infty)$$

Решење: а) $x^{51/14}$

б) $x^{61/24}$

в) $x^{45/34}$

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot x \cdot \sqrt[8]{x^7} = x \cdot \sqrt[24]{x^{16} \cdot x^{21}} = x \cdot \sqrt[24]{x^{37}} = x \cdot \sqrt[24]{x^{28} \cdot x^9} = x \cdot x \cdot x^{13/24} = x^{61/24}$$

10. (61j) Рационалисати израз: $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$.

Решење: а) $\frac{7\sqrt{40}}{40}$ б) $\frac{7\sqrt{8}}{32}$ в) $\frac{7\sqrt{8}}{24} = \frac{7 \cdot 2\sqrt{2}}{24} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$

$$\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}} = \frac{7}{\sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{7}{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = \frac{7}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6 \cdot 2} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

11. (65б) Израчунати вредност израза: $\frac{\bar{z}}{z-2}$ где је $z = 3 - 5i$.

Решење: а) $\frac{10 - 11i}{13}$ б) $\frac{-11 + 10i}{13}$ в) $\frac{10 + 11i}{13}$

$$\begin{array}{l} \bar{z} = 3 + 5i \\ z - 2 = 1 - 5i \end{array} \quad \frac{\bar{z}}{z-2} = \frac{3+5i}{1-5i} \quad \frac{1+5i}{1-5i} = \frac{3+15i+5i-25}{1+25} = \frac{-22+20i}{26}$$

$$= \frac{-11+10i}{13}$$

12. (69B) Саставити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = 3, x_2 = -10$.

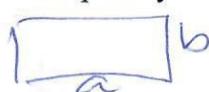
$$\begin{aligned} 0 &= (x-3)(x+10) \\ \Rightarrow 0 &= x^2 + 10x - 3x - 30 \\ \Rightarrow 0 &= x^2 + 7x - 30 \end{aligned}$$

13. (72B) Решити квадратну неједначину: $x^2 + 6x + 15 < 0$.

Решење: а) $x \in (2,3)$ б) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ в) $x \in \{\}$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 15 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 + 6 &> 0 \text{ за } x \neq -3 \Rightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онaj који има највећу површину.

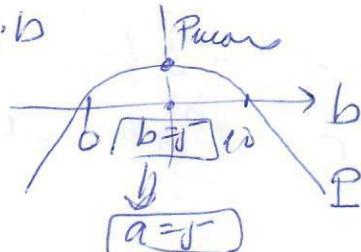


$$P = (10-b) \cdot b$$

$$0 = 2a + 2b = 20$$

$$\Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow a = 10 - b$$

$$P = a \cdot b$$

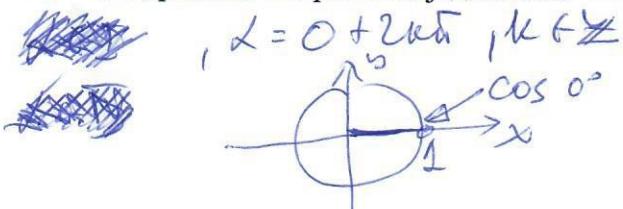


$$\frac{2 \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}}{1 + \sin^2 \frac{\pi}{4}}$$

15. (82B) Израчунати вредност израза

$$\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

16. (89G) Одредити сва решења једначине: $\cos \alpha = 1$.



17. (93B) Решити следећу једначину: $8^x = 7^{x-1} + 7^x$. $\therefore 7^x$

Решење: а) $x = 1$ б) $x = 0$ в) $x = 2$

$$\left(\frac{8}{7}\right)^x = \frac{1}{7} + 1 \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^x = \left(\frac{8}{7}\right)^1 \Rightarrow x = 1$$

18. (95G) Решити следећу једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 3$ б) $x = 0$ в) $x = 1$

$$\begin{aligned} 2^x \cdot (2^1 + 2^2 - 1) &= 10 \Rightarrow 2^x \cdot 5 = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

19. (97ж) Израчунати: $2^{4-\log_2 11}$.

Решење: а) 11/4 б) 16/11 в) 7/4

$$2^4 \cdot 2^{-\log_2 11} = 2^4 \cdot 2^{\log_2(11^{-1})} = 2^4 \cdot 11^{-1} = \frac{16}{11}$$

20. (100ж) Решити једначину: $4 - \log_2 x = 3\sqrt{\log_2 x}$.

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 1$ в) $x = 4$

$$0 \leq t = \sqrt{\log_2 x}, \quad \boxed{x > 0, \log_2 x \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 1}} \Rightarrow \underline{\underline{x \geq 1}}$$

$$t = \log_2 x$$

$$4 - t^2 = 3t \quad \rightarrow \quad t_1 = 1 \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} = 1$$

$$0 = t^2 + 3t - 4 \quad \rightarrow \quad t_2 \cancel{=} -4 \quad \log_2 x = 1 \\ \log_2 x \downarrow \\ x = 2$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ОКТОБАР 2014**

- исписати поступак при решавању задатака или заокружити слово испред тачног одговора -

1. (6e) Раставити на чиниоце следећи полином: $ax^3y^3 - 3ax^2y^2 + 3axy - a$.

Решење: а) $a(1 - xy)^3$ б) $a(xy - 1)^3$ в) $a(xy + 1)^3$

$$a(x^3y^3 - 3x^2y^2 + 3xy - 1) = a(xy - 1)^3$$

2. (9a) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2y}{x}$.

$$\frac{x(x+y)x + y(x-y)x - 2y(x^2-y^2)}{x(x-y)(x+y)} = \frac{x^3 + x^2y + x^2y - xy^2 - 2x^2y + y^3}{x(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{x^3 - xy^2 + y^3}{x(x-y)(x+y)}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%. Добиће се?

Решење: а) 9375 б) 13125 в) 39375

$$15000 \cdot (1 + \frac{250}{100}) \cdot (1 - \frac{75}{100}) = 15000 \cdot 3.15 \cdot 0.25 = 13125$$

4. (30) Углови троугла односе се као 2:3:4. Колики је највећи угао?

$$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4 \Rightarrow \alpha = 2k, \beta = 3k, \gamma = 4k$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 2k + 3k + 4k = 180^\circ \Rightarrow 9k = 180^\circ \Rightarrow k = 20 \Rightarrow \gamma = 4 \cdot 20^\circ = \underline{\underline{80^\circ}}$$

5. (33k) Решити једначину: $(x+2)^2 - (x-3)^2 + (x+4)^2 - (x+1)^2 = 0$.

Решење: а) $x = -5/8$ б) $x = 7/3$ в) $x = 3/4$

$$\cancel{x^2 + 4x + 4} - \cancel{x^2 + 6x + 9} + \cancel{x^2 + 8x + 16} - \cancel{x^2 - 2x - 1} = 0$$

$$16x = -10 \Rightarrow x = -\frac{5}{8}$$

6. (43) У функцији $y = (3k+6)x + k - 7$ одредити параметар k тако да функција буде растућа и да њен график сече негативни део y -осе.

Решење: а) $k > 7$ б) $-2 < k < 7$ в) $k < -2$

$$\begin{aligned} 3k+6 > 0 &\Rightarrow k > -2 \\ k-7 < 0 &\Rightarrow k < 7 \end{aligned} \Rightarrow -2 < k < 7$$

7. (51) Обим једнакокраког троугла је 30 см, а разлика крака и основице је 3 см. Израчунати основицу и крак.

$$\begin{aligned} a + 2b &= 30 \\ b - a &= 3 \Rightarrow a = b - 3 \\ b - 3 + 2b &= 30 \\ 3b &= 33 \\ b &= 11 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

8. (553) Решити неједначину: $(x-3)(x+2) > 0$.

Решење: а) $x \in (-2, 3)$ б) $x \in (-3, 2) \cup (2, \infty)$ в) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$



9. (60г) Израчунати: $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} \cdot \sqrt[12]{a^7b^{11}}$.

Решење: а) $\sqrt[12]{a \cdot b^2}$ б) $a \cdot b \cdot \sqrt[12]{a^2 \cdot b}$ в) $a^2 \cdot b \cdot \sqrt[12]{a \cdot b}$

$$\begin{aligned} \sqrt[12]{(a^2)^4 \cdot (a^5b)^2 \cdot a^7b^{11}} &= \sqrt[12]{a^8a^{10}b^2a^7b^{11}} = \sqrt[12]{a^{25}b^{13}} = \sqrt[12]{a^{24} \cdot a \cdot b^{12} \cdot b} \\ &= a^2b \cdot \sqrt[12]{a \cdot b} \end{aligned}$$

10. (61j) Рационалисати израз: $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$.

Решење: а) $\frac{7(\sqrt{32} + \sqrt{8})}{40}$ б) $\frac{7\sqrt{2}}{12}$ в) $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$

$$\begin{aligned} \sqrt{32} &= \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2} \\ \sqrt{8} &= \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \end{aligned} \quad \frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}} = \frac{7}{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = \frac{7}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6 \cdot 2} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

11. (66б) Израчунати x и y из једначине: $(x+yi)(3+i) = -9+7i$.

Решење: а) $(x, y) = (3, 4)$ б) $(x, y) = (3, 2)$ в) $(x, y) = (-2, 3)$

$$\begin{aligned} 3x + xi + 3yi + yi^2 &= -9 + 7i \\ \Rightarrow (3x - y) + (x + 3y)i &= -9 + 7i \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -9 \\ x + 3y = 7 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 3y \\ 21 - 9y - y = -9 \\ -10y = -30 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

12. (71b) Скратити разломак: $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)} = \frac{x+4}{x}$

$$x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$$

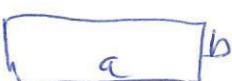
$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

13. (70a) Раставити на линеарне чиниоце: $x^2 - 5x + 4$.

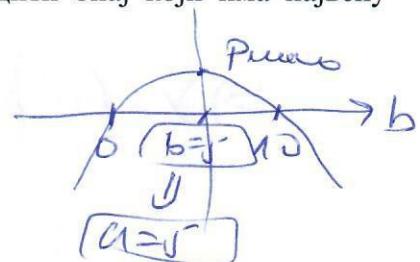
Решење: а) $(x+1)(x-4)$ б) $(x-1)(x-4)$ в) $(x-1)(x+4)$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x_1 = 1, x_2 = 4 \\ x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$$

14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онај који има највећу површину.



$$P = a \cdot b \\ = (10 - b) \cdot b$$



$$0 = 2a + 2b = 20$$

$$\Rightarrow a + b = 10$$

$$\Rightarrow a = 10 - b$$

15. (83g) Израчунати вредност израза: $\frac{\sin^2 \frac{\pi}{6} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}}{3 \cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{4}}$.

Решење: а) $x = 5/7$ б) $x = 1$ в) $x = 3/2$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \\ = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{5}{7}$$

16. (90б) Одредити све углове α , $0 < \alpha < 2\pi$ за које је $\sin \alpha = -\cos \alpha$;

$$\begin{array}{lll} \sin \alpha & \cos \alpha & \angle \text{I} \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \\ \text{---} & \text{---} & \angle \text{III} \Rightarrow \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \end{array}$$

17. (94a) Решити једначину: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{3x+2}{2}}$.

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -4/9$ в) $x = 1/3$

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{(3x+2)/2}{1}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3x+2}{2} \Rightarrow 2 = 9x + 6 \\ \Rightarrow -4 = 9x \Rightarrow x = -\frac{4}{9}$$

18. (95б) Решити следећу једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 1$ б) $x = 4$ в) $x = 0$

$$2^x(2 + 2^2 - 1) = 10 \Rightarrow 2^x \cdot 3 = 10 \Rightarrow 2^x = \frac{10}{3} \\ \Rightarrow x = 1$$

19. (99a) Свести на један логаритам: $\log_a x + 2 \log_a y - \log_a \pi$.

Решење: а) $\log_a(x \cdot 2y/\pi)$ б) $\log_a(x \cdot y^2 \cdot \pi)$ в) $\log_a(x \cdot y^2/\pi)$

$$\log_a x + \log_a y^2 - \log_a \pi = \log_a \frac{x \cdot y^2}{\pi}$$

20. (100г) Решити једначину: $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$.

Решење: а) $x = 10$ б) $x = 4$ в) $x = 6$

$$\begin{aligned}\log x &= \log 4^2 + \log \sqrt[3]{27} - \log \sqrt{64} \\ &= \log \frac{4^2 \cdot \sqrt[3]{27}}{\sqrt{64}} = \log \frac{16 \cdot 3}{8} = \log 6\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2013 (први термин)

1. (1в) Свести сличне чланове следећег полинома:

$$12xy^2 + \underline{14x^2y} - \underline{x^2y^2} + \underline{xy^2} - 15x^2y + \underline{2x^2y^2}$$

$$= 13xy^2 - x^2y + x^2y^2.$$

2. (7б) Израчунати вредност израза: $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

Решење: а) $\frac{32}{45}$ б) $-\frac{7}{5}$ в) $-\frac{23}{12}$

$$\frac{\frac{6^2}{15} \cdot \frac{2}{3}}{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{15} + \frac{4}{9} = \frac{12+20}{45} = \frac{32}{45}$$

3. (11) Колико је поскупела роба ако је цена порасла са 1400 на 1800 динара?

Решење: а) 32,4% б) 28,6% в) 27,4%

$$\frac{1800}{1400} = \frac{9}{7} = 1,286 \Rightarrow (1,286-1) \cdot 100 = 28,6\%$$

4. (24) Један посао три радника обаве за 36 дана. Колико је радника потребно да ураде тај исти посао за 9 дана?

Решење: а) 8 б) 10 в) 12

$$\begin{array}{c} \uparrow 3 \text{ p.} \quad \downarrow 36 \text{ g.}, \quad x : 3 = 36 : 9 \\ \underline{x} \quad \downarrow 9 \text{ g.}, \quad 9x = 3 \cdot 36 \end{array}$$

$$x = 12$$

5. (33д) Решити једначину: $\frac{4x-1}{3} = \frac{4x-8}{6} + 1$. / · 6

Решење: а) $x = -1$ б) $x = 0$ в) $x = 2$

$$8x - 2 = 4x - 8 + 6$$

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

6. (39) У функцијама $y = (a-3)x + (a-2)$ и $y = (2a+1)x - (3a-1)$ одредити параметар a тако да графици буду паралелни.

Решење: а) $a = -4$ б) $a = 0$ в) $a = 2$

$$\begin{aligned} a-3 &= 2a+1 \\ -a &= 4 \Rightarrow a = -4 \end{aligned}$$

7. (45д) Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{6} + \frac{y+5}{3} &= \frac{1}{2} & / \cdot 6 \\ \frac{x+4}{8} + \frac{2y+1}{3} &= -\frac{1}{2} & / \cdot 24 \\ \hline 2x-3+2y+10 &= 3 \\ 3x+12+16y+8 &= -18 \\ \hline 2x+2y &= -4 / \cdot (-3) \\ 3x+16y &= -32 / \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6x-6y &= 12 \\ 6x+32y &= -64 \\ \hline 26y &= -52 \\ \Rightarrow y &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x-4 &= -4 \\ \Rightarrow x &= 0 \\ (x_1, y_1) &= (0, -2) \end{aligned}$$

8. (53ж) Решити неједначину: $\frac{3x-2}{3} < x$

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{3} - \frac{3x}{3} &< 0 \\ \frac{-2}{3} &< 0 \\ x \in \mathbb{R} & \end{aligned}$$

Решење: а) $x > 1$ б) $x < 0$ в) $x \in \mathbb{R}$

9. (56в) Извршити назначене операције и упростити израз: $(a^6 b^8)^3 \left(\frac{ab^{12}}{c^4} \right)^{-3}$

$$a^{18} b^{24} \cdot \frac{a^{-3} b^{-36}}{c^{-12}} = a^{15} b^{-12} c^{12} = \frac{a^{15} c^{12}}{b^{12}}$$

10. (61м) Рационалисати израз: $\frac{18 \cdot \sqrt[3]{3}}{-12 \cdot \sqrt[3]{32}}$.

Решење: а) $-\frac{3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{32}}{2}$ б) $-\frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{32^2}}$ в) $-\frac{3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{32^2}}{64}$
 $-\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{32}} \cdot \frac{\sqrt[3]{32^2}}{\sqrt[3]{32^2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{32^2}}{32} = -\frac{3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{32^2}}{64}$

11. (63б) Извршити назначене операције: $(-4-i)-(6+5i)$

Решење: а) $10-6i$ б) $-10-6i$ в) $2+4i$

$$-4-i-6-5i = -10-6i$$

12. (67г) Решити следећу једначину: $x^2 = 4 - 3x$.

Решење: а) $x = -4, x = 1$ б) $x = 4, x = -1$ в) $x = 4, x = 1$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -4$$

13. (73б) За које вредности x је задовољена неједначина: $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0$.

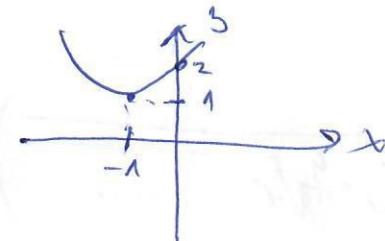
Решење: а) $x \in (2,3)$ б) $x \in (1,2) \cup (3, \infty)$ в) $x \in (-\infty,1) \cup (2,3)$

$$\frac{x-1}{x-3} - \frac{2}{x-3} = \left(\frac{x-1}{x-3}\right)^2 + \frac{3}{x-3} \quad x \in (1,2) \cup (3, \infty)$$

14. (75в) Конструисати график следеће функције и довести је на канонички облик:
 $y = x^2 + 2x + 2$.

$$y = (x+1)^2 + 1$$

$T(-1, 1)$



15. (82а) Израчунати вредност израза: $5 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \cos 0 - 3 \sin \frac{3\pi}{2} + \cos \pi$.

Решење: а) -2 б) 12 в) 11

$$5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + (-1) = 9 + 3 - 1 = 11$$

16. (85а) Одредити вредности остале три тригонометријске функције угла α ако

$$\text{je } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right).$$

$\angle \text{II}$
 $\cos \angle < 0$
 $\tan \angle < 0$
 $\csc \angle < 0$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha &= -\frac{1}{2} \\ \sec \alpha &= \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3} \\ \csc \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

17. (93а) Решити следећу једначину: $9^{-\frac{1}{x}} = 3$.

Решење: а) -1 б) 1 в) -2

$$\begin{aligned} 3^{-\frac{2}{x}} &= 3^1 \Rightarrow -\frac{2}{x} = 1 \\ \Rightarrow x &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 2x+1 = \frac{9}{4}$$

18. (94в) Решити једначину: $100 \cdot 10^{2x-1} = 1000^{\frac{3}{4}}$.

Решење: а) $x = 1/2$ б) $x = 2/5$ в) $x = 5/8$

$$10^2 \cdot 10^{2x-1} = (10^3)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 10^{2x+1} = 10^{\frac{9}{4}}$$

19. (96а) Израчунати: $\log_3 243$

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 5$ в) $x = 10$

$$\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$$

20. (99в) Следећи израз свести на један логаритам:

$$\log_x a + \frac{1}{3} \left(\log_x b + \frac{1}{4} \left(\log_x c + \frac{1}{5} \log_x (d+e) \right) \right).$$

$$\log_x \left(a \cdot \sqrt[3]{b \cdot \sqrt[4]{c \cdot \sqrt[5]{d+e}}} \right)$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ЈУЛ 2013 (други термин)

1. (3б) Одредити $P(x) \cdot Q(x)$ ако је: $P(x) = x^3 - 3x + 2$, $Q(x) = x^4 + x^3 + 4x - 1$

$$(x^3 - 3x + 2) \cdot (x^4 + x^3 + 4x - 1)$$

$$\begin{aligned} & x^7 + x^6 + 4x^4 - x^3 - 3x^5 - 3x^4 - 12x^2 + 3x + 2x^4 + 2x^3 + 8x - 2 \\ &= x^7 + x^6 - 3x^5 + 3x^4 + x^3 - 12x^2 + 11x - 2 \end{aligned}$$

2. (7г) Израчунати вредност израза: $\frac{1}{7} + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right)^{-1}$. $\frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{2+7}{14} = \frac{9}{14}$

Решење: а) 7/9 б) 9/14 в) 1/9

3. (15) Цена робе смањена је за 25%. За колико процената треба снизити нову цену да би цена на крају била дупло јефтинија од почетне цене?

Решење: а) 25% б) 33,3% в) 66,7%

$$X \cdot 0,75 \cdot P = X \cdot 0,5 \Rightarrow P = \frac{0,5}{0,75} = 0,667 \quad 1133,3\%$$

$$(1-0,667) \cdot 100$$

4. (27) Цена једног производа подигнута је за 10%, а затим снижена за 10%. За колико процената се променила цена у односу на првобитну?

Решење: а) порасла за 5% б) опала за 1% в) није се променила

$$X \cdot (1 + \frac{10}{100}) \cdot (1 - \frac{10}{100}) = X \cdot 1,1 \cdot 0,9 = X \cdot 0,99 \Rightarrow \boxed{1\%}$$

5. (33б) Решити једначину: $8 - 4x - \frac{2+3x}{6} = 3 - \frac{10x+5}{3} \cdot 1,6 \quad (1-0,99) \cdot 100$

Решење: а) $x = 3/8$ б) $x = 0$ в) $x = 38/7$

$$48 - 24x - 2 - 3x = 18 - 20x - 10$$

$$46 - 27x = 8 - 20x$$

$$38 = 7x \Rightarrow x = 38/7$$

6. (40в) У функцији $y = (2m-3)x + m - 1$ одредити параметар m тако да график функције са x -осом гради туп угао

Решење: а) $m > 2/3$ б) $m < 3/2$ в) $m > 1/3$

$$2m-3 < 0$$

$$2m < 3 \Rightarrow m < 3/2$$

$$\frac{2}{7}x + \frac{5}{6}y = 35 \quad | \cdot 42$$

$$\Rightarrow 12x + 35y = 35 \cdot 42 \quad | \cdot 2$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{7}{12}y = 3,5 \quad | \cdot 60$$

$$\underline{36x - 35y = 35 \cdot 6} \quad | \cdot 2$$

7. (45к) Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x - \frac{7}{12}y &= 3,5 \quad | \cdot 60 \\ 36x - 35y &= 35 \cdot 6 \end{aligned}$$

Решење: а) $(x, y) = (30, 35)$ б) $(x, y) = (7, 6)$ в) $(x, y) = (35, 30)$

$$(x, y) = (30, 35)$$

$$48x = 35 \cdot 48$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 35}$$

$$\boxed{y = 30}$$

8. (54в) Решити систем неједначина:

$$(x-1)(2x+3) \leq (2x-5)(x+4)$$

$$(4x+2)(x-1) > (2x-5)(2x+1)$$

Решење: а) $x > -1/2$ б) $x \geq 17/2$ в) $x < 1/2$

$$\begin{array}{ccc} \cancel{x > -1/2} & \cancel{x < 1/2} & x \geq \frac{17}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 3 &\leq 2x^2 + 3x - 20 \\ 4x^2 - 2x - 2 &> 4x^2 - 8x - 5 \\ -2x &\leq -17 \Rightarrow x \geq \frac{17}{2} \\ 6x &> 7 \Rightarrow x > \frac{7}{6} \end{aligned}$$

9. (58г) Израчунати: $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-7}}{2^{-24}}$

$$\frac{2^{-4} \cdot 2^{-7}}{2^{-24}} = \frac{1}{2^{-24+21}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Решење: а) $1/4$ б) 16 в) $1/2$

10. (61в) Рационалисати израз: $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{2}+2\cdot 2+2\sqrt{6}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{2\sqrt{2}+4+2\sqrt{6}}{1+2\sqrt{2}+2-3} = \frac{2\sqrt{2}+4+2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 2} = \frac{4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{4} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

11. (63j) Извршити назначене операције: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

Решење: а) -1 б) i в) $-i$

$$= \frac{-2i}{2i} = -1$$

$$(1-i)^2 = 1-2i+i^2$$

$$= 1-2i-1 = -2i$$

$$(1+i)^2 = 2i$$

12. (67ж) Решити следећу једначину: $x(2-3x) = x^2 + 7x - 4$

$$2x - 3x^2 \neq x^2 + 7x - 4$$

$$0 = 4x^2 + 5x - 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+64}}{8}$$

13. (72б) Решити квадратну неједначину: $x^2 - 4x + 5 < 0$.

Решење: а) $x \in (1,4)$ б) $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ в) $x = \{\}$

$$8x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1 > 0$$

$$\Rightarrow x \notin \emptyset$$

14. (77) За које вредности параметра m функција $y = (m^2 - 1)x^2 + 2(m-1)x + 2$ је позитивна за свако x ?

$$\begin{aligned} I. m^2 - 1 > 0 \\ II. (2(m-1))^2 - 4 \cdot (m^2 - 1) \cdot 2 < 0 \\ 2m^2 - 4m + 2 - 8m^2 + 8 < 0 \\ -6m^2 + 4m + 10 < 0 \quad /:(-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3m^2 - 2m - 5 > 0 \\ 3m^2 + 3m - 5m - 5 > 0 \\ 3m(m+1) - 5(m+1) > 0 \\ (m+1)(3m-5) > 0 \\ \begin{array}{c} + \\ -1 \\ \hline -1 \quad + \end{array} \end{aligned}$$

15. (82б) Израчунати вредност израза: $2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$. $m \in (m_1, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$$\begin{aligned} & -2 \sin\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \\ & = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{2} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-4\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

16. (86г) Доказати идентитет: $\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$.

$$\frac{1-\sin\alpha + 1+\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$$

17. (93д) Решити следећу једначину: $a^{x-9} = \frac{1}{a^{x-9}}$.

Решење: а) $x = 9$ б) $x = 18$ в) $x = 0$

$$a^{x-9} = a^{-x+9} \Rightarrow x-9 = -x+9$$

$$2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

18. (94д) Решити једначину: $3 \cdot \sqrt[3]{81} - 10 \cdot \sqrt[3]{9} + 3 = 0$.

$$\sqrt[3]{9} > 6 > 0$$

Решење: а) $x = -3, x = 2$ б) $x = 3, x = -1$ в) $x = 2, x \neq 2$

$$\sqrt[3]{81} = t^2$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$3t^2 - 9t - t + 3 = 0 \Rightarrow 3t(t-3) - (t-3) = 0$$

$$(t-3)(3t-1) = 0$$

$$t = 3 \quad , \quad t = \frac{1}{3}$$

19. (97а) Израчунати: $\log_{1/3} \sqrt[3]{27}$

$$\sqrt[3]{9} = 3$$

$$\sqrt[3]{9} = \frac{1}{3}$$

$$3^{\frac{2}{3}}x = 3^{-1}$$

Решење: а) 9 б) $-3/7$ в) $1/2$

$$-\log_3 27^{\frac{1}{7}} = -\frac{1}{7} \log_3 3^3 = -\frac{3}{7}$$

$$\boxed{x=2}$$

20. (100а) Решити једначину: $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = 0$.

$$\cancel{x=2}$$

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 5$ в) $x = -1$

$$\begin{aligned} \log x + \log(x-1) &= \log 2 \quad \rightarrow x > 1 \\ \log(x-1)x &= \log e \\ x > 0 \quad x^2 - x - 2 &= 0 \\ x &\neq -1, \quad \boxed{x=2} \end{aligned}$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, СЕПТЕМБАР 2013

1. (4a) Одредити $P(x):Q(x)$ ако је: $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$, $Q(x) = x + 2$.

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - x + 10 &= \underline{x^3 + 2x^2} - \underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x + 10} \\&= x^2(x+2) - 3x(x+2) + 5(x+2) \\&= (x+2)(\underline{x^2 - 3x + 5})\end{aligned}$$

2. (9e) Извршити назначене операције са разломцима: $\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{b}\right) \cdot \frac{27}{4b^2 - 9a^2} : \frac{1}{2b + 3a}$.

Решење: а) $27ab^2$ б) $27/ab$ в) $2b - 3a$

$$\begin{aligned}\frac{2b - 3a}{a \cdot b} \cdot \frac{27}{(2b - 3a)(2b + 3a)} \\= \frac{27}{a \cdot b}\end{aligned}$$

3. (17) На пролећном снижењу цена књига снижена је три пута: прво за 20%, затим још за 20%, па још једном за 20% (сваки пут од тренутне цене). Колико је укупно снижење цене књига (изражено у процентима)?

Решење: а) 51,2% б) 60% в) 48,8%

$$X \cdot 0,80 \cdot 0,80 \cdot 0,80 = X \cdot 0,512 \quad (1 - 0,512) \cdot 100 \\= 48,8\%$$

4. (29) Имамо два раствора киселина. Један је од 36%, а други од 96%. По колико литара треба да се узме од сваког раствора да се добије 120 литара новог раствора од 80%.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{r} 36\% \\ 96\% \end{array} \xrightarrow{\text{80\%}} \begin{array}{r} 96 - 80 = 16 \cdot 2 = 32\% \\ 80 - 36 = 44 \cdot 2 = 88\% \\ \hline 60 \cdot 2 = 120\% \end{array} \end{array}$$

5. (33б) Решити једначину: $3,2x - 6,5 = 4,9x - 12,4$.

Решење: а) $x = 59/17$ б) $x = 20/13$ в) $x = 7/5$

$$\begin{aligned}-1,7x &= -5,9 \\x &= \frac{59}{17}\end{aligned}$$

6. (42) У функцији $y = (4k - 1)x - k + 3$ одредити параметар k тако да функција буде опадајућа и да њен график сече позитиван део y -осе.

Решение: а) $k > 3$ б) $k < 1/4$ в) $k < 2/3$

$$3 - k \Rightarrow 0 \Rightarrow k < 3 \Rightarrow k < \frac{1}{3}$$

7. (48) Збир два броја је 108, а њихов количник је 5:7. Који су то бројеви?

$$a+b=108$$

$$a:b = 5:7 \Rightarrow \begin{matrix} a=5k \\ b=7k \end{matrix} \Rightarrow 5k+7k=108$$

$$\Rightarrow \underline{12k = 108}$$

$$\Rightarrow \boxed{k=9} =$$

— 1 —

$$q = 4_3^-$$

8. (556) Решити неїдначину: $\frac{3x+5}{x} > 0$.

Решение: а) $x \in (-5/3, 0)$ б) $x \in (-\infty, -5/3) \cup (0, \infty)$ в) $x \in (-5/3, \infty)$

$$\frac{-r - \sqrt{3}}{6\sqrt{5}} = \frac{0}{\oplus} + \frac{t\omega}{\oplus} \quad x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, t\omega)$$

9. (60в) Израчунати: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[8]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$.

Решење: а) $x \cdot \sqrt[12]{x^7}$ б) $\sqrt[24]{x^{13}}$ в) $x^2 \cdot \sqrt[6]{x^5}$

$$\sqrt[24]{x^{12} \cdot x^6 \cdot x^{20}} = \sqrt[24]{x^{38}} = x \cdot \sqrt[24]{x^{13}} = x \cdot \sqrt[12]{x^7}$$

- 10. (61a)** Рационалисати израз: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

Решење: а) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

$$6) \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{3}$$

$$\text{B) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{5-2} = \frac{\cancel{\sqrt{15}}}{\cancel{3}} \frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{3}$$

11. (65г) Израчунати вредност израза: $\frac{z \cdot \bar{z}}{2i + z^2}$ где је $z = 3i$.

$$\bar{z} = -3i$$

$$z \cdot \bar{z} = 3^2 + (-3)^2 = -9 + 9 = 9$$

$$2i + 9i^2 = 2i - 9$$

$$\begin{aligned} \frac{g}{z_i - g} &= \frac{-2i - g}{-2i - g} \\ &= \frac{-18i - 81}{4 + 81} \\ &= \frac{-81 - 18i}{85} \end{aligned}$$

12. (69h) Саставити квадратну једначину чија су решења: $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = 0$.

Решење: а) $x^2 + 5x = 0$ б) $6x^2 + 5x = 0$ в) $6x^2 - 5x = 0$

$$O = (x - \frac{5}{6})(x - 0) \Rightarrow x^2 - \frac{5}{6}x = 0 / \cdot 6 \Rightarrow 6x^2 - 5x = 0$$

13. (72d) Решити квадратну неједначину: $x^2 + 6x + 7 > 0$.

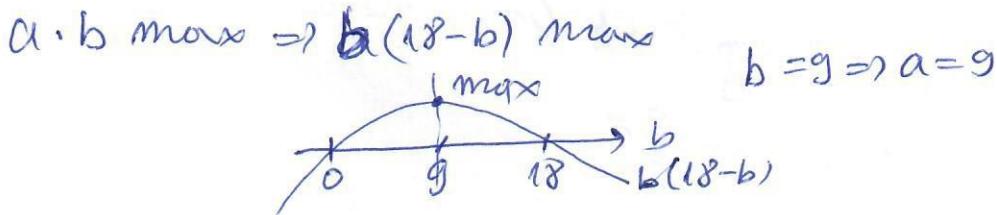
$$x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2}) \cup (-3 + \sqrt{2}, \infty)$$

Решење: а) $x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2}) \cup (-3 + \sqrt{2}, \infty)$ б) $x \in (-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2})$ в) $x \in \{\}$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 7 &= (x+3)^2 - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (x+3)^2 = 2 \Rightarrow x+3 = \pm\sqrt{2} \\ &\quad x = -3 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

14. (81) Број 18 раставити на два сабирка тако да њихов производ буде што већи.

$$a+b \geq 18 \Rightarrow a=18-b$$



$$b=g \Rightarrow a=9$$

15. (83b) Израчунати вредност израза. $3\sin^2 \frac{\pi}{2} - 4\tan^2 \frac{\pi}{4} - 3\cos^2 \frac{\pi}{6} + 3\cot^2 \frac{\pi}{2}$

Решење: а) $-25/4$ б) $-13/4$ в) $11/4$

$$3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \cdot 0 = -1 - \frac{9}{4} = -\frac{13}{4}$$

16. (89a) Одредити сва решења једначине: $\sin \alpha = -1$.

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

17. (93h) Решити следећу једначину: $\sqrt[4]{5^{6-x}} = \sqrt[3]{5^{x+2}}$.

Решење: а) $x = 10/7$ б) $x = 2$ в) $x = 3/5$

$$5^{\frac{6-x}{4}} = 5^{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow 18 - 3x = 4x + 8$$

$$\Rightarrow 10 = 7x \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

18. (95a) Решити следећу једначину: $21 \cdot 3^x - 5^{x+2} = 9 \cdot 3^{x+2} - 5^{x+3}$

Решење: а) $x = 2$ б) $x = 0$ в) $x = -1$

$$\begin{aligned} 21 \cdot 3^x - 81 \cdot 3^x &= -125 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x \\ -60 \cdot 3^x &= -100 \cdot 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{10}{6}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$x = -1$$

19. (97Б) Израчунати: $\log_2 8 \cdot \log_3 81 \cdot \log_2 \frac{1}{16} \cdot \log_3 \frac{1}{27}$.

Решење: а) 1

б) 144

в) 12

$$\log_2 2^3 \cdot \log_3 3^4 \cdot \log_2 2^{-3} \cdot \log_3 3^{-3} = 3 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-3) = 144$$

20. (100б) Решити једначину: $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Решење: а) $x = 2$

б) $x = 4$

в) $x = 16$

$$\log_2 x + \log_2 x + \log_2 x = 7$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7 \quad | \cdot 4$$

$$\log_2 x + 2 \log_2 x + 4 \log_2 x = 28$$

$$\log_2 x = \frac{28}{7}$$

$$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$$

Смер:

Име и презиме:



Пријавни број:

**ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ, ОКТОБАР 2013**

1. (6e) Раставити на чиниоце следећи полином: $ax^3y^3 - 3ax^2y^2 + 3axy - a$.

Решење: а) $a(1 - xy)^3$ б) $a(xy - 1)^3$ в) $a(xy + 1)^3$

$$a(x^3y^3 - 3x^2y^2 + 3xy - 1) = a(xy - 1)^3$$

2. (9a) Извршити назначене операције са разломцима: $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2y}{x}$.

$$\frac{x \cdot x(x+y) + y \cdot x(x-y) - 2y(x^2 - y^2)}{x(x-y)(x+y)} = \frac{x^3 + x^2y + xy^2 - xy^2 - 2x^2y + 2y^3}{x(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{x^3 - x^2y + 2y^3}{x(x-y)(x+y)}$$

3. (20) Повећати 15000 за 250%, а затим смањити за 75%. Добиће се?

Решење: а) 9375 б) 13125 в) 39375

$$15000 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) \left(1 - \frac{75}{100}\right) = 13125$$

4. (30) Углови троугла односе се као 2:3:4. Колики је највећи угао?

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= 2 : 3 : 4 & \alpha &= 2 \cdot \frac{180^\circ}{9} = 40^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ & \beta &= 3 \cdot \frac{180^\circ}{9} = 60^\circ \\ 2 + 3 + 4 &= 9 & \gamma &= 4 \cdot \frac{180^\circ}{9} = 80^\circ \end{aligned}$$

5. (33k) Решити једначину: $(x+2)^2 - (x-3)^2 + (x+4)^2 - (x+1)^2 = 0$.

Решење: а) $x = -5/8$ б) $x = 7/3$ в) $x = 3/4$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 - x^2 + 6x - 9 + x^2 + 8x + 16 - x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ 16x - 10 &= 0 \Rightarrow x = -5/8 \end{aligned}$$

6. (43) У функцији $y = (3k+6)x + k - 7$ одредити параметар k тако да функција буде растућа и да њен график сече негативни део y -осе.

Решење: а) $k > 7$ б) $-2 < k < 7$ в) $k < -2$

$$\begin{array}{l} 3k+6 > 0 \\ k-7 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} k > -2 \\ k < 7 \end{array} \Rightarrow -2 < k < 7$$

7. (51) Обим једнакокраког троугла је 30 см, а разлика крака и основице је 3 см. Израчунати основицу и крак.

$$\begin{aligned} 2b+a &= 30 \\ b-a &= 3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2b+a=30 \\ b-a=3 \end{array} \right. \quad \begin{aligned} 2b+a &= 30 \\ 3b &= 33 \Rightarrow b=11 \\ 22+a &= 30 \Rightarrow a=8 \end{aligned}$$

8. (553) Решити неједначину: $(x-3)(x+2) > 0$.

Решење: а) $x \in (-2, 3)$ б) $x \in (-3, 2) \cup (2, \infty)$ в) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

$$\text{Number line: } \begin{array}{ccccccc} -2 & & 3 & & \end{array} \quad x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

9. (60г) Израчунати: $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} \cdot \sqrt[12]{a^7b^{11}}$.

Решење: а) $\sqrt[12]{a \cdot b^2}$ б) $a \cdot b \cdot \sqrt[12]{a^2 \cdot b}$ в) $a^2 \cdot b \cdot \sqrt[12]{a \cdot b}$

$$\sqrt[12]{a^8 \cdot a^{10} \cdot b^2 \cdot a^7 \cdot b^{11}} = \sqrt[12]{a^{25} \cdot b^{13}} = a^{\frac{25}{12}} b^{\frac{13}{12}} \sqrt[12]{a \cdot b}$$

10. (61j) Рационалисати израз: $\frac{7}{\sqrt{32} + \sqrt{8}}$.

$$\text{Решење: а) } \frac{7(\sqrt{32} + \sqrt{8})}{\sqrt{48} + \sqrt{8}} = \frac{7}{\sqrt{48} + \sqrt{8}} = \frac{7}{3\sqrt{8}} = \frac{7}{3 \cdot 2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

11. (66б) Израчунати x и y из једначине: $(x+yi)(3+i) = -9+7i$.

Решење: а) $(x, y) = (3, 4)$ б) $(x, y) = (3, 2)$ в) $(x, y) = (-2, 3)$

$$3x + xi + 3yi + yi^2 = -9 + 7i \quad (x, y) = (-2, 3)$$

$$(3x-y) + (x+3y)i = -9 + 7i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3x - y &= -9 & 21 - 9y - y &= -9 \\ \underline{x + 3y = 7} &\Rightarrow x = 7 - 3y & \Rightarrow -10y &= -30 \Rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

12. (71b) Скратити разломак: $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x}$.

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x} = \frac{(x+4)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+4}{x}$$

13. (70a) Раставити на линеарне чиниоце: $x^2 - 5x + 4$.

Решење: а) $(x+1)(x-4)$ б) $(x-1)(x-4)$ в) $(x-1)(x+4)$

$$x^2 - 5x + 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = 1$$

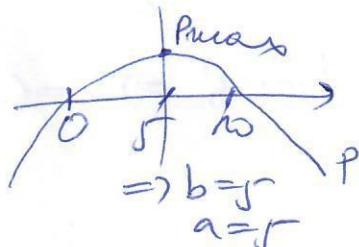
$$x^2 - 5x + 4$$

$$= (x-1)(x-4)$$

14. (80) Од свих правоугаоника обима 20 см одредити онај који има највећу површину.

$$P = a \cdot b \Rightarrow P = (10-b) \cdot b$$

$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \\ \Rightarrow a = 10 - b$$



15. (83г) Израчунати вредност израза: $\frac{\sin^2 \frac{\pi}{6} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}}{3 \cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{5}{7}$$

Решење: а) $x = 5/7$ б) $x = 1$ в) $x = 3/2$

$$\alpha \in \mathbb{I} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ \alpha \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

17. (94a) Решити једначину: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{3x+2}{2}}$.

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3x+2}{2}}$$

Решење: а) $x = 0$ б) $x = -4/9$ в) $x = 1/3$

$$\Rightarrow 2 = 9x + 6$$

$$\Rightarrow -4 = 9x \Rightarrow x = -\frac{4}{9}$$

18. (95б) Решити следећу једначину: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x = 10$.

Решење: а) $x = 1$ б) $x = 4$ в) $x = 0$

$$2^x(2+4-1) = 10 \Rightarrow 2^x \cdot 5 = 10 \Rightarrow 2^x = 2 \\ \Rightarrow x = 1$$

19. (99a) Свести на један логаритам: $\log_a x + 2 \log_a y - \log_a \pi$.

Решење: а) $\log_a(x \cdot 2y/\pi)$ б) $\log_a(x \cdot y^2 \cdot \pi)$ в) $\log_a(x \cdot y^2/\pi)$

$$\log_a x + \log_a y^2 - \log_a \pi = \log_a \frac{x \cdot y^2}{\pi}$$

20. (100g) Решити једначину: $\log x = 2 \log 4 + \frac{1}{3} \log 27 - \frac{1}{2} \log 64$.

Решење: а) $x = 10$ б) $x = 4$ в) $x = 6$

$$\log x = \log \frac{4^2 \cdot \sqrt[3]{27}}{\sqrt{64}}$$

$$= \log \frac{16 \cdot 3}{8}$$

$$= \log 6 \Rightarrow x = 6$$